第 3 回

可換環セミナー報告集

昭和56年度科学研究費総合A
（課題番号534002，代表中井喜和）

1981年11月 4 日～ 7 日

於　関西地区大学セミナーハウス

序

この報告集は1981年11月4日より11月7日まで，関西地区大学セミナーハウスで行なわれた可換環論シンポジュームの講演記録であります。

この会も今回で3回目をむかえ，始めの小規模なものから，かなりの大世帯となりました。出席≒発表者という考えも，もはや物理的には不可能となりましたが，それでも各自の一年間の研究活動の発表の場として，又討論の場として，今後も続けて行きたいと思っております。

今年もB28のロビーでは夜遅くまで熱心な討論がもたれ，特にコンパの日には，永田先生始め，中井先生，松村先生の昔日の想い出と共に，今後を荷う人々のために，貴重なお話しがうかがえました事は本当に素晴らしいことでありました。

この会を開くに当って，その経費は昭和56年度科学研究費によってまかなわれました。ここに改めて厚くお礼を申し述べます。

K．Y．生

目　　次

Integrable derivations について

広大学校教育　石橋康徳

§1. A を k-algebra, B を A-algebra, C を B-algebra とする。このとき、k-derivation $D: A \longrightarrow C$ が integrable であるとは、A から C への長さ ∞ の k-higher derivation $\Delta = \{\delta_0, \delta_1, \cdots\}$ で $D = \delta_1$ を満たすものが存在するときをいう。A-algebra B を多項式環の商として、$B = A[(z_j)_{j\in J}] = A[(Z_j)_{j\in J}]/(h_i)_{i\in I}$ と表す。ここに、z_j は Z_j の剰余類を表す。$\mathbb{J} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial Z_j}\right)^{i\in I}_{j\in J}$ を A-algebra B の relations の Jacobian matrix とする。

定理1. $\mathbb{J}$ が B 上 row-finite right inverse をもつとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $A \to C$ なる integrable derivation はすべて $B \to C$ なる integrable derivation に延長できる。

(2) $B \to C$ なる A-derivation はすべて integrable である。

証明は[3]を参照されたい。また，[1]の主定理は定理1，(2)の系として，容易に導かれる。詳しくは[3]を参照されたい。

§2. integrable derivation の概念を用いて，Hopf algebra が reduced になるための条件を与えることができる。

定理2. Aを体 k 上の有限生成 Hopf algebra とする。(k の標数は任意) このとき，A上の k-derivation がすべて integrable ならば，A は reduced である。逆に，A が reduced で k が完全体ならば，A上の k-derivation はすべて integrable である。

標数0の体を含む環上の derivation はすべて integrable だから，定理2の系としてよく知られた次の Cartier の定理を得る。

系 (Cartier). 標数0の体上の Hopf algebra

は reduced である。

定理2の証明であるが，後半は [1], Theorem 1 より明らか。前半は I を A の augmentation ideal，$x_1, \cdots, x_s$ ($\in I$) をその剰余類が k 上のベクトル空間 I/I^2 の基底になるものとする。このとき，次が成り立つ。

単項式 $x_1^{m_1} \cdots x_s^{m_s}$ ($\sum_i m_i = n$) が I^{n+1} を法として，k 上1次独立ならば A は reduced である。([5] (11.4) Lemma)

したがって，定理2の前半の仮定の下に単項式 $x_1^{m_1} \cdots x_s^{m_s}$ ($\sum_i m_i = n$) が I^{n+1} を法として k 上1次独立であることを証明すればよい。これは次の2つの補題によってできる。

補題1 ([5] (11.3) Theorem)。A を体 k 上の Hopf algebra とし，I を A の augmentation ideal とする。写像 $\pi : A \to I/I^2$ は，$\pi(k.1) = 0$ を満たし，$\pi|I : I \longrightarrow I/I^2$ が canonical homomorphism であるものとする。このとき，

$\Omega_{A/k} \cong A \otimes_k I/I^2$ となる。ここに、universal derivation d は $d(a) = \sum a_i \otimes \pi(b_i)$ $(\Delta(a) = \sum a_i \otimes b_i)$ で与えられる。Δ は A の comultiplication を表す。

補題2（[2] Theorem 1）。Aを環，MをAのイデアルとし，AはM進位相に関して，完備ハウスドルフ空間であるとする。$D_1, \cdots, D_s$ はAの integrable derivations，$x_1, \cdots, x_s$ はMの元で，行列$(D_i x_j)$ は可逆とする。このとき，$A = B[[x_1, \cdots, x_s]]$（部分環$B$上の巾級数環）である。

参考文献

[1] W. C. Brown, On the imbedding of derivations of finite rank into derivations of infinite rank, Osaka J. Math. 15 (1978)

[2] Y. Ishibashi, A note on a lemma of Zariski, Bull. Fukuoka Univ. Ed. III 27 (1978)

[3] Y. Ishibashi, A Jacobian criterion for extension and embedding of higher derivations,

to appear.

[4] S. S. Wang, A Jacobian criterion for separability, J. Alg. 65 (1980)

[5] W. C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Springer.

/

2変数多項式環上の多項式環

阪大．理　吉田憲一

私の話しの前に，山内君が，いわゆるJacobian problem とよばれる問題についての話しがありました。私も数年前に，この問題を考えた事がありましたが，もちろんというかうまくはゆかなかったのです。しかしその事で得た結果を富山大学発行の紀要に発表させてもらいました。

Jacobian problem は山内君が述べられるとおもいますので，ここでは省略しますが，この予想の一面として，次が考えられると私は思います。

A^n（ユークリッド n 次曲面）は位相幾何的には，連結である。これは解析的接続の事を想い出すこともでもなく，局所的に定義されたこと，又は局所的に成り立つ事が，全体にまで延長させる事が出来る。これは A^n には穴が

閉いていないという事であろう。そこで、Jacobian が non-zero constant であるから、局所的に同型、だから全体でも同型であって良いと考える。この考えで行けば、多項式環についても同様の事が言えても良いとおもったわけです。環の拡大は integral な拡大と、幾何的には blowing-up と呼ばれるものから成ると考えれば、この blowing-up に対応する環の拡大の一端でもつかみたいとおもい、次の結果を得ました。

ここで k は標数 0 の代数的閉体の意味として（永田先生、これでいいですか？），$A = k[x, y]$；2変数多項式環，とする。このとき，$\lambda, \mu \in k$ に対して

$$A_{\lambda,\mu} := k[x, y, \frac{y-\mu}{x-\lambda}] = k[x, \frac{y-\mu}{x-\lambda}]$$

と定義すれば，$A_{\lambda,\mu}$ は A 上の多項式環で，A の大域的な blowing-up とでも言うべき代物である。この $A_{\lambda,\mu}$ を (λ, μ) を中心とする

E-transform と言う事にしましょう。

　BをA上の$k(x,y)$に入る環で，Bも又k上の多項式環とする。AとBは双有理なので，BはAのblowing-upの有限回のくりかえしで得られるが（Spec A, Spec BをProjective spaceにしてといういみで），そこでBはAから始めて，有限回のE-transformationsで得られるだろうか？残念ながら，この事は未解決となったが，一部分として次のいくつかの結果を証明し得た。

　そのための補題から述べよう。

　補題　BがA上単純拡大であれば，$B = A[\frac{f}{g}]$として，x, yを適当にとりかえれば，$g = g(x) \in k[x]$。

　そこで　$B = A[\frac{f}{g}]$　のときは，つねに$g = g(x) \in k[x]$と仮定してよい。

命題1　$B = A[\frac{f}{g}]$ で B が k 上の2変数多項式環であれば、B は A から始めて、中心が $g(x)=0$ (infinitesimal の意味で) 上にある、$\deg_x g(x)$ 回の E-transformations で得られる。

この様に B が A 上の単純拡大であれば、B は大域的な blowing-up で得られる。では一般的にはどうか？　これも一部分ではありますが次が成り立ちます。

命題2　$B = k[\alpha, \beta]$、$\alpha = \frac{f}{g}$, $\beta = \frac{j}{h}$ とする。今 $(g, f, h, j)A = A$ であれば、B は A 上の単純生成、従って命題1の結果が成り立つ。

最後にこれの応用として、Russell 等が論じていた問題、$A[\frac{k}{a}]$ が2変数多項式環であれば、いつ A も2変数多項式環になるかという問題についての、1つの答を得ました。

定理 A は integrally closed k-affine domain, a, b は A の元で relatively prime なる元とする。$R = A[\frac{b}{a}]$ が2変数多項式環であるとき、A が 2変数多項式環であるための、必要十分条件は、A が regular かつ、$\forall \mathfrak{p} \in Ht_1(A)$ に対して $\mathfrak{p}R \neq R$ が成り立つ事である。

参考文献

1. S. S. Abhyankar and T. T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math., 276 (1975)
2. M. Miyanishi and Y. Nakai, Some remarks on strongly invariant rings, Osaka J. Math., 12 (1975)
3. P. Russell, Simple birational extensions of two dimensional affine rational domains, Compositio Math., 33 (1976)
4. K. Yoshida, Polynomial rings which are simple birational extensions over $k[x, y]$, Math. Rep. Toyama Univ., vol 4 (1981)

Derivation の extension

山内紀夫(聖徳学園女子短大)

k が体, $ch(k)=0$ で, A, B はともに k を含む noetherian domain とする. B が A の integral (又は finite) extension であるときそれらの derivation の関係を Jacobian を中心に考える. 以下に述べるのは S. S-S. Wang の結果 (cf. [3]) とその variation についてである.

さて Wang の結果は次の様に A, B が polynomial ring の場合である:

定理 1 (Wang). $A=k[X_1,\cdots,X_n]\subset B=k[Y_1,\cdots,Y_n]$ (integral extension は仮定しない) で $\det(\partial X_i/\partial Y_j)\in k\setminus\{0\}$ であれば A の任意の derivation は B の derivation に延長できる. さらに B が A の integral extension であれば, A = B.

この結果(と証明)は polynomial ring でない場合にも成立することがある．とくに後半に注目すると次の事実が同様の方法で証明できる．

(I) さらに k は代数的閉体であるとする $A = k[x_1, \dots, x_n]$ (polynomial ring), B は A 上 integral である noetherian domain とする．このとき

$\exists D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}_k(B)$, $\det(D_i x_j)$ が B の unit $\Rightarrow A = B$.

(II) 同じく k は代数的閉体で valuation が定義されているとする．$A = k\langle\langle x_1, \dots, x_n \rangle\rangle$ (convergent power series ring), B は A の finite extension である domain とする．このときも

$\exists D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Der}_k(B)$, $\det(D_i x_j)$ が B の unit $\Rightarrow A = B$.

定理 1 及 (I), (II) の証明には次の二つの定理が重要である

<u>定理 2</u> (Nagata-Zariski-Lipman)

R が標数 0 の体を含む noetherian ring であるとする．$x_1, \dots, x_r \in R$ と $d_1, \dots, d_r \in \mathrm{Der}(R)$ で次の

(1), (2) を充たすものが存在すると仮定する.

(1) $\det(d_i x_j)$ は R の unit,

(2) $I = (x_1, \cdots, x_r)R \neq R$ で R は I-adic topology について complete.

このとき R の subring R_0 が存在して

$$R = R_0[[x_1, \cdots, x_r]]$$

<u>定理 3</u> (Vasconcelos) R, S が integral domain, S は R の integral extension とする. $D \in \mathrm{Der}(S)$, $D|_R \in \mathrm{Der}(R)$ であって D が R で locally finite (i.e $\forall r \in R$, $\exists n$, $D^n(r) = 0$) なら S でも locally finite.

〔定理 1 の証明の概略〕 前半は容易にわかる. 後半: B の $(\underline{X})$-adic completion を $\hat{B}$ とおく. 定理 2 より $\hat{B} = k[[X_1, \cdots, X_n]]$ であることがまずわかる. 従って B の元を $X_1, \cdots, X_n$ の formal power series に表したときそれが実は polynomial であることを示せばよい. それには定理 3 を $\partial/\partial X_1, \cdots, \partial/\partial X_n$ に対して適用すればよい.

(4)

(I) の証明は定理1とほとんど同じである．ただし $(B,(\underline{X}))^\wedge$ に定理2を使うときに k が代数的閉体であることが必要になる．($k \neq \bar{k}$ なら簡単に反例がつくれる)

(II) もまず $(B,(\underline{X}))^\wedge$ に定理2を適用し後は B が convergent power series ring の homomorphic image に表わされることに注意すればよい．

次の問題として Jacobian matrix の小行列式で生成された ideal を調べることが Zariski-Lipman 予想などと関連して重要であると思う．残念ながら今のところ私はめぼしい結果は殆ど得ていないのだが．

[注] Wang [3] では定理1を k が体でなくもう少し一般の ring の場合に証明している．方法は同じである．

References

[1] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math <u>87</u> ('65) 874 - 898

[2] W. V. Vasconcelos, Derivations of commutative noetherian rings, Math. Z. <u>112</u> ('69) 229-233

[3] S. S.-S. Wang. Extension of derivations, J. of Alg. <u>69</u> ('81) 240 - 246.

/

$\mathbb{P}$-rings および $\mathbb{P}$-2 rings の体の拡大について.

名大理　谷 本 洋

A. Brezuleanu, N. Radu の論文 [1] に次の結果がのっている。

[1] Corollary 4.3　　k を体, $\underline{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$ を k 上 n 変数とし, l が k 上 separably algebraic な体の拡大のとき, $k[[\underline{X}]][l]$ は, excellent ring である。

さらに, (R, m) を体 k を含む noetherian local ring, l が k 上 separably algebraic な体の拡大であるとき, $R\otimes_k l$ は noetherian であるから, $R\otimes_k l$ は excellent になる。

さて, R を体 k を含む excellent ring, l が k 上 separable な拡大であるとき, $R\otimes_k l$ が noetherian であれば, excellent か, というのは, 成り立つべき予想と思う。そこで, このことについて得たことを, 以下, 述べる。

まず, P. Valabrega の論文 [3] に従い, noetherian ring に対して意味を持ち, しかも次の4つの axioms を満たす性質 $\mathbb{P}$ を考える:

1. A : regular $\Longrightarrow$ A : $\mathbb{P}$
2. $\mathbb{P}$ は local な性質

3. A : complete local ring $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}} : \mathbb{P}\}$: open

4. $(A, m) \longrightarrow (B, n)$ が faithfully flat な local hom. のとき,

(i) $B : \mathbb{P} \Rightarrow A : \mathbb{P}$　　(ii) $A,\ B/mB : \mathbb{P} \Rightarrow B : \mathbb{P}$

noetherian ring A に対し, A の任意の local ring の任意の formal fibre が geometrically $\mathbb{P}$ のとき, A を $\mathbb{P}$-ring, A の任意の finite type な algebra B に対し, $\mathbb{P}(B)$: open のとき, A を $\mathbb{P}$-2 ring という。また, 性質 $\mathbb{P}$ が次の条件をみたしているとき, $\mathbb{P}$ は NC (Nagata's criterion) をみたすという:

noetherian ring A に対し, $\forall \mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A)$ について, $\mathbb{P}(A/\mathfrak{p})$: open

$\Rightarrow \mathbb{P}(A)$: open

以下, A を体 k を含む noetherian ring, 体 ℓ を k の拡大体とする。さらに, $A\otimes_k \ell$ の適当な積閉集合 S に対し, $S^{-1}(A\otimes_k \ell)$ が noetherian であるとする。このとき, 次が得られる:

Proposition 1.　ℓ が k 上 separably generated であるとき,

(i) $A : \mathbb{P}$-ring $\Rightarrow S^{-1}(A\otimes_k \ell) : \mathbb{P}$-ring

(ii) $A : \mathbb{P}$-2 ring, $\mathbb{P}$ が NC をみたす $\Rightarrow S^{-1}(A\otimes_k \ell) : \mathbb{P}$-2 ring

$\mathbb{P}$-ring について, $\mathbb{P}$ = regular のときには, 上より強い主張が成り立つ:

Proposition 2. 上において，k, l が noetherian rings で，l が k 上 smooth であるとする。このとき，A : G-ring $\Rightarrow$ $S^{-1}(A \otimes_k l)$: G-ring

これは，次の Theorem より容易に従う：

[1] Theorem 2.1 $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ を noetherian local rings の local hom. とする。v が formally smooth で，vu が regular hom. かつ，$\Omega_{B/A} \otimes_B C/Q$ が任意の $Q \in \mathrm{Spec}(C)$ に対して，separated C/Q-module であれば，v は regular である。

もとに戻って，A が universally catenary であれば，$S^{-1}(A \otimes_k l)$ も universally catenary だから，次が得られる：

Theorem 3. A が excellent ring，l が k 上 separably generated であれば，$S^{-1}(A \otimes_k l)$ は excellent である。

さて，[2] により，k が体で，$\underline{X} = \{X_1, \cdots, X_m\}$，$\underline{Y} = \{Y_1, \cdots, Y_n\}$ がそれぞれ m 変数，n 変数のとき，$k[\underline{X}][[\underline{Y}]]$ が excellent ring になることがわかっている。そこで l を $\mathrm{tr.deg}_k\, l < \infty$ をみたす，k 上 separably generated な拡大体とし，B をかってな l の k 上

transcendence base とする。このとき，積閉集合 S を $S = 1 + \underline{Y}(k[\underline{X}][[\underline{Y}]] \otimes_k k(B))$ によって定めれば，$S^{-1}(k[\underline{X}][[\underline{Y}]] \otimes_k \ell)$ は noetherian になる。従って，Theorem 3 より，この ring は，excellent である。

さて，最後に，体の拡大とは逆に，次のことを考えてみようと思う：

A が，体 k を含む noetherian ring で，ℓ が k の拡大体であるとする。このとき，$A \otimes_k \ell$ が $\mathbb{P}$-ring 又は $\mathbb{P}$-2 ring であれば，A も，そうか？

これについては，次のことが得られる。

Proposition 4. (i) ℓ が k 上 separable のとき，$A \otimes_k \ell : \mathbb{P}$-ring $\Longrightarrow A : \mathbb{P}$-ring

(ii) ℓ が k のかってな拡大体で，しかも $\mathbb{P}$ が NC をみたすとする。このとき，$A \otimes_k \ell : \mathbb{P}$-2 ring $\Longrightarrow A : \mathbb{P}$-2 ring

(ii) の証明で注意すべきことは，ring と field について，「有限生成」の意味が違うことである。

References

[1] A. Brezuleanu and N. Radu, Excellent rings and good separation of the module of differentials, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 23 (1978), 1455 - 1470.

[2] P. Valabrega, On the excellent property for power series rings over polynomial rings, J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975), 387 - 395

[3] ———, Formal fibers and openness of loci, ibid. 18 (1978), 199 - 208

Almost Complete Intersection について

日比孝之　広大・理・M1

以下 almost complete intersection についての C. Huneke の結果：

Theorem A (Huneke [1]) R は regular local で，R の素 ideal $\mathfrak{p}$ は次の2つの条件を満たすとする。

① $\mathfrak{p}$ は almost complete intersection

② $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}^{(2)}$

$A = R/\mathfrak{p}$ と置き，A の任意の素 ideal Q に対して

$$(*) \qquad \operatorname{depth} A_Q \geqq \frac{1}{2} \dim A_Q$$

が成立すると仮定する。その時，A は Cohen-Macaulay である。

について簡単な解説をいたします。一般に R を noeth. local ring とする時，R の ideal I が almost complete intersection であるとは，

$$\mu(I) = \operatorname{ht} I + 1$$

が成立する時に言う。例えば

Example. kを体とする。$R = k[X,Y,Z]_{(X,Y,Z)}$ の素 ideal $P = (Y^2 - XZ,\ YZ - X^3,\ Z^2 - X^2Y)$ は，$\mu(P) = 3$，$\mathrm{ht}\,P = 2$ であるから almost complete intersection である。（cf. Hartshorne [13] (I, Ex. 1.11)）

さて，Peskine & Szpiro [8] によれば，regular local R の2つの unmixed ideals I と J が linked であるとは，

① $\mathrm{Ass}_R(R/I) \cap \mathrm{Ass}_R(R/J) = \phi$

② $I \cap J$ は R-seq. で generated される

を満たす時に言う。その時，

Lemma 1 (Peskine & Szpiro [8]) I と J が regular local R の linked な ideals の時

R/I が C.M. $\Longleftrightarrow$ R/J が C.M.

である。

が成立する。Theorem A は Peskine & Szpiro の結果の application とも考えられる。Theorem A は次の Theorem B と Lemma 1 から導かれる。

Theorem B　(R, m) を regular local ring とし，P は R の素 ideal であって Theorem A の ①②を満たすとする。ht $P = e$ とし，$S = R[X_1, \cdots, X_{e+1}]_{m^*}$ $(m^* = mR[X_1, \cdots, X_{e+1}])$ と置く。その時，S の素 ideal Q で

a) PS と Q は linked

b) S/Q は U.F.D

となるものが存在する。

[証明]　②の仮定から $gr_P(R) = \bigoplus_{\nu \geq 0} P^\nu / P^{\nu+1}$ は domain (Huneke[3])，すると $\mathcal{R}(P, R) \subset R[X]$ を Rees 環とする時，(Hochster [7]) によって $\mathcal{R}(P, R)[\frac{1}{X}]$ は U.F.D である。$P = (x_1, \cdots, x_{e+1})$ と置くと，①の仮定から $S_R(P) \simeq \mathcal{R}(P, R)$ となる (Huneke [4])。すると $S_R(P) = R[X_1, \cdots, X_{e+1}]/J$ と書けば (ここで J は linear form $\sum_{i=1}^{e+1} a_i X_i$ で $\sum_{i=1}^{e+1} a_i x_i = 0$ なるものの全体で generated された $R[X_1, \cdots, X_{e+1}]$ の ideal) J は素 ideal であり，$J \subset m^*$ となる。$Q = JS$ と置くと，S/Q は $\mathcal{R}(P, R)[\frac{1}{X}]$ の局所化と考えられるから，U.F.D である。PS と

Q が S で linked であることは少々複雑な計算である。▨

以下 S, Q 等は Theorem B のままであるとして、Theorem A の証明の outline を示すことにする。$R \to S$ は flat であるから、$A = R/P$ が C.M. であるのを示す為には、S/PS が C.M. を示せばよい。ところが、Lemma 1 によって S/PS が C.M. は S/Q が C.M. と同値。ここで S/Q が U.F.D. であることに注意して、S と Q に対して

Lemma 2 (Hartshorne - Ogus [9]) P は regular local R の素 ideal で $A = R/P$ は U.F.D. であるとする。A の任意の素 ideal Q に対して

(☆) $\quad \operatorname{depth} A_Q = \min\{\dim A_Q,\ \frac{1}{2}\dim A_Q + 1\}$

が成立すると仮定すれば、A は C.M. である。

を使えば、S/Q が C.M. であることがわかる。なお、(*) と (☆) は若干異なっていることに注意。

ところで Theorem A を実際何かに使おうとする時，②の $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}^{(2)}$ の条件はあまりにも強すぎて，うまく使えない。②は結局 $gr_{\mathfrak{p}}(R)$ が domain であって，これより Hochster の結果を使う為に必要であった。証明を読んでいると，逆にいろいろな結果を使う為に必然的に②を付けているような気がする。そこで，②の仮定を除いても Theorem A は成立するのではないか？しかも，もっと簡単な証明ができるのではないか？という気がしているのではありますが，今のところは何とも言えません。A の次元が 2 次元の時が essential であって，その時正しければ多分よいであろうと青山陽一さんが言ってました。ところで Short Communication の時に後藤四郎さんが，almost complete intersection な素 ideal $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}^{(2)}$ なる例を知ってるか？と言ってましたが，最初に上げた Example が真にその例になっています。（cf. Northcott [12] P.29）また同じ Example が Matsuoka [10] でも述べられてます。

References

[1] C. Huneke : Almost Complete Intersections and Factorial Rings, J. of Alg. 71 (1981) 179 - 188

[2] C. Huneke : The Theory of d-Sequence and Powers of Ideals, to appear, Adv. in Math.

[3] C. Huneke : Symbolic Powers of Prime Ideals and Special Graded Algebras, Comm. in Alg. 9 (1981) 339 - 366

[4] C. Huneke : On the Symmetric and Rees Algebra of an Ideal Generated by a d-Sequence, J. of Alg. 62 (1980) 268 - 275

[5] C. Huneke : On the Symmetric Algebra of a Module, J. of Alg. 69 (1981) 113 - 119

[6] C. Huneke : Powers of Ideals Generated by Weak d-Sequences, J. of Alg. 68 (1981) 471 - 509

[7] M. Hochster : Criteria for Equality of Ordinary and Symbolic Powers of Primes, Math. Z. 133 (1973) 53 - 65

[8] C. Peskine & L. Szpiro : Liaison des Variétés Algébriques, Inv. Math. 26 (1974) 271 - 302

[9] R. Hartshorne & A. Ogus : On the Factoriality of Local Rings of Small Embedding Codimension, Comm. in Alg. 1 (1974) 415 - 437

7

[10] T. Matsuoka : On Almost Complete Intersections, Manus. Math. 21 (1977) 329 - 340

[11] Y. Aoyama : A Remark on Almost Complete Intersections, Manus. Math. 22 (1977) 225 - 228

[12] D. G. Northcott : Ideal Theory, Cambridge (1952)

[13] R. Hartshorne : Algebraic Geometry, Springer (1977)

Deformations of a finite group quotient

早大理工　小山陽一

k を代数閉体とし，R を complete local k-algebra，$\mathcal{C}$ を Artin local k-algebra A で，$A/m_A \simeq k$ となるものの category とする。$A \in \mathcal{C}$ に対して，R の A 上の

$$
\begin{tikzcd}
R & \bar{R} \arrow[l] \\
k \arrow[u, "f"] & A \arrow[l] \arrow[u, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}
$$

deformation とは，flat A-algebra $(\bar{R}, \bar{f})$ で

$$\bar{R} \otimes_A (A/m_A) \simeq R$$

となるものである。2つの A 上の deformations $(\bar{R}, \bar{f})$, $(\bar{R}', \bar{f}')$ に対し，

$$(\bar{R}, \bar{f}) \sim (\bar{R}', \bar{f}') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\ \varphi : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}' \quad A\text{-isomorphism s.t.}$$

$$\varphi \otimes 1_k = 1_R$$

という equivalence relation を考えて，

$$F_R(A) := \{\text{equivalence classes of deformations of } R \text{ to } A\}$$

とおくと，F_R は $\mathcal{C}$ から Sets への functor となる。

B を complete local k-algebra とし，

$$h_B(A) := \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(B, A)$$

とおくと，h_B も $\mathcal{C}$ から Sets への functor となる。

<u>Def.</u> F_R が versal deformation をもつとは，
complete local k-algebra B と functors の morphism $u: h_B \to F_R$ が存在して次を満す：

(i) u は smooth ($A' \to A$ をどの surjection とすると，
$h_B(A') \longrightarrow h_B(A) \times_{F_R(A)} F_R(A')$ も surjection)

(ii) $h_B(k[\varepsilon]) \longrightarrow F_R(k[\varepsilon])$ は isomorphism ($\varepsilon^2 = 0$ とする).

このとき，B は versal deformation の base space と呼ばれている。

<u>Theorem 1.</u>(Schlessinger [1]) Spec R が isolated singularity ならば，R は versal deformation を持つ。

従って，今後 R は isolated singularity を持つ場合に限って考える。

G を finite group で R の singularity 以外に free に act しているとする。このとき，R は isolated singularity であるので，R^G も isolated singularity となる。すなわち，R^G も versal deformation を持つ。

<u>Theorem 2.</u>

$$\begin{bmatrix} R & \longleftarrow & \bar{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \longleftarrow & A \end{bmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \begin{bmatrix} R & \xleftarrow{g^{-1}} & R & \longleftarrow & \bar{R} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ k & \xleftarrow{1_k} & k & \longleftarrow & A \end{bmatrix} \qquad \forall g \in G$$

により，G は functor F_R に act する。すなわち，

$$G \times F_R \longrightarrow F_R$$

は functors の morphism となる。

<u>Def</u>. $F_R^G(A) := \{F_R(A)\}^G$

$$= \{\xi \in F_R(A) \mid g\xi = \xi \quad \text{for } \forall g \in G\}$$

<u>Theorem 3</u>. R の versal deformation の base space を B とすると，Thm 2 より，B に G が act する。F_R^G の versal deformation は，$\mathcal{R}_{B_G}$ である。ここで，$B_G = B/J$,
J : ideal generated by $b - g(b)$, $b \in B$, $g \in G$。

以下，$\mathrm{char}(k) \nmid |G|$ とする。

<u>Lemma</u> R の deformation $\overline{R}$ に対して，G-action が extend 出来る。さらに，$\overline{R}^G$ は R^G の deformation となる。

この Lemma により，morphism

$$F_R^G \longrightarrow F_{R^G}$$

が well defined となった。

<u>Theorem</u> 4　$\mathrm{char}(k) \nmid |G|$，$\mathrm{depth}_{m_R} R \geq 3$ のとき

$$F_R^G(k[\varepsilon]) \longrightarrow F_{R^G}(k[\varepsilon])$$

は isomorphism となる。

したがって．Thm 3, 4 より．

<u>Cor</u>　R (resp. R^G) の versal deformation の base space を B (resp. B′) とする。Theorem 4 の仮定のもとに．

$$t_{B'} \simeq (t_B)^G$$

ここで．t_B は B の tangent space $(m_B/m_B^2)^*$ 。

Reference

M. Schlessinger: "Functors of Artin rings"

Trans. A.M.S. 130 (1968) pp. 208 - 222

K群に関するKratzerの結果について

近藤庄一（早大教育）

可換環A上の有限生成射影加群のGrothendieck群$K(A)$がλ環としての構造をもつ（さらに、この事実がより一般に成立する）ことが知られているが、筆者は、浅学のために、その標準的な証明を知ることができなかった。

ここでは、Kratzerの論文

Ch. Kratzer. Opérations d'Adams et représentations de groupes Ens. Math. 26 (1980), 141–154

の結果の特別な場合として、上記の事実、すなわち、$K(A)$がλ環になることが示されることを紹介したい。

前λ環Rは、次の様なアーベル群準同型写像$\lambda_t : R \to 1 + R[[t]]^+$をもつ可換環として定義される：

$$\lambda_t(x) = 1 + xt + \cdots = 1 + \sum_{i\geq 1} \lambda^i(x) t^i$$

ここで、$1+R[[t]]^+$ は巾級数環 $R[[t]]$ の部分群で定数項が1である元から成るものである。問題の $K(A)$ は、外積加群を用いて定義されるλ作用素 λ^k：$\lambda^k[P]=[\wedge^k P]$ により前λ環となる。

上記の $1+R[[t]]^+$ も、多項式 $P_n, P_{n,m}$ を用いて定義される"積"と"λ作用素"により前λ環となる：

(1) $x = 1+\sum x_i t^i,\ y = 1+\sum y_i t^i \Rightarrow xy = 1+\sum P_n(x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_n) t^n$

(2) $x = 1+\sum x_i t^i \Rightarrow \lambda^m(x) = 1+\sum P_{n,m}(x_1,\ldots,x_{mn}) t^n$

ただし、$P_n, P_{n,m}$ は不定元 ξ_i, η_j の基本対称式 s_r, σ_r の多項式で、次の関係式により定義される：

$$\prod_{i,j} (1+\xi_i\eta_j t) = 1+\sum_{n\geq 1} P_n(s_1,\ldots,s_n;\sigma_1,\ldots,\sigma_n) t^n$$

$$\prod_{i_1<\cdots<i_m} (1+\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_m} t) = 1+\sum_{n\geq 1} P_{n,m}(s_1,\ldots,s_{mn}) t^n$$

そこで、λ環 R は、前λ環 R でその写像 λ_t ：$R \to 1+R[[t]]^+$ が前λ環写像となる、すなわち、環準同型写像でλ作用素と可換となる可換環として定義される。可換環 A から得られる前λ環 $1+A[[t]]^+$ はλ環である（Grothendieck）。

Kratzer の方法は、λ環の全射な前λ環写像による像がλ環となることから、問題を次の補

3

題に帰着させることにある。

<u>補題</u> (Kratzer). 2つの有限生成射影A加群P, P′に対して、その像が生成元[P], [P′]を含むような前λ環写像 $\alpha: R_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m) \to K(A)$ が存在する。

ここで、前λ環 $R_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m)$ は、双代数 $\mathbb{Z}[X_{11}, \cdots, X_{nn}; Y_{11}, \cdots, Y_{mm}]$ 上の余加群で、有限生成射影 $\mathbb{Z}$ 加群であるものの作るカテゴリー $Com_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m)$ の Grothendieck 群を表わす。

この補題から、結局、$R_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m)$ がλ環であることを示せば十分であり、それは Serre の論文 (J.-P. Serre; Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, Publ. Math. IHES, 34(1968), 37–52) と同様にして、環 $R_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m)$ がλ環 $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n; Y_1, \cdots, Y_n]$ に埋め込まれることから得られるとして、Kratzer の証明が終わる。ここでは、さらに、残された紙数でその解説を試みたい。

補題の写像αは、その証明から、前λ環写像

$$R_{\mathbb{Z}}(M_n) \otimes_{\mathbb{Z}} R_{\mathbb{Z}}(M_m) \to K(A)$$

で置き替えられることが分る。従って、双代

数 $\mathbb{Z}[X_{11},\cdots,X_{nn}]$ の定義する前λ環 $R_{\mathbb{Z}}(M_n)$ がλ環であることを示せばよい。上記のSerreの論文により、同型写像

$$R_{\mathbb{Z}}(M_n)\simeq R_{\mathbb{Q}}(M_n)$$

が成り立つとして、環 $R_{\mathbb{Q}}(M_n)$ を調べることなる。自然な双代数写像 $\mathbb{Q}[X_{11},\cdots,X_{nn}]\to\mathbb{Q}[X_1,\cdots,X_n]$ から定義される写像 $R_{\mathbb{Q}}(M_n)\to R_{\mathbb{Q}}(T_n)$ より、前λ環写像

$$ch : R_{\mathbb{Q}}(M_n)\to\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_n]$$

が得られるが、この写像 ch は単射的であり、その像 Im(ch) は対称式の作る部分前λ環に一致する(これらのことは、Green の lecture note : Polynomial representations of GL_n, Springer Lecture Note 830 にも詳しい解説がある)。前λ環 $\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ はλ環であり、従って、その部分前λ環はλ環となるため、環 $R_{\mathbb{Q}}(M_n)$ がλ環となる。これらのことから、逆に、アーベル群の完全系列

$$\prod_p R_p(M_n)\to R_{\mathbb{Z}}(M_n)\to R_{\mathbb{Q}}(M_n)\to 0$$

を用いて、上記の同型写像 $R_{\mathbb{Z}}(M_n)\simeq R_{\mathbb{Q}}(M_n)$ が得られる。ここで、$R_p(M_n)$ は双代数 $(\mathbb{Z}/p)[X_{11},\cdots,X_{nn}]$ に対して、同様に定義される Grothendieck 群である。

こうして、結局、前λ環 $R_{\mathbb{Z}}(M_n)$ は $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ の対称式の作るλ環と同型となる。これらの議論は、前λ環 $R_{\mathbb{Z}}(M_n \times M_m)$ に対しても適用される。

Filtered Rings と Filtered Blow-up について

名工大　　渡辺敬一

§0. 目的

標数 0 の体 k 上の graded ring $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ の，極大 ideal $\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n > 0} R_n$ に関する local cohomology group $H^q_{\mathfrak{m}}(R)$ には自然に graded R-module の構造が入り，$\dim R = d$ のとき，R の不変量 $a(R)$ を，

$$a(R) = \max\{n \mid (H^d_{\mathfrak{m}}(R))_n \neq 0\}$$

とおくと，次が成立する。

<u>定理</u>. ([F], [W]). R が normal のとき次は同値

(i)　R は rational singularity.

(ii)　(a)　$\mathrm{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}$ は高々 rational sing.

　　(b)　R は Cohen-Macaulay

　　(c)　$a(R) < 0$.

この定理は rational singularity の判定に有用であると信じているのだが，残念ながら，

2

graded ring の structure をもっている"特異点"はやはり限られたものである。そこで，任意の"特異点"（＝local ring）に対して通用し得る判定法が欲しいというのが願望である。そのために，"filtered local ring"という概念を考えて，適当な条件の下に，local cohomology module が"自然に"filtered module になり，不変量 $a(R)$ が定義され，一定の条件を仮定すれば，

R が rational singularity $\Leftrightarrow$ $a(R)<0$

がえるようにしたいというのが目的である。

しかし，ゴールに至る道は遠く，現在は，$a(R)$ の定義ができ，$a(R)<0$ が"rational singularity"の<u>必要条件</u>である事が云えたに止まっている。

これからするべき事は，$a(R)<0$ が rational singularity であるための　　　　十分条件であるために，filtration $F^{\cdot}$ が満たすべき"良い"条件を探すことと，local ring を与えたときに，その local ring が"良い"filtration をもつ事の証明をする事が残されている。この問題はどちらも難かしく，非力な筆者の手に負えるような気

がしないのだが，"特異点の理論"に可換環論の側面から入って行く際の一つの道具にはなり得るのではないかと思っている。なお，"$a(R) \leqq 0$"という条件がRがF-pure（又は，F-pure type）であるための必要条件である事はすぐわかるし（いつ十分条件と云えるか？），また，最近のJ. Shahの論文[S]などを見ていると，"$a(R) \leqq 0$"という条件はRがsemi-stableになるための必要条件でもあるのではないか？と思いたくなる。（一般には十分条件には全然ならないが…）

とにかく，"filtered ring"という概念には，問題がいくらでもある事は確かであるように思う．

§1. Filtered blow-up と $a(R)$ の定義.

Noetherian local ring $(R, \mathfrak{m})$ 上に次の条件をみたす filtration $F^{\cdot}$ を考える.

(i) $F^0(R) = R, \quad F^1(R) = \mathfrak{m}$.

(ii) $G^{\cdot}(R) = \bigoplus_{i \geq 0} F^i(R)/F^{i+1}(R)$ は有限生成 k-algebra ($k = A/\mathfrak{m}$).

(iii) $(F^{\cdot})$ の定める topology は $\mathfrak{m}$-adic topology と一致する.

更に, 以下に於ては,

(iv) $\operatorname{depth} G^{\cdot}(R) > 0$

を仮定する.

R のパラメーター系 $(f_1, \cdots, f_d)$ を, $(\mathrm{In}(f_1), \cdots, \mathrm{In}(f_d))$ ($\mathrm{In}(f)$ は f の "initial form" を表わす. $f \in \mathfrak{m}^n$, $f \notin \mathfrak{m}^{n+1}$ のとき $\mathrm{In}(f) = f \bmod \mathfrak{m}^{n+1} \in G^n(R)$). が $G^{\cdot}(R)$ のパラメーター系で, かつ各 $\mathrm{In}(f_i)$ は $G^{\cdot}(R)$ の non-0-div. であるようにとる. $(f_1, \cdots, f_d)$ に対する Čech complex を $C^{\cdot}$ とする.

$C^{\cdot} = [0 \to R \to \bigoplus R_{f_i} \to \bigoplus R_{f_i f_j} \to \cdots \to R_{f_1 \cdots f_d} \to 0]$.

($C^0 = R$, $C^1 = \bigoplus R_{f_i}$, $\cdots$, $C^d = R_{f_1 \cdots f_d}$). よく知られてい

るように，$H^i(C^\cdot) \cong H^i_m(R)$ が各 i に対して成立する。各 C^i は（分子）－（分母）の weight で，filtered R-module となる。（$x/f_i^t \in F^{s-t\cdot d_i} \Leftrightarrow x \in F^s$ ($d_i = \deg In(f_i)$)）という要領である。）すると，$C^\cdot$ は filtered R-modules の complex となる。一方，$G^\cdot(R)$ と $(In(f_1), \cdots, In(f_d))$ に対して同様の complex を作ると，（以下面倒だから，$G = G^\cdot(R)$ と書く）．

$$\overline{C}^\cdot = [\,0 \to G \to \bigoplus G_{In(f_i)} \to \cdots \qquad \to G_{In(f_1)\cdots In(f_d)} \to 0\,]$$

$H^i(\overline{C}^\cdot) \cong H^i_M(G)$ $(M = G_+ = \bigoplus_{i>0} G_i)$ であり，$C^\cdot$ に与えた filter $F^\cdot$ に関して，$G^\cdot(C^\cdot) \cong \overline{C}^\cdot$（graded G-modules の complexes として同型）である事はすぐわかる。

［但し，$H^i(\cdot)$ をとるのと $G^\cdot(\ )$ をとるのは可換でないため，$G^\cdot(C^\cdot) \cong \overline{C}^\cdot$ は思った程役に立たない］

$C^\cdot$ 上の filtration は $H^\cdot(C^\cdot)$ 上の filtration をひき起すから，このようにして，$H^i_m(R)$ は filtered R-module の構造をもつ．特に，

<u>定義</u>．$a(R) = \max\{n \mid F^n(H^d_m(R)) \neq 0\}$.

注.1. $a(R)$ は $F^\cdot$ に depend するのは当然だが，この定義だと $(f_1, \cdots, f_d)$ の選び方にも depend しているように見える．実際は depend していないと思いたいの

だが，まだ一般には証明ができない。

注2. $G^{\cdot}(C^{\cdot}) \cong \overline{C}^{\cdot}$ より，$a(R) \leqq a(G)$ はすぐわかる。また，$H_M^{d-1}(G) = 0$ のとき，$a(R) = a(G)$ もいえる。$a(R) < a(G)$ なる例はまだ知らない。R が graded ring のとき $F^i(R) = \bigoplus_{n \geq i} R_n$ で filtration が入るが，このときは今の $a(R)$ と graded ring に対して定義した $a(R)$ は一致する。

問. $H_m^i(R)$ を "自然に" filtered R-module とみる。もっと自然な方法はないだろうか。例えば，

$H_m^i(R) = \varinjlim \mathrm{Ext}_R^i(R/F^t(R), R)$ を使いたいものだが，$\mathrm{Ext}_R^i(R/F^t(R), R)$ に filtered R-module の構造はどうして入れたものか？ "graded R-module" のカテゴリーでできた事で "filtered R-module" のカテゴリーに移せるものはどの位あるか？ 又，それはどういう意味をもつか？

次に filtered blow-up を定義する。

定義. $R^\natural = \bigoplus_{n \geq 0} F^n(R) \cdot T^n \subset R[T]$ （T は変数），$Y' = \mathrm{Proj}(R^\natural)$ とおく。$Y' = \bigcup_{i=1}^{d} \mathrm{Spec}(F^0(R_{f_i}))$ である事は容易にわかる。自然な写像 $R \longrightarrow F^0(R_{f_i})$ に対し，

$\Phi : Y' \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(R)$

が定まり，Φは proper birational である。また，$G'(R)$ は自然に R^{q} の剰余環となるから，Y'は，$S'=\mathrm{Proj}(G)$ を codim. 1 の subscheme として持つ。$\Phi|_{Y'-S'} : Y'-S' \longrightarrow Y-\{m\}$ は同型写像である事も容易にわかる。また，$Y'=\bigcup_{i=1}^{d} \mathrm{Spec}(F^{0}(R_{f_i}))$ より，

$$H^{q}(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \cong H^{q+1}(F^{0}(C^{\cdot})) \quad (q>0)$$

もすぐわかる。

Rが normal で，Gが reduced のとき R^{q} は normal になり，従って Y' も normal になる。Y'が normal のとき，S'はY'の Weil divisor になり，

$$H^{q}(Y', \mathcal{O}_{Y'}(-nS')) \cong H^{q+1}(F^{n}(C^{\cdot})) \quad (q>0)$$

が云えるから，この時は $a(R)$ の定義は $(f_1, \cdots, f_d)$ の選び方によらず定まる事が云える。

以下，<u>Y, Y' は normal</u> と仮定する。

付記．F-pure, F-pure type との関係について．

Rが標数 $p>0$ の体を含むとき，Frobenius map $F: R \to R$ $(F(x)=x^{p})$ が定義される。Fが"pure"であるとき，Rを"F-pure"という．Rが標数 0 で，有限個を除いて，すべての素数 p に reduction して F-pure のとき，Rが F-pure type と云う．Rが F-pure の

とき，Fが R の local cohomology groups にひきおこす map は injective となる事が知られている。F は "weight" を p 倍するから，"R が F-pure なら，$F^n(H_m^i(R)) = 0 \ (n>0)$" がわかり，特に $a(R) \leqq 0$ となる。また，「G(R) が F-pure, Gorenstein ⟹ R も F-pure (もちろん Gorenstein)」が Hochster の一般論でえているから，これを使うと，例えば，$R = k[[X, Y, Z]]/(X^p + Y^q + Z^r + XYZ)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1)$ が F-pure (type) である事がわかる。(X, Y, Z の weight をそれぞれ qr, pr, pq として filter を定める)。この例では $G \cong k[X, Y, Z]/(XYZ)$ だから，$a(R) = a(G) = 0$ で，R は rational singularity ではない。(R が rational singularity ⟹ R は F-pure type か？と Hochster が予想している。上の例はこの逆に対する反例となっている。)

§2. rational singularity ⟹ $a(R) < 0$ の証明.

まず，"rational singularity" の代りに Lipman が定義した，"pseudo-rational local ring" の概念を紹介しよう。Grauert-Riemenschneider の vanishing theorem が成

立する local rings のカテゴリーで，"pseudo-rational local ring" と "rational singularity" は同値な概念である。（白状すると，筆者にはその事の証明は良くわからないのだが．）

定義 [LT]. Noetherian local ring (R, m) が次の条件をみたすとき，R は pseudo-rational であるという。

(i) R は normal　(ii) R は Cohen-Macaulay　(iii) $\hat{R}$ は reduced

(iv) 任意の proper birational morphism $f: Z \to Y = \mathrm{Spec}(R)$ で Z が normal であるものに対して，canonical map

$$\delta_f : H^d_m(R) \longrightarrow H^d_E(\mathcal{O}_Z) \qquad (E = f^{-1}(m),\ d = \dim R)$$

は injective である。

[LT] に於て，"任意の regular local ring は pseudo-rational である" が証明されている。標数 $p>0$ での "rational singularity" の定義が確立されていない現時点に於て，"pseudo-rational local ring" の概念は大変魅力的だが，筆者の知る限りでは，標数 $p>0$ で，regular でない pseudo-rational local ring の例は一つもわかっていない．

さて，"R が pseudo-rational $\Rightarrow a(R)<0$" を示したいのだが，上の定義で，$Z = Y'$ ととると，

$E = S'$ となるが、$H^i_{S'}(\mathcal{O}_{Y'}) \cong H^i(C^\cdot/F^0(C^\cdot))$ である事はすぐわかる。$\delta_\Phi : H^d_m(R) \longrightarrow H^d_{S'}(\mathcal{O}_{Y'})$ は、complex の canonical map $C^\cdot \longrightarrow C^\cdot/F^0(C^\cdot) \to 0$ からひきおこされているから、δ_Φ が injection $\Leftrightarrow a(R)<0$ である。従って、

<u>定理</u>. (i) R が pseudo-rational $\Rightarrow a(R)<0$.

(ii) R が体 k 上 essentially of finite type, $ch(k)=0$, Y' が rational singularity しか持たないとき、

R が rational sing. $\Leftrightarrow$ R は Cohen-Macaulay かつ $a(R)<0$.

現時点で筆者がいえたのは以上で終りで、次の問題は当然、"いつ Y' は rational singularity のみをもつか？" という事だが、このための良い条件はまだ探しあぐねている段階である。また、良い条件がわかったとして、与えられた R に対して、その条件をみたす filtration が存在するか？という問題が生ずるが、それは普通の "可換環論的" な方法では解けるとは思えない。いえるとすれば resolution の存在のような事を使うのだろうと思う。

最後に、この稿の主題からは外れるが、次の問

を提出して終りにしたいと思う.

問. $(R, \mathfrak{m})$ が条件 $\mathbb{P}$ をみたす local ring のとき、§1の最初の条件 (i)〜(iii) をみたす R 上の filtration $F^{\cdot}$ で、$G^{\cdot}(R)$ がやはり条件 $\mathbb{P}$ をみたすものは必ずとれるか？ (筆者は $\mathbb{P}$ として、Cohen-Macaulay, Gorenstein, complete intersection, integral domain, reduced, … などを念頭においている。また、上記の性質すべてについて、"$G^{\cdot}(R)$ が $\mathbb{P}$ $\Rightarrow$ R は $\mathbb{P}$" がいえているが、$\mathbb{P}$ として "Buchsbaum" とすると反例がある。("$G^{\cdot}(R)$ が Buchsbaum $\Rightarrow$ R が Buchsbaum は成立しない。池田氏の反例がある。")
また $\mathbb{P}$ を "normal" とすると問は成り立たない。例えば、$\dim R = 2$ で $G^{\cdot}(R)$ が normal となる $F^{\cdot}$ が存在するとき、R は "star shaped" な resolution をもつ。従って例えば $R = k[[X, Y, Z]]/(X^p + Y^q + Z^r + XYZ)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ は $G^{\cdot}(R)$ が normal になるような filtration はもたない。)

[あとがき] 上記の内容は、このシンポジウムでは全体の講演時間の絶対的不足と、内容の到達度の低さから講演を断念したものですが、本シンポジウム発足の趣旨である「前回以来の成果を交換し合う」という事で、本報告集には加えて頂きたいと思う次第です。

References.

[F] H. Flenner : Rationale quasihomogene Singularitäten, Arch. Math. 36 (1981), 35~44.

[LT] J. Lipman and B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda about integral closure of ideals, Michigan Math. J. 28 (1981), 97~116.

[S]. J. Shah ; Stability of Two-dimensional Local Rings, I, Invent. Math. 64 (1981), 297~343.

[W] K. Watanabe ; Rational singularities with k^*-action (Trento Conference (1981) の Proc. に出る予定).

他に,

S. Goto & K. Watanabe ; On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179~213.

M. Hochster & J. L. Roberts : The purity of the Frobenius and Local cohomology, Adv. in Math. 21 (1976), 117~172.

1

Arithmetical ring について

愛知教育大学　金光三男

valuation ring や Dedekind domain の一般化である arithmetical ring は、L. Fuchs, I.S. Cohen, K. Asano, C.U. Jensen, R.B. Warfield や J.P. Lafon などにより研究され、その後も多くの人によって研究されてきた。

arithmetical ring と関連した話題として例えば次の様なものがある。

(1). arithmetical module や serial module

(2). arithmetical semigroup ring

(3). arithmetical ring と Henselization

(4). Serre の問題の non-Noetherian への generalization に関連したもの

(5). modules の生成元の個数に関連したもの。

ここでは、maximal spectrum が Noetherian space となる arithmetical ring を考える。このような ring は、有限個の Prüfer domain と weak global dimension (以下、w.gl.dim とかく) が ∞ である Spec が connected となる ring 有限

個の直和となる。特に、これより C.U. Jensen の定理「R が semi-local で reduced arithmetical ring なら、R は有限個の semi-local Prüfer domain の直和である」が導かれる。

また、次元が1以下の arithmetical ring について考察する。

§1. arithmetical ring の定義と例.

R は1をもつ可換環で必ずしも noetherian ring とは限らないものとする。

定義. M が arithmetical R-module とは、R-module M の submodules 全体が + と ∩ に関して分配束をなすときをいう。但し、順序は包含関係とする。また、R が arithmetical ring とは R が arithmetical R-module のときをいう。

arithmetical ring の同値性は多く知られているがここでは省略する（[6] など参照）。

次に arithmetical ring の例を述べる。

例1. valuation ring, special primary ring, Prüfer domain (特に、Dedekind domain)。

例2. (0次元 arithmetical ring の例) von Neumann regular ring 例えば次の様なものである。

(i). $R=\prod_{t\in T} K_t$ (すべての t に対して $K_t = k$ で k は体)。因に、T に離散位相を入れると、$\max R = \operatorname{Spec} R \approx \beta T$ (βT は T のストーンチェックのコンパクト化) で対応は極大 ideal に T の ultrafilter が対応する。更に、$\operatorname{Spec}(R/\oplus K_t) \approx \beta T - T$ となる。

(ii). X を completely regular space とする。X 上の(実数値)連続関数環 $C(X)$ は、arithmetical ring である。特に、$\dim C(X)=0$ とすると、$C(X)$ は von Neumann regular ring である。このとき、$\operatorname{Spec}(C(X)) \cong \max(C(X)) \cong \beta X$ で $C(X)$ が体でないなら、βX は connected でない。従って X もそうである。βX が Noetherian space なら、$C(X)$ は有限個の体の直和となる。

例 3. (*Hardy & Shores* [4].) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $T = \{11^n \mid n(\geq 0)$; 整数$\}$, G を位数 11 の巡回群とする。このとき、群環 $(T^{-1}R)[G]$ は *arithmetical ring* である。

例 4. (*Bremer, Rutter & Watkins* [2]) $R = \left(\prod_{1}^{\infty}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) / \bigoplus_{1}^{\infty}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\right)$ とする。$R[[X]]$ は *arithmetical ring* である。理由は、$\mathfrak{a}$ を R の可算生成 *ideal* とすると、$\mathrm{Ext}_R^1(R/\mathfrak{a}, R) = 0$ となることによる。

例 5. (1次元 *non-Noetherian arithmetical ring* の例). D を商体 K をもつ *Dedekind domain* とする。$K[[X]] = K + M$ の部分環 $D' = D + M$ は 2 次元 *non-Noetherian Prüfer domain* である。$\mathfrak{p}$ を D' の有限生成でない素 *ideal* とし、$t \neq 0$ を $\mathfrak{p}$ の元とする。$R = D'/(t)$ は求める例になっている。

§2. 次元が 1 以下の *arithmetical ring*

ここでは、0 次元 *arithmetical ring* の特徴付けを述べ、*Laskerian arithmetical ring* (すべての *ideal* が有限

個の準素 ideal の共通部分でかける ring を Laskerian ring という。）など次元が 1 以下となる場合を扱う。

<u>命題 1.</u>（D. Lazard et P. Huet [7], A. Ooishi）環 R に対して次は同値である。

(1). R は strongly absolutely pure ring である。

(2). R は 0 次元 Bézout ring である。

(3). R は 0 次元 arithmetical ring である。

<u>系 2.</u> 環 R に対して次は同値である。

(1). R は strongly absolutely pure reduced ring である。

(2). R は von Neumann regular ring である。

(3). R の 0 でも unit でもないすべての元 x に対して、$R/(x^2)$ における単項 ideal はすべて flat ideal である。

(4) R は次元 0 の reduced arithmetical ring である。

<u>補題 3.</u> R が Laskerian arithmetical ring なら $\dim R \leqq 1$ で Spec R は Noetherian space である。

この補題の証明の概略は、極大 ideal $\mathfrak{m}$ で localize した $R_\mathfrak{m}$ の ideal はすべて準素 ideal となり、d を $R_\mathfrak{m}$ の元とすると $\sqrt{(d)} = \mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{m}$ か極大 ideal か そうでなければ $\mathfrak{p} = (d)$ となることからいえる。後半は[3]の定理4である。

補題3より、例えば $\dim R \geqq 2$ なる valuation ring R をとれば次のことがいえる。

<u>命題4.</u> Max R が Noetherian space である arithmetical ring R で Laskerian ring でないものが存在する。

また、[3]の定理1，[8]の定理3.8と補題3より次のことがいえる。

<u>命題5.</u> (1). $R[[X]]$ が Laskerian arithmetical ring なら、R は Artinian ring である。

(2). R が Laskerian arithmetical かつ reduced ring なら、w. gl. dim $R\langle X\rangle \leqq 1$ かつ $\dim R\langle X\rangle \leqq 1$ である。但し、S を $R[X]$ の monic な多項式全体とするとき $R\langle X\rangle = R[X]_S$。

§3. ネーター的極大 spectrum をもつ arithmetical ring

Laskerian arithmetical ring より一般な Max R が Noetherian space である arithmetical ring の構造を考える。

<u>定理 6.</u> R は Max R が Noetherian space となる arithmetical ring とする。このとき、

$R \cong R_1 \oplus \cdots\cdots \oplus R_n$ （どの R_i に対しても Spec R_i は connected である）となる。更に、R_i は Prüfer domain か又は次の（同値な）条件をみたす ring である。

(1). R_i は not reduced ring である。

(2). w. gl. dim $R_i = \infty$.

(3). R_i には non-flat principal ideal が存在する。

証明の概略を述べる。Max R が Noetherian であることより、R は Spec R_i が connected である有限個の R_i の直和にかける。R_i が locally integral domain なら、R_i は Prüfer domain になる。w. gl. dim $R_i < \infty$ でも R_i が reduced でも同様である。

<u>系 7.</u> (C.V. Jensen [5]) R が reduced arithmetical semi-local ring なら R は有限個の semi-local Prüfer domain の直和である。

<u>系 8.</u> R[X] が arithmetical ring で Max(R[X]) が Noetherian space であることは、R が有限個の体の直和であることと同値である。

これに関連して、ほとんど[4]の定理3.6のいいかえにすぎないが次のことがいえる。

<u>命題 9.</u> R が ring で S が位数無限大の元を含む commutative cancelletive semigroup とする。このとき、半群環 R[S] が arithmetical ring で Max(R[S]) が Noetherian space なら、R は有限個の体の直和である。

最後に、arithmetical ring R 上の arithmetical modules の同型類全体 A(R) についてふれておく。

T. Albu と C. Năstăsescu [1] によれば、A(R) の 2 元 [M],

$[N]$に対して、$[M]+[N]=[M\otimes_R N]$なる演算を定義すればA(R)はcommutative monoidになる。A(R)のunit全体を$U(A(R))$とすると、$U(A(R))\subset \mathrm{Pic}(R)$となる。A(R), $U(A(R))$や$\mathrm{Pic}(R)$などのこれ以上の情報はないようである。

参考文献

[1]. T. Albu et C. Năstăsescu, Modules arithmétiques, Acta. Math. Acad. Sci. Hungaricae, 25 (1974), 299–311.

[2]. J.W. Brewer, E.A. Rutter and J.J. Watkins, Coherence and weak global dimension of R[[X]] when R is von Neumann regular, J. Alg. 46 (1977), 278–289.

[3]. R. Gilmer and W. Heinzer, The Laskerian property, power series rings and Noetherian spectrum, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 13–16.

[4]. B.R. Hardy and T.S. Shores, Arithmetical semigroup rings, Can. J. Math. 32 (1980), 1361–1371.

[5]. C.U. Jensen, Arithmetical rings, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, 17 (1966), 115–123.

[6]. M.D. Larsen and P.J. McCarthy, Multiplicative theory of ideals,

Acad. Press. 1971.

[7]. D. Lazard et P. Huet, Dominions des anneaux commutatifs, Bull. Sc. Math. 94 (1970), 193–199.

[8]. L.R. Riche, The ring $R\langle X \rangle$, J. Alg. 67 (1980), 327–341.

多項式環について

富山大学　教育学部
浅沼照雄

この小論ではRは noetherian ring で A は finitely generated flat R-algebra であるとする。Rの任意の prime ideal $\mathfrak{p}$ についてその fibre ring $k(\mathfrak{p})\otimes_R A$ が $k(\mathfrak{p})$ 上 n 変数の polynomial ring になるとき便宜上 P_n-ring ということにする。Dolgačëv および Veisfeiler [5] は R が normal local domain であるとき P_n-ring は R上 n 変数の polynomial ring になることを予想した。$n>1$ のときはこの予想は未解決である。([6], [7], [8] を参照) さてここでは P_1-ring について考えてみる。Kambayashi および Miyanishi [7] は R が local ring でかつ U.F.D. ならば P_1-ring は polynomial ring であることを示した。とくに discrete valuation ring 上の P_1-ring は polynomial ring である。これは次の定理1および定理2の証明の中で本質的な役割

をはたす。

R の prime ideal $\mathfrak{p}$ について $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R A$ が $R_{\mathfrak{p}}$ 上 n 変数の polynomial ring ならば A は symmetric algebra になる。([4]) ゆえ上の結果より R が locally U.F.D. ならば P_1-ring は symmetric algebra $S_R(M)$ と同型になる。ただし M は Picard group $\mathrm{Pic}(R)$ の元を表わす。逆に任意の R および $M \in \mathrm{Pic}(R)$ について明らかに $S_R(M)$ は P_1-ring になるがこれ以外の P_1-ring も存在する。たとえば k を体, t を indeterminate として $R = k[t^2, t^3]$ とおく。$I = (t^2, t^3)$ を R の maximal ideal とすれば $R[X + tX^n] + I[X]$ $(n > 1)$ は finitely generated flat R-algebra でかつ P_1-ring であるが symmetric algebra ではない。(X は indeterminate を表わす) そこで次に任意の R について P_1-ring を考えてみる。そのためにまず quasi-polynomial algebra を以下のように定義する。R の prime ideal $\mathfrak{p}$ について $J(\mathfrak{p})$ で $R/\mathfrak{p}$ の $k(\mathfrak{p})$ における integral closure を表わす。$J(\mathfrak{p})$ は自然に $k(\mathfrak{p})$ の R-subalgebra となる。任意の prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ について $J(\mathfrak{p}) \otimes_R A$ が

$S(\mathfrak{p})$上n変数の polynomial ring になるときAを quasi-polynomial R-algebra in n-variables であるという。ゆえにRが normal domain ならばこのようなAはそれ自身n変数の polynomial ring になる。またRの任意の prime ideal $\mathfrak{p}$について $R_{\mathfrak{p}}\otimes_R A$が quasi-polynomial $R_{\mathfrak{p}}$-algebra in n-variables であるときAを locally quasi-polynomial R-algebra in n-variables であるという。定義からすぐわかるようにAが locally quasi-polynomial R-algebra in one-variable ならばAはP_1-ring である。次の定理はこの逆もなりたつことを示している。

定理 1. 次は同値;

(1) AはP_1-ring.

(2) Aは locally quasi-polynomial R-algebra in one variable.

それゆえP_1-ring を調べるためには(2)をみたすAを調べればよいが，さいわい(2)をみたすAの性質はよくわかっている。([2], [3]を参照)
定理 2 はP_1-ring なるための一つの条件を与え

ている。

定理2. 次は同値;

(1) A は P_1-ring.

(2) A は augmented かつ R の height が0又は1なるすべての prime ideal $\mathfrak{p}$ について $k(\mathfrak{p})\otimes_R A$ は $k(\mathfrak{p})$ 上1変数の polynomial ring である。

ここで A が augmented であるとは $f:R\to A$ を structure homomorphism としたとき ring homomorphism $g:A\to R$ が存在して $g\circ f$ が R 上の identity map id_R なることである。

References

1. T. Asanuma, $R[X]$ の R-form, 可換環論シンポジウム報告集 1980年12月16日～19日 於 関西地区大学セミナーハウス.

2. T. Asanuma, On quasi-polynomial algebras, Preprint

3. T. Asanuma, Quasi-polynomial algebras, Symposium on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1981.

4. H. Bass, E. H. Connel and D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Inventions Math. 38 (1977) 279-299.

5. B. Ju. Veisfeiler and I. V. Dolgačëv, Unipotent group schemes over integral rings, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., Tom 38 (1974) 757-799

6. T. Kambayashi, On one-parameter family of affine planes, Inventions Math. 52 (1979) 275-281.

7. T. Kambayashi and M. Miyanishi, On flat fibrations by the affine line, Illinois J. Math 22 (1978) 662-671

8 W. Waterhouse, Commutative polynomial group laws over valuation rings, Illinois J. Math 24 (1980) 408-411.

1

アフィン環の部分環がまたアフィン環になるための条件とヒルベルトの14問題について

阪大 理　吉田憲一
小野田信春

本稿では、体k上のアフィン環（即ち、体k上有限生成な整域）Aの部分環Rでkを含むものを考察の対象とし、特にRがいつ再びアフィン環になるかということについて考えてみたい。この問題に関しては、次の場合に肯定的である（つまりRはk上のアフィン環になる）ということが知られている。（[1], [3]）

(1)　$\mathrm{tr.deg}_k R = 1$ のとき。

(2)　Rは$\mathrm{tr.deg}_k R = 2$ のKrull環で、任意の高さ1の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して $\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = 1$ となるとき。

ここでは、(2)の結果を再証明し、合わせてこれを超越次元が高い場合に一般化してみた

い。そのために、まずRのイデアル$\mathfrak{A}(R)$を次のようにして定義する。以下、特に断わらない限り、k、A、Rは上記の意味に用いる。

命題1. 体k上のアフィン環Aの部分環Rに対し、

$$\mathfrak{A}(R) = \{ a \in R \,;\ R[\tfrac{1}{a}] \text{ は } k \text{ 上のアフィン環} \} \cup \{0\}$$

と定義すると、$\mathfrak{A}(R)$は(0)と異なるRのイデアルになる。

証明. まず、AはR上代数的であると仮定してよい。(そうでないときは、$P \cap R = (0)$となるAの素イデアルPのうち、包含関係について極大なものをとり、AをA/Pで置き代えればよい。) そこで$A = k[x_1, \cdots, x_n]$として、

$$f_i(X) = a_{i0} X^{m_i} + a_{i1} X^{m_i - 1} + \cdots + a_{im_i} \qquad a_{ij} \in R$$

をx_iを根にもつR上の多項式とする。$B = k[\{ a_{ij} \,;\ 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m_i \}]$ とし、$a = a_{10} \cdots a_{n0}$

とおくと、B は k 上のアフィン環であって、$B[\frac{1}{a}] \subseteq R[\frac{1}{a}] \subseteq A[\frac{1}{a}]$ かつ $A[\frac{1}{a}]$ は $B[\frac{1}{a}]$ の整拡大になる。一方、$A[\frac{1}{a}]$ は $B[\frac{1}{a}]$ 上有限生成ゆえ、従って $A[\frac{1}{a}]$ は有限生成 $B[\frac{1}{a}]$-加群となり、中間環 $R[\frac{1}{a}]$ もまた有限生成 $B[\frac{1}{a}]$-加群となる。従って $R[\frac{1}{a}]$ は k 上のアフィン環であるから、$a \in \mathfrak{A}(R)$ を得る。よって、$\mathfrak{A}(R) \neq (0)$ が示せた。$\mathfrak{A}(R)$ がイデアルをなすことの証明は省略する。■

系2.　体 k 上のアフィン環 A の部分環 R に対しては

$$\mathrm{tr.deg}_k R = (\mathrm{Krull}) \dim R$$

が成り立つ。

証明.　$n = \mathrm{tr.deg}_k R$ として、$0 \neq a \in \mathfrak{A}(R)$ なる元 a をとる。すると $R[\frac{1}{a}]$ は k 上のアフィン環ゆえ、$\dim R[\frac{1}{a}] = n$ がいえる（[2] 参照）従って、$\dim R \geq \dim R[\frac{1}{a}] = n$ が成立するが、一般に $\dim R \leq n$ ゆえ $\dim R = n$

を得る。∎

補題3を述べる前に次の定義を思い出しておく。一般に、局所環 S が k 上の局所域であるとは、ある k 上のアフィン環 B と、B の素イデアル P があって、$S = B_P$ となることをいう。

補題3． 体 k 上のアフィン環 A の部分環 R と R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$R_{\mathfrak{p}}$ が k 上の局所域であるための必要充分条件は、$\mathcal{A}(R) \not\subset \mathfrak{p}$ となることである。

証明． $0 \neq x \in \mathcal{A}(R)$ なる元 x を考えて A を $R[\frac{1}{x}]$ で置き代えることにより、R と A は双有理である（つまり、同じ商体をもつ）と仮定してよい。まず、$\mathcal{A}(R) \not\subset \mathfrak{p}$ とする。このとき、$0 \neq a \in \mathcal{A}(R) \setminus \mathfrak{p}$ をとれば、$R[\frac{1}{a}]$ は k 上のアフィン環かつ $\mathfrak{p}[\frac{1}{a}]$ は $R[\frac{1}{a}]$ の素イデアルである。従って、定義より、$R_{\mathfrak{p}} =$

$R[\frac{1}{a}]_{\mathfrak{q}[\frac{1}{a}]}$ は k 上の局所域である．逆に $R_{\mathfrak{q}}$ が k 上の局所域になったとする．すると，ある k 上のアフィン環 B と B の素イデアル P に対して，$R_{\mathfrak{q}} = B_P$ となる．このとき，$B \subseteq R$ と仮定してよい．そこで

$$F = \{ Q \in \operatorname{Spec} B ;\ \operatorname{depth} B_Q = 1 \text{ かつ } B_Q \not\supseteq R \}$$

とおく．このとき F は有限集合である．実際 A は B 上有限生成かつ A と B は双有理ゆえ，ある $0 \neq b \in B$ に対して $B[\frac{1}{b}] \supseteq A \supseteq R$ となる．このとき容易にわかるように，F は b の素因子全体のなす集合の部分集合になる．よって F は有限集合．そこで，$F = \{ P_1, \cdots, P_n \}$ とする．このとき $P_1 \cap \cdots \cap P_n \not\subseteq P$ である．実際 $P_1 \cap \cdots \cap P_n \subseteq P$ とすると，ある i に対して $P_i \subseteq P$ となり，従って $B_{P_i} \supseteq B_P = R_{\mathfrak{q}} \supseteq R$ となるがこれは $P_i \in F$ に矛盾する．よって $P_1 \cap \cdots \cap P_n \not\subseteq P$ が示せた．そこで $a \in P_1 \cap \cdots \cap P_n \setminus P$ とし，

$$\Lambda = \{ Q \in \operatorname{Spec} B ;\ \operatorname{depth} B_Q = 1 \text{ かつ } a \notin Q \}$$

とおく．すると a の取り方より，任意の $Q \in$

Λ に対して　$B_Q \supseteq R$　となり、従って

$$B[\tfrac{1}{a}] = \bigcap_{Q\in\Lambda} B_Q \supseteq R$$

即ち　$B[\frac{1}{a}] = R[\frac{1}{a}]$　が成り立つ。よって $R[\frac{1}{a}]$ は k 上のアフィン環となり　$a \in \mathcal{A}(R)$　を得る。ここで、$a \in B \setminus P \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$　ゆえ、従って $\mathcal{A}(R) \not\subseteq \mathfrak{p}$　がいえる。■

命題1と補題3より次の定理を得る。

定理4.　体 k 上のアフィン環 A の部分環 R について、次の条件は互いに同値である。

(1)　R は k 上のアフィン環である。

(2)　任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$R_{\mathfrak{p}}$ は k 上の局所域である。

(3)　任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$R_{\mathfrak{m}}$ は k 上の局所域である。

証明、　(1) ⇒ (2)　および　(2) ⇒ (3)　は明らか。(3) ⇒ (1) を示す。(3) が成立するとすれば、補題3より、任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して

$\mathfrak{A}(R) \not\subseteq \mathfrak{m}$. 一方、$\mathfrak{A}(R)$ はイデアルゆえ、従って $\mathfrak{A}(R) = R$ となり、R は k 上のアフィン環である。■

定理4は、アフィン環の部分環についてはそれがアフィン環であるかどうかは局所的に判定できることを示している。局所的な判定条件については次の定理が成り立つ。

定理5. 体 k 上のアフィン環 A の部分環 R に対し、R' で R の（R の商体 K における）整閉包を表わすものとする。このとき、R' の極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対し、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{M} = \mathrm{tr.deg}_k R'$ かつ R がネーター環ならば、$R'_{\mathfrak{M}}$ は k 上の局所域である。

証明. $d = \mathrm{tr.deg}_k R$ とする。$\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R$ とおくと、R はネーター環ゆえ $\mathfrak{m}$ はイデアルとして有限生成である。そこで $\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_t)R$ とする。このとき、k 上のアフィン

環 B を、$B \subseteq R \subseteq Q(B)$ ($Q(B)$ は B の商体を表わす) かつ $x_1, \cdots, x_t \in B$ となるようにとる。$M = \mathfrak{m} \cap B$ とおく。すると $x_1, \cdots, x_t \in M$ ゆえ、$MR = \mathfrak{m}$ となる。また、$\mathrm{ht}\, \mathfrak{M} = d$ ゆえ、$\mathrm{tr.deg}_k\, B/M \leq \mathrm{tr.deg}_k\, R'/\mathfrak{M} = 0$ つまり B/M は k 上代数的となり、従って (k が体ゆえ) B/M は体となり、M は B の極大イデアルであることがわかる。B' を B の整閉包とし、$\overline{R} = R[B']$ とおく。B はアフィン環ゆえ、B' は B-加群として有限生成である。従って、$\overline{R}$ は R-加群として有限生成であり、特に (R がネーター環ゆえ) $\overline{R}$ はネーター環である。$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap \overline{R}$ および $M' = \mathfrak{N} \cap B'$ とおく。わかり易いように図示すれば

$$\begin{tikzcd}
M & \mathfrak{m} & \\
\cap & \cap & \mathfrak{M} \\
B \arrow[r, hook] \arrow[dd] & R \arrow[dd] \arrow[dr] & \cap \\
 & & R' \\
B' \arrow[r, hook] & \overline{R} \arrow[ur] & \\
\cup & \cup & \\
M' & \mathfrak{N} &
\end{tikzcd}$$

ここで、R' は $\bar{R}$ 上整ゆえ、Going up lemma より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} \geqq \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = d$ 従って $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} = d$ を得る。また、B' は B 上整かつ M' は B の極大イデアル M 上の素イデアルゆえ M' は B' の極大イデアルになることがわかる。よって（B' は k 上のアフィン環ゆえ）$\mathrm{ht}\,M' = d$ である。従って、局所環の拡大 $B'_{M'} \subset \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ において、まず、$\dim B'_{M'} = \dim \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ がいえた。ところで、$M'\bar{R}_{\mathfrak{n}} \supseteq M\bar{R}_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ かつ $\mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ は $\mathfrak{n}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ に属する準素イデアルであることより、ある正の整数 r に対して、$\mathfrak{n}^r\bar{R}_{\mathfrak{n}} \subseteq \mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}} \subseteq M'\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ となることに注意する。そこで、$k' = B'/M'$, $L = \bar{R}/\mathfrak{n}$ とおくとき

$$\begin{aligned}\mathrm{length}_{k'}\, \bar{R}_{\mathfrak{n}}/M'\bar{R}_{\mathfrak{n}} &\leqq \mathrm{length}_{k'}\, \bar{R}/\mathfrak{n}^r \\ &= (\mathrm{length}_{k'}\, L)(\mathrm{length}_{L}\, \bar{R}/\mathfrak{n}^r)\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} = d$ ゆえ、$\mathrm{tr.deg}_k\, \bar{R}/\mathfrak{n} = 0$ となるが、すると [5] の Theorem 2 により、L はある k 上のアフィン環の部分体となることがわかる。従って、L は k の有限次代数拡大体であり、特に $\mathrm{length}_{k'}\, L < +\infty$ がいえる。

他方、$\bar{R}$ はネーター環ゆえ、よく知られているように、length $\bar{R}/\mathfrak{n}^r < +\infty$。よって、
length$_{R'}$ $\bar{R}_{\mathfrak{n}}/M'\bar{R}_{\mathfrak{n}} < +\infty$ となることが示せた。
更に、B' は正規アフィン環ゆえ、[4, Theorem (37.5)] により、局所環 $B'_{M'}$ は解析的正規環であり、また明らかに、$B'_{M'}$ と $\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ とは同じ商体をもつ。従って Zariski の主定理 ([4, Theorem (37.4)]) により $B'_{M'} = \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ となることがわかる。特に $\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ は整規環であり、よって $\bar{R}_{\mathfrak{n}} = R'_{\mathfrak{n}}$ が成り立つ。従って $R'_{\mathfrak{n}}$ は局所環であり、このことから $R'_{\mathfrak{n}} = R'_{\mathfrak{m}}$ 即ち、$R'_{\mathfrak{m}} = B'_{M'}$ を得る。よって、$R'_{\mathfrak{m}}$ は k 上の局所域になることが示せた。■

定理 6. k 上のアフィン環 A の d 次元部分環 R の整閉包を R' とする。R がネーター環かつ、R' の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $ht\, \mathfrak{m} = d$ となるならば、R は k 上のアフィン環である。

証明．定理5と定理4とより，R'がk上のアフィン環であることがわかり，従って，よく知られているように，このとき R 自身もk上のアフィン環である。∎

定理6の応用をひとつ与えておく。次の問題は（一般化された）ヒルベルトの14問題として知られている：体k上の正規アフィン環Aと，kとAの商体Kとの中間体Lを考えて，$R = L \cap A$ とおく。このとき Rはk上のアフィン環であるか？ 答は $\mathrm{tr.deg}_k R \leq 2$ の場合には肯定的であるが，$\mathrm{tr.deg}_k R = 3$ の場合には具体的な反例がある。（詳細は[3]参照）ここでは，定理6を使った肯定的な場合の証明を与えよう。

まず，一般的に次の事実が確認できる．

(イ) R は Krull 環である。

(ロ) 任意の高さ1の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して

$$\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = \mathrm{tr.deg}_k R - 1$$

そこで，特に $\mathrm{tr.deg}_k R = 2$ の場合につい

では、まず (イ) および "2次元 Krull 環はネーター環である" という定理より、R がネーター環であることがわかる。また (ロ) より、任意の極大イデアル m に対して、$ht\ m = 2$ となることも導かれる。従って、定理6より、R は k 上のアフィン環であることが証明された。∎

最後に定理6の系を述べて本稿を終えることにする。(この系の証明には、整閉包の有限性に関する定理が必要になるので、ここでは省略する。)

系7. 体 k 上のアフィン環 A の部分環 R が universally catenary かつ任意の極大イデアル m に対して、$ht\ m = \dim R$ を満たすとする。このとき、R は k 上のアフィン環である。

参 考 文 献

[1] P. Eakin, A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 75–80.

[2] H. Matsumura, Commutative Algebra.

[3] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Lectures on Math. and Physics, Vol. 31, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1965.

[4] M. Nagata, Local rings.

[5] A. R. Wadsworth, Hilbert subalgebras of finitely generated algebras, J. of Algebra 43 (1976), 298–304.

[6] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, preprint.

Affine Zariski Surfaces について

宮西正宜（阪大理）

§1. 本稿は，P. Russell（McGill大学，Canada）との共著の論文，

Purely inseparable coverings of exponent one of the affine plane, to appear

の結果，及び関連した結果を紹介することを目的とする。

kで標数$p \geqq 0$の代数的閉体を表わす。2変数多項式環$R := k[x, y]$の部分k-多元環Aで，k上有限生成，$\dim A = 2$，正則かつ$\mathrm{Pic}(A) = (0)$を充たすものを考えよう。kの標数が0ならば，次のような結果がある。

<u>定理</u>（Gurjar-宮西[2,6]）．kの標数が0ならばAは2変数多項式環$k[u, v]$にk上同型である．より正確に述べれば，AがRのk上有限生成な部分k-多元環で，$\dim A = 2$かつRが平坦な有限生成A-加群ならば，Aは素元分解環，

i.e, $\mathrm{Pic}(A)=0$, となり，従って A は $k[u, v]$ に k 上同型である。

従って，k の標数 p が正の場合，A はどのような多元環になるかということが問題になる。以下，k の標数 p は正であると仮定する。

完備曲面に，関連した問題があるので，まずそれを考えよう。V を k 上定義された正則射影曲面，$\pi : W \longrightarrow V$ を finite, purely inseparable covering で，W が又正則であるものとする。故に，$\deg \pi = p^n$ となる。

Blass の問題．$V \cong \mathbb{P}^2$ ならば，上記のような covering は存在しない。

この問題に関連して，次の結果がわかっている。

定理．(1) (S. Bloch)．$V \cong \mathbb{P}^2$, $\deg \pi = p$ ならば，上記のような covering は存在しない。

(2) (Ganong - Russell)．V が極小有理曲面で $\deg \pi = p$ ならば，次の場合にのみ上記の covering が存在する。但し，$V = F_n := \mathrm{Proj}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)\right)$ $(n \geqslant 0,\ n \neq 1)$ とする。

(i) $\rho : F_n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ で，F_n の自然な $\mathbb{P}^1$-fibration,

$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ で Frobenius 自己準同型を表わせば、
$W \cong (F_n, \rho) \times_{\mathbb{P}^1} (\mathbb{P}^1, \varphi)$ で、$\pi : W \to V$ は φ の ρ による引き上げである：

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xleftarrow{\pi} & \varphi^* F_n \cong W \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad , \quad \varphi^* F_n \cong F_{np} .$$

(ii) $p \mid n$ となる場合。 $W \cong F_{n/p}$ で $\pi : W \to V$ は F_n の Frobenius 自己準同型 $\varphi_{F_n} : F_n \longrightarrow F_n$ を分解する：

$$\varphi_{F_n} : F_n \longrightarrow \underset{\underset{W}{\rotatebox{90}{$\cong$}}}{F_{n/p}} \xrightarrow{\pi} \underset{\underset{V}{\|}}{F_n} .$$

Blass の問題の analogy として、「アフィン平面 $\mathbb{A}^2_k$ の purely inseparable coverings には、どのようなものがあるか」ということが問題になる。ここで、標題の affine Zariski 曲面を定義しておこう。

__定義__. Affine Zariski 曲面（又は $\mathbb{A}^2_k$ の exponent 1 の purely inseparable covering）とは、normal affine surface $X = \mathrm{Spec}(A)$ で、条件

$$k[u, v] \subsetneq A \subsetneq k[x, y], \quad u = x^p, \ v = y^p$$

を充たすものである。

従って、$[k(x, y) : Q(A)] = [Q(A) : k(u, v)] = p$ となることに注意しよう。

最初の定理に相当する結果が、正標数の場合には、全く成立しないことを示すのが、次の定理である。

<u>定理</u>. (1) $p \geqslant 3$ の場合. $A = k[x^p, y^p, (x^p y^p + 1)x + y^{p+1}]$, $k[x^p, y^p] \subsetneq A \subsetneq k[x, y]$, とおく。すると, A は正則, 非有理な k-多元環で, かつ素元分解環である. $X := \mathrm{Spec}(A)$ は affine Zariski surface で, $\mathbb{A}^3_k = \mathrm{Spec}(k[u, v, w])$ の超曲面 $w^p = (u^p v^p + 1)u + v^{p+1}$ に同型である。更に, X は, 次の条件を充たす nonsingular projective surface W に open set として埋め込める:

(i) W は一般型の極小曲面である;

(ii) $$(K_W^2) = \begin{cases} 1 & (p = 3) \\ 2np - p + n & (p = 4n+1) \\ 2np + n + 1 & (p = 4n+3) \end{cases} \qquad (n \geqslant 1);$$

(iii) $|K_W| \neq \phi$.

(2) $p = 2$ の場合. $A = k[x^2, y^2, (\tilde{\alpha}(x^2)y^2 + 1)x + y^3]$, $\tilde{\alpha}(x^2) \in k[x^2] - k[x^4]$, $2d = \deg_x \tilde{\alpha}(x^2)$ とおく。すると A は正則, 非有理な素元分解環で, $k[x^2, y^2] \subsetneq A \subsetneq k[x, y]$ を充たす。故に, $X := \mathrm{Spec}(A)$ は affine Zariski surface で, 次のような極小な nonsingular projective surface W に open set として埋め込める:

(i) $d=1$ ならば，W は K3-surface；$d\geqslant 2$ ならば，小平次元 $\kappa(W)=1$ となる surface；

(ii) X の対数的小平次元 $\bar{\kappa}(X)$ は 2．

(3) affine Zariski surface $X:=\mathrm{Spec}(A)$ で，A は正則，有理的な素元分解環，かつ，$k[x^p,y^p]\subsetneqq A\subsetneqq k[x,y]$，$\bar{\kappa}(X)=1$ をみたすものが存在する。

従って，nonsingular affine Zariski surface という条件は，単有理的であることと，非正則数（= irregularity）$q=0$ を除いて，殆んど如何なる制限も与えないことがわかる。

§2. 以上の結果を，どのような方法で証明するか説明しよう。A を $k[x,y]$ の normal subalgebra で条件：$k[x^p,y^p]\subsetneqq A\subsetneqq k[x,y]$ を充たすものとしよう。Jacobson の Galois 理論によって，$k(x,y)$ の k-derivation δ' で，$K:=Q(A)=k(x,y)^{\delta'}$，$\delta'^p=a'\delta'$，$a'\in k(x,y)$ を充たすものがある。δ'' が同種の k-derivation ならば，$\delta''=c\delta'$，$c\in k(x,y)$，となるから，k-derivation $\delta:=b\delta'$，$b\in k(x,y)$，で次の条件

を充たすものが、k^* の元を除いて、唯一つ定まる：

$$\begin{cases} \delta = f_1\frac{\partial}{\partial x} - f_2\frac{\partial}{\partial y}, \quad f_1, f_2 \in k[x,y], \quad G.C.D.(f_1,f_2)=1, \\ K = (k(x,y))^{\delta} = (k(x,y))^{\delta'}. \end{cases}$$

すると、$A = k[x,y]^{\delta} = K \cap k[x,y]$, $\delta^p = a\delta$, $a \in A$.

chain rule によって、δ は k^* の元を掛けることを除いて、座標 (x,y) の選び方によらず、A のみによって唯一通りに定まる。

<u>補題</u> 2.1. (1) 上記の A について、$A \cong k[u_1, v_1]$ となる必要充分条件は、適当な座標変換を施して、$A = k[x, y^p]$ となることである。

(2) A が正則完備局所環で、$k[[x^p, y^p]] \subsetneq A \subsetneq k[[x,y]]$ を充たせば、適当な座標変換を施して、$A = k[[x, y^p]]$ とかける。(Ganong の結果)。

<u>補題</u> 2.2. 上記の A, δ について、$I(\delta) := (f_1, f_2)k[x,y]$ とおくと、A : 正則 $\Longleftrightarrow$ $I(\delta) = k[x,y]$.

証明には、上記の Ganong の結果 (2) を使う。

他方、$K = k(x^p, y^p, \frac{\psi}{\varphi})$, $\varphi, \psi \in k[x,y]$, G.C.D.$(\varphi,\psi)=1$, φ, ψ は exponent $\geq p$ の既約因子を持たない、というように書ける。ここで、

$$\delta' := (\varphi\psi_y - \psi\varphi_y)\frac{\partial}{\partial x} - (\varphi\psi_x - \psi\varphi_x)\frac{\partial}{\partial y}$$

とおけば，$\delta' = \rho\delta$，$\rho \in k[x,y]$，$K = k(x,y)^{\delta'}$ となる．
$A' := k[x^p, y^p, \varphi^{p-1}\psi, \varphi\psi^{p-1}]$ とおけば，$A' \subseteq A$，$Q(A') = Q(A)$．
P を $\mathbb{A}^2_k := \mathrm{Spec}(k[x,y])$ の閉点とし，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{P, \mathbb{A}^2_k}$，$\mathfrak{o} = \mathcal{O} \cap K$，
$\mathfrak{o}' = A'_{A' \cap \mathfrak{m}}$ （$\mathfrak{m}$ = $\mathcal{O}$ の極大 ideal）とおくと，次の結果が成立する．

<u>補題</u> 2.3．$\varphi(P)\psi - \psi(P)\varphi = 0$ が点 P で正則な曲線ならば，$\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$ で，$\mathfrak{o}$ は正則．

従って，次の系を得る．

<u>系</u> 2.4．$I(\delta') = k[x,y]$ ならば，$A = A'$ で A は正則．

<u>補題</u> 2.5．(1) $p = 2$ ならば，$A = k[x^2, y^2, \psi]$，$\psi \in k[x,y]$．

(2) $p = 3$ ならば，$A = k[x^3, y^3, \varphi^2\psi, \varphi\psi^2]$，$\varphi, \psi \in k[x,y]$，
G.C.D.$(\varphi, \psi) = 1$．

(3) $p \geqq 3$ ならば，A は必ずしも $k[x^p, y^p]$ の simple extension ではない．

A の divisor class group $Cl(A)$ を Samuel の対数微分の方法によって計算しよう．

$$L := \left\{ \frac{\delta f}{f} \in k[x,y] \;\middle|\; f \in k[x,y] \right\} \subset k[x,y]$$

とおけば，L は素体 $\mathbb{F}_p$ 上の vector space とみなせる．
F を $k[x,y]$ の Frobenius 準同型，$Fh = h^p$，とすれば，

次の結果がある：$h \in k[x,y]$ について，

$$\begin{cases} h \in L \iff (\delta^{p-1} + F - a)h = 0, & \text{但し } \delta^p = a\delta,\ a \in A \\ Cl(A) \cong L. \end{cases}$$

<u>補題</u> 2.6. (1) $Cl(A)$ は有限次元 $\mathbb{F}_p$-vector space.

(2) $\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x} - f_2 \frac{\partial}{\partial y}$ と書いて，$d_1 = \max(\deg_{x,y} f_1, \deg_{x,y} f_2)$, $d_2 = \deg_{x,y} a$, $\rho = \max\left(d_1 - 1, \left[\frac{d_2}{p-1}\right]\right)$ とおく．但し，$\deg_{x,y}$ は total degree を表わす．すると，$|Cl(A)| \leq p^{\frac{\rho(\rho+1)}{2}}$.

<u>証明</u>. $(\delta^{p-1} + F - a)h = 0 \implies$

$$\deg_{x,y}(\delta^{p-1}h - ah) \leq \max(d + (p-1)(d_1 - 1), d_2 + d)$$

$$d := \deg_{x,y} h.$$

故に，$pd \leq \max(d + (p-1)(d_1-1), d_2 + d)$. 即ち，

$$d \leq \max\left(d_1 - 1, \left[\frac{d_2}{p-1}\right]\right) = \rho.$$

V を $\deg_{x,y} \leq \rho$ となる多項式全体が張る $k[x,y]$ の k-subvector space とする．すると，$L \subset V$ だから，L ~~は有限~~ V の ~~次元~~ $\mathbb{F}_p$-vector sub-space. ここで，次の結果を示す．

<u>Claim</u>: $\{h_1, \ldots, h_m\}$ が L の $\mathbb{F}_p$-1次独立な元の組ならば，$\{h_1, \ldots, h_m\}$ は k 上1次独立。

実際，$\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_m h_m = 0$, $\lambda_i \in k$ という nontrivial な関係があったとしよう。k の $\mathbb{F}_p$-vector subspace $\sum_{i=1}^{m} \mathbb{F}_p \lambda_i$ の $\mathbb{F}_p$-basis を $\{w_1, \ldots, w_n\}$ で

表わして，$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}\omega_j$，$\mu_{ij} \in \mathbb{F}_p$ とかく。L の元 v_j を $v_j := \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} h_i \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$ で定義すれば，

$$\omega_1 v_1 + \cdots + \omega_n v_n = 0 .$$

ところで，$0 = \delta^{p-1}\left(\sum_j \omega_j v_j\right) = \sum_j \omega_j \delta^{p-1}(v_j) = -\sum_j \omega_j v_j^p + a\sum_j \omega_j v_j = -\sum_j \omega_j v_j^p$ だから，

$$\omega_1^{1/p} v_1 + \cdots + \omega_n^{1/p} v_n = 0$$

を得る。同様にして，

$$\omega_1^{p^{-i}} v_1 + \cdots + \omega_n^{p^{-i}} v_n = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1)$$

を得る。ここで，

$$\Delta' = \det\begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \\ \omega_1^{1/p} & \cdots & \omega_n^{1/p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{p^{-(n-1)}} & \cdots & \omega_n^{p^{-(n-1)}} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det\begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \\ \omega_1^{p} & \cdots & \omega_n^{p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{p^{n-1}} & \cdots & \omega_n^{p^{n-1}} \end{pmatrix}$$

とおけば，$(\Delta')^{p^{n-1}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta$ で，

$$\Delta^{p-1} \equiv (-1)^n \prod_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \\ \in (\mathbb{F}_p)^n - (0,\ldots,0)}} (\varepsilon_1\omega_1 + \cdots + \varepsilon_n\omega_n) \pmod{p}.$$

$\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ は $\mathbb{F}_p$－1次独立であるから，$\Delta \neq 0$．故に $\Delta' \neq 0$．従って，$v_1 = \cdots = v_n = 0$．即ち $\mu_{ij} = 0 \ (\forall i, j)$，かつ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$．これは矛盾である。従って Claim が証明されたので，$|\mathcal{C}\ell(A)| \leqslant p^{\dim V}$ を得る。

§3. Affine Zariski surface の特異点とその解消

(1) d が，$0<d<p$ となる整数のとき，p/d の連分数展開

$$\frac{p}{d} = [b_1, \dots, b_s] := b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_s}}}$$

を考える。

(2) 上記の整数 $b_1, \dots, b_s$ は Euclid 互除法，

$$\lambda_0 = p,\quad \lambda_1 = d,\quad \lambda_{i-1} = b_i\lambda_i - \lambda_{i+1},\quad 0 \leq \lambda_{i+1} < \lambda_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

$$\lambda_s = 1,\quad \lambda_{s+1} = 0$$

によって得られる。

(3) 整数 $\mu_0, \dots, \mu_{s+1}$ を次の通りに定める，

$$\mu_0 = 0,\quad \mu_1 = 1,\quad \mu_{i+1} = b_i\mu_i - \mu_{i-1} \quad (1 \leq i \leq s),\quad 0 < \mu_i < \mu_{i+1}$$

$$\mu_{s+1} = p.$$

ここで，d' が $dd' \equiv 1 \pmod{p}$，$0<d'<p$ から定まる整数ならば，$p/d' = [b_s, \dots, b_1]$ で，$d' = \mu_s$ となることに注意しよう。

(4) 整数 α, β について，$\gamma_i := \gamma_i(\alpha, \beta)$ $(0 \leq i \leq s+1)$ を

$$\gamma_0 = p\alpha,\quad \gamma_1 = \beta + \alpha d,\quad \gamma_{i+1} = b_i\gamma_i - \gamma_{i-1}$$

で定めれば，$\gamma_i = \alpha\lambda_i + \beta\mu_i$ $(0 \leq i \leq s+1)$ となる。特に，$\beta + \alpha d \equiv 0 \pmod{p}$ ならば，$\gamma_i(\alpha, \beta) \equiv 0 \pmod{p}$ だから，

$$\nu_i(\alpha,\beta) := \frac{1}{p}\gamma_i(\alpha,\beta)$$

とおく。

補題 3.1. $k[x,y]$ の normal subalgebra $A := k[x,y] \cap k(x^p, y^p, y/x^d)$ と k-derivation $\delta = x\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}$ について、次の事柄が成立する：

(1) $A = k[x,y]^\delta$ で, $X := \mathrm{Spec}(A)$ は孤立特異点 $P = (x=0,\ y=0)$ を持ち, $X - \{P\}$ は正則である。

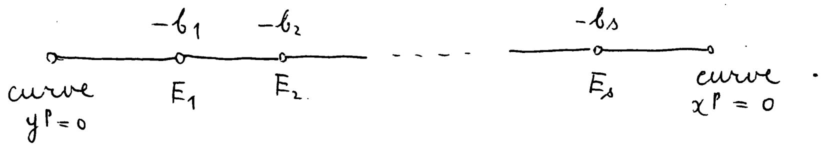
(2) $\{x^\beta y^\alpha \mid \alpha, \beta \geqslant 0,\ \beta + d\alpha \equiv 0 \pmod{p}\}$ は A の k-basis で,

$$A = k[x^p, x^{p-d}y, \dots, x^{r_t}y^t, \dots, y^p],\quad 0 \leqslant t \leqslant p,$$

$$dt = q_t p - r_t,\quad q_t \geqslant 1,\quad 0 \leqslant r_t < p$$

とかける.

(3) 特異点 P の minimal resolution は, 次のような例外集合のグラフを持つ：

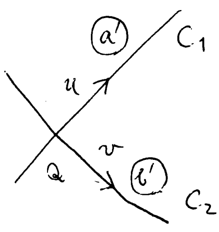


ゆえに, P は有理特異点 (rational singular point) である。但し, ○は正則有理曲線を表わす。

点 P の minimal resolution は, 標数 0 の場合 type (p, d) の cyclic quotient singularity のそれと同様の

議論で得られる。そこで，P は type (p, d) の quotient singularity を持つという。

ここで，体 K が正則曲面 V の函数体 $k(V)$ の次数 p の純非分離拡大体になっている場合を考えよう。S で，V の K における正規化を表わす。V の点 Q で完全交叉する閉曲線 C_1, C_2 を考え，Q の近傍で，$K = k(V)(w_1)$, $w_1 \in K$, $w_1^p = u^{b'} v^{a'} \tau$，$\tau \in (\hat{\mathcal{O}}_{Q,V})^*$ となっていると仮定する。但し，(u, v) は点 Q における V のパラメーター系で，C_2, C_1 がそれぞれ $u = 0$, $v = 0$ で定義されているもの，a', b' は整数とする。整数 a, b を $a' = q_1 p + a$, $b' = q_2 p + b$,



$0 < a, b < p$ で定め，$w = w_1 u^{-q_2} v^{-q_1}$ とおけば，$w^p = u^b v^a \tau$ となる。$d := d(a, b)$ を $0 < d < p$, $b + ad \equiv 0 \pmod{p}$ をみたす整数とすれば，$d(a, b) \cdot d(b, a) \equiv 1 \pmod{p}$ となる。S の，Q 上にある点（唯一つ）を P とかく。すると，次の結果が成立する。

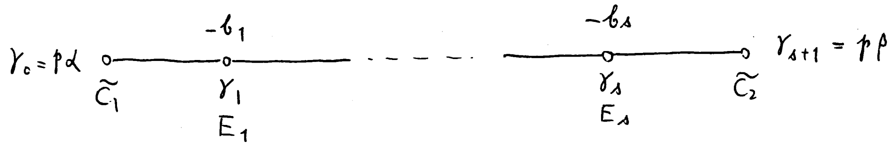
補題 3.2. (1) S は点 P で type (p, α) の quotient singularity を持つ.

(2) $\tilde{S}$ で, 特異点 P の minimal resolution で S から得られる normal surface を, $\sigma : \tilde{S} \to V$ でその自然な写像を, $\tilde{C}_i$ で C_i の proper inverse image を表わせば; 整数 α, β について,

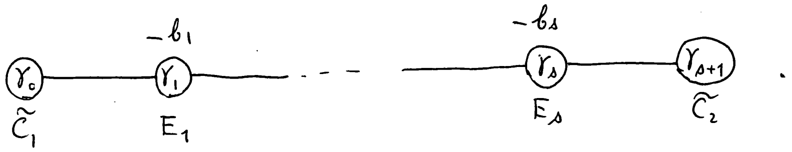
$$\sigma^*(\alpha C_1 + \beta C_2) = \gamma_0 \tilde{C}_1 + \gamma_1 E_1 + \cdots + \gamma_s E_s + \gamma_{s+1} \tilde{C}_2$$

$$\sigma^*(a C_1 + b C_2) = p(a \tilde{C}_1 + \nu_1 E_1 + \cdots + \nu_s E_s + b \tilde{C}_2)$$

が成立つ. $\sigma^*(\alpha C_1 + \beta C_2)$ の双対グラフを次のように書いたりする:



又は,



補題 3.3. $p \neq 2$, $p = 2l+1$ と仮定すると, 次の結果が成立する:

(1) $a = b$ の場合. $\alpha = s = p-1$, $b_1 = \cdots = b_s = 2$, $\nu_1 = \cdots = \nu_s = a$ で,

$$\sigma^*(C_1 + C_2) = p(\tilde{C}_1 + E_1 + \cdots + E_{2l} + \tilde{C}_2),$$

$$\sigma^*(C_2) = E_1 + 2E_2 + \cdots + 2\ell E_{2\ell} + p\tilde{C}_2 .$$

(2)　$a = p-1$, $b = \ell$ となる場合．$d = s = \ell$, $b_1 = 3$, $b_2 = \cdots = b_\ell = 2$, $\nu_1 = \cdots = \nu_\ell = \ell$ で，

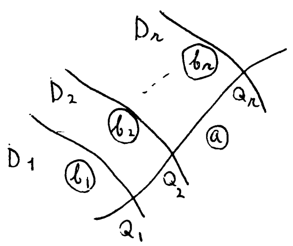
$$\sigma^*(C_1 + (\ell+1)C_2) = p(\tilde{C}_1 + E_1 + 2E_2 + \cdots + \ell E_\ell + (\ell+1)\tilde{C}_2),$$

$$\frac{1}{p}\sigma^*(C_1 + (\ell+1)C_2) :$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & -3 & & -2 & & & -2 & & \\ 1 & — & 1 & — & 2 & — & \cdots\ — & \ell & — & \ell+1 \\ \tilde{C}_1 & & E_1 & & E_2 & & & E_\ell & & \tilde{C}_2 \end{array}$$

となる。

上記の場合よりも，多少複雑な場合を考えよう。V, K は上記の通りとして，C を V 上の完備正則曲線，$D_1, \ldots, D_r$ を下の図のように C に交わる曲線とする：



但し $0 < a, b_1, \ldots, b_r < p$.

次の条件(1),(2),(3)が成立していると仮定する。

(1)　C 上の任意の点 Q の近傍で，$K = k(V)(w)$, $w \in K$ とおけて，曲線 C はある局所パラメーター系

(u,v) の一つの座標軸 u (即ち $v=0$) になっている。

(2) $Q \neq Q_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ ならば、$w^p = v^a \tau$, $\tau \in (\hat{\mathcal{O}}_{Q,V})^*$ とかける。

(3) $Q = Q_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ ならば、Q の近傍で、D_i は $u=0$ で定義され、$w^p = u^{b_i} v^a \tau$, $\tau \in (\hat{\mathcal{O}}_{Q,V})^*$ とかける。

このとき、K は C 上うまく分岐している (ramifies nicely) といい、$(a, b_1, \ldots, b_r)$ をその分岐データと呼ぶ。S で、V の K における正規化を、$\tilde{S}$ で、S の C 上にある特異点すべての minimal resolution から得られる normal surface を、$\sigma : \tilde{S} \longrightarrow V$ その自然な写像を表わす。

補題 3.4. (1) S の Q_i 上にある点を P_i とすれば、S は点 P_i で type (p, d_i) の quotient singularity をもち、S は C 上それ以外の点で正則。但し、$b_i + a d_i \equiv 0 \pmod{p}$, $0 < d_i < p$.

(2) $\tilde{C}$ を、σ による、C の proper inverse image とすれば、$\tilde{C}$ は完備正則曲線で、$[k(\tilde{C}) : k(C)] = 1$.

(3) $(\tilde{C}^2) = \frac{1}{p}\left((C^2) - d_1 - \cdots - d_r\right)$.

(4) $\alpha = -(C^2)$, $\gamma = -(\tilde{C}^2)$ とおけば，特別な場合 γ は次のように定まる：

(i) $r = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0\ (p)$, $\gamma = \frac{\alpha}{p}$.

(ii) $r = 1 \Rightarrow b_1 \equiv a\alpha\ (p)$, $\gamma = \left[\frac{\alpha}{p}\right] + 1$.

(iii) $r = 2$, $\alpha \equiv \alpha'\ (p)$, $0 \leq \alpha' \leq 2$, $\alpha' < p \Rightarrow$

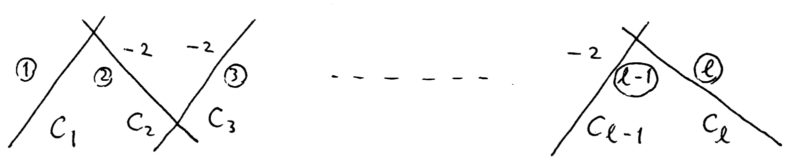
1° $\alpha' = 0$, $b_1 + b_2 = p$, $\gamma = \frac{\alpha}{p} + 1$

2° $\alpha' = 1$, $b_1 + b_2 \equiv a\ (p)$, $\gamma = \left[\frac{\alpha}{p}\right] + 1$

3° $\alpha' = 2$, $b_1 + b_2 \equiv 2a\ (p)$, $b_1 \neq b_2$, $\gamma = \left[\frac{\alpha}{p}\right] + 1$

4° $\alpha' = 2$, $b_1 = b_2 = a$, $\gamma = \left[\frac{\alpha}{p}\right] + 2$.

$p = 2l + 1$ として，Kは V の完備正則有理曲線 $C_1, \ldots, C_l$ 上に，次の分岐データをもって，うまく分岐している場合を考えよう：



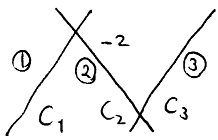
記号 S, V, $\tilde{S}$, $\sigma : \tilde{S} \to V$ は上記の通りとし，$\tilde{C}_i$ で C_i の σ による proper inverse image を表わす．$(\tilde{C}_1^2) = (\tilde{C}_l^2) = -1$ と仮定すれば，次の結果が成立する．

補題 3.5. (1) $(\tilde{C}_i^2) = -1$ $(1 \leq i \leq l)$.

(2) $\tilde{C}_1 \cup \sigma^{-1}(C_2 \cup \cdots \cup C_l) \cup \tilde{C}_l$ は $\tilde{S}$ 上の第1種例外曲線. 即ち, 1つの正則点に contract できる.

(3) $\tilde{C}_1 \cup \sigma^{-1}(C_2 \cup \cdots \cup C_l) \cup \tilde{C}_l$ を contract すると, 右端(即ち, $\tilde{C}_l$ に交わる端点)には, 丁度 l 回既約な第1種例外曲線が現われる。

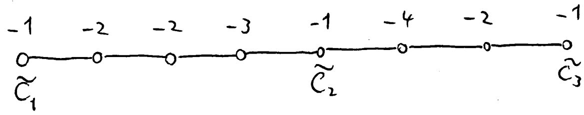
例 $p = 7$, $l = 3$ の場合.



$d(1,2) = 5$, $\frac{7}{5} = [2, 2, 3]$

$d(2,3) = 2$, $\frac{7}{2} = [4, 2]$,

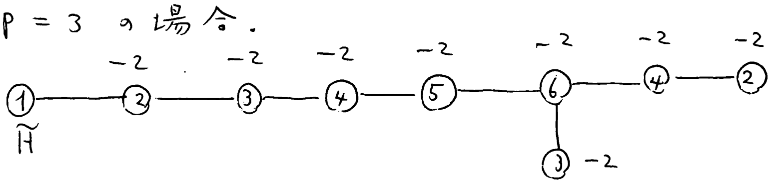
$\tilde{C}_1 \cup \sigma^{-1}(C_2) \cup \tilde{C}_3$:



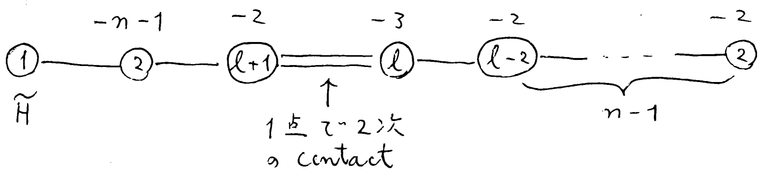
.

補題 3.6. $p = 2l+1$ の場合. $X = \mathrm{Spec}(k[\xi, \eta]) \cong \mathbb{A}^2_k$, $K = k(X)(\varsigma)$, $\varsigma^p = \eta^2 + \xi^{p+2}$, S = X の K における正規化, $\tilde{S}$ = S から, 点 $Q = (\xi = 0, \eta = 0)$ 上にある S の特異点の minimal resolution から得られる normal surface, $\sigma : \tilde{S} \to X$ その自然な写像, H = $\xi = 0$ で定まる X の曲線, とする. すると $\sigma^*(H)$ は次の双対グラフを持つ。

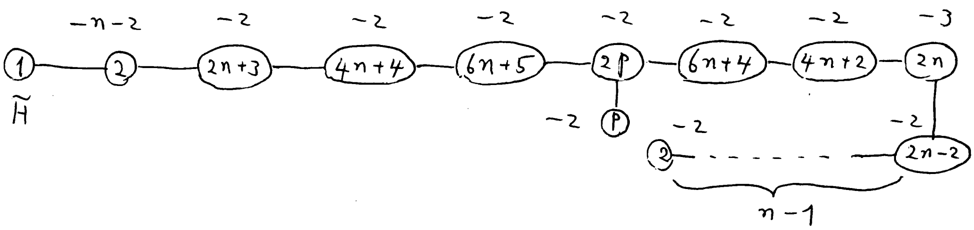
(1). $p = 3$ の場合.



(2) $p = 4n+1$ $(\ell = 2n)$ の場合.



(3) $p = 4n+3$ $(\ell = 2n+1,\ n \geqslant 1)$ の場合.



§4. 曲面 $w^p = (u^p v^p + 1)u + v^{p+1}$ $(p > 2)$ について.

$A := k[x^p, y^p, (x^p y^p + 1)x + y^{p+1}] \subset k[x, y]$,

$X := \mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{A}^3_k := \mathrm{Spec}(k[u, v, w])$

$$\left\{\begin{array}{l} x^p \longmapsto u \\ y^p \longmapsto v \\ (x^p y^p + 1)x + y^{p+1} \longmapsto w \end{array}\right.$$ により $w^p = (u^p v^p + 1)u + v^{p+1}$.

$\delta = y^p \frac{\partial}{\partial x} - (x^p y^p + 1)\frac{\partial}{\partial y}$ とおけば, $\delta^p = 0$, $A = k[x, y]^\delta$ かつ $I(\delta) = k[x, y]$. ゆえに, A は正則. しかし, A は素元分解環であるが, 多項式環ではない.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を4枚の affine 平面 U_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ で覆う:

$U_0 = \mathrm{Spec}(k[u, v])$, $U_1 = \mathrm{Spec}(k[x, v])$, $U_2 = \mathrm{Spec}(k[u, y])$, $U_3 = \mathrm{Spec}(k[x, y])$, 但し, x, y は上記のものとは

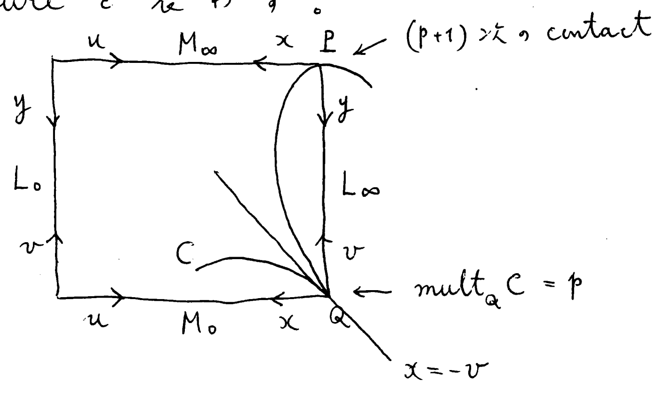
違い（記号の濫用），$x = 1/u$，$y = 1/v$ で与えられる。Affine surfaces X_i $(0 \leq i \leq 3)$ を，

$$X_0 = \mathrm{Spec}\left(k[u, v, w_0]/\left(w_0^p - \{(u^p v^p + 1)u + v^{p+1}\}\right)\right),$$
$$X_1 = \mathrm{Spec}\left(k[x, v, w_1]/\left(w_1^p - x^{p-1}\{(v^p + x^p) + x^{p+1}v^{p+1}\}\right)\right),$$
$$X_2 = \mathrm{Spec}\left(k[u, y, w_2]/\left(w_2^p - y^{p-1}\{(u^p + y^p)uy + 1\}\right)\right),$$
$$X_3 = \mathrm{Spec}\left(k[x, y, w_3]/\left(w_3^p - x^{p-1}y^{p-1}\{(1 + x^p y^p)y + x^{p+1}\}\right)\right)$$

で定義し，貼り合わせのデータ

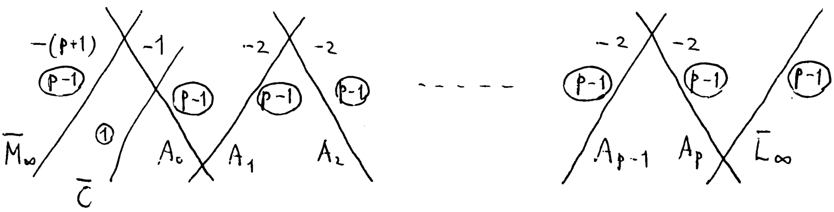
$$u = 1/x,\quad v = 1/y,\quad w_1 = x^2 w_0,\quad w_2 = y^2 w_0,\quad w_3 = x^2 y^2 w_0$$

を使って貼り合わせ，完備曲面 $S = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を得る。C で曲線 $(u^p v^p + 1)u + v^{p+1} = 0$ の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に於ける closure を表わす。

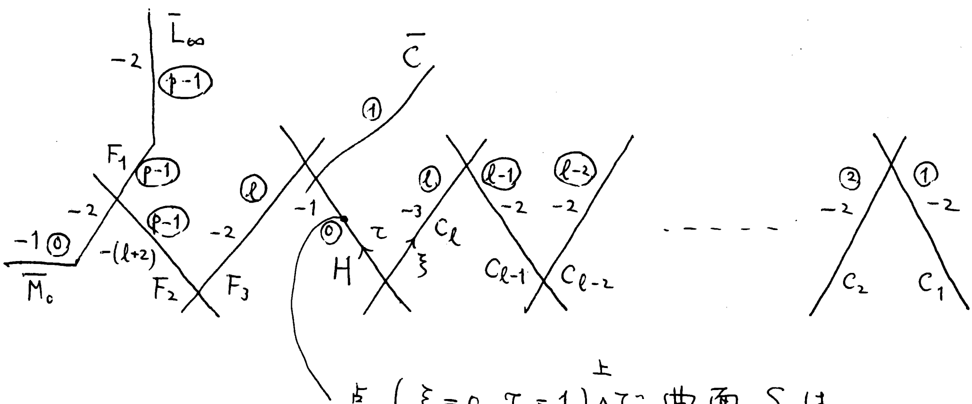


ここで，$L_0, L_\infty, M_0, M_\infty$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の generator を表わし，linear pencil $|L_0| = |L_\infty|$ を Λ で表わす。点 P, Q で，適当な blowing-up を繰り返して次の図形を得る。

(1) 曲線 M_∞ に center をもつ blowing-up を P から始めて，次の図形をうる：



(2) 点 Q から始めて，曲線 C を正則にするように blowing-up を繰り返して，次の図形をうる：



点 $(\xi=0,\ \tau=1)$ 上で曲面 S は
$\zeta^p = \eta^2\varepsilon_1 + \xi^{p+2}\varepsilon_2$, $\eta = \tau - 1$
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は unit.

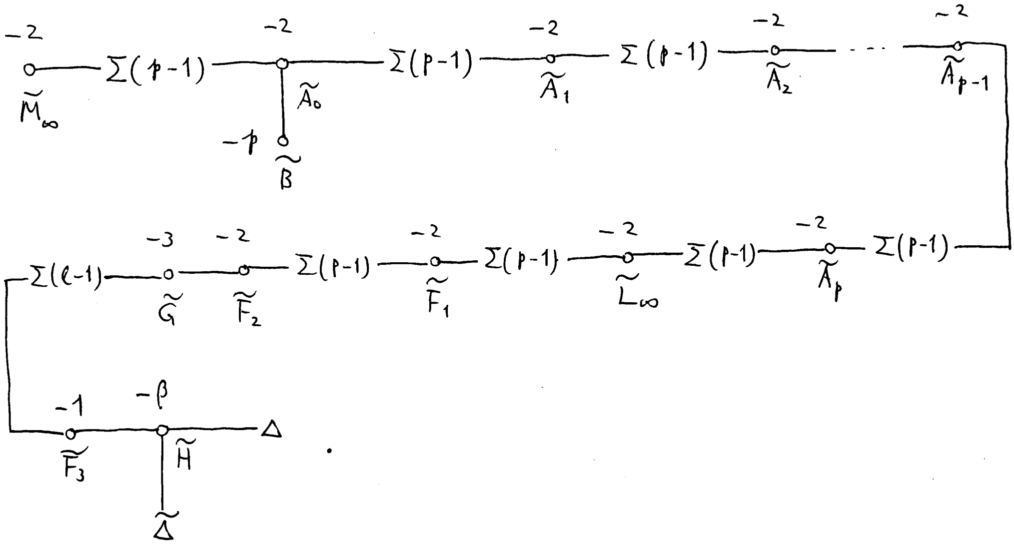
V = 以上の blowing-up で $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ から得られる曲面，S = V の K における正規化，$\tilde{S}$ = S のすべての特異点の minimal resolution で得られる正則射影曲面，$\sigma : \tilde{S} \longrightarrow V$ 自然な写像，$\tilde{\Lambda}$ = Λ の σ

による proper transform, とする. 又, $\bar{M}_\infty, A_0, \dots$ の σ による proper inverse image を $\tilde{M}_\infty, \tilde{A}_0, \dots$ 等で表わす.

<u>補題</u> 4.1. 曲線(の集合),

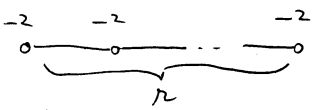
$$\bar{M}_\infty \cup A_0 \cup \dots \cup A_p \cup \bar{L}_\infty \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup H \cup C_\ell \cup \dots \cup C_1$$

の set-theoretic inverse image (σ による) は次の双対グラフを持つ:



.

但し, (1) $\beta > 0$, (2) $\tilde{\Delta} = \sigma^{-1}(C_1 \cup \dots \cup C_\ell)$, (3) $\Sigma(r)$:



, (4) Δ は補題 3.6 の $\tilde{H}$ を除いたグラフ. ○はすべて正則有理曲線である.

Γ で $\tilde{\Lambda}$ の general member を，Γ_∞ で Λ の L_∞ に対応する $\tilde{\Lambda}$ の member を表わす。

<u>補題</u> 4.2. (1) Γ は既約有理曲線で，その算術種数 $p_a(\Gamma)$ は $p(p-1)/2$ に等しい。

(2) Γ は唯1つの cuspidal singular point を曲線 $\tilde{M}_0$ 上に持ち，その multiplicity sequence は $(p, 1, \cdots)$. ゆえに $\tilde{M}_0$ は動く特異点の locus.

(3) $\tilde{M}_\infty$ は $\tilde{\Lambda}$ の cross-section.

さて，補題 4.1 のグラフで，$\tilde{\Delta}$ は第1種例外曲線に相当し（補題 3.5），したがって contract できる。同様に，$\tilde{F}_3$ と $\tilde{F}_3$ と $\tilde{G}$ の間にある $\Sigma(\ell-1)$ も contract できる。これらをすべて contract すると，補題 4.1 のグラフで，$\tilde{F}_2$ と Δ の間は次のように変わる：

$$\underset{\tilde{F}_2}{\overset{-2}{\circ}} \text{———} \underset{\tilde{G}}{\overset{-2}{\circ}} \text{———} \underset{\tilde{H}}{\overset{-\alpha}{\circ}} \text{———} \Delta \quad , \qquad \alpha = -(\tilde{H}^2) = 3 .$$

この contraction で，$\tilde{S}$ から得られる曲面を W とする。記号が複雑になるが，

$\tilde{M}_\infty$ と $\tilde{A}_0$ の間の $\Sigma(p-1)$ の既約成分を $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_{p-1}$ で，

2)

$\tilde{A}_i$ と $\tilde{A}_{i+1}$ の間の $\Sigma(p-1)$ の既約成分を $\tilde{A}_{i1},\ldots,\tilde{A}_{ip-1}$ で，$\tilde{F}_i$ と $\tilde{F}_{i+1}$ の間の $\Sigma(p-1)$ の既約成分を $\tilde{F}_{i1},\ldots,\tilde{F}_{ip-1}$ で表わすことにすれば（但し，$\tilde{F}_0=\tilde{L}_\infty$），次の結果を得る。

補題 4.3. (1) $$T_\infty = \sum_{j=1}^{p-1} j\tilde{B}_j + \tilde{B} + p\Big\{\sum_{i=0}^{p}\Big(\tilde{A}_i + \sum_{j=1}^{p-1}\tilde{A}_{ij}\Big) + \tilde{L}_\infty + \sum_{j=1}^{p-1}\tilde{F}_{0j} + \tilde{F}_1 + \sum_{j=1}^{p-1}\tilde{F}_{1j} + \tilde{F}_2 + \tilde{G} + \sigma^*(H)\Big\}.$$

(2) $$K_W \sim \delta\tilde{M}_\infty + \sum_{j=1}^{p-1}\beta_j\tilde{B}_j + \beta\tilde{B} + \sum_{i=0}^{p}\Big\{\alpha_i\tilde{A}_i + \sum_{j=1}^{p-1}\alpha_{ij}\tilde{A}_{ij}\Big\} + \gamma_0\tilde{L}_\infty + \sum_{j=1}^{p-1}\gamma_{0j}\tilde{F}_{0j} + \gamma_1\tilde{F}_1 + \sum_{j=1}^{p-1}\gamma_{1j}\tilde{F}_{1j} + \gamma_2\tilde{F}_2 + \gamma_3\tilde{G} + \varepsilon\sigma^*(H) + D',$$

$\delta = (p-2)(p+1)$, $\beta_j = (j+1)\delta$ $(1\leq j\leq p-1)$,

$\beta = (p+2)(p-2)$, $\alpha_i = (p+1)\delta - ip(p-2)$ $(0\leq i\leq p)$,

$\alpha_{ij} = (p+1)\delta - (ip+j)(p-2)$ $(0\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p-1)$,

$\gamma_0 = (p+1)\delta - p(p+1)(p-2) = \delta$,

$\gamma_{0j} = \delta - j(p-2)$ $(1\leq j\leq p-1)$,

$\gamma_1 = p-2$, $\gamma_{1j} = -(j-1)(p-2)$ $(1\leq j\leq p-1)$

$\gamma_2 = -(p-1)(p-2)$, $\gamma_3 = -p(p-2)$, $\varepsilon = -(p+1)(p-2) = -\delta$,

$D' = \Delta$ の成分で support される divisor.

実は，計算が少々面倒であるが，これらの情報から，$|K_W|\neq\phi$，かつ (K_W^2) は §1 で与えられた

値を取ることを示すことができる。

紙数もつきたので立ち入らないが，$p=2$ の場合，曲面 $w^2=(\alpha(u^2)v^2+1)u+v^3$, $\alpha(u)\in k[u]-k[u^2]$ についても，同様の議論をすることができて，§1の結果を得る．計算は面倒にみえるが，同じ趣旨の議論で，unirational quasi-elliptic surface，又は genus 2 の quasi-hyperelliptic の pencil をもつ曲面に関する分類結果（cf. Miyanishi [5]）も得ることができる．実は，計算はずっと容易である．

文献

[1]. A. Fujiki: On resolutions of cyclic quotient singularities. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1974), 293-328.

[2] R. Ganong: Plane Frobenius Sandwiches, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] R. V. Gurjar: Projective modules on subrings of polynomial rings. Univ. of Chicago, Ph.D. thesis, 1979.

[4] F. Hirzebruch: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen, Math. Ann. 126 (1953), 1-22.

[5] M. Miyanishi : Lectures on curves on rational and unirational surfaces. Tata Inst. Fund. Res. 1978.

[6] M. Miyanishi : Regular subrings of a polynomial ring. Osaka J. Math. 17 (1980).

[7] M. Miyanishi and P. Russell : Purely inseparable coverings of exponent one of the affine plane, to appear.

[8] P. Samuel : On unique factorization domains. Tata Inst. Fund. Res. 1964.

Weak normality と forms of $R[x]$

広島大　伊藤 史朗

被約なネーター環の有限拡大 $R \subseteq S$ について次の主張を考えてみよう。

$(*)_n$　R-algebra A で $S \otimes_R A$ がある階数 n の射影 S-加群 L の symmetric algebra $\mathrm{Sym}_S(L)$ と S-algebra として同型であれば, A 自身, ある階数 n の射影 R-加群 L_0 の Symmetric algebra $\mathrm{Sym}_R(L_0)$ と R-algebra として同型。

（n は自然数）

もちろん $(*)_n$ は一般には正しくはないのであるが、S が R の Galois 拡大のときを考えてみると次のことが知られている。　まず, $(*)_1$ は常に正しい。 $(*)_2$ については R に適当な条件をつければ正しい。（これらについては [2] を見よ。）　R についての条件なしで $(*)_2$ が成立するかどうかは現在のところ不明。 当然 $(*)_n$ について

も不明。

Galois拡大の場合でも以上のような状態であるので、問題を少し変えて、$(*)_1$ が常に成立するような拡大 $R \subseteq S$ を特徴付けることを考えてみる。

例1。もし $a^2, a^3 \in R$, $a \notin R$ となる S の元 a が存在するような時は $A = R[X + aX^2, a^2X^3, a^3X^4]$ という $S[X]$ の部分環を考えると $S \otimes_R A$ は（S-algebraとして）$S[X]$ に同型であるが、A は階数1の射影 R-加群の symmetric algebra とは同型ではない。

例2。ある素数 p と S の元 a が存在して、$a^p, pa \in R$, $a \notin R$ となっているときは、$p^n R[a] \subseteq R$ となる自然数 n を1つ選んでおいて $A = R[x, y]/(y+ax)^{p^n} - x$ とおくと、これも例1における A と同様の性質をもつ R-algebra となる。

従って拡大 $R \subseteq S$（R, S 共に被約なネーター環で, S は有限 R-加群）が $(*)_1$ を満足すれば次の2条件をも又満足する。

(a) $a \in S$, $a^2, a^3 \in R \Rightarrow a \in R$。

(b) $a \in S$, $\exists p$ 素数 $a^p, pa \in R \Rightarrow a \in R$。

ところで Andreotti - Bombieri が [1] において weakly normal な環の拡大という概念を考えているが、実は上の2条件はこのような環の拡大の特徴付けを与えるのである。

命題1. 環の(有限)拡大 $R \subseteq S$ において、R が S で weakly normal であるための必要十分条件は (a)(b) の2条件が成立することである。

(証明は略す。)

逆に R が S で weakly normal (以後 WN と略す) であれば $(*)_1$ が成立するかという問題を考えてみる。まず R が体の場合を考えてみると次のようになる。S は有限ケの R の有限代数拡大体の直積 $\prod K_i$ であって、(R が S で WN であることから) $\cap K_i$ の元で R 上 purely-inseparable な元は R の元のみである。従って、このときは体上の1変数多項式環の form の理論より $(*)_1$ の成立することが導かれる。次に問題を R が体の場合に帰着させることを考える。その手法の概略を記

すと次のようになる。

最初に次の補題より $Ass_R(S/R)$ は一点からなるとしてよいことがわかる。

補題 2。　$R \subseteq S$ をネーター環の有限拡大，$Spec(R) = Z_0 \supset \cdots \supset Z_n$ を $Spec(R)$ の閉集合の列で，$Ass_R(S/R) \cap (Z_{i-1} - Z_i) = \{P_i\}$ $i = 1, \cdots, n$，$Ass_R(S/R) \cap Z_n = \phi$ となるもの，$S_i = \{a \in S \mid Supp\ R/R:_R a \subseteq Z_i\}$ とおく。このとき各 S_i は S の subring であって $S = S_0$，$S_n = R$，$Ass_{S_i}(S_{i-1}/S_i)$ は一点からなる。又、R が S で WN であれば各 S_i も S_{i-1} で WN。

一般に R-algebra A が symmetric algebra であるためには局所的にそうであれば良いことが知られている。我々の場合はもっと強く次の命題が成立する。

命題 3。　$R \subseteq S$ を被約ネーター環の有限拡大，A を R-algebra で $S \otimes_R A \cong S[X]$ なるものとする。このとき $A \cong Sym_R(L)$ $(\exists L \in Pic R) \Longleftrightarrow \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(S/R)$，$A_\mathfrak{p} \cong R_\mathfrak{p}[X]$。

さて、この命題3をみとめれば、 Rは局所環で $\mathrm{Ass}_R(S/R)$ はRの極大イデアル $\mathfrak{m}$ のみであるとして良いことになる。 Sは半局所環となっているので $S\otimes_R A \cong S[X]$, RはSで WN であることから $\mathfrak{m} = S$の Jacobson radical であってさらに $R/\mathfrak{m}$ は $S/\mathfrak{m}$ で WN である。 さて $A/\mathfrak{m}A$ は $R/\mathfrak{m}[X]$ の form であるので $A/\mathfrak{m}A = R/\mathfrak{m}[f]$ $(f \in S/\mathfrak{m}[X])$ となる。 $S[X]$の変数 X を適当にとりかえることにより $A = R[X]$ となることが示される。 従って

定理. 被約ネーター環の有限拡大 $R \subseteq S$ について、RがSで weakly normal であることと $(*)_1$ の成立することとは同値である。

以上の議論において 命題3 の役割は重要である。多変数の場合であっても 対応する命題が成立するのであろうか。 最後に

注意。 証明等は [3] を見て下さい。

参考文献

1. A. Andreotti and E. Bombieri, Sugli omeomorfism della varietà algebriche, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 23 (1969) 430-450
2. M. Brynski, Forms of the ring R[X] and R[X, Y], Glasgow Math. J. 13 (1972) 91-97
3. S. Itoh, On weak normality and symmetric algebras (preprint)
4. T. Kambayashi, M. Miyanishi and M. Takeuchi, "Unipotent algebraic groups", Lecture Notes in Math. 414
5. P. Russell, Forms of the affine line and its additive group, Pacific J. Math. 32 (1970) 527-539.
6. J. Yanik, Projective algebras, Journal of Pure and Applied Algebra 21 (1981) 339-358.

degree ≦ 6 の射影多様体の分類

東大教養　　藤田隆夫

次数が6以下の非特異な射影多様体を分類しすべて数え上げるのが本稿の目的である。基礎体は標数零の代数閉体の場合しか考えない。結果そのものはおおむね一般標数で成立ちそうに思われるが，一部微妙な点も残っている。さて，この問題は昔から興味をもたれて来たようであり，特に曲面の場合にはイタリア学派（Castelnuovo 等）によって，次数4以下の場合には Swinnerton-Dyer [Sw] によって（彼は特異点のある場合もこめて扱っている）解決されている。次数＝5, 6 の場合については最近 Ionescu と筆者によってそれぞれ独立にほぼ同様の結果が得られた。これら両者は共に不完全な部分があったが，合わせると完全な分類ができるのでそれを以下に記す。

まず記号を定める。

$M \subset \mathbb{P}^N$ は非特異射影多様体.

$n := \dim M$, $m := \operatorname{codim} M = N - n$.

$d := \deg M$, $\Delta := d - m - 1$.

$q := h^1(M, \mathcal{O}_M)$, 即ち M の irregularity。

$g :=$ M より超平面切断を次々と取って得られる曲線の種数。sectional genus と呼ばれる。

ここで次の仮定をする。

(*) 自然な制限写像 $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \to H^0(M, \mathcal{O}_M(1))$ は bijective.

この仮定は半ば技術的なものであって，一般の場合の分類は(*)が満たされる場合に帰着できる。実際，もし(*)が injective でなければ，M を含む超平面が存在するから，$\mathbb{P}^N$ をこれにとりかえて考えればよい。(*)が surjective でなければ，M の別の embedding $M \cong M' \subset \mathbb{P}^{N'}$ で，ある projection $\mathbb{P}^{N'} \to \mathbb{P}^N$ による M' の像がちょうど M になるようなものがある。特に，こうした embedding の取りかえによって $\deg M$ は変化しない。

(*) の下で Δ は偏極多様体 $(M, \mathcal{O}_M)$ の Δ 種数 (cf. [F1] etc). に一致する。一般に $\Delta \geq 0$ であることはよく知られている。以下で見るように，余次元 m が大きければ Δ が小さくなりいろいろな一般論が適用できる。$m \leq 2$ くらいならそれはまたそれなりに扱える，という次第で $d \leq 6$ なる分類が完成するのである。

用語をいくつか定める。

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ から多様体 T への写像 f でそのファイバーがすべて $\mathbb{P}^N$ の線型部分多様体になるようなものがあるとき，X を T-scroll と呼ぶ。$f_* \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{E}$ は T 上の局所自由層で，逆にまた X は $\mathbb{P}_T(\mathcal{E})$ として $\mathcal{E}$ から定まる。$\mathcal{O}_X(1)$ はその tautological line bundle に他ならない。T が $\mathbb{P}^1$ (resp. 非特異楕円曲線) のとき，X は rational (resp. elliptic) scroll と呼ばれる。

写像 $q: X \longrightarrow S$ が quadric fibration とは，層 $q_* \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{E}$ が S 上局所自由で，自然な埋めこみ $X \subset \mathbb{P}_S(\mathcal{E}) = P$ によって X が P 上の divisor になり，さらに q のすべての fiber が 2 次超曲面

になることをいう。

$\mathbb{P}^N$ の linear subspace L で $X \cap L = Y$ での交わりが transversal（従って特に $\mathrm{codim}\, Y = \mathrm{codim}\, X + \mathrm{codim}\, L$）になるものがあるとき，$Y$ は X の linear section であるという。

以下 d, m の値で場合わけして M の構造を記述する。節 (a, b) では $d = a$, $m = b$ の場合を考える。$\Delta \geqq 0$ だから $0 \leqq m \leqq d-1$ である。

(1, 0) M は linear。

(2, 1) 2次超曲面。

(3, 1) 3次超曲面。

(3, 2) Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ の linear section として得られる rational scroll。よって $n \leqq 3$。

(4, 1) 4次超曲面。

(4, 2) 2つの2次超曲面の完全交叉。

(4, 3) Veronese 曲面 $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2)) \subset \mathbb{P}^5$ か，又は Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7$ の linear section となる rational scroll。いずれにせよ $n \leqq 4$。

(5, 1) 5次超曲面。

(5, 2) $g=1$ or 2。これにより場合がわかれ

$g=1$: $n=2$ の elliptic scroll.

$g=2$: $q=0$ で M は $\mathbb{P}^1$ 上の quadric fibration の構造をもつ。さらに $n \leqq 3$。$n=2$ なら M は $\mathbb{P}^2$ 上の 8 個の点 $p_0, \cdots, p_7$ の blow-up として得られ, $\mathcal{O}_M(1) = 4H - 2E_0 - E_1 - \cdots - E_7$, ここで H は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の pull-back, E_i は p_i 上の例外曲線。$n=3$ なら $M \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}) = P$, そして M の $\mathrm{Pic}(P)$ における class は $2\alpha + \beta$, ここで β は $P \to \mathbb{P}^1$ による $\mathcal{O}(1)$ の引きもどし, α は P 上の tautological line bundle。

(5, 3) Plücker 座標で埋めこまれた Grassmann 多様体 $Gr(5, 2)$ ($\mathbb{R}P$ 5 5次元ベクトル空間の 2 次元部分空間全体) $\subset \mathbb{P}^9$ の linear section。よって特に $n \leqq 6$。

(5, 4) Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^9$ の linear section として得られる rational scroll。よって $n \leqq 5$。

(6, 1) 6 次超曲面。

(6, 2) $g = 3$ or 4。これにより場合がわかれ

$g=4$: (3, 2) 型の完全交叉多様体。

$g=3$： このとき $n \leq 3$ 。

$n=2$ なら M は $\mathbb{P}^2$ 上の 10 個の点 $P_1, \cdots, P_{10}$ の blow-up で得られ $\mathcal{O}_M(1) = 4H - E_1 - \cdots - E_{10}$ ，ここで H は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の pull-back，E_i は P_i 上の例外曲線。

$n=3$ なら M は $\mathbb{P}^2$ 上の scroll。対応する局所自由層 $\mathcal{E}$ は $\mathbb{P}^2$ 上 stable，rank 2，$c_1(\mathcal{E}) = 4$，$c_2(\mathcal{E})=10$ となる。（このような M は実際存在する）。

(6, 3)　$g = 1$ or 2。これにより場合がわかれ

$g=1$： $n=2$ の elliptic scroll。

$g=2$： $q=0$ で M は $\mathbb{P}^1$ 上の quadric fibration の構造を持つ。さらに $n \leq 3$。$n=2$ なら M は $\mathbb{P}^2$ 上の 7 点を blow-up して得られ，(5, 2) の場合と同様に $\mathcal{O}_M(1) = 4H - 2E_0 - E_1 - \cdots - E_6$ となる。

$n=3$ なら M は Segre variety $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の double covering となり，その branch locus は bidegree (2, 2) の非特異な divisor (on $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$) である。

(6, 4)　このとき $n \leq 4$。

$n=4$： Segre variety $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$.

$n=3$： 上記の hyperplane section（これはまた tangent bundle に対応する $\mathbb{P}^2$-scroll でもある） または

Segre variety $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^7$。

(6, 5) Segre variety $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^5\subset\mathbb{P}^{11}$ の linear section として得られる rational scroll。よって $n\leqq 6$。

以上.

証明のあらすじ.

$m\leqq 1$ の場合は trivial。

$\Delta=d-m-1=0$ のときは次の古典的結果がある：なお，$\Delta=0$ と $g=0$ とは同値。

定理. $\Delta=0$ となるのは次のうちどれか。

i) linear submanifold。 $d=1$.

ii) 2次超曲面。 $d=2$.

iii) rational scroll。 $d\geqq 3$。そしてこのとき M は Segre variety $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{d-1}\subset\mathbb{P}^{2d-1}$ の linear section。

iv) Veronese 曲面 $\mathbb{P}^2\subset\mathbb{P}^5$. $d=4$.

続いて $\Delta=1$ のときは次の結果がある：

定理. $\Delta=1$ のとき，$g=1$ で $\omega_M\cong\mathcal{O}_M(1-n)$。

このような M は Del Pezzo manifold と呼ばれ完全な分類がなされている (cf. [F2], [F4])。

以上により (5, 2), (6, 2), (6, 3) の場合を除き片づいた。(5, 2) と (6, 3) は以下の如くほぼ同様

に扱える。$\Delta=2$ に注意。

Step 1. $g=1$ or 2。

これは [F 2], Th. 4.1 を用い容易に示せる。

Step 2. $g=1$ なら elliptic scroll で $n=2$.

略証 elliptic scroll になることは次元に関する帰納法で示せる。elliptic curve 上の vector bundle の理論によって $n\geqq 3$ が不可能なことがわかる。

Step 3. $g=2$, $n=2$ なら M は rational surface, $\mathbb{P}^2$ の $13-d=r+1$ コの点の blow-up であり $\mathcal{O}_M(1)=4H-2E_0-E_1-\cdots-E_r$ となる。

これは古典的な Castelnuovo の結果。証明には $\omega_M(1)$ の section 達で定義される rational map (adjunction map と呼ぶ) を調べる。

Step 4. $g=2$ なら M は $\mathbb{P}^1$ 上の quadric fibration をもつ。

略証。$\omega_M(n-1)$ により定まる rational map (これが一般に adjunction map と呼ばれる) f を考える。M の linear section としてでてくる曲線 C に対し, f の C への制限は C の canonical

map に他ならない。C は種数 2 で hyperelliptic。そこで，Step 3 を補助とし次元に関する帰納法で f が quadric fibration となることが示せる。
$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = \omega_M(n-1)$ であることに注意。

Step 5. $M \subset P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ となるわけだが，$\mathcal{E}$ が $\mathbb{P}^1$ 上の vector bundle としてどのように line bundle の直和に分解するか調べる。次に Pic(P) における M の class を求める。これらの計算は比較的簡単。

Step 6. 上により $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ とその上のある linear system Λ が定まるが，その Λ の member で M としてふさわしいもの（非特異であるか，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の tautological line bundle の制限が very ample になっているか，etc）が存在するかどうか吟味する。何らかの付加的構造があるかどうかも調べる。

以上のようにして (5, 2) と (6, 3) が片づく。(6, 2) が最後に残る。$\Delta = 3$ に注意。

$g > 3$ なら (3, 2) 型完全交叉であることは次元に関する帰納法で $n = 1$ に帰着させる。

$g = 1$ だと M は elliptic scroll，$g = 2$ だと M

は種数2の曲線上のscrollになることが次元に関する帰納法により$n=2$の場合に帰着させて示せる（$n=2$ではCastelnuovoが既にやっている)。ところが一方これらcurve上のvector bundleの理論を用いると$(d,n)=(6,2)$とはなり得ないことがでてくる（詳細は省略）。

以上により$g=3$としてよい。この際も上と同様にscrollにはならない（dが小さ過ぎる!)。そこで，Castelnuovoの結果によって，$n=2$ならばMは(6,2)で述べた構造をもつ（このような曲面はBordiga surfaceと呼ばれている）。特にadjunction mapは$\mathbb{P}^2$への双有理写像となる。また，$\mathcal{O}_M$の$\mathbb{P}^4$におけるminimal resolutionが

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4)^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-3)^{\oplus 4} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow 0$$

となることも示せる。

$n=3$ならばadjunction map（$\omega_M(2)$で定まる有理写像）によりMが$\mathbb{P}^2$上のscrollになることが示せる。$\mathcal{O}_M$のminimal resolutionは$n=2$の場合と同様。Peskine-Szpiroの結果によればこのようなMは実際存在する。

$n \geqq 4$ でも adjunction map によりやはり M は $\mathbb{P}^2$-scroll になる。ところが，一方，Barth-Ogus 型の generalized Lefschetz Th. によれば Pic(M) は $\mathcal{O}_M(1)$ で生成される。これは矛盾。

こうして (6, 2) も片づく。

備考とコメント。

1. 結果的には $n \geqq 2$ で $g \neq 0$ となるのは (5, 2) と (6, 3) の 2 次元 elliptic scroll だけ。

2. 完全交叉でないものには必ず n に上限がある。もっともこのこと自体は一般的に証明されている

3. $d = 7$ のときは (7, 2) と (7, 3) の場合を除き解決されている。一般に $\Delta \leqq 2$ の場合の分類はきちんとできている。(cf. [F0])

4. (*) の仮定が成立せず $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_M(1))$ が全射でないときは，$\mathcal{O}_M(1)$ の定める完備線型系で埋めこみ直したものを M' とし $m' = \operatorname{codim} M' = h^0(M, \mathcal{O}_M(1)) - n - 1$ とすると $\deg M' = \deg M = d$ で M' に対しては仮定 (*)

が成立つ。このときMはある射影によるM′の同型像になっているから，象徴的にこのような現象を $(d, m') \longrightarrow (d, m)$ と表わすことにしよう。さて，このようなことが起こる場合は実は案外少ない。

定理（Severi）．$n=2$ で $(d, m') \longrightarrow (d, 2)$，$m'>2$ となるのは，$(M, \mathcal{O}_M(1)) \cong (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ と Veronese surface の場合に限る。特に $d=4$。

この系として $n=2$，$d \leqq 6$ で上のようなことが起こるのは，Veronese surface の場合を除けば，$(5,4) \rightarrow (5,3)$，$(6,4) \rightarrow (6,3)$，$(6,5) \rightarrow (6,3)$，$(6,5) \rightarrow (6,4)$ のどれかの場合に限られることがわかる。

定理（おおむね Scorza）．$n=3$ で $(d, m') \rightarrow (d, 3)$，$m'>3$ となるのは，Mが Del Pezzo manifold の場合に限られる．

この系として，$n=3$，$d \leqq 6$ で上のようなことが起こるのは，M′が Segre variety $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ の超平面切断になる $(6,4) \longrightarrow (6,3)$ の場合を除けば，$(6,5) \longrightarrow (6,4)$ に限られることがわかる。特に $d \leqq 5$ ではあり得ない．

$n=4$ では $(6,4)\to(6,3)$ が Segre variety $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ の場合に起こる。$(6,5)\to(6,4)$ が起こり得るかどうかはまだ確めていない。

$n\geqq 5$ で可能性のあるのは $(6,5)\to(6,4)$ だけであることが現在わかっているが，これが実際起こるかどうかは未確認である。ただし，問題としてはそう難しくないはず。

5. M に singularity を許せば問題はかなり難しくなる。現段階では $d\leqq 4$ のときと $\Delta=0$ のときはできているが，他は $\Delta=1$ の場合すら不完全である（この原稿を書いている途中に $\Delta=1$, $n=2$ の場合の完全な分類ができあがったところ）。事前に想像された如く，M の singularity はかなり限られたタイプのものになることがわかった。例えば，M が normal と仮定すると，M が cone になる場合を除き M の singularity は重複度 2 の Gorenstein singularity に限られる。この主張自身は $n\geqq 3$ でも成立つ。

なお，$\Delta=0$ で singular なのは cone になる場合だけである。

6. 基礎体の標数が正の場合にも結果は成立つと思われるが，$d \leqq 4$ ないし $\Delta = 0$ の場合を除けばほとんど未確認である。ひょっとすると何か微妙なことがあるかもしれないが，surface では ruled なものしか出てこないことでもあるし，恐らく例外は皆無に近いだろう。

参考文献

[B] Barth, W.; Transplanting cohomology classes in complex projective spaces. Amer. J. Math. 92 (1970) 951–967

[C1] Castelnuovo, G.: Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche Memorie Scelte, XII, Zanichelli Bologna (1939)

[C2] Castelnuovo G; Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere 3. Memorie Scelte, XIII, Zanichelli Bologna (1939)

[F1] Fujita, T.; On the structure of polarized varieties with Δ-genera zero. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 22 (1975) 103–115

[F2] Fujita, T; Defining equations for certain types of polarized varieties
Complex Analysis and Algebraic Geometry, p.165–173
Iwanami, 1977

[F3] ——; On the hyperplane section principle of Lefschetz
J. Math. Soc. Japan 32 (1980) p.153–169

[F4] ——; On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I & II.
J. Math. Soc. Japan 32 (1980) p.709–725 & 33 (1981) 415–434

[F0] ——: 偏極多様体のΔ-種数について
東大修士論文, 1974

[H] Hartshorne, R.; Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension
Proc. of Symp. in Pure Math. 29 (1975)

[I] Ionescu, P; An enumeration of all smooth projective varieties of degree 5 and 6.
Preprint Series in Math. 74, Institutul National Pentru Creaţie ştiinţifică şi tehnică, Bucureşti, 1981

[N] Nagata, M: On rational surfaces I.

Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), 32 (1960) 351-370

[O] Ogus, A.; Local cohomological dimension of algebraic varieties
Ann. of Math. 98 (1973) 327 – 365

[PS] Peskine C. & Szpiro L.; Liaison des variétés algébriques I., Inv. Math. 26 (1974) 271-302.

[So] Sommese, A.J.; Hyperplane sections of projective surfaces I - The adjunction mapping
Duke Math. J. 46 (1979) 377 – 401

[Sw] Swinnerton-Dyer H.P.F.; An enumeration of all varieties of degree 4, Amer. J. Math. 95 (1973) 403-418

[VV] Van de Ven, A.; On the 2-connectedness of very ample divisors on a surface,
Duke Math. J. 46 (1979) 403 – 407.

1

Proper surjective morphism における excellent property の descent について

高知大理学部　小駒哲司

noether 環 R が quasi-excellent であるとは、次の2つの条件

1. R は G-ring である
2. R は J-II である

を満たすことである。ここで R が G-ring であるとは、その formal fiber $\widehat{(R_{\mathfrak{p}})} \otimes_R \kappa(\mathfrak{q})$ ($\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, R$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$) が $\kappa(\mathfrak{q}) = R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{q}}$ 上 geometrically regular であることであり、R が J-II であるとは、任意の有限生成 R-algebra の regular locus が Zarisky 位相で open となることである。

locally noetherian scheme X が qusi-excellent とは X が quasi-excellent ring A_λ ($\lambda \in \Lambda$) による affine open set $U_\lambda = \mathrm{Spec}\, A_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) で cover されることである。G-scheme, J-II scheme なども同様に定義される。

さて、$f: X \longrightarrow Y$ が scheme X と Y の間の有限生成射であるとき、Y が quasi-excellent であれば、X も quasi-excellent となることは、ほとんど、定義から直ちに出て来ることである。

一方、X が J-II であれば、Y も J-II となることも、知られている結果から容易に導き出されるが、X が G-scheme であっても、Y は必ずしも G-scheme にはならないことを Greco が示した。[2] そして、彼は次のことを予想している。

予想 (Greco) $f: X \longrightarrow Y$ を locally noetherian scheme X と Y の間の proper surjective morphism とする。X が quasi-excellent であれば、Y も quasi-excellent となるであろう。

これについて、最近 B. Bellacini が標数 0 の場合に証明した。[1]

定理（Bellacini）もしYの標数が0（すなわち，$\mathbb{Q}$-scheme）であれば，Grecoの予想は正しい。

彼女の証明は、次の結果を使う。

イ．標数0のnoetherian scheme Xがquasi-excellentであれば，Xはresolution X'をもつ．（広中）

ロ．（標数0の）scheme Xがresolution X'をもてば，Xはquasi-excellentである。（Grothendieck [3]）

ここでXがresolution X'をもつとは，proper birational surjective morphism $X' \to X$であってX'がnon-singularなschemeとなるものが存在するときに言う。

Bellaciniの証明のideaを述べる。まず，Yはaffine schemeと仮定してよいから，この時Xはnoetherian schemeとなる。ChowのLemmaにより，X上projectiveなscheme X'で，$X' \to Y$がprojectiveとなるものが存在する。X'は

quasi-excellent となるから．はじめから X は Y 上 projective と仮定してよい。このとき，X は $S_0 = A$ ($Y = \mathrm{Spec}\, A$) となる graded ring $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ により $X = \mathrm{Proj}\, S$ となるが．graded ring S の考察により．実は X が Y 上 algebraic な場合に証明すればよいことが示される。このとき，Y 上 finite な scheme Y' で．$X \longrightarrow Y'$ が birational となるものがとれるが．Y' が quasi-excellent であれば．Y もそうなるから．はじめから $X \longrightarrow Y$ は birational と仮定してよい。

さて，X は resolution $X' \longrightarrow X$ をもつが．するとこのとき，$X' \longrightarrow Y$ は Y の resolution となって．Y が quasi-excellent となる。

以上見て来たように．Bellacini の証明は標数 0 が本質的であるし．J-II と G という条件を同時に X に与えねばならない。以下に我々は，標数に関係なく，又 open locus の条件無しで．formal fiber の性質が descent されることを示そう。

faithfully flat な環準同型で descent される，local な性質(P)，例えば regular, normal, reduced, Cohen Macaulay, Gorenstein, R_n, S_n 等々を考える。

定理. $f : X \longrightarrow Y$ を locally noetherian scheme X と Y の間の proper surjective morphism とする．もし、どの $x \in X$ についても、X の x での local ring $\mathcal{O}_{X,x}$ の formal fiber が geometrically に (P) であれば．Y についても同様の性質が成り立つ。

証明）．スタンダードな考察により．Y は local domain $(A, \mathfrak{m})$ により $Y = \operatorname{Spec} A$ と仮定してよく．また証明すべきことは、「A の完備化 $\hat{A}$ の素 ideal $\mathfrak{q}$ で $\mathfrak{q} \cap A = 0$ となるものについて．$\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ が性質(P)をもつ」ということであることがわかる。

一方，f は全射だから．Y の生成点に写る X の点 x が存在するが．X の代わりに．x で定義される X の integral な subscheme を考えるこ

とにより、はじめから X は函数体 L をもつ integral な scheme と仮定してよい。このとき L は f により、A を含む体とみなせる。

さて、$\mathfrak{q} \cap A = 0$ だから、$\mathfrak{q}(\hat{A} \otimes_A L) \neq (\hat{A} \otimes_A L)$ となり、$\mathfrak{q}(\hat{A} \otimes_A L)$ の minimal prime $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Spec}(\hat{A} \otimes_A L)$ をとれば、$\mathfrak{P}' \cap \hat{A} = \mathfrak{q}$ となる。今、C をその商体が L となる A-整域とすれば、$\hat{A} \otimes_A L$ は $\hat{A} \otimes_A C$ の局所化であるから、$\mathfrak{P}'$ は $X \times_Y \mathrm{Spec}\,\hat{A}$ のある点に対応する。$V(\mathfrak{P}')$ を $\mathfrak{P}'$ に対応する点で定義される $X \times_Y \mathrm{Spec}\,\hat{A}$ の閉集合とし、$V(\mathfrak{P}')$ の閉点 z を取る。仮定より $\hat{f} : X \times_Y \mathrm{Spec}\,\hat{A} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\hat{A}$ は閉写像となるから、$\hat{f}(z)$ は $\mathrm{Spec}\,\hat{A}$ の閉点、すなわち $\{\mathfrak{m}\hat{A}\}$ である。

$p : X \times_Y \mathrm{Spec}\,\hat{A} \longrightarrow X$ を X への射影とし、X の $p(z)$ での local ring を $(B, \mathfrak{n})$ とすれば、B は有限生成 A-algebra の局所化であるから、$\hat{A} \otimes_A B$ は noether 環となる。そして、$X \times_Y \mathrm{Spec}\,\hat{A}$ の z での local ring は、M を $M = \mathfrak{m}(\hat{A} \otimes_A B) + \mathfrak{n}(\hat{A} \otimes_A B)$ とおいたとき、$(\hat{A} \otimes_A B)_M$ であることがわかる。

さて，[3, IV Lemma (7.9.3.1)] により，
$(\hat{A}\otimes_A B)_M$ の完備化は，自然に B の完備化 $\hat{B}$ と同型となる。今，$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\cap(\hat{A}\otimes_A B)$ とおけば，
$\mathfrak{p}\cap B=0$, $\mathfrak{p}\subseteq M$ である。よって
$\mathfrak{p}(\hat{B}\otimes_B L)\neq\hat{B}\otimes_B L$ となるから，$\mathfrak{p}=(\hat{A}\otimes_A B)\cap\mathfrak{q}$ かつ $\mathfrak{q}\cap B=0$ となる $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}\hat{B}$ が存在する。そして，$\mathfrak{q}$ の取り方から，$\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ は formal fiber $\widehat{\mathcal{O}_{X,P(\mathfrak{z})}}\otimes_B L$ の局所化となり，性質(P) をもつ。

一方，$\hat{A}\otimes_A B$ は noether であったから，その局所化の完備化

$$(\hat{A}\otimes_A B)_M \longrightarrow \hat{B}$$

は，忠実に平坦となり，その局所化
$(\hat{A}\otimes_A B)_{\mathfrak{p}}\longrightarrow\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ も忠実に平坦となる。更に $\mathfrak{z}\cap K=0$ かつ $\mathfrak{p}\cap L=0$ であるから，(KはAの商体)
$\hat{A}_{\mathfrak{z}}\longrightarrow(\hat{A}\otimes_A B)_{\mathfrak{p}}$ は，平担射
$\hat{A}\otimes_A K\longrightarrow(\hat{A}\otimes_A K)\otimes_K L=\hat{A}\otimes_A L$
の局所化であり，忠実に平担となる。

結局，合成写像 $\hat{A}_{\mathfrak{z}}\longrightarrow\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ も忠実に平担となり，$\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ は性質(P) をもったから，$\hat{A}_{\mathfrak{z}}$

も性質(P)をもつことがわかる。

系　Grecoの予想は正しい。

証明）定理で、性質(P)に"regular"を当てはめれば、Gという性質がdescentすることがわかる。J-IIがdescentすることは知られているから、予想が成立する。

References.

[1]. Bellaccini, B. Proper morphisms and excellent schemes. (to appear).

[2]. Greco, S. Two theorems on excellent rings, Nagoya Math. J. vol. 60 (1976) 139-149

[3]. Grothendieck, A. and Dieudonne, J. Elements de Geometrie Algebrique. I. II. IV. Publ. Math. I.H.E.S.

Canonical module の局所化について.

愛媛大・理　青山陽一

(semi-) local ring と云う場合, noetherian は常に仮定するものとする。$\wedge$ で completion を示すことにする。R を commutative noetherian ring, M を finitely generated R-module, N を submodule of M とする。$\mathrm{Min}_R(M)$ = the set of minimal elements in $\mathrm{Supp}_R(M)$, $U_M(N) = \cap Q$ (Q は すべての primary components of N in M with $\dim M/Q = \dim M/N$ を動く) とおく。T を R-module, $\mathfrak{a}$ を ideal of R とする。$E_R(T)$ で injective envelope of T を, $H^i_{\mathfrak{a}}(T)$ で i-th local cohomology module of T with respect to $\mathfrak{a}$ を示すことにする。まず [7] に従って canonical module の定義を述べる。

<u>定義 1</u> ([7, Definition 5.6]). $(A, \mathfrak{m})$ local ring, $\dim A = d$ とする。A-module K が canonical module of A であるとは, $K \otimes_A \hat{A} \cong \mathrm{Hom}_A(H^d_{\mathfrak{m}}(A), E_A(A/\mathfrak{m}))$ なることと定義する。

canonical module は最初 Grothendieck [6, p.94] により complete local ring に対し定義され, module of dualizing differentials と呼ばれた。その後 [7] で上の定義が与えられた。(一般の local ring に対し定義されている) [3] において, local ring with dualizing complex に対し, canonical module が

定義され，dualizing module と呼ばれている。しかし，[6]において，dualizing module は local ring の residue class field の injective envelope を意味している。Cohen-Macaulay local ring 上の canonical module は，Sharp [11] の意味での，Gorenstein module of rank one である。

complete local ring A は canonical module K を持ち，K は functor $Hom_A(H^d_{\mathfrak{m}}(\ ),E_A(A/\mathfrak{m}))$ の表現加群である。($d=\dim A$，$\mathfrak{m}$ は A の maximal ideal)　即ち，

(2)　A-module M に対し，$Hom_A(H^d_{\mathfrak{m}}(M), E_A(A/\mathfrak{m})) \cong Hom_A(M,K)$ (functorial).

このノートでは次の問題を考える。

問題　Let A be a local ring with canonical module K and let $\mathfrak{p}$ be an element of $Supp_A(K)$. Then is $K_{\mathfrak{p}}$ a canonical module of $A_{\mathfrak{p}}$?

今までは，dualizing complex を持つ場合にのみ知られていたようである。但し，今のところ，dualizing complex を持たなくて canonical module を持つ local ring の例は知られていない様である。我々は上の問題に対し，次の様な形で答を与えることが出来る。

定理　$(A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ flat local hom. of local rings, T A-module とする。
$T\otimes_A B$ canonical module of B $\Rightarrow$ T canonical module of A.

canonical module について知られている結果をいくつか述べておく。

Let A be local ring of dimension d and with canonical module K.

(3.1) K は同型を除いて一意的であり，finitely generated A-module of dimension d である。(cf. [7, 5 Vortrag])

(3.2) A が Gorenstein local ring B の準同型像の場合，$K \cong \mathrm{Ext}_B^r(A, B)$，ここに $r = \dim B - d$ = the least integer i such that $\mathrm{Ext}_B^i(A, B) \neq 0$，従って $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K)$ に対し，$K_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の canonical module である。(cf. [7, 5 Vortrag])

(3.3) $\mathrm{Ass}_A(K) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \dim A/\mathfrak{p} = d\}$. (cf. [6, Proposition 6.6(5)])
従って次は同値である：(a) $\mathrm{Supp}_A(K) = \mathrm{Spec}(A)$. (b) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = d$. (c) A は quasi-unmixed ([8, p.124]).

(3.4) $\mathrm{ann}_A(K) = U_A(0)$ で，K は $A/U_A(0)$ の canonical module である。(cf. [6, Proposition 6.6(7)], [7, 5 Vortrag]) 従って次は同値である：(a) K は faithful. (b) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = d$. (c) A は unmixed ([8, p.82]).

(3.5) $\mathrm{Supp}_A(K)$ に含まれる prime ideals の極大鎖はすべて長さ d であり，$(U_A(0))_\mathfrak{p} = U_{A_\mathfrak{p}}(0)$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K)$。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K) \Leftrightarrow \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = d$. (cf. [8, p.125])

(3.6) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K)$, $\underline{x}$ subsystem of parameters for $A_\mathfrak{p}$, length $\underline{x} \leq 2 \Rightarrow \underline{x}$ は $K_\mathfrak{p}$-regular sequence. 特に K は (S_2) である。(cf. [3, Proof of Lemma 2.4])

(3.7) M を finitely generated A-module, $h_M : M \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, K), K)$ を natural *map* とする。

(3.7.1) $\mathrm{Ker}\, h_M = \{x \in M \mid \dim Ax < d\}$. (cf. [6, Proposition 6.6 (8)]) 従って $\dim M = d$ ならば, $\mathrm{Ker}\, h_M = U_M(0)$ で $U_M(0) \otimes_A \hat{A} = U_{\hat{A}}(0)$ である。

(3.7.2) h_M が *isomorphism* $\Leftrightarrow$ M が *equidimensional* で, $\hat{M}$ が (S_2) である.

(cf. [1, Proof of Proposition 2])

次の (3.8) においては *canonical module of A* の存在は仮定しない。

<u>(3.8)</u> A *local ring*, $A/U_A(0)$ が *canonical module* K を持つものとする。このとき, K (*as an A-module*) は *canonical module of* A である。

最初に, (S_2) の場合に<u>問題</u>を考える。方法は Foxby [4, §4], Reiten [10] の *trivial extension* に関する結果を一般化したものを使う。そのためには, Platte-Storch による *quasi-Gorenstein ring* の概念が必要である。

<u>定義4</u> ([9, §3]). *local ring* A が *quasi-Gorenstein ring* であるとは, *canonical module of* A が存在して *free* (従って *rank one*) なることと定義する。これは, $H^d_{\mathfrak{m}}(A) \cong E_A(A/\mathfrak{m})$ と同値である ($d = \dim A$, $\mathfrak{m}$ *maximal ideal of* A).

A *quasi-Gorenstein* $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ *quasi-Gorenstein* .

A *Gorenstein* $\Leftrightarrow$ A *quasi-Gorenstein Cohen-Macaulay*.

次の補題が我々の考察で重要な役割を演ずる。それは, Foxby [5, Theorem 1] の系である。

<u>補題 5.</u> $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ *flat local hom. of local rings* とする。

(イ) $B/\mathfrak{m}B$ *artin. Gorenstein* $\Rightarrow E_A(A/\mathfrak{m}) \otimes_A B \cong E_B(B/\mathfrak{n})$. (cf. [7, Lemma 6.15])

(ロ) T *A-module*, $T \otimes_A B \cong E_B(B/\mathfrak{n}) \Rightarrow T \cong E_A(A/\mathfrak{m})$, $B/\mathfrak{m}B$ *artin. Gorenstein.*

<u>命題 6.</u> $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ *flat local hom. of local rings*, $\mathfrak{m}B$ は $\mathfrak{n}$-*primary* とする。

B *quasi-Gorenstein* $\Leftrightarrow$ A *quasi-Gorenstein* かつ $B/\mathfrak{m}B$ *Gorenstein*.

(証明) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \otimes_A B \cong H^i_{\mathfrak{n}}(M \otimes_A B)$ *for A-module* M *and* $i \geq 0$ であるから, 補題5より主張を得る。//

<u>系 6.1.</u> A *quasi-Gorenstein local ring*, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とすると, $A_{\mathfrak{p}}$ *quasi-Gorenstein* で, $\forall \mathfrak{q}$ *min. prime of* $\mathfrak{p}\hat{A}$, $\hat{A}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ *Gorenstein* である。

<u>定理 7.</u> A *local ring*, $K \neq 0$ *A-module* とする。

$A \ltimes K$ *quasi-Gorenstein* $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ が (S_2) で, K が *canonical module of* A である。

(証明) 証明のためには, A *complete* としてよい。

$\Rightarrow$: *quasi-Gorenstein ring* は (S_2) だから, A も (S_2) である。A の *canonical module* は $\mathrm{Hom}_{A \ltimes K}(A, A \ltimes K) \cong \mathrm{ann}(K) \oplus K$ である ([7, Satz 5.12])。 *canonical module* の

自己準同型環は A に同型（[1, Proposition 2]）だから, *indecomposable* であり, $ann(K)=0$, K は A の *canonical module* である。

⇐: $A\ltimes K$ の *canonical module* は $Hom_A(A\ltimes K, K)$ で与えられる（[7, Satz 5.12]).

$Hom_A(A\ltimes K, K) \cong Hom_A(A, K)\oplus Hom_A(K, K) \cong K\oplus A$ (by [1, Proposition 2]) as A-modules であるが, $A\ltimes K$-modules としても同型であることが判り, 主張を得る。

⇐ の別証：（少し長いが, 他に書く機会もないので書かせて下さい。）

Assume that K is a canonical module of A. We put $B=A\ltimes K$ and $d=\dim A=\dim B$. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of A and $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\times K$. We have an exact sequence of B-modules (*) $0\to K\xrightarrow{j} B\xrightarrow{p} A\to 0$ where $j(x)=(0,x)$ and $p(a,x)=a$. From the exact sequence (*), we have an exact sequence (†) $H^i_{\mathfrak{n}}(K)\xrightarrow{H^i_{\mathfrak{n}}(j)} H^i_{\mathfrak{n}}(B)\xrightarrow{H^i_{\mathfrak{n}}(p)} H^i_{\mathfrak{n}}(A)$ for every $i\ge 0$. Because $\mathfrak{m}B=\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}K$ is an $\mathfrak{n}$-primary ideal and the exact sequence (*) splits when it is regarded as a sequence of A-modules by means of $f: A\ni a\mapsto (a,0)\in B$, the sequence (†) is a split exact sequence when it is regarded as a sequence of A-modules by means of f by virtue of [6, Corollary 5.7]. Hence we obtain an exact sequence of B-modules $0\to H^i_{\mathfrak{n}}(K)\xrightarrow{H^i_{\mathfrak{n}}(j)} H^i_{\mathfrak{n}}(B)\xrightarrow{H^i_{\mathfrak{n}}(p)} H^i_{\mathfrak{n}}(A)\to 0$ for every $i\ge 0$. Let $E=E_B(B/\mathfrak{n})$ and L a canonical module of B. From the above exact sequence for $i=d$, we have an exact sequence $0\to Hom_B(H^d_{\mathfrak{n}}(A),E)\xrightarrow{\cdot H^d_{\mathfrak{n}}(p)} Hom_B(H^d_{\mathfrak{n}}(B),E)\xrightarrow{\cdot H^d_{\mathfrak{n}}(j)} Hom_B(H^d_{\mathfrak{n}}(K),E)\to 0$. By (2), this exact sequence is equivalent to the exact sequence $0\to Hom_B(A,L)\xrightarrow{\cdot p} Hom_B(B,L)\xrightarrow{\cdot j} Hom_B(K,L)\to 0$. Since $Hom_B(A,L)$ is a canonical module of A by [7, Korollar 5.14], there is an A-isomorphism $\lambda: K\to Hom_B(A,L)$. The map λ is also a B-isomorphism. Since A is (S_2), the natural map $A\to$

$\mathrm{Hom}_A(K,K)$ is an isomorphism by [1, Proposition 2] and this map is a B-isomorphism. We have an isomorphism from $\mathrm{Hom}_A(K,K)$ to $\mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(A,L))$ induced by the map λ. The map $\mathrm{Hom}_B(A,L)\ni f\mapsto f(1)\in L$ induces an isomorphism from $\mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(A,L))$ to $\mathrm{Hom}_B(K,L)$. Let φ be the composition map : $A\to\mathrm{Hom}_A(K,K)\to\mathrm{Hom}_A(K,\mathrm{Hom}_B(A,L))\to\mathrm{Hom}_B(K,L)$. Then φ is a B-isomorphism. There is an element μ in $\mathrm{Hom}_B(B,L)$ such that $\mu\circ j=\varphi(1)$ because $\mathrm{Hom}_B(B,L)\xrightarrow{\circ j}\mathrm{Hom}_B(K,L)$ is surjective. Let ψ be a B-homomorphism from B to $\mathrm{Hom}_B(B,L)$ such that $\psi(1,0)=\mu$. Then we obtain the following diagram of B-modules and B-homomorphisms with exact rows :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\lambda"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\psi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(A,L) \arrow[r, "\circ p"] & \mathrm{Hom}_B(B,L) \arrow[r, "\circ j"] & \mathrm{Hom}_B(K,L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

It is easy to see that this diagram is commutative. Since λ and φ are isomorphisms, ψ is an isomorphism. Hence L is a free B-module of rank one, that is, B is quasi-Gorenstein. //

系 7.1 ([4, §4], [10]). A local ring, $K\neq 0$ A-module とする。

$A\ltimes K$ Gorenstein $\Longleftrightarrow$ A Cohen-Macaulay, K は A の canonical module.

さて我々は completion が (S_2) の場合に問題の答を得る。

系 7.2. Let A be a local ring with canonical module K and $\mathfrak{p}$ a prime ideal of A. Assume that $\hat{A}$ is (S_2). Then $K_\mathfrak{p}$ is a canonical module of $A_\mathfrak{p}$ and, for every minimal prime ideal of of $\mathfrak{p}\hat{A}$, $\hat{A}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ is a Gorenstein ring.

次に問題を (S_2) (completionが) の場合に帰着させるために, canonical module の自己準同型環を調べる。

A を local ring で canonical module K を持つものとする。$d = \dim A$, $U = U_A(0) = \mathrm{ann}_A(K)$, $H = \mathrm{End}_A(K)$ とおく。次の定理で重要な点は H の可換性である。そして, その証明は後藤四郎氏(日大・文理)の idea に基づく。

定理8. H に対し以下の事が成立する:

(イ) H は semi-local ring で finitely generated A-module である。また, $A/U \subseteq H \subseteq Q(A/U)$.

(ロ) H の prime ideals の極大鎖はすべて長さ d である。

(ハ) $\hat{H}$ は (S_2) である。

(ニ) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(H)$, $K_{\mathfrak{p}}$ は $H_{\mathfrak{p}}$ の canonical module。

(証明) $U = 0$ としてよい。

(イ) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = d$ に対し, 補題より $K_{\mathfrak{p}} \cong E_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \cong E_A(A/\mathfrak{p})$ を得る. S を non-zerodivisors の集合とする. K は torsion free ((3.3)) だから H も torsion free で, $H \hookrightarrow S^{-1}H \cong \mathrm{Hom}_A(S^{-1}K, S^{-1}K) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} \mathrm{Hom}_A(E_A(A/\mathfrak{p}), E_A(A/\mathfrak{p})) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} A_{\mathfrak{p}} = Q(A)$, total quotient ring。

他の主張は明らか。

(ロ) A unmixed, H integral over A だから, [8, (34.6)] より主張を得る.

(ハ) 容易。

(ニ) (3.7) の h_K が H-isomorphism であることはすぐに判り, 系7.2 と (い) より主張を得る ([7, Satz 5.12] を使って)。 //

<u>命題 9.</u> $(A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ flat local hom. of local rings, A の canonical module K が存在する, $\mathfrak{m}B$ は $\mathfrak{n}$-primary とする。 $K \otimes_A B$ canonical module of $B \Leftrightarrow B/\mathfrak{m}B$ Gorenstein.

(証明) $K \otimes_A B$ canonical module of $B \Leftrightarrow E_A(A/\mathfrak{m}) \otimes_A B \cong E_B(B/\mathfrak{n})$ を示し (少し計算すれば出来る), 補題5 を使う。 //

今や我々は最終目標に到達した。

<u>定理 10.</u> $(A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ flat local hom. of local rings, T A-module とする。

$T \otimes_A B$ canonical module of $B \Rightarrow T$ canonical module of A.

(証明) まず, A, B 共に complete, $\mathfrak{m}B$ は $\mathfrak{n}$-primary としてよい。

(I) B が (S_2) のとき: $A \ltimes T \to B \ltimes (T \otimes_A B)$ flat local hom. を考え, 命題6 と定理7 を使って主張を得る。

(II) 一般の場合: まず, $\mathrm{Ass}_A(T) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \dim A/\mathfrak{p} = \dim A\}$ を示し, $T_\mathfrak{p} \cong E_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(T)$ を証明する (補題5を使う)。これにより $\mathrm{ann}_A(T) = U_A(0)$ が判る。$U_B(0) = U_A(0)B$ だから, $U_A(0) = 0$, $U_B(0) = 0$ としてよいことが判る。$R = \mathrm{End}_A(T)$ とおく。定理8の証明より, R は定理8の (イ), (ロ) ((ハ)) に述べてある性質を持つことが判る。$S = \mathrm{End}_B(T \otimes_A B)$ とおく。$R \to S$ は faithfully flat である。定理8 と (I) より, R の max.

10

ideal $\mathfrak{r}$ に対し, $T_{\mathfrak{r}}$ は $R_{\mathfrak{r}}$ の canonical module である。K を A の canonical module とする。[7, Satz 5.12] より, $\mathrm{Hom}_A(R,K)_{\mathfrak{r}}$ は $R_{\mathfrak{r}}$ の canonical module だから, $T_{\mathfrak{r}} \cong \mathrm{Hom}_A(R,K)_{\mathfrak{r}}$。従って, $T \cong \mathrm{Hom}_A(R,K)$。 次に $0 \to A \xrightarrow{\text{nat.}} R \to Z \to 0$ ($Z = \mathrm{Coker}\, A \xrightarrow{\text{nat.}} R$) なる exact sequence を考える。$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leq 1$ をとる。(I) より, $T_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module である。よって, $A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} R_{\mathfrak{p}}$ であり, $Z_{\mathfrak{p}} = 0$。従って, $\mathrm{ht}\,\mathrm{ann}(Z) > 1$。(3.6) を使って, $\mathrm{Hom}_A(R,K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A,K) \cong K$。 //

定理10 の系として, 問題 の答を得る。

系 10.1. *Let A be a local ring with canonical module K and let $\mathfrak{p}$ be in $\mathrm{Supp}_A(K)$. Then $K_{\mathfrak{p}}$ is a canonical module of $A_{\mathfrak{p}}$ and, for every minimal prime ideal $\mathfrak{q}$ of $\mathfrak{p}\hat{A}$, $\hat{A}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{q}}$ is a Gorenstein ring.*

[1, Proposition 2] の証明を見直すことにより, 系10.1 を使えば, (3.7.2) において, $\wedge$ は要らないことが判る。従って, 次の命題を得る。

命題 11. (3.7) と同じ状況で以下は同値 (for M with $\dim M = d$):

(a) h_M が isomorphism。

(b) $\hat{M}$ が (S_2) で, M は equidimensional。

(c) M は (S_2) かつ equidimensional。

以上 詳しくは [2] を見て下さい。

問題を考えるにあたり，後藤四郎(日大·文理)，鈴木直義(静岡薬大)両氏との討論がたいへん有益であったことを記し，感謝の意を述べておきたい。

注意12. 最近，高知大の小駒氏は，*local ring with canonical module* は (S_2) ならば *equidimensional* であることを証明し，命題11 の 系10.1を使わない証明を与えられた。氏の結果と証明は，命題11 (b),(c) において，M が *dimension* $< d$ なる直和因子を持たない場合(この場合が本質的である)，*equidimensionality* の条件は不要であることを示している。従って，定理7の記述，系7.2 の仮定(，[1, Proposition 2] の記述) において，^ は要らない。

文 献

[1] Y. Aoyama, *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, Japan. J. Math. 6 (1980) 61～66.

[2] Y. Aoyama, *Some basic results on canonical modules*, Preprint.

[3] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten, *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I. H. E. S. 45 (1975) 193～213.

[4] H.-B. Foxby, *Gorenstein modules and related modules*, Math. Scand. 31 (1972) 267 ~ 284.

[5] H.-B. Foxby, *Injective modules under flat base change*, Proc. A. M. S. 50 (1975) 23 ~ 27.

[6] A. Grothendieck, *Local cohomology*, Lect. Notes Math. 41, Springer Verlag, 1967.

[7] J. Herzog, E. Kunz et al., *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[8] M. Nagata, *Local rings*, Interscience, 1962.

[9] E. Platte and U. Storch, *Invariante reguläre Differentialformen auf Gorenstein-Algebren*, Math. Z. 157 (1977) 1 ~ 11.

[10] I. Reiten, *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. A. M. S. 32 (1972) 417 ~ 420.

[11] R. Y. Sharp, *Gorenstein modules*, Math. Z. 115 (1970) 117 ~ 139.

1

次数付環のカステルヌーヴォーの正則性

広島大学理学部　大石 彰

この話の目的は，ネーター次数付環（及びその上の次数付加群）に対して<u>カステルヌーヴォーの正則性</u>（Castelnuovo's regularity）と呼ばれるある数値的不変量を定義して，それを使って次数付環，特にCohen-Macaulay環，Gorenstein環，Buchsbaum環などの構造を調べようという試みを紹介することです．ここで"構造"と言うのは，例えば次数付環の最小自由分解やHilbert関数（又はHilbert級数），ベッチ数やCohen-Macaulay型の決定や，次数付環の定義方程式の次数及びその数などについての情報を指します．

正則性の定義そのものは，代数幾何で知られている概念を可換環論的に言い直したものです．Fが射影空間$\mathbb{P}^n$上の連接層として，整数mについて　$H^i(\mathbb{P}^n, F(m-i)) = 0$（$i > 0$）が成り立つときに$F$は<u>$m$－正則</u>であると言いま

す（Mumford）．今 $A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ が体 $k=A_0$ 上のネーター次数付環で，$M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ が次数付 A-加群とすると，$P=A_+$ を台とする局所コホモロジー群 $H_P^i(M)$ には次数付 A-加群の構造が入ります．（その j-次部分を $[H_P^i(M)]_j$ と書きます．）そこで m が整数として $[H_P^i(M)]_j=0$ $(i+j>m)$ が成り立っているとき M が <u>m-正則</u>であると定義します．すると最初の例で F が m-正則であるというのは $A=k[X_0,\cdots,X_n]$ 上の次数付加群 $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n, F(n))$ が我々の意味で m-正則であるということに他なりません．

さて，M の<u>正則性</u> $\mathrm{reg}(M)$ を $\mathrm{reg}(M)=\mathrm{Inf}\{m \mid M$ は m-正則$\}$ で定義します．そして局所コホモロジー群の消失で定義されるこの $\mathrm{reg}(M)$ という量が，次数付環を研究する上で非常に重要な量であるということを示したいわけですが，その際もっとも基本的になるのが次の定理です：

定理 1．A が体 k 上の斉次代数（homogeneous algebra，即ち $A=k[A_1]$ が成り立つ）で，M が

有限生成次数付A-加群，$m \in \mathbb{Z}$ とする．今 $[H_{\mathfrak{p}}^{i}(M)]_{m-i+1} = 0$ $(i > 0)$ かつ $[H_{\mathfrak{p}}^{0}(M)]_{j} = 0$ $(j \geqslant m+1)$（後の条件は $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}} M > 0$ なら自明）とするとMは m-正則で，$A_i M_j = M_{i+j}$ $(i \geqslant 0,\ j \geqslant m)$ が成り立つ．■

この定理から容易に多項式環 $k[X_1, \cdots, X_v]$（但し $\deg X_i = 1$）が0-正則なる斉次 k-代数として特徴付けられることが分ります．実際，$A = S/I$，$S = k[X_1, \cdots, X_v]$（但し $v = \mathrm{emb}\, A = \dim_k A_1$），Iは斉次イデアルとして $\mathrm{reg}(A) = 0$ とすれば，$\mathrm{reg}(I) \leqslant 1$，$I_0 = I_1 = 0$ が分り，定理より $I_n = S_{n-1} I_1 = 0$ $(n \geqslant 2)$，即ち $I = 0$ となります．

又，上と同様の考察から一般の斉次 k-代数は次数が $\mathrm{reg}(A)+1$ 以下の斉次式で定義される（即ち，上のIが次数が $\mathrm{reg}(A)+1$ 以下の斉次元で生成される）ことが分ります．ここで更にAが超曲面でないGorenstein環とすると，Aは次数が $\mathrm{reg}(A)$ 以下の斉次式で定義されます．例えば，Aが平面曲線でない標準曲線

(canonical curve) の斉次座標環とすると，これは3-正則なGorenstein斉次代数になるので，上の標準曲線は3次以下の斉次式で定義されるという代数幾何でよく知られている事実が分ります．又，Dが射影曲線X上のCartier因子で $\deg D \geqq 2g+1$ (g は X の算術種数) とすると，$A=\bigoplus_{n\geqq 0} H^0(X, \mathcal{O}(nD))$ は斉次代数で，$H^1(X, \mathcal{O}(D))=0$ なので A は3-正則，従って X を D で $\mathbb{P}^{v-1}$ ($v=h^0(D)$) に埋め込んだ曲線は3次以下の斉次式で定義される (Saint-Donat) ことが分ります．

上でGorenstein環の場合に使われたのは，重要なGorenstein斉次代数の最小自由分解の自己双対性で，それは $\mathrm{reg}(A)$ を使って次のように表現されます：

$0 \to F_r \to F_{r-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$, $F_0=S$ をGorenstein斉次代数の ($S=k[x_1, \cdots, x_v]$-次数付加群としての) 最小自由分解とすると，

$F_i \cong F_{r-i}{}^*(-\mathrm{reg}\,A - r)$，但し $M^* = \underline{\mathrm{Hom}}_S(M, S)$.

さて，正則性の理論が有効であるためには

それを計算する方法が必要なわけで，それをこれから説明します．まず，$a \in P$ が斉次元で更に M-正則（= M-非零因子）とすると $\mathrm{reg}(M/aM) = \mathrm{reg}(M) + \deg(a) - 1$ であることは容易に分ります．例えば $A = \dfrac{k[x_1, \cdots, x_v]}{(f_1, \cdots, f_r)}$ が完全交叉とすると $\mathrm{reg}(A) = \sum_{i=1}^{r} \deg f_i - r$．次に A が斉次 k-代数，M が有限生成次数付 A-加群とすると，M の Hilbert 関数 $H(M, n) = \dim_k M_n$，Hilbert 多項式 $h(M, n)$ 及び Hilbert 級数 $F(M, T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(M, n) T^n$ が定義されますが，これについて，

定理 2（Schenzel）．M が Cohen-Macaulay 加群とすると，

(1) $\mathrm{reg}(M) < \dim(M) + m \iff H(M, m) = h(M, m)$

$\iff H(M, n) = h(M, n) \quad (n \geq m)$．

(2) $F(M, T) = \dfrac{f_M(T)}{(1-T)^d}$，$f_M(T) \in \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ とすると $\mathrm{reg}(M) = \deg f_M(T)$．■

これを使うと，例えば Δ が Cohen-Macaulay 単体複体で $k[\Delta]$ がその Stanley-Reisner 環とすると，Stanley により $H(k[\Delta], n)$ が分っているので，$\mathrm{reg}(k[\Delta]) \leq \dim(k[\Delta])$（これは一般に

Buchsbaum複体で成立)で, 更にΔのオイラー・ポアンカレ標数$\chi(\Delta)=1$でなければ, 等式$\mathrm{reg}(k[\Delta])=\dim(k[\Delta])$が成立することが分ります. 例えば$|\Delta|$が2-球面ならば, $k[\Delta]$はGorensteinかつ$\mathrm{reg}(k[\Delta])=3$.

次に正則性$\mathrm{reg}(A)$の上界について考えます.

定理3. 一般にAがCohen-Macaulay斉次代数ならば$\mathrm{reg}(A)\leqslant e(A)+\dim(A)-\mathrm{emb}(A)$, AがGorenstein斉次代数ならば, $\mathrm{reg}(A)\leqslant e(A)+2\dim(A)-2\,\mathrm{emb}(A)+1$が成立する. (但し$e(A)$は$A$の重複度.) 更に, 等号が成り立つのは, それぞれ

$$F(A,T)=\frac{1+(v-d)T+T^2+\cdots+T^m}{(1-T)^d},$$

$$F(A,T)=\frac{1+(v-d)T+T^2+\cdots+T^{m-2}+(v-d)T^{m-1}+T^m}{(1-T)^d},$$

(但し$v=\mathrm{emb}(A)$, $d=\dim(A)$, $m=\mathrm{reg}(A)$)となる場合であり, このときAは<u>stretched Cohen-Macaulay代数</u>, <u>stretched Gorenstein代数</u>と言う. (Buchsbaum環のときも不等式$\mathrm{reg}(A)\leqslant e(A)+\dim(A)-\mathrm{emb}(A)+I(A)$等を含めいくつかのこ

とが分るのですが，ここでは省略します．）■

A が Cohen-Macaulay 斉次代数（Gorenstein 斉次代数）のとき，$\mathrm{reg}(A)=1$（$\mathrm{reg}(A)=2$）は $\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-1$ かつ $e(A)\geqslant 2$（$\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-2$）と同値で，これらは共に stretched です．

今 $X=\mathrm{Proj}(A)$ が n 次元射影多様体で，A が Cohen-Macaulay 斉次代数として $\mathcal{L}=\mathcal{O}(1)$ とおくと，$e(A)=(\mathcal{L}^n)$，$\mathrm{emb}(A)=h^0(\mathcal{L})$ なので $e(A)+\dim(A)-\mathrm{emb}(A)=\Delta(X,\mathcal{L})+1$，ここに $\Delta(X,\mathcal{L})$ は藤田隆夫氏の偏極多様体 $(X,\mathcal{L})$ の Δ-種数です．$\mathrm{reg}(A)=1$ となるのは $\Delta(X,\mathcal{L})=0$ なる場合，いいかえると（$X\subset\mathbb{P}^{v-1}$ と見て）$\deg(X)=\mathrm{codim}(X)+1$ なる場合（次数最小な多様体）であり，そのような X は昔から完全な分類が知られています（$\mathbb{P}^n$，2次超曲面，rational scroll，rational normal curve，Veronese 曲面及びそれらの上の錐）．次に A が Gorenstein 環の場合，$\mathrm{reg}(A)=2$ となるのは $\Delta(X,\mathcal{L})=1$ なる場合で，この場合も藤田氏によりそのような $(X,\mathcal{L})$ は詳しく調べられ

ています．例えば，曲線ならば楕円曲線，曲面ならばDel Pezzo曲面になることが分ります．

上の定理3の系として，いくつかの有用な事実が分ります：

(1) もしAがstretched Cohen-Macaulay代数で，更にGorenstein環であるとすると，Aは超曲面か又は $\mathrm{reg}(A)=2$ となってしまいます．（特に，$\mathrm{reg}(A)=1$ なるGorenstein斉次代数は2次超曲面になる．）Aが整域とすれば，この逆も成立します．（整域でない場合，例えば，Aとして $\dfrac{k[X,Y,Z]}{(X^3,Y^2,Z^2,XY,YZ,ZX)}$ を考えれば，Aは0次元で $F(A,T)=1+3T+T^2$ なのでAはstretched Cohen-Macaulay代数，$\mathrm{reg}(A)=2$ だが $r(A)=3$ となりAはGorensteinにはなりません．）

(2) AがCohen-Macaulay斉次整域で $\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-2$ とするとAはGorenstein環になる（Treger，後藤）．これは幾何的な場合にTregerが主張していて，その証明が僕には分らなかったので9月に後藤さんに会ったとき質問したところ，しばらくして環論的かつ

簡明な証明を教えていただいた命題です．（同じときに居たAvramovも同様の証明を思い付いたようです．）証明は $\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-2$ ならば $\mathrm{reg}(A)=2$ となるので(1)から分ります．

(3) A が Gorenstein 斉次代数で $\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-3$ とすると，A は4次の超曲面になります．何故ならAは stretched Cohen-Macaulay 代数で $\mathrm{reg}(A)=3$ となるので，(1)から分ります．■

今度は $\mathrm{reg}(A)$ の下界と extremal 代数と呼ばれるものについて説明します．$A=S/I$，但し $S=k[x_1,\cdots,x_v]$，$v=\mathrm{emb}(A)$，I は斉次イデアル，と書くとき $i(A)=\min\{t \mid I_t\neq 0\}$ を A の初次数 (initial degree) と言います．即ち A の定義方程式の最小次数のことです．このとき，

命題4．一般には $\mathrm{reg}(A)\geqq i(A)-1$ であり，更に A が超曲面でない Gorenstein 環ならば $\mathrm{reg}(A)\geqq 2(i(A)-1)$ が成り立つ．■

最初の不等式が等式になる場合を調べるために，まずS上の 0-正則な次数付加群 M＝

$\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ について調べます．結果を述べると，$\mathrm{reg}(M)=0$ なることは M の最小自由分解が

$$0\to F_r(-r)\to\cdots\to F_1(-1)\to F_0\to M\to 0,\quad F_i=S^{b_i}$$

となることと同値です．（即ち後藤氏の意味で M が linear resolution をもつ場合で，同じ内容のことは後藤氏によっても証明されています．このシンポジウムの後藤氏の論文を参照して下さい．）証明は定理1を使うことで容易に分ります．又，これは $F(M,T)=\dfrac{Q(M,-T)}{(1-T)^v}$，但し $Q(M,T)=\sum_{n\geq 0} b_n T^n$ なる式が成り立つこととも同値です．従ってこのときベッチ数 b_i は M の Hilbert 関数が分れば $b_n=(-1)^n\sum_{i+j=n}(-1)^j\binom{v}{j}H(M,i)$，但し $v<j$ のとき $\binom{v}{j}=0$，によって求めることが出来ます．これを使うことにより次の定理の前半の主張が分ります（後藤氏の A が n-linear resolution，但し $n=i(A)$，をもつ場合に対応しています）：

定理5．$\mathrm{reg}(A)=i(A)-1$ が成り立つことは，A の最小自由分解が

$$0\to S^{b_r}\xrightarrow{f_r}S^{b_{r-1}}\to\cdots\to S^{b_1}\xrightarrow{f_1}S\to A\to 0,$$

但し $\deg f_1 = i(A)$, $\deg f_i = 1$ $(i \geqslant 2)$ なることと同値である. 又, A が超曲面でない Gorenstein 環とすると, $\mathrm{reg}(A) = 2(i(A)-1)$ が成り立つことは, A の最小自由分解が

$$0 \to S^{b_r} \xrightarrow{f_r} S^{b_{r-1}} \to \cdots \to S^{b_1} \xrightarrow{f_1} S \to A \to 0,$$

但し $\deg f_1 = \deg f_r = i(A)$, $\deg f_i = 1$ $(1 < i < r)$ なることと同値である. ■

A が Cohen-Macaulay 環の場合の定理の前半と, 定理の後半は Schenzel によって示されています. $\mathrm{reg}(A) = i(A)-1$ なる Cohen-Macaulay 環, $\mathrm{reg}(A) = 2(i(A)-1)$ なる Gorenstein 環を彼に従って, それぞれ <u>extremal Cohen-Macaulay 代数, extremal Gorenstein 代数</u>と呼びます. このとき上のベッチ数 b_i は $v = \mathrm{emb}(A)$, $d = \dim(A)$, $i(A)$ によって完全に表わすことが出来ます, 従って Hilbert 級数, Cohen-Macaulay 型なども具体的に書けますが, ここでそれを書くのは省略します.

例えば, $\mathrm{reg}(A) = 1$ なる Cohen-Macaulay 代数, $\mathrm{reg}(A) = 2$ なる Gorenstein 代数は, 各々

extremalです。上の定理の歴史は，最初Wahlが有理的（又は最小楕円的）な曲面の特異点の接錐（tangent cone）の場合に証明し，Sallyがそれをネーター局所環の接錐の場合に拡張した（共に $reg(A)=1$，$reg(A)=2$ の場合）後，Schenzelが一般のCohen-Macaulay及びGorenstein斉次代数に一般化したものです。

以上述べてきたことの他にも，カステルヌーヴォーの正則性について分ることはいろいろありますが，それは省略することにして，今までのことから分る，重複度が小さい場合のGorenstein斉次代数の分類表を挙げて終りにします： AがGorenstein斉次代数で，$e=e(A)$，$\Delta = e(A)+\dim(A)-emb(A)-1$（Aの Δ-種数）とすると，

(1) $e=1$ ：Aは多項式環.

(2) $e=2$ ：Aは超曲面.

(3) $e=3$ ：Aは超曲面.

(4) $e=4$ ：Aは超曲面又は(2,2)型完全交叉.

(5) $e=5$: Aは超曲面又は$\Delta=1$.

(6) $e=6$: Aは超曲面又は(2, 3)型完全交叉又は$\Delta=1$.

(7) $e=7$: Aは超曲面又は$\Delta=1$.

(8) $e=8$: Aは超曲面又は(2, 4)型完全交叉又は$\Delta=1$又は$\mathrm{reg}(A)=3$, $\Delta=4$なるstretched Gorenstein代数.

(9) $e=9$: Aは超曲面又は(3, 3)型完全交叉又は$\Delta=1$又は$\mathrm{reg}(A)=4$, $\Delta=5$なるstretched Gorenstein代数.

参考文献

S. Goto and K. Watanabe, Graded rings I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

J. D. Sally, Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, J. Algebra 56 (1979), 168-183.

P. Schenzel, Über die freien Auflösungen extremaler Cohen-Macaulay-Ringe, J. Algebra 64 (1980), 93-101.

14

J. M. Wahl, Equations defining rational singularities,
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 10 (1977), 231–264.

（1981年 11月）

Galois descent technique for computing divisor class groups

大分大, 教育, 馬場 清

§1. 序

Aは Krull整域で, GはAの自己同型群の有限部分群とする. A′でAのGによる不変部分環を表すことにすれば, A′もKrull整域で, AはA′上の整拡大となる. Aの高さ1の素イデアルを基底とする自由アーベル群として, Aの因子群 $\mathrm{Div}(A)$ を定義し, アーベル群の準同型写像 $j_{A'A}: \mathrm{Div}(A') \longrightarrow \mathrm{Div}(A)$ を $j_{A'A}(\mathfrak{q}) = \sum e(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})\mathfrak{p}$ と定める(ただし $e(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ は $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{q}$ 上の分岐指数を表し, 和は $\mathfrak{p} \cap A' = \mathfrak{q}$ となる高さ1のAの素イデアルの全体をわたる). このとき, $j_{A'A}$ から誘導された因子類群の間の準同型写像 $\bar{j}_{A'A}: Cl(A') \longrightarrow Cl(A)$ が定義できるが, P. Samuel は[4]において $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ から $H^1(G, A^*)$ への単射準同型写像 Φ_A を構成しAがUFDの場合 $Cl(A') \cong \mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ となることと, 次の事実とを用い, Galois descent をいろいろな

場合の因子類群の計算に応用した.

<u>定理</u> (Samuel) A が A' 上因子的不分岐（即ち, A の高さ1の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{p} \cap A'$ 上不分岐）であれば, Φ_A は同型写像となる.

本稿では, 因子的不分岐性の仮定を除いた場合 $\mathrm{Coker}(\Phi_A)$ を決定し（定理2.3）, より広い範囲での因子類群の計算や $Cl(A')$ と $Cl(A)$ との関係を調べることを目標とする.

§2. 準備

Galois descent の場合だけでなく p-radical descent の場合にも同様の方法で $\mathrm{Coker}(\Phi)$ が決定出来るので, 後者の場合にも使えるように少し一般的な形で議論する.

定義 1.1. B が Krull 整域, A は B の Krull 部分整域とする. B の高さ1の任意の素イデアル $\mathfrak{q}$ について, A の素イデアル $\mathfrak{q} \cap A$ の高さが

常に1以下のとき，拡大 B/A は PDE をみたすという（[3] p.30）.

さて，4つの Krull 整域 A, A', B, B' を考え，$A \subset B$, $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A' \subset B'$ で拡大 B/A は PDE をみたし，拡大 A/A', B/B' は共に整拡大であると仮定する．このとき，拡大 B'/A' も PDE をみたすことが証明され，4つの準同型写像

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & B \arrow[d, dash] \\
A' \arrow[r, dash] & B'
\end{tikzcd}
$$

$$\bar{j}_{AB}: Cl(A) \longrightarrow Cl(B), \quad \bar{j}_{A'A}: Cl(A') \longrightarrow Cl(A),$$
$$\bar{j}_{B'B}: Cl(B') \longrightarrow Cl(B), \quad \bar{j}_{A'B'}: Cl(A') \longrightarrow Cl(B').$$

が考えられる．さらに，次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
Cl(A') \arrow[r, "\bar{j}_{A'B'}"] \arrow[d, "\bar{j}_{A'A}"'] & Cl(B') \arrow[d, "\bar{j}_{B'B}"] \\
Cl(A) \arrow[r, "\bar{j}_{AB}"] & Cl(B).
\end{tikzcd}
$$

次に，$Div(A')$, $Div(B')$ の部分群として $D(A')$, $D(B')$ をそれぞれ

$$D(A') = \{E' \in Div(A') ;\ j_{A'A}(E') \text{ は主因子となる}\},$$
$$D(B') = \{E \in Div(B') ;\ j_{B'B}(E) \text{ は主因子となる}\}$$

と定める．準同型写像 $i_0 : D(A') \longrightarrow D(B')$ は

準同型写像 $j_{A'B'}$ の $D(A')$ への制限であるとし,
i_0 により誘導された $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ から $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{B'B})$ への準同型写像を $\bar{i}_0$ とおく.

定義 1.2. $Q(\cdot)$ で商体を表し, * で単元群を表すことにする. $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ から $Q(A)^*/A^* \vee Q(A')^*$ (ただし, $A^* \vee Q(A')^*$ とは, A^* と $Q(A')^*$ で生成された $Q(A)^*$ の部分群のことである.) への準同型写像 $\alpha_{A'A}$ を次のように定義する.

E' を, その因子類 $cl(E')$ が $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ に属する因子とする. このとき $j_{A'A}(E') = div_A(x)$ となる $Q(A)^*$ の元 x が存在するので,

$\alpha_{A'A}(cl(E')) = x$ の $Q(A)^*/A^* \vee Q(A')^*$ での剰余類

と定める. このような $\alpha_{A'A}$ は, 定義可能である.

定義 1.3. $H_{A'A}$ はアーベル群, $\Phi_{A'A}$ は $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ から $H_{A'A}$ への単射準同型写像とする. 次の図式が可換となるような, $\mathrm{Im}(\alpha_{A'A})$ から $H_{A'A}$ への準同型写像 $\beta_{A'A}$ が存在するとき, $(\Phi_{A'A}, H_{A'A})$ と書くことにする.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \arrow[rr, "\Phi_{A'A}"] \arrow[dr, "\alpha_{A'A}"'] & & H_{A'A} \\ & \mathrm{Im}(\alpha_{A'A}) \arrow[ur, "\beta_{A'A}"'] & \end{tikzcd}$$

.

B, B' についても，同様に $\alpha_{B'B}$ などを定義する．このとき，次の補題が成立する．

補題 1.4. 2つの対 $(\Phi_{A'A}, H_{A'A})$, $(\Phi_{B'B}, H_{B'B})$ が与えられているとする．γ が $H_{A'A}$ から $H_{B'B}$ への準同型写像であるとき，次の条件 (i), (ii) は同値である．

(i) 図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \arrow[r, "\bar{i}_0"] \arrow[d, "\Phi_{A'A}"'] & \mathrm{Ker}(\bar{j}_{B'B}) \arrow[d, "\Phi_{B'B}"] \\ H_{A'A} \arrow[r, "\gamma"] & H_{B'B} \end{tikzcd}$$

は可換である．

(ii) 図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}(\alpha_{A'A}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta_{A'A}"'] & \mathrm{Im}(\alpha_{B'B}) \arrow[d, "\beta_{B'B}"] \\ H_{A'A} \arrow[r, "\gamma"] & H_{B'B} \end{tikzcd}$$

は可換である．ただし，ι は包含写像 $Q(A) \hookrightarrow Q(B)$ により誘導された準同型写像である．

Snake lemma を使うことにより，直ちに次が得られる．

定理 1.5. ２つの対 $(\Phi_{A'A}, H_{A'A})$, $(\Phi_{B'B}, H_{B'B})$ が与えられ，$H_{A'A}$ から $H_{B'B}$ への準同型写像 γ が補題 1.4 の (i) の条件をみたし，さらに，$\bar{i}_0$ が全射であると仮定する．このとき，次の図式は行および列が完全な可換図式となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\bar{i}_0) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{Ker}(\bar{J}_{A'A}) \arrow[r, "\bar{i}_0"] \arrow[d, "\Phi_{A'A}"'] & \mathrm{Ker}(\bar{J}_{B'B}) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_{B'B}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & H_{A'A} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & H_{B'B} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\Phi_{A'A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\Phi_{B'B}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}
$$

ただし，γは準同型写像$\Phi_{A'A}$の$\mathrm{Ker}(\bar{i}_0)$への制限である．

§2. Galois descent

最初に，Samuelの構成した準同型写像 $\Phi_A : \mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \longrightarrow H^1(G_A, A^*)$ の定義を復習する．Aの商体$Q(A)$の，零でない元xに対して写像 $f_x : G_A \longrightarrow Q(A)^*$ を，$f_x(\sigma) = \sigma(x)/x \ (\sigma \in G_A)$ と定める．E'は，その因子類$cl(E')$が$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$に属する因子であるとすると，$j_{A'A}(E') = div_A(x)$ となる$Q(A)^*$の元xが存在する．このとき，f_xは1-cocycleとなるので，

$$\Phi_A(cl(E')) = f_x \ \text{modulo} \ B^1(G_A, A^*)$$

とおけば，Φ_Aは定義可能で単射な準同型写像となる．

Aの高さ1の素イデアルの全体を$P(A)$とおく．Pが$P(A)$の部分集合で，次の条件をみたすとする．

条件：$\forall \mathfrak{p} \in P$, $\forall \sigma \in G_A$ に対して，$\sigma(\mathfrak{p}) \in P$.

このとき，

$$B = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A) - P} A_{\mathfrak{p}},$$
$$\tilde{\sigma}(a_1/a_2) = \sigma(a_1)/\sigma(a_2) \quad (a_1, a_2 \neq 0 \in A,\ a_1/a_2 \in B)$$

とおくと，B も Krull 整域で $\tilde{\sigma}$ は B の自己同型写像となる．$G_B = \{\tilde{\sigma};\ \sigma \in G_A\}$ とおき，G_B に関する B の不変部分環を B' とし，Φ_A と同様に Φ_B を定義する．さらに，$H_{A'A} = H^1(G_A, A^*)$, $H_{B'B} = H^1(G_B, B^*)$, $\Phi_{A'A} = \Phi_A$, $\Phi_{B'B} = \Phi_B$ とおく．1-cocycles の群 $Z^1(G_A, A^*)$ から $Z^1(G_B, B^*)$ への準同型写像 γ_0 を

$$\gamma_0(f)(\tilde{\sigma}) = f(\sigma) \quad (f \in Z^1(G_A, A^*),\ \tilde{\sigma} \in G_B)$$

と定義し，γ_0 により誘導された $H^1(G_A, A^*)$ から $H^1(G_B, B^*)$ への準同型写像を γ とする．

このとき，$\tilde{\iota}_0$ は全射となり，さらに，2つの対 $(\Phi_{A'A}, H_{A'A})$, $(\Phi_{B'B}, H_{B'B})$ と準同型写像 γ について，補題1.4の(ii)の図式が可換となるのが容易にわかるので，定理1.5の図式が得られる．

さて，

$$P_0 = \{\mathfrak{q} \in P(A');\ \mathfrak{p} \cap A' = \mathfrak{q} \text{ for some } \mathfrak{p} \in P\},$$
$$E_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{p} \cap A' = \mathfrak{q}} \mathfrak{p} \in \mathrm{Div}(A) \quad (\mathfrak{q} \in P_0),$$
$$M = \{f_x;\ x \in Q(A)^*,\ \mathrm{div}_A(x) = \sum_{\mathfrak{q} \in P_0} n_{\mathfrak{q}} E_{\mathfrak{q}} \text{ for some } n_{\mathfrak{q}} \in \mathbb{Z}\},$$
$$M' = \{f_x \in M;\ x \in Q(A)^*,\ j_{A'A}(E') = \mathrm{div}_A(x) \text{ for some } E' \in \mathrm{Div}(A')\}$$

とおくと，M, M' は $B^1(G_A, A^*)$ を含む $Z^1(G_A, A^*)$ の部分群で，計算すると，

$$\mathrm{Ker}(\gamma) \cong M/B^1(G_A, A^*), \quad \mathrm{Im}(\varphi) \cong M'/B^1(G_A, A^*)$$

となる．このことにより，次の定理が得られる．

定理 2.1.　$\mathrm{Coker}(\varphi) \cong M/M'$.

さらに，$e_{\mathfrak{q}} = e(\mathfrak{P}, \mathfrak{q})$（$\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{q}$ の上にある高さ 1 の A の素イデアル）とおき，M から $\prod_{\mathfrak{q} \in P_0} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$ への準同型写像 θ を，

$$\theta(f_x) = (\cdots, n_{\mathfrak{q}}, \cdots) \quad \text{in} \quad \prod_{\mathfrak{q} \in P_0} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$$

（ただし，$\mathrm{div}_A(x) = \sum_{\mathfrak{q} \in P_0} n_{\mathfrak{q}} E_{\mathfrak{q}}$）とおけば，$\theta$ は定義可能で $\mathrm{Ker}(\theta) = M'$ となる．$\bar{\theta}$ が，θ により誘導される M/M' から $\prod_{\mathfrak{q} \in P_0} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$ への準同型写像とすると，次が得られる．

定理 2.2.　$\bar{\theta}$ は単射準同型写像で，$\bar{\theta}$ が全射であるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{q} \in P_0$ について $E_{\mathfrak{q}}$ が主因子となることである．

ここで，P として，

$$P = \{\mathfrak{p} \in P(A)\,;\ \mathfrak{p} \text{ は } \mathfrak{p} \cap A' \text{上因子的に分岐している}\}$$

ととると，この P は条件“$\forall \mathfrak{p} \in P$, $\forall \sigma \in G_A$ に対して $\sigma(\mathfrak{p}) \in P$”を満たすことから定理1.5での図式が得られ，さらに，上で作った B, B' について B は B' 上因子的不分岐となる．そこで，この B, B' について Samuel の定理を適用すれば Φ_B が同型写像となり，定理1.5の図式と定理2.1, 2.2より次の定理が得られる．

定理2.3. A は Krull 整域で，G_A は A の自己同型群の有限部分群とする．A' を A の G_A に関する不変部分環とし，

$$P = \{\mathfrak{p} \in P(A)\,;\ \mathfrak{p} \text{ は } \mathfrak{p} \cap A' \text{上因子的に分岐している}\}$$

とおき，P_0, $E_{\mathfrak{q}}$, $e_{\mathfrak{q}}$, M, M', $\overline{\theta}$ を上記のようにとる．このとき，次の (1), (2) が成立する．

(1) $\mathrm{Coker}\,(\Phi_A) \cong M/M'$.

(2) $0 \longrightarrow M/M' \xrightarrow{\overline{\theta}} \prod_{\mathfrak{q} \in P_0} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{q}}\mathbb{Z}$ は完全列で，$\overline{\theta}$ が全射であるための必要十分条件は，すべての $\mathfrak{q} \in P_0$ について $E_{\mathfrak{q}}$ が主因子となることである．

特に，AがUFDであれば

$$\mathrm{Coker}(\Phi_A) \cong \prod_{\mathfrak{p} \in P_0} \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{p}}\mathbb{Z}$$

となる．

なお，Pを定理2.3のようにとればPやP_0は有限集合となる．定理2.3を使うことにより次の結果が得られる．

☆ $Cl(A) \cong \mathbb{Z}$のとき，次が成立する．

(1) $$Cl(A') \cong \begin{cases} \mathrm{Ker}(j_{A'A}) & (\mathrm{Im}(j_{A'A}) = \{0\} \text{の場合}) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Ker}(j_{A'A}) & (\mathrm{Im}(j_{A'A}) \neq \{0\} \text{の場合}). \end{cases}$$

(2) (i) A/A'が因子的不分岐の場合，

$$Cl(A') \cong \begin{cases} H^1(G_A, A^*) \\ \mathbb{Z} \oplus H^1(G_A, A^*). \end{cases}$$

(ii) A/A'が因子的に分岐し，定理2.3のP_0について$\#(P_0) = 1$の場合．$P_0 = \{\mathfrak{p}\}$とおくと，

(イ) $E_{\mathfrak{p}}$が主因子でない場合，

$$Cl(A') \cong \mathbb{Z} \oplus H^1(G_A, A^*).$$

(ロ) $E_{\mathfrak{p}}$が主因子の場合，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(j_{A'A}) \xrightarrow{\Phi_A} H^1(G_A, A^*) \longrightarrow \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{p}}\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

(2) (ii) (イ) より，例えば，

$$A' = k[X, Y, Z, XZ/Y, XZ^2/Y^2, \ldots, XZ^n/Y^n]$$

について $Cl(A') \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ となることがわかる.

付記　詳しい証明については，[1]を参照してください．また，p-radical descent についても平行して $\mathrm{Coker}(\Phi_A)$ を決定することができますが，それについて興味をお持ちの方は，[2]を参照してください．

参考文献

[1] K. Baba : Galois descent technique for computing divisor class groups, manuscript.

[2] ———— : Some remarks on p-radical descent for computing divisor class groups, manuscript.

[3] R. Fossum : The divisor class group of a Krull domain, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[4] P. Samuel : Classes de diviseurs et dérivées logarithmiques, Topology 3 Suppl. 1 (1964), 81 — 96.

/

Some results on the normalization and normal flatness

福岡教育大学　品川美津男

可換環論で Cohen-Macaulay（略して，C.M.）性，Gorenstein（略して Gor.）性は一つの研究対象です。この稿の目的は，X が reduced noetherian scheme，$\overline{X}$ を X の normalization とし，$\overline{X}$ が X 上 finite のとき，命題：X が C.M.（Gor.）なら $\overline{X}$ もそうである。が成立する X についての十分条件を与えることです。証明を与えると煩雑になりそうですので，考え方を述べていきます。

一般に S，T を noetherian schemes，f を S から T への morphism で f が flat かつ surjective のとき，

Prop. 1　S は C.M.（Gor.）$\Leftrightarrow$ (i) T は C.M.（Gor.）
(ii) すべての T の点 t に対して $S(t) = \mathrm{Spec}(k(t)) \times_T S$ が C.M.（Gor.）

が成立することが知られています。

この命題の主張は言うまでもなく，S と T とが flat な関係で結ばれているとき，すべての fibres $S(t)$ $(t \in T)$ が一様に望むべき性質を持っているなら，T の持つ性質が S へそのまま反映すると言うことです。しかし，normalization の fibres $\overline{X}(x)$ $(x \in X)$ はすべて discreate で（C.M. 性についてはいざ知らず）かえって情報は（バラバラで）得難い様に思います。それはさておき，この様に“flat”な条件が，この種の問題に重要な役割を果す訳ですが，$\pi : \overline{X} \xrightarrow{can.} X$ とし，π が flat なら $\overline{X} = X$ となるので，つまらなくなります。では一体“flat”な条件はどこへ求めるべきでしょうか。

さて $\overline{X}$ と X との違いは conductor ideal C が制御しています。実際 C は $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ の両方の ideal ですから，$Y, \overline{Y}$ をそれぞれ C で定義された X, $\overline{X}$ の closed subscheme とすると $\overline{X} \setminus \overline{Y} \xrightarrow{\sim} X \setminus Y$ ですので，$\overline{X}$ と X との本質的差異は $\overline{Y}$ と Y との間にあるはずです。従って，“flat”な条件は X と Y，Y と $\overline{Y}$，$\overline{Y}$ と $\overline{X}$ との拘り合いとして求め

るのは自然であると思います。

Def.(H.Hironaka) X is normally flat along Y.

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $gr_C(\mathcal{O}_X) \underset{def.}{=} \mathcal{O}_X/C \oplus C/C^2 \oplus \cdots$ is $\mathcal{O}_Y$-flat.

$\Longleftrightarrow$ $N \underset{def}{=} \mathrm{Spec}(gr_C(\mathcal{O}_X)) \xrightarrow[can.]{\tau} Y$, τ is flat.

この N（normal cone of X along Y と言う）は blowing up との関係で重要な訳ですが，以下記号と定義を羅列します。$\mathcal{R}_C(\mathcal{O}_X) \underset{def}{=} \mathcal{O}_X \oplus C \oplus C^2 \oplus \cdots$，$\mathcal{R}_C(\mathcal{O}_{\bar{X}}) \underset{def}{=} \mathcal{O}_{\bar{X}} \oplus C \oplus C^2 \oplus \cdots$

$X' \underset{def}{=} \mathrm{Proj}(\mathcal{R}_C(\mathcal{O}_X))$

$\bar{X}' \underset{def}{=} \mathrm{Proj}(\mathcal{R}_C(\mathcal{O}_{\bar{X}}))$

$$\begin{tikzcd}
\bar{Y} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \bar{X} \arrow[d, "\pi"] & \bar{X}' \arrow[l, "\rho'"'] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "\tau"] & Y \arrow[r, hook, "i"] & X & X' \arrow[l, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{R}_C(\mathcal{O}_X)_+ = \mathcal{R}_C(\mathcal{O}_{\bar{X}})_+$ より $\bar{X}' = X'$ です。

$X' \setminus \rho^{-1}(Y) \xrightarrow{\sim} X \setminus Y \xleftarrow{\sim} \bar{X} \setminus \bar{Y}$ で $\rho^{-1}(Y) \underset{def}{=} Y \times_X X' = \mathrm{Proj}(\tau_*(\mathcal{O}_N))$

つまり N は $\rho^{-1}(Y)$ の affine cone です。

任意の Y の点 y と任意の自然数 n に対して，

$H(y;n) \underset{def}{=} \dim_{k(y)}(C^n/C^{n+1} \otimes k(y))$ としますと，n が十分大きければ $H(y;n)$ は n についての polynomial になりますので，その polynomial の degree でもって，$H(y;n)$ の degree を定義します。normal flatness についての一般的結果を述べます。

Prop. 2　X が Y に沿って normally flat なら次のことが成立する。

(i) y_1, y_2 を Y の同じ連結成分に属する任意の二点とすると、$H(y_1; n) = H(y_2; n)$　$(\forall n \in \mathbb{N})$

(ii) y が Y の任意の点で、Z を y を通る任意の Y の既約成分とすると、$\dim N(y) = \operatorname{codim}(Z, X)$

(iii) y, Z を (ii) と同じものとし、z を Z の generic point とするとき、$\dim \mathcal{O}_{X,y} = \dim \mathcal{O}_{Y,y} + \dim \mathcal{O}_{X,z}$

また y が Y の任意の点なら $\dim N(y) = \deg H(y; n) + 1$ に注意すると、上の命題の (i) から、$\dim N(y_1) = \dim N(y_2)$ が分ります。特に Y が連結であると（例へば X が local ring の Spec のとき）、(i) (ii) から、Y は X の中で純余次元になります。

$H(y; n)$ は或る意味で $N(y)$ の定義方程式や特異性の情報を与えます。例へば、y を固定すると、任意の自然数 n に対して $H(y; n) = 2$ である必要十分条件は $N(y) \cong \operatorname{Spec}(k(y)[U, V]/(f))$ となります。ただし、U, V は変数で f は degree が 2 の form です。

Prop. 2 は X が Y に沿って normally flat なら、normal cone N のすべての fibres N(y) (y∈Y) が Y に沿って well parametrized であることを示している様に思います。

X が C.M. なら Y は X の中で純余次元 1 ですから、次の条件(*)を考えるのは自然であると思います。

(*) X は Y に沿って normally flat で Y は X の中で純余次元 1 である。

(特に Prop. 2 の(ii)より X が(*)を満たすなら、N(y) (y∈Y) はすべて curve であることが分ります。)

この稿の主な結果を申しますと、下記の通りです。

Th. 1 X が(*)をみたすなら、

(1) X は C.M. $\Leftrightarrow$ $\overline{X}$ は C.M.

(2) X は Gor. $\Rightarrow$ $\overline{X}$ は Gor. (逆は成立しない。)

条件(*)を環論的に翻訳すると、下記の通り

6

で，それが Th.1 を証明する鍵になります。

Th.0　X が条件 (*) をみたす

$\Longleftrightarrow$ (1) C は可逆な $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ ideal

(2) $\bar{Y}$ は Y 上 flat

Th.0 の(1) は $\bar{X}=X'$ と同じ主張で，Th.0 の(2) は $\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathcal{O}_X \cong \pi_*\mathcal{O}_{\bar{Y}}/\mathcal{O}_Y$ が $\mathcal{O}_Y$ flat であることと同値です。

X が (*) を満たすなら，$\rho^{-1}(Y)=\bar{Y}$ が分り，N が $\bar{Y}$ の affine cone となるので，Y を N の vertex と考えると，$N\setminus Y \longrightarrow \bar{Y}$ は local には $\bar{Y}\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[U,U^{-1}]\rightarrow \bar{Y}$ と同じですので，N と $\bar{Y}$ は環論的には，ほとんど同じ性質を持っていると考えられる様に思います。従って，Y と $\bar{Y}$ との相互関係を Y と N との相互関係を通して考察してみようという訳です。くどいようですが，任意の Y の点 y に対して，$\bar{Y}(y)$ は discreate でかえって調べにくい（情報を得難いという意味で）のですが，X が (*) をみたせば $N(y)$ は Y に沿って well parametried された curve ばかりですので，$N(y)$ を調べるには，Y の各既約成分の generic point z につ

いて，$N(z)$を調べれば十分であることになります。また条件(*)より $\dim \mathcal{O}_{X,z} = 1$ ですので，Xがcurveのとき，Xが(*)を満たす状態を例を上げて説明しますと，

例 (1) kを体，Uを変数とし，$A = k[U^n, U^{n+2p-1}]_{(U^n, U^{n+2p-1})}$ $(n \geqq 2)$
，$X = \operatorname{Spec} A$ とおくと，Xが(*)をみたす $\Longleftrightarrow$ $n = 2$

例(2) Xが ordinary multiple point しか特異点として
もたない（つまり seminormal）curveならXは(*)をみたす。

以後Xは条件(*)を満たすものとします。

Th. 2 $\bar{x}$を$\bar{X}$の任意の点とし，$x = \pi(\bar{x}) \in X$ とします。
すると， $\dim \mathcal{O}_{\bar{X},\bar{x}} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$

従って，次の技術的な補題を得ます。

Lemma. $\bar{X}$がC.M. $\Longleftrightarrow$ $\pi_* \mathcal{O}_{\bar{X}}$は$\mathcal{O}_X$-moduleとしてC.M.

Th.1の(1)は次のTh.3から分ります。

Th. 3 yをYの任意の点とするとき，次は同値である。

(1) X は点 y で C.M.

(2) Y は点 y で C.M.

(3) $\overline{X}$ は $\pi^{-1}(y)$ に沿って C.M.

(4) $\overline{Y}$ は $\overline{\pi}^{-1}(y)$ に沿って C.M.

これは実際に点 y での local cohomology を計算して証明できます。（上の補題を使う。）

Th. 1 の (2) は X が Gor. なら Y の任意の点 y に対して、$H(y;n)=2$ ($\forall n \geqq 1$) を示し、$N(y)$ の状態が分かるので、

Y が Gor. $\Leftrightarrow$ N が Gor. $\Leftrightarrow$ $\overline{Y}$ が Gor. $\Leftrightarrow$ $\overline{X}$ が Gor. となり、

結局 X が Gor. $\Rightarrow$ Y が Gor. を示すことになります。

Th. 3 の (2) より Y は C.M. であるので Gorenstein scheme の duality Theorem から、$\Omega = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(i_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ とおくと、任意の coherent $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}, \Omega) \cong \mathcal{E}xt^{p+1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$ となります。

一方 Th. 0 の (1) より $\Omega \cong \overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\overline{Y}}/\mathcal{O}_Y$ で Th. 0 の (2) と $H(y;n)=2$ から $\overline{\pi}_*\mathcal{O}_{\overline{Y}}$ が rank 2 の locally free $\mathcal{O}_Y$-module となるので Ω は invertible $\mathcal{O}_Y$-module となります。つまり Y が Gor. ということです。

Th. 1 の (2) の逆が成立しない例につきましては，

X が curve で (*) を満たし Gorenstein なら，X の特異点での multiplicity は 2 であることに注意すると，次の例が出ます。

例3. k を体，$U_1, \cdots, U_n$ $(n \geqq 3)$ を変数，$X = \mathrm{Spec}(k[U_1, \cdots, U_n]/(U_i U_j \mid i \neq j))$

X が既約となる例は日大の後藤四郎さんが作りました。

例4. k を体，U を変数，$X = \mathrm{Spec}(k[U^3, U^4, U^5])$

例5. k を体，K を k の拡大体で $3 \leqq [K : k] < \infty$，U を変数とし

$X = \mathrm{Spec}(k \oplus UK[U])$

上の例はいづれも X の原点での conductor が maximal ideal なので X は（原点で）(*) をみたします。しかも X の原点での multiplicity はすべて 3 以上です。

この稿に関心をお持ち下さる方は下記論文を参照して下さい。

M. Shinagawa, Some results on the normalization and normal flatness, Hiroshima Math. Journal Vol. 12, No. 1 (1982), To appear

Co-Frobenius maps on canonical modules

名大(理) 吉野雄二

(A, m, k) を次元 d の complete local ring としよう。このとき，A は次の性質をみたす dualizing complex $D_A^{\cdot}$ をもつ。

$$\mathrm{Ext}_A^i(k, D_A^{\cdot}) = \begin{cases} k & (i = d) \\ 0 & (i \neq d) \end{cases}$$

$H^0(D_A^{\cdot})$ を A の canonical module といって，K_A とかくことにする。次の spectral sequence；

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}_A^p(k, H^q(D_A^{\cdot})) \Longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{p+q}(k, D_A^{\cdot})$$

における edge homomorphism；

$$\varphi_A : E_2^{d0} = \mathrm{Ext}_A^d(k, K_A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^d(k, D_A^{\cdot}) \cong k$$

を考えよう。ε_A を augmentation map $K_A \longrightarrow D_A^{\cdot}$ とするとき，φ_A は $\mathrm{Ext}_A^d(k, \varepsilon_A)$ に一致することを注意しておく。

どのような local ring A についても，$\varphi_A \neq 0$ であろうというのが，私の予想であり，以下において，それについての考察を述べる。

昨年の本シンポジウムで報告したように，次の事柄が成り立つ。

(1)　$\varphi_A \neq 0$ なる local ring A においては，Big

Cohen-Macaulay予想以外の全てのhomological conjectureが成立する。

(2) equicharacteristicなAについては，$\varphi_A \neq 0$である。したがって，homological conjectureを解決するには，mixed-characteristicなAについて，φ_Aを知ることが，重要な鍵となるであろう。

上の(2)の結果は次のように強めることができる。

<u>Proposition</u> Aを<u>equi-characteristic</u> local ring，xをAのnon-zero divisor，$\overline{A} = A/xA$とするとき，exact sequence： $0 \longrightarrow K_A \xrightarrow{x} K_A \longrightarrow K_{\overline{A}}$ によって，K_A/xK_Aは$K_{\overline{A}}$のsubmoduleと同型である。このとき，$K_A/xK_A \hookrightarrow K_{\overline{A}} \xrightarrow[\varepsilon_{\overline{A}}]{} D^{\cdot}_{\overline{A}}$ から導かれる次のmap； $\mathrm{Ext}^{d-1}_{\overline{A}}(k, K_A/xK_A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d-1}_{\overline{A}}(k, D^{\cdot}_{\overline{A}})$ は，zero-mapでない。

(これは，Griffithの定理；A representation theorem for complete local rings, Jour. of Pure and Appl. Alg. 7 (1976) 303-315 を使って，容易に証明することができる。また，このPropositionが上記の(2)を導くことも簡単。)

このPropositionによって，次の予想はきわめて自然である。

予想 A を mixed-characteristic complete (normal) local domain で，$d = \dim A \geqq 1$ とする。$p = \mathrm{ch}\, k > 0$，$\overline{A} = A/pA$ とおくとき，Proposition と同じようにして，injection $K_A/pK_A \hookrightarrow K_{\overline{A}}$ を得る。このとき，$K_A/pK_A \hookrightarrow K_{\overline{A}} \xrightarrow[\varepsilon_{\overline{A}}]{} D^{\cdot}_{\overline{A}}$ から導びかれる map：$\mathrm{Ext}^{d-1}_{\overline{A}}(k, K_A/pK_A) \to \mathrm{Ext}^{d-1}_{\overline{A}}(k, D^{\cdot}_{\overline{A}})$ は，0-map でないであろう。

もし，この予想が正しければ，任意の mixed-characteristic local ring A に対して，$\varphi_A \neq 0$ が導びかれ，したがって，(1)(2) より homological conjecture が，常に正しいことが分る。

上の予想に関して，次の問題を考えることは，重要である。即ち，『A が characteristic $p > 0$ の local ring のとき，K_A のどのような submodule M が，zero でない $\mathrm{Ext}^d_A(k, M) \to \mathrm{Ext}^d_A(k, D^{\cdot}_A)$ を導くか？』

次に，これを考えてみる。

以下では，A は標数 $p > 0$ の local ring で，更に A は A^p 上 finite であると仮定する。（homological conjecture を考える上で，これは，さほど深刻な仮定ではない。）

一般に，finite な local ring homomorphism $A \longrightarrow B$ があるとき，$K_B \cong \mathrm{Hom}_A(B, K_A)$ なので，A-module homomorphism $K_B \longrightarrow K_A$ がえられる。これを，A の Frobenius map $A \xrightarrow{f} A$ に適用して，map $F : K_A \longrightarrow K_A$ を得る。この F を K_A 上の <u>co-Frobenius map</u> と呼ぶこととする。F は次の性質をみたす。

$$F(a^p x) = a \cdot F(x) \quad (a \in A,\ x \in K_A)$$

<u>例</u> (1) A を reduced Gorenstein local ring で，π を $\mathrm{Hom}_{A^p}(A, A^p)$ の A-module としての生成元とする。このとき，co-Frobenius map F は次で与えられる；

任意の $x\cdot\pi \in A\cdot\pi = K_A$ に対して，$F(x\pi) = \pi(x)^{\frac{1}{p}}\cdot\pi$

(2) k が完全体で，$A = k[\![X_1 \cdots X_n]\!]$ のとき，$K_A \cong A$ である。このときの $F : A \longrightarrow A$ は，次の様に定義される。

$$F(h(\underline{X})) = (h_{p-1,\cdots,p-1}(\underline{X}))^{\frac{1}{p}} \quad (h(\underline{X}) \in A)$$

但し，巾級数 $h(\underline{X}) \in A$ に対して，$h_{i_1 \cdots i_n}(\underline{X}) \in A^p$ $(0 \leq i_j < p)$ は次の等式によって与えられるものとする。

$$h(\underline{X}) = \sum_{0 \leq i_j < p} h_{i_1 \cdots i_n}(\underline{X})\, X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

<u>定義</u> K_A の submodule M が F-stable とは，co-Frobenius map F に対して，$F(M) \subset M$ ときと定義する。

例 (1) $A = k[[x_1 \cdots x_n]]$ (kは完全体)ならば、K_Aは自明でない F-stable な submodule をもたない。

(2) I が A の ideal で、$\dim A = \dim A/I$ なるとき、$(0:I)_{K_A}$ は、K_A の F-stable な submodule である。

(3) A が Gorenstein domain で $\mathfrak{C}$ が conductor ideal のとき、ideal I が $\mathfrak{C} \subset I \subset A$ ならば $I \subset A \cong K_A$ はいつも F-stable である。

先の問題に関する一応の結果として、次の定理をえた。

定理. M が K_A の submodule で次の条件をみたすと、仮定する。

(1) M は F-stable である。

(2) grade (non-CM (A)) $\geqq 1$

(3) grade ($\mathrm{Ann}_A(K_A/M)$) $\geqq 1$

このとき $M \hookrightarrow K_A \xrightarrow{\varepsilon_A} D_A^{\cdot}$ から導びかれる map;

$$\mathrm{Ext}_A^d(k, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^d(k, D_A^{\cdot})$$

は、non-zero map である。

証明のスケッチ: α_M を合成射 $M \hookrightarrow K_A \xrightarrow{\varepsilon_A} D_A^{\cdot}$ とするとき、M が F-stable であることより、次の可換図式をえる。

$$\begin{tikzcd} D_A^{\cdot} \arrow[r] & D_A^{\cdot} \\ M \arrow[u, "\alpha_M"] \arrow[r, "F"] & M \arrow[u, "\alpha_M"'] \end{tikzcd}$$

これを $D_A^{\cdot}$ で dual をとって，次も可換となる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_M"'] & A \arrow[d, "\beta_M"] \\ V_M^{\cdot} \arrow[r] & V_M^{\cdot} \end{tikzcd}$$

ここで，$V_M^{\cdot} := \underline{\underline{R}}\mathrm{Hom}_A(M, D_A^{\cdot})$，$\beta_M = \underline{\underline{R}}\mathrm{Hom}_A(\alpha_M, D_A^{\cdot})$ である。仮定(2)(3)より，A の non-zero divisor c をとって，A_c が Cohen-Macaulay かつ $(K_A)_c = M_c$ となる様にできる。この場合，derived category の中で，$M_c \xrightarrow{\sim} (D_A^{\cdot})_c$ となる。そこで map $\mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, \alpha_M) : \mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, M) \to \mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, D_A^{\cdot}) = A$ を考えると，$\mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, \alpha_M)_c$ は同型である。とくに，n が十分大きな整数のとき，$c^n \in A$ は $\mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, \alpha_M)$ の像に属する。いいかえれば，morphism $h \in \mathrm{Ext}_A^0(D_A^{\cdot}, M)$ が存在して，次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} D_A^{\cdot} \arrow[rr, "c^n"] \arrow[dr, "h"'] & & D_A^{\cdot} \\ & M \arrow[ur, "\alpha_M"'] & \end{tikzcd}$$

dual をとって，次も可換。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "c^n"] \arrow[dr, "\beta_M"'] & & A \\ & V_M^{\cdot} \arrow[ur, "h^{\vee}"'] & \end{tikzcd}$$

したがって，　整数 m を十分大きくとって $c^n \notin \underline{m}^{p^m}$ となるとき，次の可換図式を構成できる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^m"'] \arrow[d, "\beta_M"] & A \arrow[dr, "c^n"] \arrow[d, "\beta_M"'] & \\ & & A \\ V_M^{\cdot} \arrow[r] & V_M^{\cdot} \arrow[ur, "t^{\vee}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで，f^m は Frobenius map f の m 回の合成である。
この図式に functor $\mathrm{Tor}_0^A(k, -)$ を施して，次の可換図式をえる。

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_0^A(k,\beta_M)"] & A/\underline{m}^{p^m} \arrow[dr, "c^n"] \arrow[d] & \\ & & A/\underline{m}^{p^m} \\ \mathrm{Tor}_0^A(k, V_M^{\cdot}) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_0^A(k, {}^fV_M^{\cdot}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

但し，g は，$g(x \pmod{\underline{m}}) = x^{p^m} \pmod{\underline{m}^{p^m}}$ で与えられる。
$c^n \cdot g$ は，n, m のとり方から，zero でないから，結局，
$\mathrm{Tor}_0^A(k, \beta_M) \neq 0$ を得る。

一方で，同型 $(k \overset{L}{\otimes}_A \beta_M)^{\vee} \cong \underline{R}\mathrm{Hom}_A(k, \alpha_M)[d]$ があるから，$\mathrm{Ext}_A^d(k, \alpha_M) \cong \mathrm{Tor}_0^A(k, \beta_M)^{\vee} \neq 0$ を得る。（証明終わり）

さて，A を mixed-characteristic normal local domain で，$p = \mathrm{ch}\, k > 0$，$\overline{A} = A/pA$ としよう。前述の予想が成立す

るためには、$K_{\bar{A}}$ の submodule K_A/pK_A が定理の仮定(1)(2)(3)をみたしていれば、十分である。ところで、(2)(3)の仮定がみたされることは、容易に確められる。

問題. K_A/pK_A はいつ $K_{\bar{A}}$ の F-stable submodule となるか?

いつも F-stable ならば、homological conjecture は正しいのだが…。

INDEX OF REDUCIBILITY OF PARAMETER IDEALS OF A LOCAL RING

後藤四郎（日本大学文理学部）

鈴木直義（静岡薬科大学）

この講演では，表記題名の準備中の論文の主な結果を紹介する．

§0. 序　　局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$-primary ideal $\mathfrak{a}$ の無駄のない既約分解にあらわれる既約 ideal の個数を index of reducibility of $\mathfrak{a}$ (in A) と呼び，$N(\mathfrak{a})$ と書く．　このとき，次が成立する，

$$N(\mathfrak{a}) = r(A/\mathfrak{a}).$$

ここで，A-加群 M に対して，$r(M) := \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M))$，即ち M の Socle の次元をあらわすものとする．

Ideal $\mathfrak{a}$ が特に，環 A の parameter ideal $\mathfrak{q}$ の場合，次の事実は周知である．

① A が regular ならば，すべての $\mathfrak{q}$ に対して，$N(\mathfrak{q}) = 1$，[Grö]．

② A が semi-regular（即ち，Cohen-Macaulay）ならば，$N(\mathfrak{q})$ は $\mathfrak{q}$ の選び方に依らない，環 A の不変量である，[N]．

③ 全ての $\mathfrak{q}$ に対して，$N(\mathfrak{q}) = 1$ ならば，A は semi-regular である，[N=R]．

④ emb-dim$(A) \leq$ dim$(A)+1$ のとき，$N(\mathfrak{q})$ が $\mathfrak{q}$ に依らない A の不変量ならば，A は semi-regular である．しかも，この主張は，emb-dim$(A) \geqq$ dim$(A)+2$ の場合は，一般には成立しない，[E=N]．（ここで反例としてあげられている環は，1 次元の，C-M. でない Buchsbaum 環であることは，注目すべきである．）

さて，$\underline{\mathrm{I}(A)}$:= sup$\{N(\mathfrak{q})$; $\mathfrak{q}$ は A の parameter ideal$\}$ を局所環 A の $\underline{\text{type}}$ と呼ぶ．これに関して，次の 2点について，得られた結果のうち，主なるものを紹介する．

(1) どのような環 A に対して，$\mathrm{I}(A)<\infty$ となるか．又，その場合，$\mathrm{I}(A)$ と他の不変量とはどんな関係があるか？

(2) $N(\mathfrak{q})$ が環 A の不変量であるような，即ち，$N(\mathfrak{q})=\mathrm{I}(A)$ が全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ について成立するような環 A は，いかように特徴付けることが出来るか？

以下，$(A, \mathfrak{m})$ は Noetherian 局所環で，$d=\dim(A)$ とする．A-加群 M に対して，その最少生成系の要素の数を $\mu_A(M)$ であらわす．

§1. $\mathbb{I}(A)<\infty$ について.

まず $\mathbb{I}(A)$ は必ずしも有限ではないことに注意する. 実際,

(1.1) Example k を体, $T=k[[X_1,\cdots,X_d]]$, $R=k[[X_1,X_2,X_3]]$, $d\geqq 3$ とする. $T\longrightarrow R$ を $X_i\mapsto X_i$ $(i\leqq 3)$, $X_i\mapsto 0$ $(i\geqq 4)$ で定義して, R を T-加群と見做す. このとき, 局所環 A を ideal 化

$$A:=T\ltimes R$$

で定義する. すると
$$\mathbb{I}(A)=\begin{cases}1 & (d=3),\\ \infty & (d\geqq 4).\end{cases}$$

$d=3$ の場合は, A は Gorenstein 環である. $d\geqq 4$ のときは, 任意の 5 以上の奇数 n に対して, $N(Q)\geqq n-3$ であるような A の parameter ideal Q が構成される. そのためには, Buchsbaum と Eisenbud の結果 ([B-E]) による. R の ideal $\mathfrak{a}$ で, $\mu_R(\mathfrak{a})=n$ かつ $R/\mathfrak{a}$ が Artinian Gorenstein 環となるものがある. $\mathfrak{a}=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ として, 特に, a_1,a_2,a_3 が R-sequence をなすものとする. このとき, $b\in R$ で $((a_1,a_2,a_3):_R\mathfrak{a})=(a_1,a_2,a_3,b)$ となるものをとれる. $\mathfrak{q}=(a_1,a_2,a_3,b-X_4,X_5,\cdots,X_d)$ は T の parameter ideal である. $Q=\mathfrak{q}A$ も A の parameter ideal となり, しかも,

$$N(Q)\geqq \ell_R(R/(a_1,a_2,a_3,b)R)=\mu_R(\mathfrak{a}/(a_1,a_2,a_3))=n-3$$

が成立する.

Index of reducibility の考察を特に parameter ideals に限定する理由は，次のようなものである．今，有限生成 A-加群 M と $n \geq \dim(A)$ に対して，($r(A)$ の概念を拡張して)

$\underline{r_n(M)} := \sup\{ r(M/\mathfrak{a}M) ; \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$-primary ideal で $\mu_A(\mathfrak{a}) \leq n \}$.

とする．$n > d$ の場合は，$r_n(M) < \infty$ は期待し難い．実際，(1.1) の証明の本質的な部分は，$R = k[[X_1, X_2, X_3]]$ に対してすら $r_4(R) = \infty$ となってしまうことである．にもかかわらず，環 A (あるいは，加群 M) の次元が低い場合は，次のようなかなり強いことが主張される．

(1.2) <u>Theorem</u>. $\dim A = 2$，M は f.g. A-加群とすると，任意の $n \geq 2$ に対して，$r_n(M) < \infty$．特に，$r(A) = r_2(A) < \infty$．

証明の方針は，まず ideal 化により，$M = A$ としてよく，さらに，$A = \hat{A}$ として，A が Gorenstein 環の場合に帰着させる．
$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$，$k \leq n$，$a_1, a_2$ は A-regular sequence で
$J = (a_1, a_2)$ とする．$r(A/\mathfrak{a}) \leq \mu_A((J:\mathfrak{a}))$ である．
Boratynski = Eisenbud の結果 ([Sa] p.56) より

$$\mu_A(J:\mathfrak{a}) \leq (r(A/J:\mathfrak{a}) + 1) \cdot e(A).$$

一方，$r(A/(J:\mathfrak{a})) = \mu_A(\mathfrak{a}/J) \leq \mu_A(\mathfrak{a}) = k \leq n$ で，所期の上限を得る．

さらに1次元の場合は，

(1.3) Theorem. Mを有限生成A-加群で，$\dim M=1$，NをMの部分加群で $L_A(M/N)<\infty$ となるものとすると，$\mu_A(N)$は，Nに依らない上限をもつ． 従って，特に，$\sup_n(r_n(M))<\infty$，よって $\dim(A)=1$ ならば $r(A)<\infty$ を得る．

これは，1次元の環の ideal の最小生成系の元の数に上限があることから証明される．

ここで，いくつかの $r(A)<\infty$ の場合について，$r(A)$と他の不変量との関係について述べる． 以下，$h^i(A)=L_A(H^i_{\mathfrak{m}}(A))$ とする． 又，K_A は環Aの canonical module をあらわす．即ち，有限生成A-加群で，$\widehat{K_A}\cong \mathrm{Hom}_A(H^d_{\mathfrak{m}}(A), E_A(k))$ となるものである．

(1.4) Proposition $\dim A=1$ のとき，$r(A)\leq h^0(A)+\mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}})$.

実際，a を A の parameter element とする，即ち $\dim(A/(a))<\dim A$. 完全系列

$$0\to H^0_{\mathfrak{m}}(A)\longrightarrow A\longrightarrow A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)\longrightarrow 0$$

より，aが$(A/H^0_{\mathfrak{m}}(A))$-regular であることに注意して，

$$0 \to (H^0_{\mathfrak{m}}(A) + (a))/(a) \to A/(a) \to A/(H^0_{\mathfrak{m}}(A) + (a)) \to 0$$

なる完全系列を得る。従って、

$$\begin{aligned} r(A/(a)) &\leq r((H^0_{\mathfrak{m}}(A) + (a))/(a)) + r(A/((a) + H^0_{\mathfrak{m}}(A))) \\ &\leq L_A(H^0_{\mathfrak{m}}(A)) + \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}}). \end{aligned}$$

尚、この証明をまねると、一般に、$r(A)$ の有限性については、depth $A > 0$ の場合に帰着させることが出来る。

さて、1次元の環は、generalized Buchsbaum 環である。つまり

$$L_A(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty \qquad (i \neq \dim(A))$$

が成立する。その視座に立つと、次の定理は (1.4) の自然な一般化である。就中、非常に興味深い事実である。

(1.5) <u>Theorem</u>　A が generalized Buchsbaum 環で、$d = \dim A \geq 1$ とすると、

$$r(A) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i_{\mathfrak{m}}(A) + \mu_{\hat{A}}(K_{\hat{A}}).$$

特に、A が Buchsbaum 環ならば、等号が成立する。

証明は次元に関する帰納法によるが、次の補題が本質的な部分を占める。

(1.6) Lemma. generalized Buchsbaum 環 A $(\dim A \geqq 1)$ とその parameter element a に対して, n を十分大きな自然数とすると,

$$\gamma(A/(a^n)) = \gamma(H^0_{\mathfrak{m}}(A)) + \gamma(H^1_{\mathfrak{m}}(A)) \quad ([G]) \quad \text{かつ}$$

$$\gamma(H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A/(a^n))) = \gamma(H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)) + \gamma(H^{d}_{\mathfrak{m}}(A)) \quad \text{となる.}$$

この節の最後に, 低次元の場合で残っている, 3次元の環について述べることにする.

(1.7) Proposition. $\dim A = 3$, depth $A > 0$ に対して, 次の完全系列が存在するとする: $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$. ただし, B は 3-dimensional Buchsbaum 環で, f.g. A-加群, しかも $\dim(C) \leqq 1$ であるものとする. すると, $I(A) < \infty$ である.

(1.8) Proposition. $\dim A = 3$, $\hat{A}$ が (S_1) を満す (即ち, $\mathrm{Min}(\hat{A}) = \mathrm{ass}(\hat{A})$) ならば, $I(A) < \infty$.

この場合, $A = \hat{A}$ として, $B = \mathrm{Hom}_A(K_A, K_A)$ が (1.7) の要件を全て満す, ([A] を参照せよ.)

一般の3次元の局所環 A についての $I(A)$ の有限性の問題は, 未解決である.

§2. $N(\mathfrak{q})$が不変量になる環の特徴付け.

[E=N] で $N(\mathfrak{q}) = I(A)$ が全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して成立する環は, 必ずしも Cohen-Macaulay 環とはかぎらないことが主張されている. そこで反例にあげられている環は 1 次元の Buchsbaum 環である. 本節の最初の主張は, その一般次元への拡張を与えるとともに, ある意味で, 彼らの例は本質的であることを明確にする.

(2.1) Theorem. $\dim A = d > 0$, $\text{emb-dim}(A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)) = d+1$ とすると, 次は同値である.

(1) $\mathfrak{m}^2 \cap H^0_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ かつ $A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)$ は Cohen-Macaulay 環である.

(2) A は Buchsbaum 環で, 全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して

$$N(\mathfrak{q}) = I(A)$$

が成立する.

さらに, A が体 k を含むときは, 次も同値になる.

(3) $\hat{A} \cong k[[X_1, \cdots, X_{d+1}, Y_1, \cdots, Y_s]]/((\xi) + \mathfrak{N}(Y_1, \cdots, Y_s))$, (as k-alg).

ただし, $\mathfrak{N}$ は $k[[X_1, \cdots, X_{d+1}, Y_1, \cdots, Y_s]]$ の極大 ideal で, $s = h^0(A)$, ξ は startな $(X_1, \cdots, X_{d+1})^2 k[[X_1, \cdots, X_{d+1}]]$ の元である.

(1) ⇒ (2) については, より一般に, (emb-dim (A) に依らずに), 次のことがいえる.

(2.2) Theorem. $d=\dim A>0$, $A/H^0_\mathfrak{m}(A)$ が regular でない Cohen-Macaulay 環 とすると, $H^0_\mathfrak{m}(A)\cap\mathfrak{m}^2=(0)$ ならば, 任意の parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して, $N(\mathfrak{q})=h^0(A)+I(A/H^0_\mathfrak{m}(A))$ が成立する.

一方, (3) については, 実は, この型の環は, ideal 化によって得られるものであり,

(2.3) Lemma. $A=\hat{A}$ で, A が $k=A/\mathfrak{m}$ を含み, $d=\dim A>0$ とする. このとき, $\mathfrak{m}^2\cap H^0_\mathfrak{m}(A)=(0)$ が成立するための必要十分条件は, $\mathfrak{m}H^0_\mathfrak{m}(A)=0$ かつ $A\cong(A/H^0_\mathfrak{m}(A))\ltimes H^0_\mathfrak{m}(A)$, (as k-alg).

さて, (2.1) の (2) ⇒ (1) で, 条件 $\text{emb-dim}(A/H^0_\mathfrak{m}(A))=d+1$ は, 不可欠である.

(2.4) Example. $A=k[[X,Y,Z]]/(X^\alpha(X,Y,Z)+(Z^\beta))$, $(\alpha,\beta\geqq 2)$, とすると, $\text{emb-dim}(A)=3=d+2$. A は (2.1) の (2) を満すが (1) を満さない.

これまでの議論から, generalized Buchsbaum 環あるいは, Buchsbaum 環 が かなり重要な役割をになっていることが期待される. しかしながら, それらは, 必ずしも この理論で全て支配するものではない.

(2.5) Example. $A=k[[X,Y,Z]]/(X(X^2,Y,Z)+(Z^2))$ とすると, これは Buchsbaum 環ではないが, $N(\mathfrak{q})=I(A)$ が 全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して成立する.

実はもっと一般に，

(2.6) Proposition. d を2以上の自然数とすると，d 次元の局所環 A で，$H^1_{\mathfrak{m}}(A)$ が有限生成でなく，しかも，$N(\mathfrak{q}) = I(A)$ が全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して成立するものがある．$A = k[[X_1, \cdots, X_{d+2}]] / ((X_1^2) + X_2(X_1, \cdots, X_{d+1}))$ がそれらの要件を満す．これは $\text{emb-dim}(A) = d+2$ となっている．

最後に整域であるような環の場合は，

(2.7) Proposition. $d \geq 2$ に対して，d 次元 Buchsbaum 局所整域で $N(\mathfrak{q}) = I(A) = d+2$ が全ての parameter ideal $\mathfrak{q}$ について成立するものがある．$S = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_{d+1}] / (X_1^2 + \cdots + X_{d+1}^2)$ の部分環

$R = [x_1, \cdots, x_{d+1}, ix_1, \cdots, ix_{d+1}]$ に対して，$\mathfrak{M} = R_+$ として，

$A = R_{\mathfrak{M}}$ は与条件を満す．（このとき，さらに，$h^i(A) = 0$ $(i \neq d, 1)$ かつ $h^1(A) = 1$ である．）

《付記》

(1) 講演の後日に，さらに下記の事実が証明された．

① $\dim(A) = 3$ ならば $I(A) < \infty$．従って，一般に，$\dim(A) \leq 3$ ならば $I(A) < \infty$，$\dim(A) \geq 4$ の場合は $I(A) = \infty$ となるものがあることになった．

② (1.5) で等号が成立するには，quasi-Buchsbaum 環（つまり，

$\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ $(\forall i \neq d)$ が成立する環）であれば十分である.

③ (1.6) はさらに，任意の $i=0,1,\cdots,d-1$ に対して，

$$\gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(A/(a^n)))=\gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(A))+\gamma(H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(A))$$

が十分大なる n について成立する.

これを利用すると

④ A が generalized Buchsbaum 環ならば，

$$\nu(A) \geq \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(A))$$

が成立して，これから ② が直ちに従う.

(2) 鈴木が $N(\mathfrak{q})$ の上限に関心をもったのは，青山陽一氏との discussion によってである. 彼は，この講演の原案についても適切な助言を下さった. ここに深く感謝の意を表明したい.

REFERENCES

[A] Y. Aoyama, "Some Basic Results on Canonical Modules", Preprint.

[B=E] D.A. Buchsbaum, "Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3", preprint.

[E=N] S. Endo and M. Narita, " The number of ireducible components of an Ideal and the semi-regularity of a local ring", Proc. of the Japan Academy 40(1964) pp.627-630.

[G] S. Goto, "Approximately Cohen-Macaulay Rings", to appear in J. of Algebra.

[Grö] W. Gröbner, "Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen", Monatsh. Math. vol.55(1951).

[N] D.G. Northcott, "On irreducible ideals in local rings", J. of London Math. Soc. 32(1957) pp.82-88.

[N-R] D.G. Northcott and D. Rees, "Principal systems", Quart. J. Math. Oxford(2), 8(1957) pp.119-127.

[Sa] J.D. Sally, "Numbers generators of ideals in local rings", Lect. notes in pure and applied mathematics vol.35 Dekker ('78).

d-sequenceについての一つの注意

下田保博

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元局所環とし, $a, a_1, \cdots, a_n$ ($n \leq d-1$) を A の元の列とする。$X_1, \cdots, X_n$ を A 上の不定元で $A[\underline{X}]$ で多項式環 $A[X_1, \cdots, X_n]$ を表わすものとしておく。$f_i = aX_i - a_i$ ($i=1, \cdots, n$) とおき,

$$B = A[\underline{X}]/(f_1, \cdots, f_n)$$

と定める。この環 B については次の結果がよく知られている。

<u>結果</u>: (1) $a, a_1, \cdots, a_n$ が A−列ならば, $f_1, \cdots, f_n$ は $A[\underline{X}]$−列になる. さらにもし a が非零因子ならば環 B は環 $T = A[a_1/a, \cdots, a_n/a]$ と同型になる。(参照 [8], [9])。

(2) a が非零因子であるとする。もし環 B と環 T が同型ならば, $a, a_1, \cdots, a_n$ は A−列である。

(3) $G_{\mathfrak{q}}(A)$ が Cohen−Macaulay 環 (または Gorenstein 環) (ここで $\mathfrak{q} = (a, a_1, \cdots, a_n)$ とする) ならば $\mathrm{proj}(R(\mathfrak{q}))$ も

そうである。従ってそのアフィン開部分集合の $\mathrm{spec}(A[a_1/a, \cdots, a_n/a])$ も同じ性質をみたし，結局 $T = A[a_1/a, \cdots, a_n/a]$ は Cohen-Macaulay 環（または Gorenstein 環）となる。ここで $R(\mathfrak{q})$ は Rees 代数 $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{q}^n$ を表わすものとする。（参照 [10]）.

最近，後藤氏が次のような結果を示した。（[1]）.

<u>定理</u>　A が Buchsbaum 環で depth $A>0$ ならば，$\mathrm{proj}(R(\mathfrak{q}))$ は Cohen-Macaulay である。ただし，$\mathfrak{q}$ はパラメーターイデアルとする。

これによれば，環 T は Cohen-Macaulay になることがわかるが，環 B についてはどうであるかはわからない。そこで A が Buchsbaum 環である場合も含めて，環 B がいつ Cohen-Macaulay 環になるかを調べてみたいというのが，この報告集で私が述べたいと思う主題である。しかしながら，$a, a_1, \cdots, a_n$ が一般の場合については，大変難かしくなってしまうので，ここでは，この元が特別の場合，'d-sequence' をなしている時に取り扱いたいと思う。

そこでまず d-sequence の定義から始めることにする。

定義　A の元の列 $x_1, \cdots, x_k$ が d-sequence であるとは，等式

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}) : x_i x_j = (x_1, \cdots, x_{i-1}) : x_j$$

が任意の $1 \leqq i \leqq j \leqq k$ に対して成り立つような列のことをいう。

さらに，A の元の列 $x_1, \cdots, x_n$ が順序によらずに d-sequence をなすときに，$x_1, \cdots, x_n$ は unconditioned d-sequence と呼ばれる。

この d-sequence についての性質を述べたものとしては C. Huneke の一連の論文や A. Simis and W. Vasconcelos 等の論文がある。それらについては [4]，[5]，[6]，[7]，[11] [12] を参照されたい。

次にあげる unconditioned d-sequence の例は [4] によるものである。

例　① A が Buchsbaum 環で $a, a_1, \cdots, a_n$ はパラメーター系の一部をなしている。

② A が Cohen-Macaulay 環で P を素イデアルとし，

その生成元の個数が(Pの高さ$+1$)個であると仮定する。(こうしたイデアルをalmost complete intersection idealと呼んでいる。) A_Pが正則環のとき, $P=(a, a_1, \cdots, a_n)$はunconditioned d-sequenceで生成される。

③ $X=(x_{ij})$を$n\times(n+1)$行列でx_{ij}は体k上の不定元とする。M_iをXの第$(n+2-i)$列を除いた行列の行列式とする。今 $A=k[\{x_{ij}\}]_{(\{x_{ij}\})}$とおく。このとき, $M_1, \cdots, M_{n+1}$はunconditioned d-sequenceをなす。

④ $X=(x_{ij})$をgenericな$(2n+1)\times(2n+1)$の交代行列で対角線上は0とする。$A=\mathbb{Z}[\{x_{ij}\}]_{(x_{ij})}$とおく。$P_1, \cdots, P_{2n+1}$を$X$の極大パフィアンとするとき, $P_1, \cdots, P_{2n+1}$はunconditioned d-sequenceである。

上の例で②のときのBについて少し述べることにする。次のことはただちにでてくる。

補題 $f_1, \cdots, f_n$が$A[X]$-列であるための必要十分条件はイデアル$(a, a_1, \cdots, a_n)$が少なくともn個のA-列を含むことである。

この補題に従えば, ②の場合は環BはCohen-Macaulay環になることがわかる。従って以後考えるunconditioned d-sequenceの例は①, ③, ④のもの

であるとする。

1. さて、まず始めに $f_1,\cdots,f_n$ が d-sequence になる条件を求めよう。

命題 1.1　$a, a_1, \cdots, a_n$ が d-sequence ならば、$f_1,\cdots,f_n$ も d-sequence になる。

このために補題を少し用意する。

補題 1.2　$x_1,\cdots,x_k$ が d-sequence で、$q=(x_1,\cdots,x_k)$ とおく。このとき任意の $1\leqq i\leqq k$ と任意の正の整数 l に対して

$$q^l \cap (a_1,\cdots,a_{i-1}) : a_i = (a_1,\cdots,a_{i-1})q^{l-1}$$

が成り立つ。

補題 1.3　$a, a_1, \cdots, a_n$ が d-sequence ならば、

$$(a, f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1} f_j = (a, f_1, \cdots, f_i) : f_j$$

が任意の $0\leqq i<j\leqq n$ に対して成り立つ。

補題 1.4　$a, a_1, \cdots, a_n$ が d-sequence であるとする。

(1) $(f_1,\cdots,f_i) : aa_j = (f_1,\cdots,f_i) : a_j$

が任意の $0\leqq i<j\leqq n$ について成り立つ。

(2) $(f_1,\cdots,f_i) : a^2 = (f_1,\cdots,f_i) : a$

が任意の $0 \leqq i \leqq n$ に対して成り立つ。

[命題1.1の証明]

$$(f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1} f_j = (f_1, \cdots, f_i) : f_j$$

が任意の $0 \leqq i < j \leqq n$ に対して成り立つことを示せばよい。

g を $(f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1} f_j$ の任意の元とせよ。補題1.3より $g \in (a, f_1, \cdots, f_i) : f_j$ を得る。今、

$$f_j g = ah + \sum_{k=1}^{i} h_k f_k$$

と表わせば、$ahf_{i+1} \in (f_1, \cdots, f_i)$。従って $hf_{i+1} \in (f_1, \cdots, f_i) : a$。ここで環 $A[X_1, \cdots, X_i]/(f_1, \cdots, f_i) : a = B'$ を考えて、h, f_{i+1} を $B'[X_{i+1}, \cdots, X_n]$ で考える。もし、f_{i+1} が $B'[X_{i+1}, \cdots, X_n]$ で非零因子ならば $h \in (f_1, \cdots, f_i) : a$ となり $g \in (f_1, \cdots, f_i) : f_j$ が示せた。

そこで f_{i+1} が $B'[X_{i+1}, \cdots, X_n]$ で非零因子をいうにはその係数 a, a_{i+1} が B' で非零因子ならばよい。ところが、これは補題1.4より成立する。

注意 (1) $f_1, \cdots, f_n$ が d-sequence でも、$a, a_1, \cdots, a_n$ は必ずしも d-sequence になるとは限らない。実際、

$$A = \left(k[X, Y]/(X^2, XY)\right)_{(X, Y)} = k[x, y]_{(x, y)}$$

$a=x,\ b=y$, $f_1=aT-b\in A[T]$ とおく。
このとき，f_1 は $0:f_1^2=0:f_1$ を満たすが，a, b は d-sequence にはならない。

(2) 最初の補題で $f_1, \cdots, f_n$ が $A[X]$ ー列をなすための必要十分条件を与えたが，d-sequence については同じ結果は成り立たない。すなわち，$a, a_1, \cdots, a_n$ の少なくとも n 個が d-sequence をなしても，$f_1, \cdots, f_n$ は d-sequence をなすとは限らない。実際，

$$A=\left(k[s,t,u]/(st, su^2)\right)_{(s,t,u)}$$

$a=t,\ a_1=u$ とする。a は $0:a^2=0:a=(s)A$ であるが，
$0:f_1\neq 0:f_1^2$ である。

ここで環 B と環 $T=A[a_1/a, \cdots, a_n/a]$ の関係について少し調べてみよう。その為に以後 $a, a_1, \cdots, a_n$ は unconditioned d-sequence で $\mathrm{grade}(a, a_1, \cdots, a_n)\geq 1$ と仮定しておく。

<u>補題 1.5</u>　$T=A[X]/(f_1, \cdots, f_n):a$

これは補題 1.4 と $a^k\cdot\ker(A[X]\longrightarrow T)\subset(f_1, \cdots, f_n)$ がある整数 $k>0$ について成り立つことから出てくる。

<u>系1.6</u> 次のような $A[X]$-moduleの完全列がある。

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow T \oplus A/(a,a_1,\cdots,a_n)[X] \longrightarrow T/aT \to 0$$

<u>補題1.7</u> $a, a_1/a, \cdots, a_n/a$ は T-列である。

<u>系1.8</u> $M=(m, X_1, \cdots, X_n)$ とおく。このとき,

$$\begin{cases} \operatorname{depth}_M B_M = \operatorname{depth} A/(a_1,\cdots,a_n) + n \\ \dim_M B_M = \dim A/(a_1,\cdots,a_n) + n \end{cases}$$

さて, 例の①, ③, ④について B_MがCohen-Macaulay環となる為の条件を求めてみよう。

<u>例①の場合</u>

(i) $n < \dim A - 1$ のとき, B_MがCohen-Macaulayならば $\operatorname{depth} A/(a_1,\cdots,a_n) > 0$。従って AがCohen-Macaulayになる。

(ii) $n = \dim A - 1$ のとき, この場合も B_MがCohen-Macaulayになることはない。しかし系1.8によれば $\operatorname{depth} B_M \geq \dim A - 1 = \dim B_M - 1$ である。ところで, $T = A[X]/(f_1,\cdots,f_n):a$ は補題1.7から$\dim A$のCohen-Macaulay環となる。今 $(f_1,\cdots,f_n) = (f_1,\cdots,f_n):a \cap (a, a_1,\cdots,a_n)A[X]$ であるから $U_{B_M}(0) = (f_1,\cdots,f_n):a$ となり, $B_M/U_{B_M}(0)$ はCohen-Macaulay環となる。よって後藤氏の[2]により $B_M/a^k B_M$ は任意の整数 $k>0$ についてCohen-Macaulay環になる。

例③の場合 まず $\mathrm{ht}(M_1, \cdots, M_{n+1}) = 2$ より, B_Mの次元は $\dim A/(M_1, \cdots, M_{n+1}) + n = n(n+1) + n - 2$ であることに注意せよ。今 $A_1 = A/(M_1, \cdots, M_n)$ とおく。B_M の depth を調べるには A_1 のdepthを調べればよい。このとき, 系1.6より次の完全列

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_1/(M_{n+1})A_1 \oplus A_1/0 : M_{n+1} \longrightarrow A_1/0 : M_{n+1} + (M_{n+1}) \to 0$$

を得る。ところが,

$$A_1/0 : M_{n+1} = A/(x_{1,n+1}, \cdots, x_{n,n+1})$$ でCohen-Macaulay

になり, さらにHochster-Eagonの定理 [3] より, $A_1/(M_{n+1})A_1$ もCohen-Macaulayになる。従って A_1 のdepthは n^2 となり, $\operatorname{depth} B_M = n^2 + n$ となる。よって B_MがCohen-Macaulayになる条件は

定理1.9 kを体, $A = k[X_{ij}]_{(X_{ij})}$ とおく。$M_1, \cdots, M_{n+1}$を $(X_{ij})_{n \times n+1}$ の $n+2-i$ 番目 (iは1から$n+1$) の列を除いた極大小行列式どもとする。今 $a = M_{n+1}$, $a_1 = M_1, \cdots, a_n = M_n$ とおくとき,

$$B_M \text{が Cohen-Macaulay環} \iff n \leq 2$$

例④の場合 まず $A/(P_1, \cdots, P_{2n+1})$ はGorenstein環で $\mathrm{ht}(P_1, \cdots, P_{2n+1}) = 3$ となることに注意せよ。A_2を

$$A_2 = A/(P_1, \cdots, P_{2n})$$

とおき，$\mathfrak{a} = P_{2n+1}$ とする。このとき，

$$0 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_2/0:\mathfrak{a} \oplus A_2/\mathfrak{a}A_2 \longrightarrow A_2/0:\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}) \longrightarrow 0$$

であり，$A_2/0:\mathfrak{a} = A/(x_{1,2n+1},\cdots,x_{2n,2n+1})$ よりCohen-Macaulay環となるので $\operatorname{depth} A_2 = 2n^2-n$．従って $\operatorname{depth} A_2 = \dim A_2$ となるためには $n \leq 1$ であればよい。よって B_M がCohen-Macaulay環となるための条件は

<u>定理1.10</u> $A = \mathbb{Z}[\{x_{ij}\}]_{(x_{ij})}$ とおく。$P_1,\cdots,P_{2n+1}$ を極大パフィアンとするとき，

B_M がCohen-Macaulay環 $\Leftrightarrow n \leq 1$.

2. $J=(f_1,\cdots,f_n)$ とおく。$B = A[X]/J$ を考える．一般にイデアル I がd-sequenceで生成されている時には A/I^k のdepthがある程度評価できる。（例えば［4］参照）．そこで，今度は $A[X]/J^k$ のdepthを評価してみよう。

$$\min_{0\leq i\leq n} A/(a_1,\cdots,a_i):a+(a_{i+1},\cdots,a_n,a) = t$$

とおく。

<u>定理2.1</u> $\operatorname{depth}_M A[X]/(f_1,\cdots,f_i):a+(f_{i+1},\cdots,f_n)$

$$= \operatorname{depth} A/(a_1,\cdots,a_i):a+(a_{i+1},\cdots,a_n,a) + n + 1$$

<u>系2.2</u> $\inf_k \operatorname{depth}_M A[X]/(f_1,\cdots,f_n)^k \geq t+n+1$

<u>系2.3</u> (1) 例③のとき： $\inf_k \operatorname{depth}_M A[X]/(f_1,\cdots,f_n)^k = n^2+n$

(2) 例④のとき： $\inf_k \operatorname{depth}_M A[X]/(f_1,\cdots,f_n)^k = 2n^2-n-1$.

定理2.1を示す為に次の補題を用いる。

<u>補題2.4</u> $a, a_1, \cdots, a_n$ が unconditioned d-sequence で，$I_j=(f_1,\cdots,f_j)$ とする。このとき，

$a, a_{j+1}, \cdots, a_n$ は $A[X]/I_j$ で unconditioned d-sequence をなす。

<u>補題2.5</u> $(f_1,\cdots,f_i):f_{i+1}=(f_1,\cdots,f_i):a$

が任意の $0 \leq i \leq n$ について成り立つ。

この２つの補題により

$$B_i = A[X]/(f_1,\cdots,f_i):f_{i+1}+(f_{i+1},\cdots,f_n)$$

$$= A[X]/(f_1,\cdots,f_i):a+(f_{i+1},\cdots,f_n).$$

従って定理2.1と[4]の定理3.1より系2.2が成り立つ。

<u>補題2.6</u> B_i 上 $X_1,\cdots,X_i$ は正則列をなす。

さてこの補題から

$$\operatorname{depth} B_i = \operatorname{depth} A[X_{i+1},\cdots,X_n]/\underbrace{(a_1,\cdots,a_i):a}_{+(f_{i+1},\cdots,f_n)} + i$$

$$= \operatorname{depth} A/(a_1,\cdots,a_i):a\,[X_{i+1},\cdots,X_n]/(f_{i+1},\cdots,f_n)+i$$

ところで系1.8から

$$\operatorname{depth}_m A/(a_1,\cdots,a_i):\mathfrak{a}[X_{i+1},\cdots,X_n]/(t_{i+1},\cdots,t_n)$$
$$=\operatorname{depth}_m A/(a_1,\cdots,a_i):\mathfrak{a}+(a_{i+1},\cdots,a_n)+(n-i)$$

従って $\operatorname{depth} B_i = \operatorname{depth} A/(a_1,\cdots,a_i):\mathfrak{a}+(a_{i+1},\cdots,a_n)+n$.

参考文献

1. S. Goto, Blowing-up characterization for Local Rings, 数理解析研究所講究録 400 42-50 (1980)
2. ———, Approximately Cohen-Macaulay rings, preprint.
3. M. Hochster and J. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, Ame. J. Math. 93 (1971) 1020-1058.
4. C. Huneke, The theory of d-sequences and powers of ideals, to appear in Adv. in Math.
5. ———, On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence, J. of Alg. 62 (1980) 268-275.
6. ———, Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras, to appear, Comm. in Alg.

7. ————, The Koszul homology of an ideal, preprint.

8. T. Matsuoka, Some remarks on a certain transformation of Macaulay rings, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 301-309.

9. L. J. Ratliff, Jr, Two notes locally Macaulay rings, Trans. A. M. S. 119 (1965) 399-406.

10. J. Sally, Tangent cones at Gorenstein singularities, preprint.

11. A. Simis and W. Vasconcelos, The syzygies of the conormal modules, preprint.

12. ————, On the dimension and integrality of symmetric algebras, preprint.

Vasconcelos 予想について

池田 信（名大・理）

$(R, \mathfrak{m})$ を Noetherian local ring，I を R の ideal とする。$\mathrm{pd}_R I < \infty$ かつ I/I^2 が free R/I-module ならば I は R-sequence で生成されることはよく知られている（Vasconcelos）。Vasconcelos は次の予想を提出している：

（予想）R を Noetherian local ring，I を R の ideal で $\mathrm{pd}_R I < \infty$，$\mathrm{pd}_{R/I} I/I^2 < \infty$ をみたすものとする。このとき I は R-sequence で生成されるだろうか？

本稿の目的は $\mathrm{pd}_R I \leqq 2$ ならば比較的ゆるやかな条件のもとで上記の予想が正しいことを証明することである。

§1 基本的な事項。

R, I は予想の仮定をみたすものとする。このとき，次のことが成立する（c.f. [4]）。

(1) I は grade unmixed である（i.e, すべての

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ について grade $\mathfrak{p}$ = grade I)。

(2) すべての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ に対して, $IR_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$-sequence で生成される。

(3) $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to I/I^2 \to 0$ を I/I^2 の R/I-module としての free resolution とすると.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rank} F_i = \operatorname{grade} I \text{ 。}$$

(4) $\mathrm{Tor}_1^R(I, R/I)$ が free R/I-module ならば I は R-sequence で生成される。

次に, local ring R の ideal I が R-sequence で生成されるための必要十分条件を述べる.

Proposition (1.1) (Gulliksen - Levin [6]). R を Noetherian local ring, I を R の ideal で $\mathrm{pd}_R I < \infty$ をみたすものとする。 $H_1(I;R)$ を I の生成元による Koszul homology とする。 このとき, I が R-sequence で生成されるための必要十分条件は $H_1(I;R) = 0$ 又は $H_1(I;R)$ が R/I を直和因子としてもつことである。

Proposition (1.2) $I=(x_1,\cdots,x_n)$ とし，$S_2(I)$ を I の2次の symmetric power とする。$\delta(I)=\ker(S_2(I)\to I^2)$ とおくと次の exact sequence がある。

$$0\longrightarrow \delta(I)\longrightarrow H_1(I;R)\longrightarrow (R/I)^n\longrightarrow I/I^2\longrightarrow 0$$

§2　ある種の generic free resolution

$X=(X_{ij})$ を n 次の generic skew symmetric matrix で n は奇数であるとする。$R=\mathbb{Z}[X_{ij}]$ とおく。$I_{n-1}(X)$ を X の $(n-1)$-minors で生成された R の ideal とする。Buchsbaum-Eisenbud [2] より，X の maximal pfaffian で生成された ideal $J=(p_1,\cdots,p_n)$，ただし p_i は X から i 行 i 列を除いた行列の pfaffian とする，は height 3 の Gorenstein ideal である。J の minimal free resolution は

$$0\longrightarrow F_3\xrightarrow[{[p_1\cdots p_n]}]{} F_2\xrightarrow[X]{} F_1\xrightarrow[{\begin{bmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{bmatrix}}]{} F_0\longrightarrow R/J\longrightarrow 0$$

$F_3=F_0=R$，$F_1=F_2=R^n$

で与えられる。$\{e_1,\cdots,e_n\}$，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ をそれぞれ F_1，F_2 の base とする。

L を $\{\varepsilon_i \otimes e_j \mid (i,j) \neq (n,n)\}$ で生成された $F_2 \otimes F_1$ の sub-module とする。

$$f_2 : \bigwedge^2 F_2 \longrightarrow L$$

を

$$f_2(\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon_j \otimes \sum_{k=1}^{n} x_{ik} e_k - \varepsilon_i \otimes \sum_{k=1}^{n} x_{jk} e_k & (1 \leqq i < j < n) \\ \varepsilon_n \otimes \sum_{i=1}^{n-1} x_{ik} e_k - \varepsilon_i \otimes \sum_{i=1}^{n} x_{nk} e_k - x_{in}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e_k \otimes \varepsilon_k\right) & (1 \leqq i < n,\ j = n) \end{cases}$$

で定義する。$f_1 : L \longrightarrow S_2(F_1)$ を X から induce される canonical map とする。

<u>Theorem</u> (2.1)

$$0 \to \bigwedge^2 F_2 \xrightarrow{f_2} L \xrightarrow{f_1} S_2(F_1) \longrightarrow I_{n-1}(X) \to 0$$

は exact sequence。

この定理の応用として次の Herzog の結果の一般化が得られる。

<u>Corollary</u> (2.2) R を Cohen-Macaulay local ring, I を grade 3 の perfect ideal で $\mathrm{Ext}_R^3(R/I, R) \cong R/I$ をみたすものとすると I/I^2 は Cohen-Macaulay である。

§3　主定理とその証明

[ ]において Vasconcelos, Simis, Andrade は R が regular で $\frac{1}{2} \in R$ のとき、$pd_R I \leqq 2$ ならば予想が正しいことを証明している。この結果を一般化することが §3 の目的である。

<u>Theorem</u> (3.1) (R, m) を Noetherian local ring, I を R の ideal で $pd_R I \leqq 2$, $pd_{R/I} I/I^2 < \infty$ をみたすものとする。さらに、すべての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し $\dim R/\mathfrak{p} + ht\,\mathfrak{p} = \dim R$ が成り立つと仮定する。このとき I は R-sequence で生成される。

[証明]　Step I) $pd_R I = 2$ としてよい。

∵ $pd_R I = 0$ なら明らか。$pd_R I = 1$ とする。

$0 \to R^{n-1} \to R^n \to I \to 0$ を I の free resolution とする。これから

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(I, R/I) \to (R/I)^{n-1} \longrightarrow (R/I)^n \to I/I^2 \to 0$$

は exact。一方、(1.1) と (1.2) より depth $R/I \geqq 2$ としてよい。よって $\mathrm{Tor}_1^R(I, R/I)$ は rank 1 reflexive R/I-module, したがって $\mathrm{Tor}_1^R(I, R/I)$ は

free。したがって，I は R-sequence で生成される。

Step II) grade $I = 3$ である。

∵ grade $I \leqq 2$ と仮定する。dim R に関する induction で dim R より小さい次元の local ring については定理は正しいとしてよい。

$$0 \to R^{l} \xrightarrow{d_2} R^{m} \xrightarrow{d_1} R^{n} \to I \to 0$$

を I の free resolution とする。

case 1) $pd_{R/I}\, I/I^2 \geqq 3$.

このとき， $6 \leqq pd_{R/I}\, I/I^2 + pd_R\, R/I = pd_R\, I/I^2 \leqq \operatorname{depth} R$

$I_l(d_2) = d_2$ の maximal minors で生成された ideal は m-primary ideal，よって grade $I_l(d_2) \geqq 6$.

Weyman [5] より，$pd_R\, S_2(I) \leqq 4$，とくに，depth $S_2(I) \geqq 2$，$\delta(I)$ は induction により長さ有限としてよいから，$\delta(I) = 0$。これから $S_2(I) \cong I^2$，depth $I/I^2 > 0$ を得る。$x \in m$ を $R, R/I, I/I^2$ すべての上で non-zero-divisor になるようにとる。

$\bar{R} = R/xR$，$\bar{I} = I + xR/xR$ とおけば，$\bar{R}, \bar{I}$ は induction の仮定をみたす，よって $\bar{I}$ は R-sequence で生成される，したがって I も R-sequence で生成される。これは $pd_{R/I}\, I/I^2 \geqq 3$ に矛盾。

case 2) $\mathrm{pd}_{R/I}\, I/I^2 = 2$.

このとき次の exact sequence がある。

$$0 \to (R/I)^{l+1} \to (R/I)^m \to (R/I)^n \to I/I^2 \to 0$$

$$0 \to (R/I)^{l} \xrightarrow[M]{} (R/I)^{l+1} \to \mathrm{Tor}_2^R(R/I, R/I) \to 0$$

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ に対し，$\mathrm{Tor}_2^R(R/I, R/I)_{\mathfrak{p}}$ は free だから M の maximal minors で生成された ideal は $\mathfrak{m}/I$ - primary。これより $\dim R/I = 2$．

一方，$5 = \mathrm{pd}_R R/I + \mathrm{pd}_{R/I}\, I/I^2 \leqq \mathrm{depth}\, R \leqq \dim R$。

$\mathrm{ht}\, I = 2$ だから，chain condition より $\dim R/I \geqq 3$

矛盾。

Case 3) $\mathrm{pd}_{R/I}\, I/I^2 \leqq 1$

このときは，(1, 1), (1, 2) より I は R-sequence で生成される。grade $I = 2$ だから $\mathrm{pd}_R I = 1$，矛盾．

Step III) $\mathrm{Ext}_R^3(R/I, R) \cong R/I$。

(∵) $\varphi : \mathrm{Ext}_R^3(R/I, R) \longrightarrow (\overset{3}{\wedge} I/I^2)^* = \mathrm{Hom}_{R/I}(\overset{3}{\wedge} I/I^2, R/I)$

を canonical homomorphism とする。induction の仮定と，$\mathrm{depth}\, R/I \geqq 2$ としてよいことから φ は isomorphism であることが出る。次の Lemma を I/I^2 の free resolution にくり返し用いて，

$(\overset{3}{\wedge} I/I^2)^* \cong R/I$ を得る．

Lemma (3, 2) (Platte [3]) Rをlocal ring Mを有限生成R-moduleで $\mathrm{rank}\, M = r$ とする。さらに $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} \leqq 1$ ならば $M_{\mathfrak{p}}$ はfreeであると仮定する。このとき

$0 \to N \to R^n \to M \to 0$ (exact) ならば $(\overset{r}{\wedge} M)^{**} \cong (\overset{n-r}{\wedge} N)^*$.

Step IV) IはR-sequenceで生成される。

∵ $\mathrm{pd}_{R/I}\, I/I^2 \leqq 1$ ならば、(1, 1)と(1, 2)より O.K.

$\mathrm{pd}_{R/I}\, I/I^2 \geqq 2$ とする。このとき $\mathrm{depth}\, R \geqq 5$。

Iはgrade 3のperfect idealで $\mathrm{Ext}^3_R(R/I, R) \cong R/I$ だから、Buchsbaum-Eisenbud [2]より、Iはあるsize n (n: odd) のskew symmetric matrixのmaximal Pfaffiansで生成される。(2, 1)より $\mathrm{pd}_R I^2 = 2$。よって、$\mathrm{depth}\, I/I^2 > 0$。Step II, case 1と同様にしてIはR-sequenceで生成されることが分る。

Q.E.D.

Reference

[1] J.F. Andrade, A. Simis and W. Vasconcelos, On

the grade of some ideals, Manuscripta Math. 34 (1981), 241-254

[2] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math. 99 (1977), 447-485

[3] E. Platte, Zur endlichen homologischen Dimension von Differentialmoduln, Manuscripta Math. 32, 295-302 (1980).

[4] W. Vasconcelos, On the homology of I/I^2, comm. in Algebra, 6 (17), 1801-1809 (1978).

[5] J. Weyman, Resolutions of exterior and symmetric powers of a module, J. Algebra 59 (1979) 333-341.

[6] T. Gulliksen and G. Levin, Homology of local rings, Queen's Paper in Pure and Applied Math. 20, Kingston, Queen's University 1969.

Rings with Good Formal Fibres

西村純一 (京大・理)

§0. 序.

ネター環 A, B と、A から B への環準同型 $\varphi: A \to B$ が与えられたとき、A の(環論的)性質がいつ B にも遺伝するか、を調べたい。たとえば、A を Cohen-Macaulay 環, Gorenstein 環, 正規環, 正則環, 等、としよう。このとき、いつ B もそれぞれ対応する性質をもった環になるだろうか。

多くの例では、次の図式がいえる。

(A が、ある(環論的)性質をもち、
φ が、平坦、かつ、
φ のすべてのファイバーも同じ性質をみたしている。)

$\Longrightarrow$

(B も、A と同じ性質をもつ。)

逆方向の矢印は、成りたつ場合も、成りたたない場合もあることが、上の例からも確かめられる。また、「φのすべてのファイバー」のかわりに、φが忠実平坦のときなど、「φのすべての閉点(=極大イデアル)におけるファイバー(=閉ファイバー)」でおきかえていえるものもある。とくに、A，Bがともに、局所環である場合には、Aおよび、φの閉ファイバー(のみ)の状態から、Bの性質が判断できるなら、便利なことが多い。上の図式との関連でいうならば、φの閉ファイバーにおいて成りたっている性質が、自動的に、φのすべてのファイバーにおいても成立してくれると、多くの場合、閉ファイバーの状態は、比較的よくわかるので、大助かりになる。しかし、BをAの(極大イデアルによる)完備化$\hat{A}$、φをAから$\hat{A}$への自然な準同型にとってみればわかるように、このように虫のいいことは、全然いえない。

ネター環論、とくに、局所環の歴史をふり

かえってみれば気がつくように、局所環Aが与えられたなら、「なにわともあれ、完備化してみる」というのが、どんな問題を考える場合にも、——ワンパターンといわれるけれど——やはり、一番安全、確実な アタックの第1歩であろう。

それでは、今回も、(完備局所環では)どうだろうか。まず、問題を、もう少し正確に述べる。

<u>問題</u> 2つの局所環A, Bと、AからBへの平坦な局所環準同型 $\varphi: A \to B$ を考えよう。いま、Aが完備とする。このとき、φ の閉ファイバーがある(局所環の)性質Pをもっているなら、φ のすべてのファイバー(の局所環)も、また、同じ性質Pをもつだろうか?

ほぼ同等な問題を、一般の局所環について述べるなら、

<u>問題</u> 2つの局所環A, Bと、AからBへの平坦な局所環準同型 $\varphi: A \to B$ を考えよう。いま、Aから、完備化 $\hat{A}$ への自然な準同型 ρ:

$A \to \hat{A}$ のすべてのファイバー(の局所環)が、ある(局所環の)性質 P をもっていると仮定する。このとき、φの閉ファイバーが、性質 P をもっているなら、φのすべてのファイバー(の局所環)も、また、同じ性質 P をもつだろうか?

この問題を、種々の具体例について、それぞれ、解こうとすることも大切なことだが(アンドレの定理、参照)、次のように、性質 P がいくつかの公理をみたすとし、それらを用い、もっと一般な形で解けるなら、それもそれなりにおもしろいのではないだろうか。

さて、公理。(ここでは、P として、環論的性質、とくに、「局所環の性質」を考える。)

公理0. すべての体は、性質 P をもつ。

2つの局所環 A, B と、A から B への環準同型 $\varphi: A \to B$ を考える。

公理I. φが平坦、かつ、φのすべてのファイバー(の局所環)が、性質 P をもつとき、A が性質 P をもてば、B も同じ性質 P をもつ。

公理II. φが平坦で、B が性質 P をもて

ば、Aも同じ性質Pをもつ。

公理III.　局所環Aが性質Pをもてば、Aの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$について、$\mathfrak{p}$における局所化$A_{\mathfrak{p}}$も、同じ性質Pをもつ。

公理IV.　局所環Aの非零因子tをとり、tAによる剰余環A/tAを考える。A/tAが性質Pをもてば、A自身も性質Pをもつ。

公理V.　体kと、局所k-代数Aについて、Aが性質Pをもてば、kの任意の有限拡大体k'をとるとき、$A\otimes_k k'$のすべての極大イデアルMにおける局所環$(A\otimes_k k')_M$もまた、性質Pをもつ。

公理VI.　完備局所環Aにおいて、性質Pをもつ素イデアルの集合　$U_P(A)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}}$が性質Pをもつ$\}$は、(ザリスキ位相で)開集合になっている。

全くの抽象論に終始してもつまらないので、種々の具体例について、どの公理が、それぞれ成りたっているか(いないか)調べてみよう。(注、発見者の名前、および、初出論文名、

6.

等をあげることは、粉糾の種になりそうなので、やめる。また、○，△，X，等については、適当に解釈してください。)

公理 / 性質	I	II	III	IV	V	VI
coprof $\leq n$	X	○	○	○	○	○
(S_n)	○	○	○	○	○	○
CM	◎	○	○	○	○	○
Gor	◎	○	○	○	○	○
CI	◎	○	○	○	○	○
(R_n)	○	○	○	(○)	*	○
reduced-irred.	△	○	○	○	△	○
n-normal $(S_{n+1})+(R_n)$	○	○	○	○	*	○
reduced	○	○	○	○	*	○
normal	○	○	○	○	*	○
regular	◎	○	○	○	*	○

§1. 諸結果

何はともあれ、今のところ、アンドレの定理が最も重要な結果である。

<u>アンドレの定理</u>. 2つの局所環 A, B, および、A から B への局所環準同型 $\varphi: A \to B$ を考える。いま、

i) φ が形式順滑 (formally smooth), つまり, φ が平坦、かつ φ の閉ファイバーが幾何的正則(局所環) (geometrically regular (local ring)).

ii) A が擬エクセレント環 (= G環), すなわち、A から、完備化 $\hat{A}$ への自然な準同型 ρ: $A \to \hat{A}$ の各ファイバー(の局所環)が、幾何的正則。

ならば、φ のすべてのファイバー(の局所環)も、幾何的正則になっている。

アンドレの定理から、次の命題は、ただちにいえる。

<u>命題</u>. 上と同じ、A, B, φ, ρ について、

i) φ が平坦、

ii)　φの閉ファイバーが、幾何的n-正規(局所環)、かつ、

iii)　ρの各ファイバー(の局所環)が、幾何的n-正規。

ならば、φのすべてのファイバー(の局所環)も、幾何的n-正規になっている。

とくに、$n=0, 1$のとき、幾何的n-正規は、それぞれ、幾何的被約(geometrically reduced)、幾何的正規(geometrically normal)であることに注意。

更に、次の命題も、容易に示される。

命題.　上と同じ、A, B, φ, ρについて、

i)　φが平坦、

ii)　φの閉ファイバーが幾何的整域(局所環)、かつ、

iii)　ρの各ファイバー(の局所環)が、幾何的整域。

ならば、φのすべてのファイバーの局所環も、幾何的整域になっている。(ただし、φの各ファイバー自身が整域とは限らない。)

上の２つの命題の応用として、完備テンサー積（complete tensor product）についての命題をあげておこう。

命題　３つの局所環 $(A, \mathfrak{m})$, B, (W, ω) と、２つの局所環準同型 $\sigma: W \to A$, $\tau: W \to B$ を考える。いま、

i)　τ が平坦、

ii)　$B/\omega B$ が W/ω 上幾何的正規（または、幾何的整域、幾何的被約）、

iii)　A の剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が、W の剰余体 W/ω 上有限生成拡大、

iv)　A から完備化 $\hat{A}$ への自然な準同型 $\rho: A \to \hat{A}$ の各ファイバー（の局所環）が、幾何的正規（または、それぞれ、幾何的整域、幾何的被約）、かつ、

v)　A が正規（または、それぞれ、unibranch 整域、被約）。

ならば、A と B の W 上でのテンサー積 $A \otimes_W B$ の $\mathfrak{m}(A \otimes_W B)$-進位相による（分離）完備化 $(A \otimes_W B)^*$ もまた、正規（または、それぞれ、局所的整域、

被約）になる。

更に，Bが完備局所環ならば，AとBのW上での完備テンサー積 $A\hat{\otimes}_W B$ についても，同様のことがいえる。

ところで，性質Pのみたすいくつかの公理を用いて，一般論から，最初の問題（§0，参照）を解いてみよう。残念ながら，この問題を肯定的に解くためには，目下のところ，「標数0の体を含む」という仮定が必要である。つまり，

命題．　2つの局所環A，Bと，AからBへの局所環準同型 $\varphi: A \to B$，および，局所環についての性質Pを考える。いま，

i)　Pが，公理0，I，II，III，IVをみたし，

ii)　Aが，標数0の体を含み，

iii)　φ が，平坦，

iv)　φ の閉ファイバーが性質Pをもち，

v)　Aから，完備化 $\hat{A}$ への自然な準同型 $\rho: A \to \hat{A}$ の各ファイバー（の局所環）も，性質Pをもつ。

ならば、φのすべてのファイバー(の局所環)も、性質Pをもつ。

我々の証明は、「数研講究録」に書いたので、省略する。上の命題には、「広中の特異点解消定理」を用いる証明もあるが、我々の手法は、全く初等的で、要点は、体の拡大の分離性を用いて、ある種のもちあげ(lifting)を考えるところにある。その意味では、この証明方法には、アンドレの定理と、一脈通じるところがある、ともいえる。しかし、一般標数の場合、不等標数(unequal characteristic)の場合には、全く歯がたたず、目下、名案はないものか、と、思案中.....

以上.

01-12-81.

J. Nishimura

1

KunzのConjectureについて

木村 哲三（日本工業大学）
新妻 弘（　〃　）

Rは標数 $p>0$ の可換環で R' をその部分環とする。Rの部分集合 Γ が次の2つの条件を満足するとき，Γ は R' 上 R の p-basis と言われる；(1) $R=R'[\Gamma]$，(2) Γ の任意の有限部分集合 $\{b_1,\cdots,b_s\}$ について，$\{b_1^{n_1}\cdots b_s^{n_s} \mid 0\leq n_i\leq p-1\}$ が $R^p[R']$ 上1次独立である。

KunzのConjecture；Rは標数pのregular local ringとする。R' を $R^p\subset R'\subset R$ なるregular ringで，Rがfinite R'-moduleであるものとする。このとき，Rは R' 上にp-basisをもつか？

この問題は以下に述べるようにして肯定的に解決される。

$(R,\mathfrak{m},k)$ をKrull次元がrのlocal ringとする。$R^p=\{a^p \mid a\in R\}$ とすれば，$\mathfrak{m}^{(p)}=\{m^p \mid m\in\mathfrak{m}\}$ はその極大idealで k^p は剰余体である。$(R',\mathfrak{m}',k')$ をlocal ringで

$R^p \subset R' \subset R$ なるものとする。Rが整域のときには R, R', R^p の商体をそれぞれ K, K', K^p とする。p-basisの存在については次のことがわかっている。Rがregular local ringでRがfinite R^p-moduleのとき，RはR^p上のp-basisをもち，$[K : K^p] = p^{\log_p [k : k^p] + r}$ が成り立つ。また，conjectureの証明にはS. Yuanの結果がkey pointである。Aを標数pの環でCをA-algebraとする。このとき，次の3つの条件を満足していればCはAのGalois拡大であるという；

(i) C : finitely generated projective A-module,

(ii) $t^p \in A$ for $\forall t \in C$,

(iii) $\forall \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, C$について，$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$とおくとき，$C_{\mathfrak{P}}$は$A_{\mathfrak{p}}$上にp-basisをもつ。

この定義によって，S. Yuanは次のことを証明した。$A \subset B \subset C$を環の拡大とする。このとき，CがA上Galois拡大でかつB上でもGalois拡大であれば，BはA上でもGalois拡大である。([ ]の定理11)

Rの任意の部分集合Aについて，$\overline{A}$によってmodulo $\mathfrak{m}$とするAの元の剰余類の集合を表わしAと$\overline{A}$は1対1に対応しているものとする。

Lemma 1. R は local ring とする。R' は $R^p \subset R' \subset R$ なる local ring で R は finite R'-module とする。R が R' 上の p-basis をもてば，R は次のような形の p-basis Γ をもつ；
$\Gamma = B \cup \{z_1, \cdots, z_s\}$，ここで $\bar{B}$ は k' 上 k の p-basis，$\{z_1, \cdots, z_s\}$ は $\mathfrak{m}$ の極小底の1部分，$s = \mathrm{rank}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'R + \mathfrak{m}^2$。

(証明) R' 上 R の p-basis を Λ とする。Λ の部分集合 B で，$\bar{B}$ が k/k' の p-basis となっているようなものを選ぶことができる。$R'[B]$ は $\mathfrak{m}'R'[B]$ を極大 ideal とする local ring である。$G = \Lambda - B$ とおけば，G は $R'[B]$ 上 R の p-basis である。$R = R'[B] + \mathfrak{m}$ だから $G \subset \mathfrak{m}$ としてよい。又 $R = R'[\Lambda] = R'[B][G]$ だから $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}' \cup G$ によって生成される。$\mathfrak{m}$ の極小底を $\{z_1, \cdots, z_s, x_1, \cdots, x_t\}$ ($z_i \in G \subset \mathfrak{m}$, $x_i \in \mathfrak{m}'$) とする。このとき $G = \{z_1, \cdots, z_s\}$ となる。故に，$B \cup \{z_1, \cdots, z_s\}$ は R' 上 R の p-basis である。

一方，s は一定で B のとり方には無関係に R と R' によってのみ定まることが次のようにしてわかる。
Kunz の Rangsatz によって次の exact seq. が存在する[ ]。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'R + \mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R/R'} \otimes k \longrightarrow \Omega_{k/k'} \longrightarrow 0 \quad (k\text{-module の exact}).$$

これより，

$$\mathrm{rank}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'R + \mathfrak{m}^2 = \mathrm{rank}_k \Omega_{R/R'} \otimes k - \mathrm{rank}_k \Omega_{k/k'} = |B| + s - |B| = s \quad //$$

Lemma 2. R は $\dim R = r$ なる regular local ring とする。R′ は $R^p \subset R' \subset R$ なる regular local ring とする。このとき，R′ の部分集合 C で $\overline{C}$ が k'/k^p の p-basis でかつ $[K' : K^p(C)] = p^{r-s}$ ($s = \mathrm{rank}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'R + \mathfrak{m}^2$) なるものが存在すれば，R′ は R^p 上の p-basis をもつ。

(証明) $R^p[C]$ は $\mathfrak{m}^{(p)} R^p[C]$ を極大 ideal とする regular local ring である。lemma 1 と同様にして R の極大 ideal $\mathfrak{m}$ の極小底を $\{z_1, \cdots, z_s, x_1, \cdots, x_t\}$ ($z_i \in \mathfrak{m}, x_j \in \mathfrak{m}'$) とする。R は regular だから $s + t = r$ である。適当な $y_1, \cdots, y_t \in R'$ を選んで $\{y_1, \cdots, y_t\}$ が $R^p[C]$ 上 p-独立で $R_t = R^p[C, y_1, \cdots, y_t]$ が regular local となるようにすることができる。このとき R_t の商体は K′ となる。すると R′ は R_t 上 integral で R_t が regular だから $R_t = R'$。よって $\{C, y_1, \cdots, y_t\}$ が R^p 上 R′ の p-basis である。//

(注) $R^p[C, y_1, \cdots, y_t]$ が regular となるのは [ ] の 38.4 を使って証明する。

Lemma 3. R は regular local ring で，R は finite R^p-module であるとする。R′ は $R^p \subset R' \subset R$ なる local ring とする。このとき，次の命題は同値である。

(1) R は R' 上に p-basis をもつ。

(2) R' は regular で $[K : K'] = p^{l+s}$, ここで $[k : k'] = p^{l}$ として $s = \mathrm{rank}_{k}\, \mathfrak{m}/\mathfrak{m}'R + \mathfrak{m}^2$。

(3) R' は regular でかつ R' は R^p 上の p-basis をもつ。

(証明) (1) $\Longrightarrow$ (2)　R' が regular であることは明らか, また $[K : K'] = p^{l+s}$ は lemma 1 からでる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$[K : K^p] = p^{l+|c|+r}$ と仮定より $[K' : K^p(c)] = p^{r-s}$。したがって lemma 2 より (3) は得られる。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　今までに (1) $\Longrightarrow$ (3) を示した。すなわち R が finite R^p-module であるときに, $\exists\, p$-basis of $R/R' \Longrightarrow \exists\, p$-basis of R'/R^p である。したがって R, R', R^p のかわりに R', R^p, R'^p を考えれば, R' は明らかに finite R'^p-module だから $\exists\, p$-basis of R'/R^p なる仮定より $\Longrightarrow \exists\, p$-basis of R^p/R'^p, したがって当然 R も R' 上の p-basis をもつ。

定理 (Kunz の Conjecture)

R は regular local ring とする。R' は $R^p \subset R' \subset R$ なる local ring で R が finite R'-module であるとする。このとき, R' が regular であれば R は R' 上に p-basis をもつ。

証明は2つの部分に分れる。

(I) Rが finite R^p-module である場合。

lemma 3 によって R'がR^p上にp-basisをもつことを示せば十分である。ところがこれは S. Yuan の結果より次のようにしてでる。[ ] の定理11によれば，

$$\left.\begin{array}{l} R/R^p : \text{Galois ext.} \\ R/R' : \text{Galois ext.} \end{array}\right\} \Longrightarrow R'/R^p : \text{Galois ext.}$$

ここで，RはR^p上にp-basisをもつから明らかにR/R^pは Galois ext. であり"R/R': Galois ext."は"Rが finite free R'-module"でおきかえてもこの命題は成り立つ。したがってR'/R^pは Galois ext. となり，R'はR^p上のp-basisをもつことがわかる。

定理の証明を続ける前に次の lemma を示す。

Lemma 4. Rは regular local ring とする。R'は$R^p \subset R' \subset R$なる local ring で，Rは finite R'-module であるとする。このとき，

$$R' : \text{regular} \Longrightarrow \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)}R' \text{ or } \mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2 \text{。}$$

(証明) (1) Rが finite R^p-module である場合。

(I)によってRはR'上にp-basisをもつから，lemma 1 に

よって $\Gamma = B \cup \{z_1, \cdots, z_s\}$ なる形の p-basis をもつ(記号は lemma 1 と同じものとする)。もし $s < r = \dim R$ とすると lemma 2 と同様にして、適当に $x_{s+1}, \cdots, x_r \in \mathfrak{m}'$ をつけ加えて $\{z_1, \cdots, z_s, x_{s+1}, \cdots, x_r\}$ が $\mathfrak{m}$ の極小底のとなるように選ぶことができるから $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2$。一方、$s = r$ のときは $[K : K'] = p^{|B|+s}$, $[K : K^p] = p^{|B|+|C|+r}$ より $[K' : K^p] = p^{|C|}$。(C は $\bar{C}$ が k'/k^p の p-basis となっているような R' の部分集合で $|C| = |\bar{C}|$) 故に $R^p[C]$ の商体は K' と一致する。すると前と同様にして $R' = R^p[C]$, したがって $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)} R'$。

(2) 一般の場合

(イ) $k = k'$ と仮定できること。

lemma 1 と同じ記号の B を使うと $(R'[B], \mathfrak{m}' R'[B])$ は local ring。R と $R'[B]$ の間で lemma 4 の主張が言えれば $R'[B]$ は R'-module として faithfully flat であるから $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)} R'$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{m}' R'[B] = \mathfrak{m}^{(p)} R'[B]$) か又は $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{m}' R'[B] \not\subset \mathfrak{m}^2$)。

(ロ) R と R' は complete であると仮定できること。

R は finite R'-module であるから、$\hat{R} = R \otimes_{R'} \hat{R'}$。したがって complete local rings $\hat{R}$ と $\hat{R'}$ の間で lemma 4 の主張が言えれば faithfully flatness によって再び $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)} R'$

$(\Leftrightarrow \mathfrak{m}'\hat{R}' = \mathfrak{m}^{(p)}\hat{R}')$ または $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2$ $(\Leftrightarrow \mathfrak{m}'\hat{R} \not\subset \mathfrak{m}^2\hat{R})$。

(イ),(ロ) によって $R = k[[Z_1, \cdots, Z_r]]$, $R' = k[[Y_1, \cdots, Y_r]]$ ($Z_i^p \in R'$, Z_i と Y_j は不定元) と仮定することができる。

(ハ) $\bar{k}$ を k の代数的閉体とするとき, $R = \bar{k}[[Z_1, \cdots, Z_r]]$, $R' = k[[Y_1, \cdots, Y_r]]$, $Z_i^p \in R'$ と仮定できること。

Local criteria of flatness によって $\bar{k}[[\underline{Z}]]$ は $k[[\underline{Z}]]$ 上 f-flat であり, また $\bar{k}[[\underline{Y}]]$ も $k[[\underline{Y}]]$ 上 f-flat であるから (イ),(ロ) と同様にわかる。

以上によって (ハ) の場合に帰着され, このとき R は finite R^p-module となるから (I) によって主張は正しい。

(II) 定理の一般の場合の証明.

lemma 4 より $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)}R'$ または $\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2$ であるから, それぞれの場合に R が R' 上に p-basis をもつことを示せばよい。

~~前と~~ $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)}R'$ のとき.

前と同様にして $k = k'$ と仮定することができる。

$z_1, \cdots, z_r$ を $\mathfrak{m}$ の極小底とすると, $\mathfrak{m} = (z_1, \cdots, z_r)R$。今の場合 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}^{(p)}R' = (z_1^p, \cdots, z_r^p)R'$。$R$ は finite R'-module であるから $\hat{R} = R \otimes_{R'} \hat{R'}$。したがって $\hat{R} = k[[Z_1, \cdots, Z_r]]$ で,

$\hat{R'} = k[[Z_1^p, \cdots, Z_r^p]]$ (Z_iは不定元)とすることができる。故に $R_r = R'[z_1, \cdots, z_r]$ は regular local ring となる。このとき，R_r と R の商体は一致して前と同様にすれば $R = R_r = R'[z_1, \cdots, z_r]$。$\{z_1, \cdots, z_r\}$ が R/R' の p-basisである。

$\mathfrak{m}' \not\subset \mathfrak{m}^2$ のとき.

$x_1 \in \mathfrak{m}' - \mathfrak{m}^2$ なる元 x_1 が存在する。R は free R'-module だから $R'/x_1R' \subset R/x_1R$ と考えることができる。これらの環はいずれも次元が $r-1$ の regular local ring である。$\dim R = r$ の induction を使えば，R/x_1R は R'/x_1R' 上の p-basis $\bar{P}$ ($P \subset R$)をもつ。Nakayama の lemma によって $R = R'[P]$ であり，また P が R' 上に p-独立であることは容易にわかる。よって R は R' 上に p-basis P をもつ。定理の証明終り.

(注意 この Symposium で松村先生にこの Conjecture のもっと短い証明を教えてもらいました。

参考文献

[1] E. Kunz, Die Primidealteiler der differenten in allgemeinen Ringen, J. reine angew. Math. 204 (1960), 165-182

[2] T. Kimura and H. Niitsuma, Regular local ring of characteristic p and p-basis, J. Math. Soc. Japan, 32 (1980), 363-371.

[3] H. Matsumura, Commutative Algebra (2nd Ed.), Benjamin, New York, 1980.

[4] M. Nagata, Local rings, Interscience Tracts in Pure and applied Math., no. 13, 1962.

[5] S. Yuan, Differentiably simple rings of prime characteristic, Duke Math. J, 31 (1964), 623–630.

[6] S. Yuan, Inseparable Galois theory of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc., 149 (1970), 163–170.

ある finite free resolutions と Poincaré series について

広島大学 総合科学部 岩上辰男

$(R, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local ring とする. R の ideal $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathfrak{a}$ に含まれる極大 R-列の長さを grade $\mathfrak{a}$ と定義する. $\mathrm{hd}_R R/\mathfrak{a} = \mathrm{grade}\,\mathfrak{a} = g$ のとき, $\mathfrak{a}$ を perfect ideal of grade g とよび, $\dim_k \mathrm{Tor}_g^R(k, R/\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ の type という. type 1 の perfect ideal を Gorenstein ideal という.

$\mathfrak{a}$ を grade 3 の Gorenstein ideal とするとき Buchsbaum and Eisenbud [2] において, 次のことが示されている:

$R/\mathfrak{a}$ の minimal free resolution は

$$\mathfrak{F}: \quad 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\mathfrak{y}^t} R^\tau \xrightarrow{Y} R^\tau \xrightarrow{\mathfrak{y}} R$$

の形である．ここで τ は $\tau \geqq 3$ なる奇数，$Y=(y_{ij})$ は τ 次交代行列で，$\underset{\sim}{y}=(Y_1,\cdots,Y_\tau)$，$Y_i$ は Y の i 行 i 列を除いてできる $(\tau-1)$ 次交代行列の pfaffian，$\underset{\sim}{y}^t$ は行ベクトル $\underset{\sim}{y}$ を転置して得られる列ベクトルである．さらに $\mathfrak{F}$ には differential graded commutative associative algebra（以下 DGCA alg と略す．associative を仮定しないときは DGC alg とかく）の構造が入る．

これらのことを用いて Avramov [1] は Poincaré series $P_R(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dim_k\left(\mathrm{Tor}_n^R(k,k)\right)z^n$ と $P_{R/\mathfrak{a}}(z)$ について，Wiebe [9] の結果

$$P_R/P_{R/\mathfrak{a}}=\begin{cases}1-\tau z^2-\tau z^3+z^5 & \tau>3\\ (1+z)^3(1-z)^{3-t} & \tau=3\\ & (t=\dim_k(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^2))\end{cases}$$

の別証を与えている．

grade 4 の Gorenstein ideals については，最近 A.R. Kustin と M. Miller が一連の研究を発表している（[5]〜[8]）．§1 でその内容の一部を紹介し，§2 で彼等の構成した local rings の Poincaré series を考察する.

§1. ある minimal free resolutions の構成

$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ を local ring R の二つの Gorenstein ideals, grade $\mathfrak{b} = g-1$, grade $\mathfrak{a} = g$ とする. $R/\mathfrak{b}$, $R/\mathfrak{a}$ の minimal free resolution をそれぞれ $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ とし, 自然な準同型 $R/\mathfrak{b} \to R/\mathfrak{a}$ を extend して得られる complex map を α とする:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}: & 0 \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r, "b_{g-1}"] \arrow[d, "\alpha_{g-1}"] & B_{g-2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-2}"] & \cdots \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & R \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}: 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "a_g"'] & A_{g-1} \arrow[r, "a_{g-1}"'] & A_{g-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "a_2"'] & A_1 \arrow[r, "a_1"'] & R
\end{tikzcd}
$$

b_1, a_1, α_{g-1} をベクトル $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{c}^{*}$ で表わすと, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{a}$ の成分で生成された ideal (以下ではそれらをも $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{a}$ で表わすことにする) が $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ である. このとき次の定理が成り立つ.

<u>Theorem 1</u> ([8], Th 1.6) v を不定元とする. $R[v]$ の ideal $I = (\underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} + v\underset{\sim}{a})$ が proper ideal ならば, I は Gorenstein ideal of grade g である.

Th 1 の証明は I の resolution を構成することによって得られるが，それをいくつかの段階に分けて説明する.

(I)　$\mathbb{A}$ には DGC alg の構造が入る. $\mathfrak{a}$ が Gorenstein ideal であることから 積 $A_i \otimes A_{g-i} \longrightarrow A_g = R$ により同型 $m_i : A_i \longrightarrow A_{g-i}^*$ が induce され，適当に符号をつけることにより，m は complex iso となる ([2], §1).
同様に $n : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}^*$ なる complex iso を作れる.

(II)　$\mathbb{B}$, $\mathbb{A}$ の DGC alg の構造を用いて, R-hom
$\xi : B_i \otimes B_j \longrightarrow A_{i+j+1}$ で，任意の $x_i \in B_i$ に対して，

$$\xi(x_i \otimes x_j) = (-1)^{ij}\xi(x_j \otimes x_i),\quad \xi(x_i \otimes x_i) = 0 \quad (i : \text{odd})$$

$$\xi(x_0 \otimes x_i) = 0,$$

$$\alpha_{i+j}(x_i x_j) - (\alpha_i x_i)(\alpha_j x_j) = \xi(b_i x_i \otimes x_j) + (-1)^i \xi(x_i \otimes b_j x_j) + a_{i+j+1}\xi(x_i \otimes x_j)$$

をみたすものが作れる. この ξ を用いて
$h_i : B_i \longrightarrow B_{g-i-1}^*$　$(1 \leqq i \leqq g-2)$　を

$$\langle h_i(x_i),\ x_{g-i-1} \rangle = \pm\,\xi(x_i \otimes x_{g-i-1}) \in A_g = R$$

により定義し, $h_0 = h_{g-1} = 0$ とおく.

さらに $\beta_i = \alpha^*_{g-i} m_i$ とおくと

$$\beta_i \alpha_i = h_{i-1} b_i + b^*_{g-i} h_i \qquad (1 \leqq i \leqq g-1)$$

が成り立つ (α^* は α の dual である. 下図参照).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{B}: & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-1}"] & B_{g-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & R \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "m_g"] & A_{g-1} \arrow[r] \arrow[d, "m_{g-1}"] & A_{g-2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "m_2"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "m_1"] & R \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}^*: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_1^* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1^*"] & A_2^* \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_{g-2}^* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-2}^*"] & A_{g-1}^* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-1}^*"] & R \\
\mathcal{B}^*: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r] & B_1^* \arrow[r] & B_2^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & B_{g-2}^* \arrow[r] & R &
\end{tikzcd}$$

(III) complex の map

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-1}"] & B_{g-2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{g-2}"] & \cdots \arrow[r] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{g-1} \arrow[r] & A_{g-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から mapping cone $\mathcal{M}$ を作る ([9], p46).

$$\mathcal{M}: \quad 0 \to R \to A_{g-1} \oplus B_{g-2} \to \cdots \to A_2 \oplus B_1 \to A_1$$

ここで differential は $\begin{pmatrix} a_{i+1} & (-1)^{i+1}\alpha_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$ の形である.

homology の long exact sequence から

$$H_i(\mathcal{M}) = 0 \quad (2 \leqq i \leqq g-1,\ i \neq g-2),$$

$$H_{g-2}(\mathcal{M}) = \mathrm{Im}\, a_g$$

がわかる.

(IV) $\gamma_i = (\beta_{i+1}, (-1)^{i+1} h_i)$ とおくと, complex の map γ:

$$
\begin{array}{rccccccccc}
\mathcal{M}: & 0 \to R \to & A_{g-1}\oplus B_{g-2} & \to \cdots \to & A_2 \oplus B_1 & \to & A_1 & \to 0 \\
& \downarrow \gamma_{g-1} & \downarrow \gamma_{g-2} & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_0 & \\
& 0 \to 0 \longrightarrow & B_1^* & \longrightarrow \cdots \to & B_{g-2}^* & \to & R & \to 0
\end{array}
$$

が得られる. これから mapping cone $\mathcal{F}$ を作る:

$$
\mathcal{F}: \quad 0 \to R \to A_{g-1} \oplus B_{g-2} \to B_1^* \oplus A_{g-2} \oplus B_{g-3} \to \cdots
$$

$$
\cdots \to B_{g-3}^* \oplus A_2 \oplus B_1 \to B_{g-2}^* \oplus A_1 \to R
$$

このとき $H_i(\mathcal{F}) = 0 \quad (2 \leqq i \leqq g)$ となる.

(V) $\widetilde{R} = R[v]$ を一変数 v の多項式環として, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes_R \widetilde{R}$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes_R \widetilde{R}$ とおく. $\alpha' : \widetilde{\mathcal{B}} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ を

$$
\alpha'_i = \widetilde{\alpha}_i \quad (0 \leqq i \leqq g-2), \qquad \alpha'_{g-1} = \widetilde{\alpha}_{g-1} + v\,\widetilde{a}_{g-1}
$$

と定義し,

$$
\beta'_i = (\alpha'_{g-i})^* \widetilde{m}_i, \qquad h'_i = \widetilde{h}_i + (-1)^{i-1} v\, n_i
$$

とすると, (IV) のようにして得られる $\widetilde{\mathcal{F}}$ が, $H_i(\widetilde{\mathcal{F}}) = 0$ for $i \geqq 1$ をみたし, Th 1 の ideal I の resolution となる.

<u>Remarks</u> (1) R が local でない場合にも, R を graded ring, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を homogeneous ideals とし, resolution の maps の行列が positive degree の成分のみから成ると仮定すれば Th 1 と同様のことがいえる. 特に R を $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ ($X_1, \cdots, X_n$ は不定元) の形の適当な環にとると, I は $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n, v]$ の generically perfect ideal ([3] 参照) になる.

(2) $m : A \to A^*$ を m_0, m_1 が identity であるような任意の complex map としても, h を適当に修正することにより Th 1 の構成ができる.

Th 1 を用いることにより多くの Gorenstein ideals とそれらの minimal resolutions の examples が作れる ([8], §2). 特に次の状況を考える ([8], Ex 2.2).

$\underset{\sim}{h}$ を grade 3 Gorenstein ideal $\mathfrak{y} = (Y_1, \cdots, Y_\tau)$ の hypersurface section として得られる grade 4 ideal とする:

$$\underset{\sim}{h} = (\mathfrak{y}, Y_{\tau+1}) \qquad (Y_{\tau+1} \in R \text{ は } R/\mathfrak{y} \text{ で非零因子})$$

$\underset{\sim}{z}$ を $\underset{\sim}{h}$ に含まれる grade 3 Gorenstein ideal とすると，

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}: & & R \arrow[r, "\underset{\sim}{z}^*"] \arrow[d, "\alpha_3"] & R^{\sigma} \arrow[r, "Z"] \arrow[d, "\alpha_2"] & R^{\sigma} \arrow[r, "\underset{\sim}{z}"] \arrow[d, "\alpha_1"] & R \arrow[d, equal] \\
\mathcal{A}: & R \arrow[r, "\underset{\sim}{h}^*"'] & R^{\tau+1} \arrow[r, "a_3"'] & R^{2\tau} \arrow[r, "a_2"'] & R^{\tau+1} \arrow[r, "\underset{\sim}{h}"'] & R
\end{tikzcd}
$$

なる diagram が得られる。

$$
a_2 = \begin{pmatrix} Y & -Y_{\tau+1} I \\ 0 & \underset{\sim}{y} \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} Y_{\tau+1} I & -\underset{\sim}{y}^* \\ Y & 0 \end{pmatrix}
$$

であり，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \underset{\sim}{c}^*$ を $\underset{\sim}{h}, \underset{\sim}{z}$ によって書き表わすことができる。$\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ の algebra の構造がわかっているから，Th 1 により $I = (\underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{c} + \nu \underset{\sim}{h})$ の minimal resolution

$$
\mathcal{F}_0: \ 0 \to R \to R^n \to R^{2(n-1)} \to R^n \to R, \quad n = \sigma + \tau + 1
$$

が得られる。さらに [7], Th 9.3 において，$\mathcal{F}_0$ の DGCA alg structure が explicite に与えられている。

§2. Poincaré series

前節の最後の例の ideal $I=(\underset{\sim}{z},\ \underset{\sim}{c}+v\,\underset{\sim}{h})$ を特殊化して得られる grade 4 Gorenstein ideal (それも I で表わす) について, Poincaré series P_R と $P_{R/I}$ の関係を求めると次の結果が得られる.

<u>Proposition</u> 上記の仮定と記号の下で

$$P_R/P_{R/I}=\begin{cases}1-nz^2-2(n-1)z^3-nz^4+z^6 & \sigma\geqq 5\\ 1-(\tau+4)z^2-(2\tau+3)z^3-(\tau-2)z^4+2z^5-z^6-z^7 & \sigma=3\end{cases}$$

が成り立つ.

以下にこの Prop の証明を述べる. まず基本的なのは次の定理である.

<u>Theorem</u> 2. ([1], Th 6.2, Cor 3.3) $\mathcal{J}$ が多項式環 $\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_n]$ の ideal で $\mathcal{J}\subset(X_1,\cdots,X_n)^2$ とし, $\mathcal{J}$ を特殊化して得られる R の ideal を I とする. もし二条件

(i) $\mathcal{J}$ は generically perfect ideal of grade g で, grade $I=g$,

(ii) R/I の minimal resolution $\mathcal{F}$ は DGCA alg となる

が成り立つならば

$$P_R / P_{R/I} = (P_\Lambda)^{-1} .$$

ここで $\Lambda = \mathrm{Tor}^R(k,k) = k \otimes_\Lambda \mathcal{F}$, P_Λ は Λ の Poincaré series である.

したがって問題は P_Λ の計算に帰着されるが, その計算に次の定理を用いる.

<u>Theorem</u> 3 (Golod, Gulliksen. [4], §1 参照)

k の minimal Λ-free resolution X の DG subalgebra Y が trivial Massey operation をもち, X が free Y-module ならば,

$$(P_\Lambda)^{-1} = (P^{k \otimes_\Lambda Y})^{-1} (1 - z P^{IH(Y)}) .$$

ただし Th3 において P^Γ は graded k-algebra Γ の Hilbert series である. また, Y が trivial Massey operation をもつとは, Y の homology algebra $H(Y)$ の augmentation ideal $IH(Y)$ の k-basis の homogeneous representatives の集合 V と, V の元の

列全体から Y への map γ で，

(i) $\gamma(z) = z \quad (z \in V)$

(ii) $d\gamma(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{[1,i]} \gamma(z_1, \cdots, z_i)\gamma(z_{i+1}, \cdots, z_n)$

（ただし $[1, i] = \sum_{j=1}^{i-1} (\deg z_j + 1)$ とする）

をみたすものが存在することである。

§1 の $\mathcal{F}_0$ に対して Th3 の Y, γ を作って, $(P_\Lambda)^{-1}$ を計算する。

$\sigma \geqq 5$ のとき。$\mathcal{F}_0$ の algebra structure（[7], Th9.3）から

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_1\Lambda_2 = 0$$

となり，[1], Prop 9.6 により

$$(P_\Lambda)^{-1} = 1 - nz^2 - 2(n-1)z^3 - nz^4 + z^6$$

が得られる。

$\sigma = 3$ のとき。この場合

$$\mathcal{F}_0 : \ 0 \longrightarrow R \longrightarrow R^{\tau+4} \longrightarrow R^{2(\tau+3)} \longrightarrow R^{\tau+4} \longrightarrow R$$

であり，$\Lambda = \mathcal{F}_0 \otimes_R k$ の k-basis をそれぞれ

$$\Lambda_1: \quad e_1, \cdots\cdots, e_{\tau+4}$$

$$\Lambda_2: \quad f_1, \cdots, f_{\tau+3}, \ f_1', \cdots, f_{\tau+3}'$$

$$\Lambda_3: \quad g_1, \cdots\cdots, g_{\tau+4}$$

$$\Lambda_4: \quad h$$

とすると, basis elements の積は [7], Th9.3 または [6], Th4.1 により,

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = f_3, \quad e_1 e_3 = -e_3 e_1 = -f_2$$

$$e_2 e_3 = -e_3 e_2 = f_1$$

$$e_1 f_2' = f_2' e_1 = -e_2 f_1' = -f_1' e_2 = -g_3$$

$$e_1 f_3' = f_3' e_1 = -e_3 f_1' = -f_1' e_3 = g_2$$

$$e_2 f_3' = f_3' e_2 = -e_3 f_2' = -f_2' e_3 = -g_1$$

$$e_i g_i = -g_i e_i = h \qquad (1 \leqq i \leqq \tau+4)$$

$$f_j f_j' = f_j' f_j = -h \qquad (1 \leqq j \leqq \tau+3)$$

その他は 0

となる.

$$Y = \Lambda\langle S, T ; \text{bidegree}\, S = \text{bidegree}\, T = (1,1), \ dS = e_1, \ dT = e_2 \rangle$$

とおいて Y に Massey operation を定義する. そのために次のような計算を行なう.

$m \geqq 0,\ n \geqq 0$ とし, $S^{(0)} = T^{(0)} = 1,\quad S^{(-1)} = T^{(-1)} = 0$ とおくと

$$d(S^{(m)}T^{(n)}) = e_1 S^{(m-1)}T^{(n)} + e_2 S^{(m)}T^{(n-1)}$$

$$d(e_i S^{(m)}T^{(n)}) = \begin{cases} -f_3 S^{(m)}T^{(n-1)} & i=1 \\ f_3 S^{(m-1)}T^{(n)} & i=2 \\ -f_2 S^{(m-1)}T^{(n)} + f_1 S^{(m)}T^{(n-1)} & i=3 \\ 0 & 4 \leqq i \leqq \tau+4 \end{cases}$$

$$d(f_j S^{(m)}T^{(n)}) = 0 \qquad 1 \leqq j \leqq \tau+3$$

$$d(f_j' S^{(m)}T^{(n)}) = \begin{cases} g_3 S^{(m)}T^{(n-1)} & j=1 \\ -g_3 S^{(m-1)}T^{(n)} & j=2 \\ g_2 S^{(m-1)}T^{(n)} - g_1 S^{(m)}T^{(n-1)} & j=3 \\ 0 & 4 \leqq j \leqq \tau+3 \end{cases}$$

$$d(g_i S^{(m)}T^{(n)}) = \begin{cases} h S^{(m-1)}T^{(n)} & i=1 \\ h S^{(m)}T^{(n-1)} & i=2 \\ 0 & 3 \leqq i \leqq \tau+4 \end{cases}$$

$$d(h S^{(m)}T^{(n)}) = 0$$

これから $IZ(Y)$ の k-basis として

$$e_1 S^{(m-1)}T^{(n)} + e_2 S^{(m)}T^{(n-1)} \qquad ((m,n) \neq (0,0))$$

$$e_3,\quad e_4 S^{(m)}T^{(n)},\quad \cdots,\quad e_{\tau+4} S^{(m)}T^{(n)},$$

$$f_1 S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, f_{\tau+3} S^{(m)}T^{(n)},$$
$$f_1' S^{(m-1)}T^{(n)} + f_2' S^{(m)}T^{(n-1)} \quad ((m,n)\neq(0,0)),$$
$$f_3', \ f_4' S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, f_{\tau+3}' S^{(m)}T^{(n)},$$
$$g_1 S^{(m)}T^{(n-1)} - g_2 S^{(m-1)}T^{(n)} \quad ((m,n)\neq(0,0)),$$
$$g_3 S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, g_{\tau+4} S^{(m)}T^{(n)},$$
$$h S^{(m)}T^{(n)}$$

をとれる. また, $B(Y)$ の k-basis として

$$e_1 S^{(m-1)}T^{(n)} + e_2 S^{(m)}T^{(n-1)} \quad ((m,n)\neq(0,0)),$$
$$f_3 S^{(m)}T^{(n)}, \ f_2 S^{(m-1)}T^{(n)} - f_1 S^{(m)}T^{(n-1)} \quad ((m,n)\neq(0,0))$$
$$g_3 S^{(m)}T^{(n)}, \ g_2 S^{(m-1)}T^{(n)} - g_1 S^{(m)}T^{(n-1)} \quad ((m,n)\neq(0,0))$$
$$h S^{(m)}T^{(n)}$$

をとれるから, $IH(Y)$ の k-basis の代表元の集合 V として, 次の元全体をとることができる:

$$e_3, \ e_4 S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, e_{\tau+4} S^{(m)}T^{(n)},$$
$$f_1 S^{(m)}T^{(n)} \ (m\neq 0), \ f_4 S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, f_{\tau+3} S^{(m)}T^{(n)},$$
$$f_1' S^{(m-1)}T^{(n)} + f_2' S^{(m)}T^{(n-1)} \quad ((m,n)\neq(0,0)),$$
$$f_3', \ f_4' S^{(m)}T^{(n)}, \cdots, f_{\tau+3}' S^{(m)}T^{(n)},$$

$g_4 S^{(m)}T^{(n)}, \ ---, \ g_{\tau+4} S^{(m)}T^{(n)}.$

さて，$z_1, z_2 \in V$ に対して $z_1 z_2 \neq 0$ となるのは次の $z_2 z_1 = \pm z_1 z_2$ だけである．

(i) $e_3 \cdot (f_1' S^{(m-1)}T^{(n)} + f_2' S^{(m)}T^{(n-1)}) = -g_2 S^{(m-1)}T^{(n)} + g_1 S^{(m)}T^{(n-1)}$

$$= d(-f_3' S^{(m)}T^{(n)})$$

(ii) $e_i S^{(m)}T^{(n)} \cdot g_i S^{(k)}T^{(l)} = h S^{(m+k)}T^{(n+l)}$

$$= d(-g_1 S^{(m+k+1)}T^{(n+l)})$$

$$(4 \leqq i \leqq \tau+4)$$

(iii) $f_1 S^{(m)}T^{(n)} \cdot (f_1' S^{(k-1)}T^{(l)} + f_2' S^{(k)}T^{(l-1)})$

$$= -h S^{(m+k-1)}T^{(n+l)}$$

$$= d(g_1 S^{(m+k)}T^{(n+l)})$$

(iv) $f_j S^{(m)}T^{(n)} \cdot f_j' S^{(k)}T^{(l)} = -h S^{(m+k)}T^{(n+l)}$

$$= d(g_1 S^{(m+k+1)}T^{(n+l)})$$

$$(4 \leqq j \leqq \tau+3)$$

そこで，上の各場合に $\gamma(z_1, z_2) = \pm\gamma(z_2, z_1)$ をそれぞれ

$-f_3' S^{(m)}T^{(n)}, \ -g_1 S^{(m+k+1)}T^{(n+l)}, \ g_1 S^{(m+k)}T^{(n+l)}, \ g_1 S^{(m+k+1)}T^{(n+l)}$

とおき，他の $z_1, z_2 \in V$ に対しては $\gamma(z_1, z_2)=0$ とおくと，任意の $z_1, z_2 \in V$ に対して

$$z_1 z_2 = \gamma(z_1)\gamma(z_2) = d\gamma(z_1, z_2)$$

が成り立つ．また容易にわかるように，上に定義した $\gamma(z_1, z_2)$ はすべて V の各元を annihilate するから，任意の $z_1, z_2, z_3 \in V$ に対して

$$z_1\gamma(z_2, z_3) + (-1)^{\deg z_1 + 1}\gamma(z_1, z_2) z_3 = 0$$

が成り立つ．したがって

$$\gamma(z_1, z_2, \cdots, z_r) = 0 \qquad (r \geq 3)$$

とおくことにより Y に trivial Massey operation が定義された．

各 degree ごとに V の元の個数をかぞえて

$$P^{IH(Y)}(z) = z + z^2 + \frac{\tau+1}{(1-z^2)^2} z(1+z)^2$$

がわかる．また

$$P^{k \otimes_\Lambda Y}(z) = (1-z^2)^{-2}$$

であるから，Th 3 により

$$P_R / P_{R/I} = (P_\Lambda)^{-1} = (1+z)^2\{1-2z-(\tau+1)z^2+z^3+z^4-z^5\}.$$

References

1. L.L. Avramov, Small homomorphisms of local rings, J. Alg. 50 (1978), 400–453.

2. D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math. 99 (1977), 447–485.

3. J. A. Eagon and D. G. Northcott, Generically acyclic complexes and generically perfect ideals, Proc. Roy. Soc. Ser. A 299 (1967), 147–172.

4. T. H. Gulliksen, Massey operations and the Poincaré series of certain local rings, J. Alg. 22 (1972), 223–232.

5. A. R. Kustin and M. Miller, Algebra structures on minimal resolutions of

Gorenstein rings of embedding codimension four, Math. Zeit. 173 (1980), 171–184.

6. ——, Structure theory for a class of grade four Gorenstein ideals, Trans. Amer. Math. Soc. to appear.

7. ——, A general resolution for grade four Gorenstein ideals, preprint.

8. ——, Constructing big Gorenstein ideals from small ones, preprint.

9. S. MacLane, Homology, Springer, Berlin, 1973.

10. H. Wiebe, Über homologische invarianten lokaler ringe, Math. Ann. 179 (1969), 257–274.

雑談

永田雅宜

1. Local Rings を書いた頃のことなどを話してほしいという注文があったが、数学者を対象として、数学 proper でない話をする稀有の機会なので、日本語、特に数学における日本語について、初めに少し述べることにする。

「日本語は曖昧である」とか、「フランス語は論理的である」というような意見を、複数の数学者から聞いたことがある。どんな言語でも、必要に応じた厳密さで話すことは可能であり、また、曖昧な表現をしようと思えば可能であるから、上のような意見は誤である。もちろん、日本語は曖昧な文章が作り易く、フランス語ではそれがむつかしい、ということはあるだろうが、上記の意見は、このことだけでなく、次の二つのことが原因にあるように思っている。

(i) 外国語から日本語におきかえようとすると、うまくいかないことがある。

(ii) 日本人には、言葉をいいかげんに使う傾向がある。

(ii)についての、数学とは無関係ではあるが、一つの面白い例は、ある時の朝日新聞にあった、次のような写真説明文である。「銃をもって逃げた犯を警戒する　友会員」

大分前に交通法規改定の説明のテレビ放送を見ていたら、横断歩道を歩行者が横断中の場合について、「横断歩道の直前で一旦停止し、歩行者の通行を　げてはならない」という文がでていた。一旦停止がいらないような感じではあるが、そんなことを言えば、常識で判断せよ、と言われる位であろう。

このように、言葉をいいかげんに使っておいて、常識で判断させようとする傾向があるように思う。共通の常識をもとにした場合は理解できようが、そうでなければ意味が通じ

なくなるのである。

また，「言葉」と言ったところを，「文字」というべきかも知れないが，漢字や仮名の使い方は，国語審議会までが，良識の疑われることをいろいろしている。数学界においても，例えば，同型というのを，単に当用漢字表に型がないという理由で，同形に変えているが，これも一例である。同型というのは「同じ形」をしているのではない。ある観点（群や環ならば，元と算法）からみて同じタイプということだから，同型に固執すべきであった。準同型，線型も同様である。homogeneous の訳語として，斉次と同次とがあり，私自身も同次を使った経験があるが，あるとき，「二つの同次式」という破目になって，同次はよくない訳語であると気付いて，以後斉次を使っている。というわけで，同次はよくないのに，数学辞典では同次を使っている。

(i) について言えば，機能のちがい，対応する等の単語間でもニュアンスに大きな差のあ

るのが普通であるような二つの言葉間で、単なる単語のおきかえと、順序の変更で翻訳しようというのが一つの誤といえよう。数学辞典を作ったとき、英語での用語が共通な単語がある場合、訳語には、共通部分は同じ訳語であるようにしようという努力をしたという噂を聞いたが、そういう努力はまちがいであると思う。(同じニュアンスの共通部分についてなら、そういう努力はよいかと思うが。)

また、「Kを体とする」という言い方は、多分ドイツ語を訳す形で入ってきたのだと思うが、数学者が好んで使う文体といってもよい程になっているが、全然日本語らしくない文体である。「Kを体とする。xをKの元とする。このとき…」という位なら、「体Kの元xをとれば…」とか、「xが体Kの元であれば…」とか言う方が、簡単で、しかも日本語らしい言い方であろう。

そもそも、日本語の文法はヨーロッパ語の文法とは大きな差があり、日本語文法の理論

は、ヨーロッパ語の文法の真似をしてデッチ上げた代物で、不完全であるため、日本語の乱れといわれる中で、ヨーロッパ語の文法についての知識の影響がある部分は、ずい分大きいように思う。「英語が話せる」というところを「英語を話せる」という人が増えてきたのはその一例であろう。

(i)、(ii)の両方に関連する事例で、数学に縁の深いものに、複数形の問題がある。「複数形なしでは数学はできない」とおっしゃった数学者もいるが、これは大変まちがった意見である。日本語にも複数形はないわけではないが、その故にまちがいだというつもりはない。

日本語の複数形は、「たち」「ら」「ども」をつけて得られるが、使用法はずい分限定されている。「たち」は、元来は高貴な人（または神）につけたもので、その後人間にならつけてもよいことになってきた語である。言葉の使い方は次第に変化するものではあるが、急激な変化は嫌悪感を伴うことが多く、「曲線

たち」「点たち」などというのも、そのような悪例といえよう。「ども」は目下の人間または動物につける（私どもというように、へり下った形にするための用法もある）語があるので、「直線ども」というのもよくない。「ら」というのは「これら」のように、人や動物以外にも使うように見えるが、どうもそのような用例は、これら、それらの二つだけのようで、あれらというのもないところを見ると、どうやらthese, thoseに対応する、どこかのヨーロッパ語の訳語として入りこんだ単語があるように思える。（木の複数形として木々とは言うが、木らとはいわない。このように、日本語では、複数（というより、多数）を表すのに、語を重ねる方法もある。神々、人々、家々はその例。）というわけで、数学で使える複数形は、日本語にはないといえる。

問題は、複数形は必要なのかということである。私は、必要なしと断言する。必要性が感じられるのは、ヨーロッパ語などで、複数

形で述べられたものを、日本語におきかえようとするときであって、日本語が数をさすことと場では、複数形は不要だと言うのである。

日本語では、「いくつかの」「たくさんの」「若干の」など、いろいろある複数であることを示す語を、適当に選んでつければ、意図する内容を充分表しうるのである。

複数形というものを問題にするとき、英語などのように、単複の区別をいつも気にするのかどうかも重要な視点である。ある外国人に聞いたら、一つでないのが複数であるとの説明であったが、それは多少怪しい。0個の場合、単数形、複数形両方の例が見られる。いずれにしても、数を気にしなくてもよいですむか、単複を気にしなくてはならないのは大変なことである。日本語は、気にする必要があるとき、気のすむ範囲で数を示すればであって、極めて便利といえる。日本語の便利さは他にもあり、そのような便利さのうちに、曖昧な文章が作り易い原因になっているもの

かいくつかあるのは当然であろう。

というわけで、明治以来百年を超えた今日、翻訳文化に振り廻わされないで、数学における日本語も、文体としては、なるべく日本語らしいもので、数学の専門家以外にもなるべく親しんでもらえそうなものにする努力をすべきだと思っており、その点皆様の協力をお願いする。

2. 私が名古屋大学を卒業したのは1950年3月であり、Local Ringsを書いたのは1960年（出版は1962年）であるので、その間の約10年の思い出の若干を話します。

最初は「Abstract abstract algebra」のこと。

1950年頃（だけでもないが）代数関係の論文の中に、既知の定理の仮定を減らして、既知の定理の証明から、落した仮定を使う部分を外して証明できるという感じの論文がよくあった。この型の論文に対して、Abstract abstract algebraという名称をつけた。

一般に、既知の定理の仮定を落して、どんな結果が得られるかを調べるのは、その既知の定理の仮定が、どういう意味をもつかを分析することになり、有意義なことはよくある。しかし、一向に有意義でない結果に終ることもよくある一方、本当に有意義であっても、その意義を見出さずに終ったと思われる論文もある。

アメリカでは、若いうちは通常期限つきの就職であるため、そういう、意義のわからない論文でも、失職しないために書くという圧力がかかるので、同情すべき点が多いが、日本では、就職できれば、あとはまず（年をとってしまうまでは）失職の心配はないのだから、就職先の見つかっていない人以外は、なるべく Abstract abstract algebra 的な論文を書くのはやめて、時には、同じ結果を他の人に先に発表されてしまうおそれもあるけれど、よい論文に仕上げてから発表するように心がけるべきだと思っている。

(逆に、結果は仲間には伝わっているが、なかなか論文としての公表をしない数学者もいるが、その場合、その結果に関連のある研究をしたい人が、成果を発表しようとするとき困惑を感ずることになるので、そういうのも大変困る。)

3. Henselization を考え始めたのは 1951年で、動機としては、I. S. Cohen の、complete local ring の構造定理の論文を読んでいたら、Hensel lemma がより「多項式の話だから、分解は代数的な範囲でできる筈」と考えたことがあげられる。

最初は、normal local ring の Henselization を考え、normal でない場合、整域の範囲では一意的でないので、どうすべきか迷っていた。この頃のように、universal なものを考える傾向がその頃もあったら、後に定義した通りに、さっさと定義していたであろうが、当時はあまりそういう傾向は(理論ではともかく)あまりなく、むしろ、整域から出発した場合、な

るべく整域という性質を失わないようにしたいという気持もあって、なかなか先へ進めなかった。しかし、local ring の completion との関係を（主として normal のときに）調べているうちに、non-normal のときには、現在の定義のようにした方がよいということを感ずるようになった。1953年のことである。（quasi-local だけの条件での定義を書いたのは、さらに5年程後。）大したことのない動機で始めたことであったが、だんだん意義がわかってきて、役に立ちそうな代物という感じが、あとからだんだんでてきたのであった。

4 Hensel環の次の時期のことで、印象深いことがらは、素イデアルの chain problem である。1955年の東京日光 Symposium の折、Artin 先生が「代数屋で chain problem を考えてみたことのない者はないだろう」という趣旨のことを言われたことも記憶している。丁度その時には Noether 環という条件なくならば反例がある

ことを知っており，したがって否定的かも知れないと思いながらも，Noether環ならよいかも知れないとも考え，肯定的，否定的の両面作戦を繰り返していた。日光から帰って数日して（まだSerreが京都に滞在していた），肯定的証明ができた——と思った。しかし，じっくり吟味してみたら，穴があるのに気がついた。その穴にあたる間違った部分を実証する例をいろいろ作る試みをしたところ，chain problemの反例が見つかったのである。

というわけで，間違った証明というのも役にたつ可能性をもっているわけで，始めに粗い証明をし，穴をつめていくうちに，間違った部分がみつかったら，その間違いのもとを詳しく調べる，という行き方がよいと思う。

5 同じ頃（というより，少し前）multiplicityのこと，特にCohen-Macaulay環のことなどを考えたが，それは省くことにすると，次の大きな話題はHilbertの第14問題であろう。

Zariski が体の上に有限生成の整閉整域の場合に一般化した上で、超越次数2の場合を肯定的に解いたことから、高次元のときも肯定的であろうというのは、多くの人々の予想であった。私も同様で、肯定的方向を目ざして努力していた。そういう状況で、秋月先生の紹介とにより、1957年秋から Harvard 大学へ行くことになったのであるが、出発の少し前になって、Rees が Zariski の一般化に対する反例を、超越次数3のときに与えた内容が伝わってきた。以後、肯定的、否定的の両面作戦をとらざるを得なくなった。肯定的な粗証明は数回得たが、全部穴があり、その穴を利用して反例を考えることも繰り返したが、そのうちに、$K[X, Y, Z]$ の斉次イデアルの列を使って $K[x_1, \ldots, x_n] \cap$ (体) の形の環を作る方法に気づき、それを使って本格的に反例を探し始めた。最初は素イデアルをとって、それに属する準素イデアルを適当に選ぶという方向で探したが、うまく計算できそうなのは反例

にならなくて，結局，いくつかの点の素イデアル $P_1, \ldots, P_n$ の symbolic powers $P_i^{(e)}$ をとって，$P_1^{(e)} \cap \cdots \cap P_n^{(e)}$ の和という形で成功したのである。

6　1958年に秋月先生がアメリカへ来られ，何個所かに何個月かずつ滞在されて，合計2年間程アメリカに滞在された。そのとき，シカゴ大学では local ring についての講義をされた様かと思うが，Interscience Publishers という出版社から本の出版の話が秋月先生のところへ持ち込まれた。そこで秋月先生から，私と共著で書かないかというお誘いがあった。シカゴでの講義の Lecture Notes もある状態では，それに大分ひきずられるおそれが多いと思ってあまり気が進まなかったので，「書くのなら一人で自由に書きたいと思います」とお断りしたら，「そんならお前一人で書け」と言って下さった。1959年のことである。そこで帰国してから，タイプで下書きを書き，松村英

女房に目を通してもらって、清書してでき上ったのが Local rings の本である（Interscience は John Wiley に吸収されていた。）原稿を書き終えたのは 1960 年であったが、出版されたのは 1962 年になった。

<u>蛇足</u>. Local rings を書くとき、manywhere という単語を使った。often より、私の言いたいニュアンスを伝えそうに思えたのが動機で、Webster の辞書にもちゃんと出ていたので、安心して使った。ところが、あるアメリカ人の書評に、manywhere を例にあげて Japanese English との評を得た。

（完）

Linear resolution をもつ環について

日大・文理　後藤四郎

この講演は，大部分が堅田における谷口シンポジューム（1981年9月）の報告集に記録されるので，ここでは，その中でくわしくは触れていない事柄に話題を限りたい。

さて $S=k[X_1,\dots,X_v]$ は，体 k 上の多項式環とし，$\mathfrak{m}=(X_1,\dots,X_v)$ とおく。E によって，次数付き S-加群をあらわす。$h=\mathrm{hd}_S E$ とし

$$0\to F_h \xrightarrow{f_h} F_{h-1}\to\cdots\to F_1\xrightarrow{f_1}F_0\to E\to 0$$

によって，E の次数付きの minimal free resolution をあらわす。$b_i=\mathrm{rank}_S F_i$ とおき，

$$F_i=\bigoplus_{j=1}^{b_i} S(-a_{ij})$$

とかいておく。

<u>定義</u>　$a_{ij}=i$ がすべての i,j について

成り立つとき，E は linear resolution をもつという。

この条件は，$E = SE_0$ でかつ f_i の成分はすべて S_1 の元である，ということと同値である。

$(0) \neq I \subset \mathfrak{m}^2$ は，S の斉次イデアルとし $R = S/I$ とおく。更に，$d = \dim R$ とおき $n \in \mathbb{Z}$ とする。このとき，

<u>定義</u> R が n-linear resolution をもつとは，$I(n)$ が上の意味で linear resolution をもつことをいう。

<u>定理1</u>. $I_k = (0)$ $(k < n)$ なら，次の条件は同値である。

(1) R は n-linear resolution をもつ。

(2) $[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_k = (0)$ $(k > n-(i+1))$.

証明は，省く。次は定理に従う。

<u>補題</u> $f \in S_1$ で $I \not\subset fS$ なるものとせよ。$[0 : f]_R \subset H^0_{\mathfrak{m}}(R)$ であれば，

R が n-linear resolution をもつ $\Rightarrow$ R/fR は S/fS 上 n-linear resolution をもつ。

<u>命題1.</u> kは無限体で、Rはn-linear resolutionをもつと仮定せよ。すると、$f_1, \dots, f_d$をS_1内にみつけて
$$\mathfrak{m}_R^{\,n} = (f_1, \dots, f_d)\mathfrak{m}_R^{\,n-1}$$
となるようにできる。

証明. 上の補題と、dについての帰納法によって証明できる。 //

<u>命題2.</u> Rはn-linear resolutionをもつと仮定すれば、すべての$i \in \mathbb{Z}$について自然な写像 $\left[\mathrm{Ext}_S^i(S/\mathfrak{m}, R)\right]_{n-(i+1)} \to \left[\underline{H}_{\mathfrak{m}}^i(R)\right]_{n-(i+1)}$ は全射である。

<u>証明.</u> 今
$$(\#)\quad 0 \to R \to J^0 \to \cdots \to J^i \xrightarrow{f^i} J^{i+1} \to \cdots$$
は、S-加群Rのgraded minimal injective resolutionとし、この$(\#)$に$\underline{H}_{\mathfrak{m}}^0(\cdot)$を作用させて、えられるcomplex
$$0 \to \underline{H}_{\mathfrak{m}}^0(J^0) \to \cdots \to \underline{H}_{\mathfrak{m}}^0(J^i) \to \underline{H}_{\mathfrak{m}}^0(J^{i+1}) \to \cdots$$
を考える。$I^i = \underline{H}_{\mathfrak{m}}^0(J^i)$とおく。$I^i$は$E = E_S(k)$を直和したものであった。

そこで、 $I^i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} E(-a_{ij})$ とかく。

<u>Claim</u> $a_{ij} \leqq n-(i+1)$.

実際，この主張が正しくないと仮定して，その様な i をできるだけ小さくとる。今 $a_{i1} > n-(i+1)$ としてみよう。$0 \neq e \in [E(-a_{i1})]_{a_{i1}}$ をとって I^i の元とみなせば，$e \in [0 : \mathfrak{m}]_{I^i}$ だから，$f^i(e) = 0$. よって

$$\bar{e} \in [H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{a_{i1}}$$

が定まる。ところで，R は n-linear resolution をもつので，定理より，$[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_k = (0)$ $(k > n-(i+1))$ であるから，$a_{i1} > n-(i+1)$ を思い出せば，$\bar{e} = 0$ のはず。すなわち，e は boundary になっている。今 $e = f^{i-1}(e')$ とかく。ここで $e' \in [I^{i-1}]_{a_{i1}}$ にとれる。しかし $[I^{i-1}]_{a_{i1}} = \bigoplus_{j=1}^{n_{i-1}} E_{a_{i1} - a_{i-1,j}}$ で $e' \neq 0$ だから，$1 \leqq j \leqq n_{i-1}$ で e' の j 成分が $\neq 0$ のものについては

$$n-(i+1) < a_{i1} \leqq a_{i-1,j} \leqq n-i$$

が成立しているはずである。このことより，$e' \in [0 : \mathfrak{m}]_{I^{i-1}}$

をうる。(#) は minimal にとっていたから、$f^{i-1}(e) = 0$. 故に $e = 0$ (矛盾).

この claim により、我々は $[J^i]_{n-(i+1)}$ が、J^i の socle $[0 : \mathfrak{m}]_{J^i}$ に含まれることがわかる。従って

$$[\mathrm{Ext}^i_S(S/\mathfrak{m}, R)]_{n-(i+1)} \to [H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{n-(i+1)}$$

は onto である。

<u>定理2.</u> $I_k = (0)$ $(k < n)$ とせよ。次の三つの条件;

(1) R は Buchsbaum で $f_1, \dots, f_d \in S_1$ をとって $\mathfrak{m}_R^{\,n} = (f_1, \dots, f_d)\mathfrak{m}_R^{\,n-1}$ とできる。

(2) $H^i_{\mathfrak{m}}(R) = [H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{n-(i+1)}$ $(i \neq d)$ かつ $[H^d_{\mathfrak{m}}(R)]_k = (0)$ $(k > n-(d+1))$.

(3) R は Buchsbaum で、n-linear resolution をもつ。

を考えよう。すると、

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$$

が正しい。もしも k が無限体であれば、

$$(3) \Longrightarrow (1)$$

も成立する。

<u>証明</u>. (1) $\Rightarrow$ (2)　$d=0$ なら証明すべきことは何もない。$d>0$ として $d-1$ で正しいと仮定せよ。$U=H_m^0(R)$, $\overline{R}=R/f_1R$ とおくと, R は Buchsbaum であるから, 完全系列

(a) $0 \longrightarrow H_m^i(R) \to H_m^i(\overline{R}) \to \boxed{H_m^{i+1}(R)}(-1) \longrightarrow 0$

$(0 \leqq i \leqq d-2)$,

(b) $0 \to H_m^{d-1}(R) \longrightarrow H_m^{d-1}(\overline{R}) \to \boxed{H_m^d(R)}(-1) \xrightarrow{f_1} H_m^d(R) \to 0$

が存在する。よって (2) の主張の前半は $d \geqq 2$ なら (a) から, 後半は (b) から得られる。そこで, $d=1$ としよう。$U=U_{n-1}$ を示さねばならない。$U \cap f_1R=(0)$ だから, $U_k=(0)$ $(k \geqq n)$. $z \in U_k$ $(k<n)$ とせよ。$z=Z \bmod I$ $(Z \in S_k)$ とおくと, $x_1Z \in I$. よって I についての大前提により, $x_1Z=0$. 故に $z=0$ を得る。

(2) $\Rightarrow$ (3)　R が n-linear resolution をもつことは, 先の定理1に従う。R が Buchsbaum

であることは，surjectivity criterion と，上の命題2に従う。

(3) $\Longrightarrow$ (2) 及び最後の主張。 k は，無限として十分。よって (1) が，命題 1 に従う。よって上に示したように (2) が正しい。 //

<u>付記</u> この研究の動機は，Buchsbaum 環で maximal embedding dimension をもつものの構造を求めようというものであった。そのような環 R は，上の意味で 2-linear resolution をもつ。最終的な結果は，D. Eisenbud と共著の形でまとめる予定です。