第５回
可換環論シンポジウム報告集

昭和58年度科学研究費総合A

（課題番号 57340001．代表 永田 雅宜）

1983年10月５日～８日

於 東海地区国立大学共同中津川研修センター

序

この報告集は、１９８３年１０月５日から８日までの４日間、岐阜県中津川市の東海地区国立大学共同中津川研修センターにおいて開かれた「可換環論シンポジウム」の講演者から提出された原稿をそのまま印刷する方式により、作成したものであります。本シンポジウムも今年で５回を数え、回を重ねるたびに、ますます充実してきたように思われます。今回は、参加者は３９名と少数ながらも、非常に活発な講演や討論が行なわれて、大変有意義でありました。

なお、この会を開くにあたって、講演者の旅費等のシンポジウムの経費ならびにこの報告集の出版費は、京都大学の永田雅宜先生の科研費によってまかなわれました。ここにあらためて感謝いたします。

１９８４年１月

吉野　雄二
谷本　　洋

参加者（五十音順）

青山　陽一	愛媛大・理
浅沼　照雄	富山大・教育
池田　　信	名大・理
石川　武志	都立大・理
石田　正典	東北大・理
石橋　康徳	広大・学校教育
伊藤　史朗	広大・理
宇田　広文	宮崎大・教育
大石　　彰	広大・理
小川　　東	学習院大・理
奥山　　廣	徳島大・教育
小野田　信春	阪大・理
金光　三男	愛教大
神蔵　　正	早大・理工
木村　哲三	日本工業大学
後藤　四郎	日大・文理
小山　陽一	金沢工業大学
坂口　通則	広島修道大
島田　勇治	広大・理
菅谷　　孝	富山大・理
鈴木　　敏	京大・教養
竹内　康滋	神戸大・教養
谷本　　洋	名大・理
新妻　　弘	日本工業大
西村　純一	京大・理
日高　文夫	専修大北海道短大
日比　孝之	広大・理
広森　勝久	神戸大・教養
朴　　鐘律	全南大，名大
松村　英之	名大・理
宮崎　充弘	京大・理
柳原　弘志	兵庫教育大・学校教育
山内　紀夫	岐阜教育大
山岸　規久道	東京理科大・理
山田　　洋	学習院大・理
吉田　憲一	阪大・理
吉野　雄二	名大・理
渡辺　敬一	名工大
渡辺　純三	名大・理

目　次

$\mathfrak{m}$-Full イデアル

名大・理　渡辺純三

D. Rees の導入した，イデアルの $\mathfrak{m}$-full 性の定義は次の通りである.

定義1. 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ のイデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$-full であるとは，$\mathfrak{a}\mathfrak{m} : y = \mathfrak{a}$ とする y の存在することである.

以下，$\mathfrak{m}$-準素 $\mathfrak{m}$-full イデアルの主な性質，特に，定理3と，その証明に必要な定義と命題を述べる.
使用する記号はすべて標準的なものばかりと思う。主なものは，μ = 生成元の数，ℓ = 長さ，等.

定義2. $\Psi(\mathfrak{a}) = \mathrm{Max}\{\mu(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}\}$.

定義3. $\Phi(\mathfrak{a}) = \ell_{R_1}(R_1/\mathfrak{a}R_1 + YR_1)$.

$\bar{\mu}(\mathfrak{a}) = \mu_{R_1}(\mathfrak{a}R_1 + YR_1/YR_1)$.

但し，$d=\mu(\mathfrak{m})$，$X_1,\dots,X_d$ を変数とし，
$R_1=R(X_1,\dots,X_d)=$ 多項式環 $R[X_1,\dots,X_d]$ の $\mathfrak{m}R[X_1,\dots,X_d]$ での局所化，更に，1つのパラメーター $m=(m_1,\dots,m_d)$ を決め，$Y=m_1X_1+m_2X_2+\cdots+m_dX_d$ とする．

定理1．$(R,\mathfrak{m})$ の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ について，不等式

$$\Psi(\mathfrak{a})\leqslant\Phi(\mathfrak{a})+\bar{\mu}(\mathfrak{a})$$

が成立する．

証明．Φ の帰納法による．$\Phi(\mathfrak{a})=1$ なら，不等式の両辺は共に $\mu(\mathfrak{m})$ に等しい．$\Phi(\mathfrak{a})=n>1$ とする．$\mathfrak{a}$ を含む任意のイデアル $\mathfrak{b}$ について，$\mu(\mathfrak{b})\leqslant\Phi(\mathfrak{a})+\bar{\mu}(\mathfrak{a})$ を示せばよい．2つの場合 (i) $\Phi(\mathfrak{b})<n$，(ii) $\Phi(\mathfrak{b})=n$ を考える．
場合(i)．帰納法の仮定より，$\mu(\mathfrak{b})\leqslant\Psi(\mathfrak{b})\leqslant\Phi(\mathfrak{b})+\bar{\mu}(\mathfrak{b})$．また，関数 $(\Phi+\bar{\mu})$ は単調減少である事がすぐわかる，即，$\mathfrak{b}\supset\mathfrak{a}\Rightarrow(\Phi+\bar{\mu})(\mathfrak{b})\leqslant(\Phi+\bar{\mu})(\mathfrak{a})$．これで，場合(i)が終る．
場合(ii)．$\mathfrak{a}R_1+YR_1=\mathfrak{b}R_1+YR_1$ である事に注意する．
$\mathfrak{b}R_1$ の生成元を次の様に取る．

$$\mathfrak{b}R_1=(z_1,\dots,z_r,\ Yx_1,\dots,Yx_t)$$

$$\mu(\mathfrak{b})=r+t,\quad \bar{\mu}(\mathfrak{b})=r.$$

$t \leqq n$ を示せば十分である．実際もしそうなら，$\mu(\mathfrak{b}) = r + t \leqq \bar{\mu}(\mathfrak{b}) + \Phi(\mathfrak{b}) = \bar{\mu}(\mathfrak{a}) + \Phi(\mathfrak{a})$ となり，目標が達せられる．$t > n$ と仮定してみよう．完全列，

$$0 \longrightarrow R_1/\mathfrak{b}R_1 : Y \longrightarrow R_1/\mathfrak{b}R_1 \longrightarrow R_1/\mathfrak{b}R_1 + YR_1 \to 0$$

から，$\ell_{R_1}(\mathfrak{b}R_1 : Y/\mathfrak{b}R_1) = n$ がわかる．$x_1, x_2, \ldots, x_t \in \mathfrak{b}R_1 : Y$ だが，$t > n$ だから，$x_1, \ldots, x_t$ を $\bmod\, \mathfrak{b}R_1$ で考えると，"1次従属"のはずである．即ち，$\sum a_i x_i \in \mathfrak{b}R_1$，$a_1, \ldots, a_t$ のうち1つは単元（$\exists a_i \in R_1$）．よって，$\sum a_i(Yx_i) \in \mathfrak{b}\mathfrak{m}R_1$ となるが，これは，$Yx_1, \ldots, Yx_t$ が，$\mathfrak{b}R_1$ の極小生成系であった事に反する．　　　　【証明終】

注意．　任意の $y \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ を1つfixすると，全く同じ仕方で，$\Psi(\mathfrak{a}) \leqq \ell(R/\mathfrak{a} + yR) + \mu(\mathfrak{a} + yR/yR)$ が証明出来る．定理1の形を採用したのは，右辺を y に無関係にしたかったからである．

定理2．次の3条件は同値である．

(1)　$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$-full.

(2)　$\mu(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a}) + \bar{\mu}(\mathfrak{a})$.

(3)　$\mu(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a}\mathfrak{m})$.

この定理を厳密に証明するためには、Reesの言う"一般元"の知識が必要となる。そこで、次の定理2′を証明しよう。

定理2′. yに関する次の3条件は同値である。

(1) $\mathfrak{a}\mathfrak{m} : y = \mathfrak{a}$

(2) $\mu(\mathfrak{a}) = l(R/\mathfrak{a}+yR) + \mu(\mathfrak{a}+yR/yR)$.

(3) $\mu(\mathfrak{a}) = l(R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}+yR)$.

証明. 自然な写象 $R \to R/yR$ を"$-$"で表わすと、
$l(R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}+yR) = l(\bar{R}/\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{m}}) = l(\bar{R}/\bar{\mathfrak{a}}) + l(\bar{\mathfrak{a}}/\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{m}})$
$= l(R/\mathfrak{a}+yR) + \mu(\mathfrak{a}+yR/yR)$ となる。よって(2)と(3)の同値性は明らか。
完全列 $0 \to R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y \to R/\mathfrak{a}\mathfrak{m} \to R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}+yR \to 0$
より、$l(R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}+yR) = l(\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y/\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geqq l(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{a})$ を得る。よって(1)と(3)の同値性が直ちにわかる。

[証明終]

注意2. $\mathfrak{a}$が$\mathfrak{m}$-fullの時、$\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y=\mathfrak{a}$とする$y$は実は$\mathfrak{a}$の"一般元"なのである。このことは「$\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y = \mathfrak{a}\ (\exists y) \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{m}R_1 : Y = \mathfrak{a}R_1$」と言ってもよい。これだけが定理2と定理2′の差である。我々の目標であった定理3の証明には、

定理2′だけで十分である.

定義4. イデアル $\mathfrak{a}$ について,

$$\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a} \Rightarrow \mu(\mathfrak{b}) \leqslant \mu(\mathfrak{a})$$ が成立するとき,

$\mathfrak{a}$ は性質Pを持つと言う.

定理3. $\mathfrak{m}$-準素 $\mathfrak{m}$-full イデアルは性質Pを持つ.

証明. $\mathfrak{a}\mathfrak{m} : y = \mathfrak{a}$ とする y を取る. この y は $\mathfrak{m}^2$ には属さない. 実際, もし $y \in \mathfrak{m}^2$ なら, $\mathfrak{a}\mathfrak{m} : y \supset \mathfrak{a}\mathfrak{m} : \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{a} : \mathfrak{m} \neq \mathfrak{a}$ となるからである. 定理1とその注意により,

$$\mu(\mathfrak{a}) \leqslant \Phi(\mathfrak{a}) \leqslant \ell(R/\mathfrak{a}+yR) + \mu(\mathfrak{a}+yR/yR).$$

定理2′より, この両端が等しく, 従って $\mu(\mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})$ となる. よって $\mathfrak{a}$ は性質Pを持つ. 【証明終】

Reesは無限剰余体を持つ整域の上で, 整閉イデアルは $\mathfrak{m}$-full である事を証明していた。(証明は付値の初等的理論を使うだけの簡単なものである.) 従って, 定理3と組合せれば, $\mathfrak{m}$-準素整閉イデアルはすべて性質Pを持つ事になる. これだけでも, $\mathfrak{m}$-full というReesのアイディアが何如に有効なものかがわかる.

On the Gorensteiness of Rees algebras over Buchsbaum rings

名大・理.　池田 信

$(A, \mathfrak{m}, k)$ を Noetherian local ring, $\mathfrak{q} = (a_1, \cdots, a_d)$ を A の parameter ideal とする。自然数 n に対して Rees algebra $R(\mathfrak{q}^n) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{q}^{ni}$ を考える。

本稿の目的は $R(\mathfrak{q}^n)$ の Gorenstein 性について考察することである。A が Cohen-Macaulay ならば、次のことが容易に証明できる。

<u>定理</u> 1　A が Cohen-Macaulay で $d = \dim A \geq 2$ ならば次は同値。

(1)　$R(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein.

(2)　A が Gorenstein かつ $n = d-1$.

以下 A が Buchsbaum ring の場合を調べる。$\mathrm{Proj}\, R(\mathfrak{q}^n) \cong \mathrm{Proj}\, R(\mathfrak{q})$ であることに注目して

$\mathrm{Proj}\, R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein であるときの A はどのようなものかを見てみよう。

<u>Prop 2</u> A が $d = \dim A \geqq 2$ の Buchsbaum ring，ある parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対して $\mathrm{Proj}\, R(\mathfrak{q})$ が Gorenstein であったとすると，$\ell(H^1_{\mathfrak{m}}(A)) \leqq 1$，
$H^i_{\mathfrak{m}}(A) = (0)$ for $2 \leqq i < d$.

<u>証明</u> $\mathfrak{q} = (a_1, \cdots, a_d)$ とする。A を $A/H^0_{\mathfrak{m}}(A)$ でおきかえて depth $A > 0$ としてよい。このとき $\mathrm{Proj}\, R(\mathfrak{q})$ は $\mathrm{Spec}\, A[\frac{a_1}{a_i}, \cdots, \frac{a_d}{a_i}]$ で cover される。仮定から $B = A[\frac{a_2}{a_1}, \cdots, \frac{a_d}{a_1}]$ は Gorenstein ring である。B の maximal ideal
$(\mathfrak{m}, \frac{a_2}{a_1}, \cdots, \frac{a_d}{a_1})B$ をとると，$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \cdots, \frac{a_d}{a_1}$ は B_M の s.o.p である。よって

$$k \cong (a_1, \frac{a_2}{a_1}, \cdots, \frac{a_d}{a_1})B :_B M \Big/ (a_1, \frac{a_2}{a_1}, \cdots, \frac{a_d}{a_1})B .$$

この右辺は後藤氏の結果を用いると

$$\left[(a_2, \cdots, a_d)A :_A a_1 + a_1 A\right] :_A \mathfrak{m} \Big/ (a_2, \cdots, a_d)A : a_1 + a_1 A$$

に等しい。 $I=(a_2,\dots,a_d)A:a_1+a_1A$ とおけば
A/I は 0-dim Gorenstein ring である。

$$J=\sum_{i=1}^{d}(a_1,\dots,\check{a_i},\dots a_d)A:_A a_i$$

とおく。A は Buchsbaum だから $\mathfrak{m}(J/I)=(0)$。
Exact sequence

$$0\to J/I\to A/I\to A/J\to 0$$

の socle をとることにより $\ell(J/I)\leqq 1$ が出る。
一方 exact sequence

$$0\to I/\mathfrak{q}\to J/\mathfrak{q}\to J/I\to 0$$

および、 $\ell(I/\mathfrak{q})=\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A))$,

$$\ell(J/\mathfrak{q})=\sum_{i=0}^{d-1}\binom{d}{i}\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A))$$ （後藤氏による）

より

$$\ell(J/I)=\sum_{i=1}^{d-1}\binom{d-1}{i-1}\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A))\leqq 1$$

したがって、 $\ell(H^1_{\mathfrak{m}}(A))\leqq 1$, $H^i_{\mathfrak{m}}(A)=(0)$ for $2\leqq i<d$.

(注)；この証明より，depth $A>0$ のとき「A ; CM $\Longleftrightarrow$ $I=J$」がわかる。

次に，ある $n>0$ に対して $R(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein であるとき，どのような条件のもとで A は Cohen-Macaulay になるかを考えよう。

<u>定理</u> 3　A が $d=\dim A \geqq 2$ の Buchsbaum ring で $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}^2$ とする。このときある $n>0$ に対して $R(\mathfrak{q}^n)$ が Gorenstein であれば A は Gorenstein である。

<u>証明</u>　A が CM であることを示せば十分である。A は CM ではないと仮定してみよう。Prop 2 の証明中の I, J を用いれば，これは $I \neq J$ と同値である。Proj $R(\mathfrak{q})$ は Gorenstein だから，Prop 2 の証明より $\ell(J/I)=\ell(H_{\mathfrak{m}}^{i}(A))=1$。Exact sequence

$$0 \to \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ k}}{J/I} \to A/I \to A/J \to 0$$

より，$\bar{A} = A/I$-module の exact sequence

$$0 \to k \to \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(k, \bar{A}) \to \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(k, A/J)$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k, k) \to \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k, \bar{A}) \to \cdots$$

を得る。

$\bar{A}$ は 0-dim Gorenstein だから，$\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(k, \bar{A}) \cong k$，$\mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k, \bar{A}) = (0)$。よって

$$\mathrm{Hom}_{\bar{A}}(k, A/J) \cong \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k, k) \cdots\cdots (*)$$

一方 canonical map $\varphi_n : A/(a_1^n, \cdots, a_d^n) \to H^d_m(A)$ $n = 1, 2, \cdots$，の kernel は

$$(a_1^{n+1}, \cdots, a_d^{n+1}) : a_1 \cdots a_d / (a_1^n, \cdots, a_d^n)$$

である。$(a_1^2, \cdots, a_d^2) : a_1 \cdots a_d = J$ であることが後藤氏により示されている。よって $A/J \hookrightarrow H^d_m(A)$.

$R(q^n)$ が Gorenstein であることより

$$0 \to H^1_m(A)^\vee \to H^d_m(A) \to H^d_M(R(q^n)/(a_i^n X))$$

なる exact sequence がある，ここで $H^1_m(A)^\vee$ は $H^1_m(A)$ の Matlis dual，M は $R(q^n)$ の maximal homogeneous ideal，$R(q^n)$ は一変数多項式環 $A[X]$ の subring $A[q^n X]$ と同一視されている

。よって

$$\dim_k \mathrm{Hom}_A(k, H^d_m(A)) \leqq 2$$

$\dim_k \mathrm{Hom}_A(k, H^d_m(A)) = 2$ としてよい。
(*)より $\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k,k) \leqq 2$ となる。
$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(k,k) = 2$ とする。(*)より $\bar{A}$ の embedding dimension は 2 であることが出る。したがって，I は m の minimal generator $x_1, \cdots, x_{v-2}$, $v = l(m/m^2)$，を含む。一方で $l(I/q) = d-1$ だから
$I = (a_1, \cdots, a_d, y_1, \cdots, y_{d-1})$ と書ける。よって

$$v-2 = \dim_k I + m^2/m^2 \leqq d-2$$

すなわち，$v \leqq d+1$。A は hypersurface である。これは A が non-CM としたことに反する。
$\dim_k \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(k, A/q) = 1$ のときも，同様の議論により A が CM になることを示すことができて矛盾を得る。

次に，$q \not\subset m^2$ のとき，とくに q が m の minimal reduction であるときには次の結果

を得る。

<u>定理</u> 4 Aを $\dim A = d \geq 2$ の Buchsbaum ring とする。$e(A)$ で A の multiplicity を表わす。このとき，次は同値。

(1) $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ に対し $R(\mathfrak{q}^d)$ は Gorenstein。

(2) A は non-CM で $\operatorname{depth} A > 0$，$e(A) = 2$。

証明は略す。

References

[1] S. Goto, Blowing-up of Buchsbaum rings, in the Proceeding of Durham Symposium on Commutative Algebra.

[2] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, preprint.

[3] S. Ikeda, On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings, in the Proceedings of Karuizawa Symposium, 1982.

Pic $R[X, X^{-1}]$ について

富山大教育　浅沼照雄

R を finite-dimensional reduced noetherian ring とするとき $R[X, X^{-1}]$ の Picard group Pic $R[X, X^{-1}]$ を考える。ここで X は1つの変数を表わす。

canonical map Pic $R \to$ Pic $R[X, X^{-1}]$ (resp. Pic $R \to$ Pic $R[X]$) が isomorphism なるとき R を quasi-normal (resp. semi-normal) という。R が semi-normal なるための必要十分条件は Traverso 他によって知られているが quasi-normality については R が $\dim = 1$ の integral domain 以外はわかっていない。この note では $\dim R = 1$ なるとき R が quasi-normal なるための簡単な必要十分条件を与える。なお quasi-normality 及び semi-normality に関連した文献は D. E. Rush, Picard groups in abelian group rings, J. Pure and Appl. Algebra 26 (1982) 101-114 の References を見てください。

$Q(R)$ を R の total quotient ring とする。$t \in Q(R)$ が $t^2, t^3 \in R$ ならば $t \in R$ をみたすとき R を $(2,3)$-closed という。R が semi-normal なるための必要十分条件は R が $(2,3)$-closed なることは Traverso 他によってすでに示されている。$t \in Q(R)$ が $t-t^2, t^2-t^3 \in R$ ならば idempotent $e \in Q(R)$ (i.e., $e = e^2$) が存在して $(t-e)^2 \in R$ なるとき R は U-closed という。R が integral domain なるときは R が U-closed であることと $t \in Q(R)$, $t-t^2, t^2-t^3 \in R$ ならば $t \in R$ なることと同値である。また R の標数が 2 なるときは R が U-closed であることと $t \in Q(R)$, $t-t^2, t^2-t^3 \in R$ ならば idempotent $e \in Q(R)$ が存在して $t+e \in R$ なることと同値である。R が quasi-normal ならば semi-normal であって、この逆は R が integral domain であってもなりたたないことは Bass and Murthy [Grothendieck groups and Picard groups of abelian group

rings, Ann. of Math. 86 (1967) 16-73]
によって示されている。Rがnormalならば
quasi-normalであるからquasi-normalityは
semi-normalとnormalの間にある概念である。
U-closednessとquasi-normalityの関係については
次の定理がなりたつ。

定理1. Rがquasi-normalならばU-closed。

特にRのKrull次元 $\dim R=1$ のときは次の定理がなりたつ。

定理2. $\dim R=1$ ならば次は同値である。

(i) Rはquasi-normal

(ii) Rは(2, 3)-closedかつU-closed.

$\dim R>1$ なるときはRがintegral domainで
(2, 3)-closedかつU-closedであってもquasi-normalにならない例が存在する。

さてquasi-normalityとlocalizationの関係について考える。Rがsemi-normalなることと
任意のprime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ について $R_{\mathfrak{p}}$ がsemi-normal
なることは同値であるがquasi-normalityの場合
この関係はかならずしもなりたたない。

Rがintegral domainの場合については任意のprime ideal $\mathfrak{p} \subset R$について$R_{\mathfrak{p}}$がquasi-normalならばRはquasi-normalである。とくに$\dim R=1$ならばこの逆もなりたつ。さらにRがintegral domainで$\dim R>1$又はRがintegral domainでない$\dim R=1$なるnon-quasi-normal ringでそのすべてのprime idealによるlocalizationがquasi-normalなる例が存在する。[Greco, Seminormality and quasinormality of group rings, J. Pure and Appl algebra 18 (1980) 129-142] しかし$\dim R=1$なるときRがquasi-normalならばRのprime ideal $\mathfrak{p}$によるlocalization $R_{\mathfrak{p}}$はquasi-normalであるという次の定理はGrecoが予想したものである。

定理3. Rが$\dim R=1$なるquasi-normal ringならば任意のprime ideal $\mathfrak{p} \subset R$について$R_{\mathfrak{p}}$もquasi-normalである。

この定理3はU-closednessの性質を調べることにより定理2から証明できる。Rがintegral domainなるときのU-closednessとlocalization及び

quasi-normality の関係について小野田-吉田 [Some remarks on quasi-normality, preprint 及びこの報告集] を参照してください。

最後に $\mathrm{Pic}\, R[X, X^{-1}]$ と $\mathrm{Pic}\, R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ との関係を調べる。canonical map $\alpha : \mathrm{Pic}\, R \to \mathrm{Pic}\, R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$ の cokernel を $N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_1 \cdots X_n}$ で表わす。α が isomorphism なるための必要十分条件は $N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_1 \cdots X_n} = (0)$ である。

定理 4. $\varphi_i : R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] \to R[X_i, X_i^{-1}]$ を $\varphi_i(X_j) = 1\ (i \neq j)$, $\varphi_i(X_i) = X_i$ で def された R-homomorphism, $\varphi^* : N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_1 \cdots X_n} \to N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_i}$ を φ_i より induce された map とする。このとき

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i^* : N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_1 \cdots X_n} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} N\,\mathrm{Pic}\, R_{X_i}$$

は isomorphism である。

系. 次は同値である.

(i) $\mathrm{Pic}\, R \cong \mathrm{Pic}\, R[X, X^{-1}]$

(ii) $\mathrm{Pic}\, R \cong \mathrm{Pic}\, R[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$

ここで同型は canonical なものである。

Remarks on quasinormal rings

阪大・理　小野田信春
吉田憲一

1　Locally quasinormal rings の構造定理

可換環Aが、$\mathrm{Pic}\, A \simeq \mathrm{Pic}\, A[X, X^{-1}]$ を満たすときAは quasinormal (QN) であるという。小論の目的は、この quasinormal rings について得られた若干の結果を紹介することにある。話を簡単にするため、以下、AはNoether整域とし、BはAの birational finite extension ring とする。まず quasinormality なる概念を次の形に拡張することから始める。

<u>定義</u>　$M\mathrm{Pic}\, A = \mathrm{Coker}\,(\mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Pic}\, A[X, X^{-1}])$ とおく。このとき、A : QN in $B \underset{def}{\Leftrightarrow} M\mathrm{Pic}\, A \to M\mathrm{Pic}\, B$: injective

定義からもわかるように quasinormality は

seminormality と密接な関係がある。実際、次が成立する。（seminormal を SN と略す）

命題 1.1　$A : QN \text{ in } B \Rightarrow A : SN \text{ in } B$

従って quasinormality は seminormality より強い概念であるが、では一体どの程度の差が両者にはあるのだろうか。この種の問題を考えるときの最大の困難は、quasinormality が global to local な性質ではないということである。そこで我々は新たに次の概念を導入する。

定義　A : locally quasinormal (LQN) in $B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A_{\mathfrak{p}} : QN \text{ in } B_{\mathfrak{p}} \quad {}^{\forall}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$

locally quasinormal rings の考察において次の定理は基本的である。

定理（Rush）　A の over-rings の family $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ のとき、$\operatorname{MPic} A \longrightarrow$

$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{MPic}\, A_\lambda$ は injective

この定理より直ちに次の2つが従う。

__命題__ 1.2　A : LQN in $B \Rightarrow A$: QN in B

__命題__ 1.3　A : LQN in $B \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$: QN in $B_{\mathfrak{p}}$
$\forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A\, B/A$

__注意__　命題1.2の逆は $\dim A = 1$ のときは成立するが、一般には成立しない。

さて、ここで1つの準備をする。

__補題__ 1.4　A : SN in B と仮定する。$\mathfrak{c} = A :_A B$ とおくとき、次の exact sequence が存在する。

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{MPic}\, A \to \mathrm{MPic}\, A/\mathfrak{c} \oplus \mathrm{MPic}\, B$$

ただし、$n = h^0(A/\mathfrak{c})$、$m = h^0(B/\mathfrak{c})$　ここで $h^0(\ \ )$ は connected component の数を表わす。

この補題を利用すれば次が得られる。

<u>命題</u> 1.5　$\mathrm{Ass}_A B/A$ は embedded prime を持たないと仮定する。このとき次は同値である。

(1) A : LQN in B

(2) A : SN in B かつ $^\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A B/A$, $^{\exists 1} P \in \mathrm{Spec}\, B$ s.t. $P \cap A = \mathfrak{q}$

<u>証明</u>　(1) ⇒ (2) : $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A B/A$ とする。$A_\mathfrak{q}$: QN in $B_\mathfrak{q}$ ゆえ、特に $A_\mathfrak{q}$: SN in $B_\mathfrak{q}$ でもある。従って $C_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q} :_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{q}$ は $B_\mathfrak{q}$ の radical ideal。ここで、$\mathrm{Ass}_A B/A$ に embedded prime がないことより $C_\mathfrak{q} = \mathfrak{q} A_\mathfrak{q}$ となることに注意する。よって $\ell^0(A_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q}) = 1$。$m = \ell^0(B_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q})$ とおこう。補題 1.4 より

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\alpha} k^m \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

を得る。ここで α は canonical ゆえ $m = 1$ を得る。他方、$B_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q}$ は reduced Artin 環。従って $B_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q}$ は体、言いかえれば $C_\mathfrak{q}$ は $B_\mathfrak{q}$ の極大イデアルでなければならない。ゆえに (2) が成り立つ。

(2) ⇒ (1) : $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A B/A$ とする。仮定より $^{\exists 1} P \in \mathrm{Spec}\, B$ s.t. $P \cap A = \mathfrak{q}$。このとき、$\mathfrak{q} A_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q} :_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{q} = P B_\mathfrak{q}$。従って、$\ell^0(A_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q}) = \ell^0(B_\mathfrak{q}/C_\mathfrak{q}) = 1$。よって補題 1.4 より次は exact である。

$$0 \to \mathrm{MPic}\, A_\mathfrak{z} \to \mathrm{MPic}\, A_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}A_\mathfrak{z} \oplus \mathrm{MPic}\, B_\mathfrak{z}$$

ところが、$\mathrm{MPic}\, A_\mathfrak{z}/\mathfrak{z}A_\mathfrak{z} = 0$ ゆえ (1) が示せた。

勿論、一般には $\mathrm{Ass}_A B/A$ は embedded prime をもつかもしれない。そこで次の工夫をする。

$$\Lambda_i = \{ \mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A B/A \mid \mathrm{ht}\, \mathfrak{z} \leqq i \}$$

$$F_i = B \cap (\cap_{\mathfrak{z} \in \Lambda_i} A_\mathfrak{z})$$

とおけば中間環の有限列

$$B = F_0 \supset F_1 \supset \cdots\cdots \supset F_d = A$$

を得る。ただし、$d = \max\{ \mathrm{ht}\, \mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A B/A \}$

このとき $\mathrm{Ass}_{F_i} F_{i-1}/F_i = \{ \mathfrak{z}A_\mathfrak{z} \cap F_i \mid \mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A B/A,\ \mathrm{ht}\, \mathfrak{z} = i \}$

となることが容易に確認できる。特に $\mathrm{Ass}_{F_i} F_{i-1}/F_i$ は embedded prime を持たない。よって命題 1.5 より次の定理 (locally quasinormal rings の構造定理) が得られた。

<u>定理</u> 1.6　上の記号の下で次は同値である。

(1) A : LQN in B

(2) A : SN in B かつ $\forall i$, $\forall Q \in \mathrm{Ass}_{F_i} F_{i-1}/F_i$

$\exists_1$ $P \in \mathrm{Spec}\, F_{i-1}$ s.t. $P \cap F_i = Q$

2 Closedness-type の判定法

$b \in B$, $b^2, b^3 \in A$ ならば $b \in A$ となるとき、A は $(2,3)$-closed in B と呼ばれる。ここで、A : SN in $B \Leftrightarrow A$: $(2,3)$-closed in B であったことを思い出そう。そこで同様の判定法が quasinormality に対しても存在しないかと考えるのは極めて自然であろう。この問題を考察するに当たって浅沼氏は次の概念を導入された。

<u>定義</u>　A : u-closed in $B \underset{def}{\Leftrightarrow} b \in B$, $b^2 - b$, $b^3 - b^2 \in A$ ならば $b \in A$

以下において、我々は locally quasinormality に対する closedness-type の判定法を与える。まず、次が成立する。

<u>補題</u> 2.1　A : SN in B のとき次は同値。

(1) A : u-closed in B

(2) $h^0(A/\mathfrak{c}) = h^0(C/\mathfrak{c})$　$A \subseteq {}^{\forall}C \subseteq B$, $\mathfrak{c} = A :_A C$

(3) $\mathrm{MPic}\, A \longrightarrow \mathrm{MPic}\, A/\mathfrak{c} \oplus \mathrm{MPic}\, C$: injective　$A \subseteq {}^{\forall}C \subseteq B$, $\mathfrak{c} = A :_A C$

この補題を利用して次が示せるが証明は省略する。

<u>命題</u> 2.2　次は同値である。

(1) A : LQN in B

(2) A : (2, 3)-closed かつ locally u-closed in B

さて、ここで新たに t-closedness なる概念を定義する。

<u>定義</u>　A : t-closed in B $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ $b \in B$, $b^2 - ab$, $b^3 - ab^2 \in A$ for $^\exists a \in A$ ならば $b \in A$

<u>補題</u> 2.3　A : t-closed in B $\Leftrightarrow$ A : (2, 3)-closed かつ locally u-closed in B

<u>証明</u>　$\Rightarrow$ は明らかゆえ $\Leftarrow$ を示す。$b \in B$, $b^2 - ab$, $b^3 - ab^2 \in A$ for $^\exists a \in A$ として $b \in A$ を示そう。$a \neq 0$ としてよい。A : locally u-closed in B ゆえ $A[\frac{1}{a}]$: locally u-closed in $B[\frac{1}{a}]$ となり、従って容易にわかるように、$A[\frac{1}{a}]$: u-closed in $B[\frac{1}{a}]$ となる。

ゆえにまず $b \in A[\frac{1}{a}]$ を得る。そこで $a^n b \in A$ となる最小の n をとる。$n \geqq 1$ と仮定する。$a^n b \in A$ と $b^2 - ab,\ b^3 - ab^2 \in A$ より容易に $a^{n-1}b^2$, $a^{n-1}b^3 \in A$ を得る。よって $(a^{n-1}b)^2$, $(a^{n-1}b)^3 \in A$ となり、A : (2, 3)-closed in B ゆえ、従って $a^{n-1}b \in A$ となる。これは矛盾である ∎

命題 2.2 と補題 2.3 とを合わせて次を得る。

<u>定理</u> 2.4　次は同値である。

(1) A : LQN in B

(2) A : t-closed in B

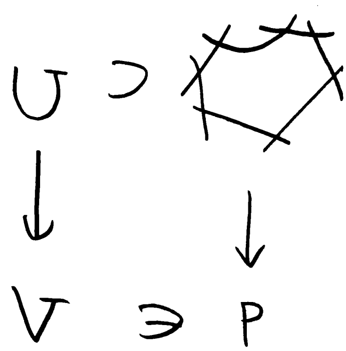
<u>注意</u>　以上をまとめれば次の包含関係が得られる。

$$
\begin{tikzcd}
\text{LQN} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{QN} \arrow[r] \arrow[d] & \text{SN} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{t-closed} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{(2,3)-closed} \\ \text{\& u-closed}\end{array} \arrow[r] & \text{(2,3)-closed}
\end{tikzcd}
$$

土橋のカスプ特異点

石田正典

<u>序文</u>　　2次元の複素解析空間 V の正規な
したがって孤立した特異点 $P \in V$ は、ある
P の非特異化 $\pi: U \to V$ による例外集合
$\pi^{-1}(P)$ が非特異有理曲線 ($\simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) の輪、と



なっているときカスプ特異点と呼ばれる。(
[2], [3] 参照)　カスプ特異点はトーラス埋込みの理論により構成されることが知られているが、土橋康宏氏は、その構成法を高

次元に拡張して，一般次元のカスプ特異点を定義した。土橋のカスプ特異点 $p \in V$ について，土橋[7]はその局所環 $(\mathcal{O}_p, m_p)$ の局所コホモロジー群 $H^i_{m_p}(\mathcal{O}_p)$ は $i < \dim \mathcal{O}_p$ のとき m_p が零化イデアルに含まれることを示した。これは局所環 $\mathcal{O}_p$ が quasi-Buchsbaum 環であることを示している。ここでは，この土橋のカスプ特異点の局所環 $\mathcal{O}_p$ が常に Buchsbaum 環であることの証明の概説を述べたい。詳しくは[1]（東北数学雑誌に掲載予定）を参照して頂きたい。

<u>第1節</u>　ここでは土橋のカスプ特異点の非特異化について述べたい。実は土橋のカスプ特異点はもともと，トーラス埋込みの方法で構成された，非特異の解析空間の余次元1のコンパクトな部分解析空間を1点に縮約して得られるので，その非特異化は元の解析空間としてすでに与えられていることになる。

$\pi : U \to V$ をその非特異化とする。

π は $U \setminus \{P\}$ 上では同型で，$\pi^{-1}(P)$ は次のような構造を持った部分多様体である。$n = \dim V$ とする。

(1) $X = \pi^{-1}(P)$ 被約な解析空間と考えると，有限個の $(n-1)$-次元非特異有理代数多様体 $X_1, \cdots, X_s$ の和であって全体として正規交叉しか特異点を持たない。

(2) $\{1, \cdots, s\}$ の空でない部分集合 I に対し $X_I = \bigcap_{i \in I} X_i$ とおくとき。$\{1, \cdots, s\}$ を頂点集合とする，抽象複体

$$\Phi = \{ I \mid X_I \neq \phi \}$$

に付随した，位相空間 $|\Phi|$ は $(n-1)$-次元の位相多様体である。

(3) 各元 $I \in \Phi$ に対し X_I は非特異な有理代数多様体である。（従って特に連結）

さらに土橋のカスプ特異点は大きく 2 つに分けられて，一方では U に n 次の解析的微分形式で X 上で 1 位の極をとり他では極も零もとらないものが存在する場合と，そのような微分形式は存在しないが，U のある

不分岐な２重被覆に対して同様の微分形式が存在する場合がある。ここでは簡単にするために前者と仮定する。すなわち U の標準層 ω_U は $\mathcal{O}_U(-X)$ に同形とする。

第２節　第一節の最後に書いた条件をつけた土橋のカスプ特異点 $P \in V$ とその非特異化 $\pi : U \to V$ について導来コホモロジー群 $R^i\pi_*\mathcal{O}_U$　$i \geq 0$ を考える。

抽象複体 Φ に対して自然な鎖複体

$$A(X)^\bullet : \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_i} \to \bigoplus_{|I|=2} \mathcal{O}_{X_I} \to \bigoplus_{|J|=3} \mathcal{O}_{X_J} \to \cdots$$

を考えると，Φ が位相多様体となることから自然な準同型 $\mathcal{O}_X \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_i}$ を $A(X)^\bullet$ につないだものが完全となる。したがって，$\mathcal{O}_X$ と $A(X)^\bullet$ は U 上の連接層をコホモロジー群として持つ $\mathcal{O}_U$-加群の複体の導来圏の中で同値である。各 X_I は非特異有理代数多様体であることから $R\pi_*\mathcal{O}_{X_I} = \mathbb{C}(P)$ であるので $R\pi_*\mathcal{O}_X = R\pi_*A(X)^\bullet = C^\bullet(\Phi, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(P)$

であることがわかる。 ここで $C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C})$ は単体的複体 Φ に付随した通常の $\mathbb{C}$ 係数の鎖複体である。

さて完全列

A) $0 \to \mathcal{O}_U(-X) \to \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_X \to 0$

において $\mathcal{O}_U(-X) \simeq \omega_U$ なので、Grauert-Riemenschneider の消滅定理[ ]により、$R\pi_* \mathcal{O}_U(-X) = m_p$ となる。m_p は $R^0\pi_* \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_V$ に含まれるから完全列 A) の $R\pi_*$ をとることにより $\mathcal{O}_V$-加群の完全列

B) $0 \to m_p \to R\pi_* \mathcal{O}_U \to C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}(p) \to 0$

を得る。

B) から得られるコホモロジーの完全列より次の定理を得る。 この結果は第一節の最後に仮定した条件無しでも成立する。

<u>定理1</u> $\pi : U \to V$ を土橋のカスプ特異点の非特異化としたとき、任意の正の整数 p に対して $R^p\pi_* \mathcal{O}_U \simeq H^p(|\Phi|, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(p)$ が成り立つ。 ここで $H^p(|\Phi|, \mathbb{C})$ は位相多様

体 $|\Phi|$ の p-次の $\mathbb{C}$ 係数のコホモロジーである。

また完全列 B) は複体 $R\pi_*\mathcal{O}_U$ を 0 次の項で切断してできた複体 $\tau_0 R\pi_*\mathcal{O}_U$ (すなわち $R\pi_*\mathcal{O}_U = (\cdots \to A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \to \cdots)$ とすると $\tau_0 R\pi_*\mathcal{O}_U = (\cdots \to 0 \to d^0(A^0) \to A^1 \to \cdots)$ となる) が $\mathbb{C}(p)$-ベクトル空間の複体 $\tau_0 C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(p)$ と導来圏の中で一致していることを示す。

<u>第3節</u>　最後に局所環 $\mathcal{O}_p$ の双対化複体について述べて、Schenzel の判定法[6]により $\mathcal{O}_p$ が Buchsbaum 環であることを示す。この節でも第一節の最後に書いた仮定を置く。この仮定をしないときは、結果は少し複雑になるが、$\mathcal{O}_p$ の Buchsbaum 性は同様に示される[1].

(A, m) を Gorenstein 環の商となっているような d 次の局所環とする。そのとき Schenzel によれば A が Buchsbaum 環であるための必要かつ十分な条件は、A の正規化

された双対化複体 $K_A^\cdot$ の次数 $-d$ での切断 $\tau_{-d}K_A^\cdot$ が導来圏の中で A/m-ベクトル空間の複体で代表されることである。

さて $K_V^\cdot$ を $\mathcal{O}_V$ の双対化複体とする。$K_V^\cdot[n]$ を $K_V^\cdot$ の右への n 次のシフトとする。$\mathcal{O}_U(-X) \simeq \omega_U = K_U^\cdot[-n]$ であるから、相対双対定理[5]により

$$R\pi_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U(-X), \mathcal{O}_U(-X)) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(m_P, K_V^\cdot[n])$$

を得る。$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U(-X), \mathcal{O}_U(-X)) = \mathcal{O}_U$ であるから左辺は $R\pi_*\mathcal{O}_U$ に等しい。完全列

$$0 \to m_P \to \mathcal{O}_V \to \mathbb{C}(P) \to 0$$

に関手 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\cdot, K_V^\cdot[n])$ をほどこすことにより三角形 [4, Chap. 1, §1]

$$\begin{tikzcd}
 & R\pi_*\mathcal{O}_U = R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(m_P, K^\cdot[n]) \arrow[dl, "(+)"'] & \\
R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathbb{C}(P), K_V^\cdot[n]) \arrow[rr] & & K_V^\cdot[-n] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで $K_V^{\cdot}$ が双対化複体であることから，$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathbb{C}(P),\ K_V^{\cdot}[-n]) = \mathbb{C}(P)[-n]$ となる。したがって $K_V^{\cdot}[-n] \to R\pi_*\mathcal{O}_U$ は 0 次のコホモロジーの同形

$$\mathcal{H}^0(K_V^{\cdot}[-n]) \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_V$$

を与えることがわかる。0 次での切断を取ることにより次の三角形を得る。

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_0 R\pi_*\mathcal{O}_U = \tau_0 C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(P) \arrow[dl, "(+)"', "u"] & \\
\mathbb{C}(P)[-n] \arrow[rr] & & \tau_0 K_V^{\cdot}[-n] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

ここで $\tau_0 C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(P)$ が n 次以上の項を持たないことから，導来圏の射 u は複体の準同型 $u : \tau_0 C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(P)[-1] \to \mathbb{C}(P)[-n]$ として実現できることがわかる。したがって $\tau_0 K_V^{\cdot}[-n]$ は $\mathbb{C}(P)$-ベクトル空間の複体間の準同形 $\tau_0 C^{\cdot}(\Phi, \mathbb{C})[-1] \to \mathbb{C}(P)[-n]$ の mapping cone と考えられるので，やはり $\mathbb{C}(P)$-ベクトル空間の複体となる。$K_V^{\cdot}$ の $P \in V$ での

での茎が局所環 $\mathcal{O}_p$ の双対化複体であることから，Schenzel の判定法により $\mathcal{O}_p$ が Buchsbaum 環であることがわかる。

References

[1] Masa-Nori Ishida, Tsuchihashi's cusp singularities are Buchsbaum singularities, to appear in Tohoku Math. J.

[2] U. Karras, Deformations of cusp singularities, Proc. Symp. Pure Math. 30, 37-44 (1977).

[3] I. Nakamura, Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities, I, Math. Ann. 252, 221-235 (1980).

[4] R. Hartshorne, Residues and duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[5] J.-P. Ramis, G. Ruget and J.L. Verdier, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Inv. math. 13, 261-283 (1971).

[6] P. Schenzel, Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings, Advances in Math. 44, 61-77 (1982).

[7] H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, to appear in Tohoku Math. J. 35-(4), 1983.

Krull domain について

愛教大　　金光三男

A. Bourier の Krull domain に関連した内容を説明し、若干の注意を付加する。

§1. Krull integral scheme

$(X, \mathcal{O}_X)$ が Krull integral scheme とは、$(X, \mathcal{O}_X)$ が integral scheme で次の (K1)〜(K3) を満たすときをいう。

(K1). $X^{(1)} = \{y \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,y} = 1$ 即ち、$\mathcal{O}_X$ の y における茎 $\mathcal{O}_{X,y}$ のクルル次元が $1\}$ とおく。$\forall y \in X^{(1)}$ に対して、$\mathcal{O}_{X,y}$ が離散付値環である。

(K2). U を X の任意の開集合，$K(X)$ を X の有理関数体、そして、$\mathcal{O}_{X,y}$ に associate

した valuation を $v_y : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ とする。
$\forall y \in U$ に対して、$0 \neq t \in K(X)$ が $v_y(t) \geq 0$ なら、$t \in \mathcal{O}_X(U)$.

(K3). $0 \neq {}^\forall t \in K(X)$ に対して. $\{y \in X^{(1)} \mid v_y(t) \neq 0\}$ は有限集合。

A. Bouvier [2] の定理 "Krull domain において、ht 1 の non-principal prime ideals 全体は空集合か無限集合である" を使って、次のことがいえる。

<u>命題1</u>. $(X, \mathcal{O}_X)$ が separated Krull integral scheme とする。このとき、次は同値である。

(1). X は quasi-compact で $\forall y \in X$ に対して、$\{y\}$ は locally closed subset

(2). X は quasi-compact で生成点は開集合.

(3). $(X, \mathcal{O}_X)$ は affine scheme で global section 全体の作る環 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は G-domain。

[証明] (2) $\Longrightarrow$ (3). $X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} R_i$ (R_i は Krull domain)

とする。生成点が閉集合であることにより $0 \neq {}^{\exists}f \in \bigcap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in X^{(1)}(\mathrm{Spec}\, R_i)\}$ である。ht 1 の prime ideal に対応する essential valuation の個数は (K3) より有限個。よって、X は有限集合である。Krull domain に関する近似定理の応用である上で述べた A. Bouvier の定理より、R_i は有限個の離散付値環の共通部分として表わされ、separated でもあるから、semi-local 単項イデアル整域である。よって、$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x}$ も semi-local 単項イデアル整域だから、G-domain である。作り方より X と Spec A は位相同型で Spec A の構造層 $\tilde{A}$ と $\mathcal{O}_X$ の茎を比較してみれば、$(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Spec}\, A, \tilde{A})$ である。

(3) $\Longrightarrow$ (1). 上の証明法を使って、生成点は閉集合で他の点は closed point がいえる。

注意 1). 命題 1 で Krull scheme の代りに locally Noetherian scheme としても成立する。$(X, \mathcal{O}_X)$ の normalization が Krull integral scheme で normalization morphism が surjective であることより X が有限集合がいえ、separated だから $(X, \mathcal{O}_X)$ は affine scheme。separated を仮定しなければ必ずしも affine scheme とは限らない。

<u>注意 2).</u> non-Noetherian G-domain (例えば、2次元以上の付値環) の構造はよくわかっていない。

<u>注意 3).</u> R を整域とし、X=Spec R の elementary open set を $D(f)$ と書くことにする。もし、$\{\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X)\}_{f\in R}$ が R の overring をつくすなら、R は Prüfer domain で更に、R が Noetherian domain なら、class group $Cl(R)$ は torsion group である。

ここにでてきた、Prüfer domain を含む P-domain と $Cl(R)$ が torsion group より一般な almost locally U.F.D. について以下の § で述べる。

§2. P-domain

R が <u>P-domain</u> とは、R の integral closure $\overline{R}$ が Prüfer domain のときをいう。知られている結果（[1] と [4]）をまとめて、

<u>命題 2</u>. R が整域のとき次は同値である。

(1). R が P-domain.

(2). $\mathrm{Spec}\, R(X) \cong \mathrm{Spec}\, R$　但し、$R(X) = R[X]_S$ で、$S = \{ f \in R[X] \mid f$ の係数全体で生成されるイデアルが $R \}$.（(1) と (2) の同値性は、大石・伊藤の定理）。

(3). R の integral closure $\overline{R}$ のすべての overring が seminormal（実際には、$\overline{R}$ のすべての overring が整閉であるということと同じ）.

森－永田の定理より、R がネーター P-domain なら、その integral closure $\overline{R}$ は、デ

デキント整域となる。従って、次元2以上の P-domain は、non-noetherian である。

低次元の P-domain に関して次がいえる。

<u>命題3.</u> R が整域でその integral closure $\overline{R}$ が locally U.F.D. とする。このとき、次は同値である。

(1). R が P-domain (2). $\dim R \leq 1$.

(2) から (1) は、$\overline{R}$ が locally GCD-domain (即ち、$\forall a, b \in \overline{R}$ に対して $(a) \cap (b)$ が locally principal ideal である) としても正しい。何故なら、Sheldon [5] の定理より、1次元 locally GCD-domain は Prüfer domain だからである。

<u>命題4.</u> R が整域で $\dim R \leq 1$ とするとき、次は同値である。

(1). R の integral closure $\overline{R}$ が locally GCD-domain

かつRが seminormal。

(2). Rのすべての overring が seminormal。

[証明] (2)から(1)は、$\bar{R}$の各極大イデアルmに対して$\bar{R}_m$が離散付値環になることより$\bar{R}$が locally GCD-domain。(1)から(2)は、1次元 locally GCD-domain は Prüfer domain であることと、[1]よりいえるが、一応書いておく。KをRの商体とする。$\forall v \in K$ に対して $T = R[v^2, v^3]$ が seminormal であることと、Rのすべての overring が seminormal であることは同値。今は、Zariski の Main 定理が使えて、$R_s = T_s$ なる $R - \mathfrak{p}$ の元 s が存在する。Rが seminormal だからその商環R_sもそうであり、いくつかの seminormal domain の共通部分 $\bigcap_s R_s$ も seminormal であるが、$T \subseteq S = \bigcap T_s \subseteq \bigcap T_{\mathfrak{p}} = T$ より、$T = S = \bigcap R_s$ も seminormal である。

<u>命題 5</u>. Rが整域でその integral closure $\bar{R}$

が *locally* GCD-*domain* のとき、次は同値。

(1). R は P-*domain*　(2). $R(X)$ は P-*domain*.

証明. 仮定より、$\overline{R(X)}$ も *locally* GCD-*domain* だから、Spec $\overline{R}$ が *tree* ということと R が P-*domain* であることは同値。それに、$\overline{R(X)} = \overline{R}(X)$ を使えばでてくる。

<u>命題 6</u>. R が整域でその *integral closure* $\overline{R}$ のすべての素イデアル $\overline{\mathfrak{p}}$ に対して、ホモロジー次元 $hd_R(\overline{R}/\overline{\mathfrak{p}}) \leqq 1$ とすると、R は P-*domain* となる。(更に、$\overline{R}$ が *reflexive domain* なら、$\overline{R}$ がデデキント整域で、入射次元 $inj.\dim_{\overline{R}} \overline{\mathfrak{m}} = 1$ が $\overline{R}$ のすべての極大イデアル $\overline{\mathfrak{m}}$ に対していえることが知られている (M. Matlis))。

証明. R が *quasi-local normal domain* として、R は付値環であることをいえばよい。$hd \leqq 1$ より、R は単項イデアル整域がで

てくる。

$\overline{R}$がネーター環なら、$\overline{R}$はデデキント整域だから、命題6の逆がいえる。

§3. Krull domain の local class group (c.f.[3]).

Rが Krull domain とする。このとき、Rが almost U.F.D. とは $Cl(R)$ が torsion group のときをいう。これは、$\forall \mathfrak{p} \in X^{(1)}(R)$ に対して記号的累乗 $\mathfrak{p}^{(n)} = (f)$ であることとも、$\forall \mathfrak{p} \in X^{(1)}(R)$ に対して $\mathfrak{p} = \sqrt{(f)}$ とも同値である。従って、幾何学的には、kを代数的閉体，Vを既約 affine normal variety over k とするとき、その座標環 $k[V]$ が almost U.F.D. であることは、Vの有限個の hypersurface の union は再びVの一つの hypersurface であるということになる。

Krull domain Rが almost locally U.F.D. とは、local class group $G(R) = Cl(R)/Pic(R)$ が

torsion group のときをいう。これは、$R(X)$ が almost U.F.D. ということと同じである。$G(R)$ の大きさは、Krull domain が locally U.F.D. ($G(R)=(0)$) からどれだけ離れているかを示す。

R が Krull domain で $G(R)\neq 0$ なら、$\dim R\geqq 2$ がいえる。

例. (A. Bouvier [3])

(1). A は Krull domain で almost locally U.F.D. とする。このとき、$R=A[X^n, XY, Y^n]$ もそうで $G(R)=G(A)\oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ となる。

$G(R)$ の計算には、semi-group ring $A[\Gamma]$ を考える。ここで、$\Gamma=(n,0)\mathbb{N}+(1,1)\mathbb{N}+(0,n)\mathbb{N}$ $\subseteq \mathbb{Z}e_1\oplus\mathbb{Z}e_2=F$　$e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$.

$Cl(A[\Gamma])=Cl(A)\oplus \mathbb{Z}^2/\langle\Gamma\rangle$　ここで、$\langle\Gamma\rangle$ $=\mathbb{Z}ne_1\oplus\mathbb{Z}(e_1+e_2)\subset F=\mathbb{Z}e_1\oplus\mathbb{Z}(e_1+e_2)$

$\mathrm{Pic}(A[\Gamma])=\mathrm{Pic}(A)$ ($\because$ graded seminormal $A=\oplus A_i$ に対しては $\mathrm{Pic}(\oplus A_i)=\mathrm{Pic}(A_0)$ が成立することを使う)

$\therefore\ G(A[\Gamma]) = G(A) \oplus (\mathbb{Z}^2/\langle\Gamma\rangle)$

pr_i を projection とすると、$pr_1(0,n) = 0 < pr_2(0,n) = n$, $pr_2(n,0) = 0 < pr_1(n,0) = n$ だから.

$Cl(\Gamma) = F/\langle\Gamma\rangle$

$$\therefore\ F/\langle\Gamma\rangle = \mathbb{Z}e_1/\mathbb{Z}ne_1 = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ G(A[X^n, XY, Y^n]) = G(A) \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

(2). A が Krull domain のとき、

$$G(A[X_i, X_i^{-1}]_{i\in\Lambda}) = G(A)$$

参考文献

[1]. D.F. Anderson, D.E. Dobbs and J.A. Huckaba, On seminormal rings, Comm. in Alg. 10 (1982) 1421-1448.

[2]. A. Bouvier, Sur les idéaux de hauteur 1 d'un anneau de Krull, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 727-729 (1977).

[3]. A. Bouvier, The local class group of a Krull domain, Can. Math. Bull. 26, (1983) 13-19.

[4]. A. Ooishi, A note on P-rings, preprint.

[5]. P. Sheldon, Prime ideals in GCD-domains, Canad. J. Math. 26 (1974), 98—107.

いろいろな反例の作り方

京大・理　西村純一

§0. 序、ネター環，特に（ネター）局所環，の研究において、ある問題（予想）に対する反例を作ることも重要である。このような反例としては、Nagata（cf. [6]）による種々の例が有名であるが、作り方はむつかしい。

ここでは、Rotthaus, Ogoma, Heitmann, Brodmann－Rotthaus らによる、ベキ級数環の多項式イデアルによる剰余環を完備化にもつ局所整域の標準的な作り方（§1）、および、この方法から作られるいくつかの例（§2）を復習する。いまや、この標準的方法により、だれにでも悪い generic formal fibre をもつ局所整域が簡単に作れるようになった。それ故、この構成法は、今後ますます有用なものとなろう。

しかし、この標準的方法のみでは、なかなか(良い generic formal fibre かつ)悪い special formal fibre(s) をもつ局所整域が作れない。そこで、§3 では、そのような例の作り方について、少々考える。

これらの考察より、少々乱暴な言い方が許されるなら、既知の知識と、上述の構成法とを組合わせることにより、悪い formal fibre(s) をもつ(ネター)局所整域を、必要に応じ、比較的簡単に作ることができるのではないか、とおもわれるようになってきた。

なお、pseudo-geometric ring (= universally japanese ring) を、nagata ring と呼ぶ。

§1、標準的構成法。

K_0 を可算な体(標数は任意)，K を K_0 上超越次数可算な純超越拡大体，$t_{ij} \in K$ $(0 \leq i, j < \infty)$ を K の K_0 上超越基とする。

また、$x_1, \ldots, x_n$，$y_1, \ldots, y_s$ $(n, s > 0)$ を不定元，$S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s]$，$\mathfrak{n} = (x_1, \ldots,$

$x_r, y_1, \ldots, y_s)S$, $R = S_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{n}R$ とする。

更に、$\mathcal{P}_0$ を R の素元 p の集合で、次をみたすものとする：

i) $p \in S$, $x_1 \in \mathcal{P}_0$,

ii) R の任意の高さ1の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対し、$p \in \mathcal{P}_0$ で $pR = \mathfrak{P}$ であるものが、一意的に存在する。

次に、$z_1, \ldots, z_m$ $(\in S)$ を、$x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_m$ が R の reg. s.o.p. の一部となるようにとる。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ から $\mathcal{P}_0$ への全射 ρ を、$\mathcal{P}_0$ の番号付とよぶ。$\rho(j) = p_j$ $(j \in \mathbb{N})$ により、$\mathcal{P}_0$ の元に添字(番号)をつける。(習慣により、$p_1 = x_1$ とする。)

これを用い、$q_\nu = \prod_{j=1}^{\nu} p_j$, $\zeta_{i0} = z_i$, $\zeta_{i\nu} = z_i + \sum_{j=1}^{\nu} t_{ij} q_j^j$, $\mathfrak{P}_\nu = (\zeta_{1\nu}, \ldots, \zeta_{m\nu})R$ $(\nu \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m)$ とする。(このとき、$\mathfrak{P}_\nu$ は高さ m の素イデアルである。)

さて、標準的構成法の鍵は、次の命題である。

<u>Proposition</u> (Rotthaus, Ogoma, Heitmann, Brod-

mann-Rotthaus）上の記号のもとに．$\mathcal{P}_0$の番号付ρで．

(*)　$p_\nu \notin P_{\nu-1}$, for $\forall \nu \in \mathbb{N}$

となるものがとれる。（ただし $P_0 = (\zeta_{10}, \dots, \zeta_{m0})$）

このProp.の証明には．mに関する帰納法（Brodmann-Rotthaus [1], cf. Ogoma [8]）又は．$K = \varinjlim_\lambda K_\lambda$, $K_\lambda = K_0(t_{ij})$ $(i, j \leq \lambda)$, $R = \varinjlim_\lambda R_\lambda$, $R_\lambda = K_\lambda[x, y]_{(x,y)}$ を利用する方法（cf. Heitmann [5], Brodmann-Rotthaus [2]）がある。

いま，$z_i = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$，かつρを上述の(*)を満足するようにとる。

また．$T_1, \dots, T_s$を不定元，$F_1, \dots, F_\delta \in K[T_1, \dots, T_s]$で．$F_j \in (T_1, \dots, T_s)$ $(j = 1, 2, \dots, \delta)$とし，次のようにRの商体Lの元$\alpha_{j\nu}$を定める。

$$\alpha_{j\nu} = \frac{1}{q_\nu^\nu} F_j(\zeta_{1\nu}, \dots, \zeta_{s\nu}), \ (\nu \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, \delta)$$

（なお．$\alpha_{j\nu} = q_\nu p_{\nu+1}^{\nu+1}(\alpha_{j(\nu+1)} + \beta_{j\nu})$, $\beta_{j\nu} \in R$ に注意しよう。）

$A' = R[\alpha_{j\nu}]$ $(\subset L)$, $\mathfrak{m}A' = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots$

$y_s)A'$ とおくと，(*)より，

$$\mathfrak{m}A' \subsetneqq A' \quad , \quad \alpha_{j\nu} \in \mathfrak{m}A'$$

が示され，$\mathfrak{m}A'$ が，A' の極大イデアルであることがわかる。

よって，$A = A'_{\mathfrak{m}A'}$，$\hat{R} = K[[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s]]$，$\zeta_i = y_i + \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} g_j^j$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ $f_j = F_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_s)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ とすると，次の命題が示される。

<u>Proposition</u> (Brodmann-Rotthaus [1], cf. Ogoma [8]) 上の記号のもとに，

1) A は，(ネター)局所整域，
2) $\hat{A} \cong \hat{R}/(f_1, \ldots, f_s)$，
3) $Q = (\zeta_1, \ldots, \zeta_s)$ は素イデアル，かつ $Q \cap A = (0)$.

この Prop は，次のように表わせる：

<u>Theorem</u> (Brodmann-Rotthaus [1], cf. Ogoma [10]) $B = K[V_1, \ldots, V_s]_{(V)}$，$\mathfrak{n} = (V_1, \ldots, V_s)B$ $\mathfrak{b}$ を B のイデアルとすると，(ネター)局所整域 A で，次をみたすものが存在する：

1) $\varphi : \hat{A} \xrightarrow{\sim} (B/\mathfrak{b})^{\wedge}[[x_1, \ldots, x_n]]$，$(n > 0)$，

2) $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}(B/\mathfrak{b})^\wedge[[x]]) = Q$ は $\hat{A}$ の素イデアル, かつ $Q \cap A = (0)$,

3) $\forall P \in \mathrm{Spec}(A)$, $P \neq (0)$ について, A/P = essentially finite type over K。

つまり, 悪い generic formal fibre (かつ, 良い special formal fibre(s)) をもつ (ネター) 局所整域が, 自由自在に作れることがわかる。

§2. 具体例.

(2.1) (Brodmann - Rotthaus [1], cf. Ogoma [10])

2次元 quasi-unmixed local domain, which is not unmixed. (cf. Ferrand - Raynaud [4])

<u>Example</u>. $B = K[V_1, V_2]_{(V)}$, $\mathfrak{b} = (V_1^2, V_1V_2)$, $n = 1$ ととれば, $\hat{A} \cong K[[V_1, V_2, x]]/(V_1^2, V_1V_2)$.

(2.2) (cf. Ogoma [10], Brodmann-Rotthaus [1])

2次元 nagata normal domain, which is not analytically irreducible. (cf. Nagata [7])

<u>Example</u>. $B = K[V_1, V_2]_{(V)}$ ($\mathrm{ch}\, K = 0$), $\mathfrak{b} = (V_1 \cdot V_2)$, $n = 1$ ととれば, $\hat{A} \cong K[[V_1, V_2, x]]/(V_1 \cdot V_2)$ より, A は CM nagata. よって,

Aが(R_1)をみたすことを示せばよいが，これも$Q \cap A = (0)$より，容易。

(2.3) (Ogoma [9]) 2次元局所整域，for $\forall P \in \mathrm{Spec}(A)$，$P \neq (0)$，$A/P$ = nagata (or excellent) かつ $A \subset {}^{\exists}C \subset \bar{A}$ (= the derived normal ring) (中間環) Cは，not noether (cf. Nagata [7])

<u>Example</u> $B = k[V_1]_{(V_1)}$，$\mathfrak{b} = (V_1^2)$，$n = 2$とすると，$\hat{A} \cong k[[V, x_1, x_2]]/(V^2)$．$\forall a \in \mathfrak{m}$ $(a \neq 0)$について $C = \bar{A} \cap A[\frac{1}{a}]$ ととると，Cは，not noether が，比較的簡単に示される。

(2.4) (Ogoma [11]，cf. Ogoma [10]) 2次元 nagata CM，UFD，which is not Gorenstein.

<u>Example</u> $B = k[V_1, V_2, V_3]_{(V)}$，$\mathfrak{b} = (V_1^3 - V_2V_3,\ V_2^2 - V_1V_3,\ V_3^2 - V_1^2V_2)$，$n = 1$ とすると，$\hat{A} \cong k[[V_1, V_2, V_3, x]]/(\mathfrak{b})$ より，not Gorenstein，CM domain がわかる．なお，AをUFDにするためには，ρのとり方等，少々工夫を要する。(詳しくは，Ogoma [11] 参照)

(2.5) (Ogoma [8]，cf. Brodmann-Rotthaus [1]) 3次元 henselian normal nagata local domain, which is not catenary.

Example $B = K[V_1, V_2, V_3]_{(V)}$ $(\mathrm{ch}\, K = 0)$, $\mathfrak{b} = (V_1V_2, V_1V_3)$, $n = 1$ とすると. $\hat{A} \cong K[[V_1, V_2, V_3, x]]/(V_1V_2, V_1V_3)$ である。更に. A は normal かつ not catenary である(Heitmann [5])。よって, A の henselization ${}^hA$ が求める例である。

なお. この例を利用し. Ratliff の chain conjectures (cf. [13]) のうち. depth conjecture (de Souza [3]) および. GB-conjecture (Brodmann-Rotthaus [1]) が成立しないことも示される。(cf. [14]).

(2.6) (Brodmann-Rotthaus [1]) 3次元 (normal) nagata local domain A, whose $\mathrm{Reg}(A)$, $\mathrm{Gor}(A)$, $\mathrm{CI}(A)$ are not open.

Example. $B = K[V_1, V_2, V_3]_{(V)}$, $\mathfrak{b} = (2.4)$ と同じ. $n = 2$ とすると. $\hat{A} \cong K[[V_1, V_2, V_3, x_1, x_2]]/(\mathfrak{b})$。このとき. $\mathrm{Gor}(A)$ が not open であることが. P-ring の一般論を用いると示される。ここで. $n = 2$ が重要である。

同様にして，4次元(normal) nagata local domain A で，CM(A)が not open も作れる。

§3. 蛇足. §1, 2における例では，A の formal fibre のうち，悪い fibre は，generic formal fibre のみであった。ところで，最近，次の例が，Brodmann-Rotthaus [2]，(cf. Ogoma [12]) により作られた。

(3.1) 3次元 unmixed local domain A, s.t. $\exists\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $(\mathfrak{p} \neq (0))$, $A/\mathfrak{p}$ is not unmixed (もちろん quasi-unmixed) (cf. Nagata [6])

この例の作り方と Ogoma [11] による UFD にする番号付を参考にし，少し工夫すると，次の例が作られる…，とおもわれる。

(3.2) 3次元 nagata UFD, which is not universally catenary.

(3.3) 2次元 UFD of char. = 0, which is analytically ramified (cf. Nagata [7])

(3.4) 3次元局所整域 of char. = 0, whose derived normal ring is not noetherian (cf.

Nagata [7]).

(3.2) の例が存在すると Ratliff の prime chain に関する (ほとんど) すべての予想 (cf. [13], [14]) が成立しなくなる。

(3.2), (3.3), (3.4) において、ネター性を示す必要のため、奇妙なことに、現在のところ、UFD局所整域しか作れない。

悪い generic and/or special formal fibre(s) をもつ局所整域の例の、もっと一般的な構成法があるのでは、と期待しているが、序にも述べたように、それらは「必要に応じて」見つかってくるのであろう。

References

[1] M.Brodmann-C. Rotthaus, Local Domains with Bad Sets of Formal Prime Divisors, J. of Alg. 75(1982), 386-394.

[2] M.Brodmann-C.Rotthaus, A Peculiar Unmixed Domain, Proc. AMS 87(1983), 596-600.

[3] A.M.de Souza Doering, The Depth Conjecture: A Counterexample, J. of Alg. 77(1982), 443-448.

[4] D.Ferrand-M.Raynaud, Fibres Formelles d'un Anneau Local Noetherien, Ann. Sci. ENS 3(1970), 295-311.

[5] R.Heitmann, A Non-Catenary,Normal,Local Domain, Rocky Mountain J. Math. 12(1982), 145-148.

[6] M.Nagata, On the Chain Problem of Prime Ideals, Nagoya Math. J. 10(1956), 51-64.

[7] M.Nagata, Local Rings, John Wiley 1962 (reprint ed. Krieger 1975).

[8] T.Ogoma, Non-Catenary Pseudo-Geometric Normal Rings, Japanese J. Math. 6(1980), 147-163.

[9] T.Ogoma, Some Examples of Rings with Curious Formal Fibers, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. 1(1980), 17-22.

[10] T.Ogoma, 幾何学的でない局所環の例について, 可換環論シンポジウム報告集, 1980年12月16日～19日.

[11] T.Ogoma, Cohen Macaulay Factorial Domain is not Necessarily Gorenstein, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. 3(1982), 65-74.

[12] T.Ogoma, Construction of an Unmixed Domain A with A/P Mixed for Some Prime Ideal P of A ; Making Use of Poicare Series, preprint.

[13] L.J.Ratliff, Chain Conjectures in Ring Theory, Springer Lect. Note 647, Springer-Verlag 1978.

[14] L.J.Ratliff, A Brief History and Survey of the Catenary Chain Conjectures, Amer. Math. Monthly 88(1981), 169-178.

ネター環の I-順滑性について

名大・理　谷本　洋

本稿では，体を含むネター局所環の部分体上の 0-順滑性，また，ネター環 A 上の形式的巾級数環 $A[[X_1, \cdots, X_n]]$ の A 上の I-順滑性，という2つの型の順滑性について得られた結果を述べる。尚，詳しくは，[5] を参照して下さい。

まず，I-順滑性と I-不分岐性の判定条件を与える。

定理　A が環，B がネター A 代数，I が B の定義イデアルであるとする。このとき，

(1)　B が A 上 I-不分岐 $\Longleftrightarrow$ B の任意の開集合のイデアル J について，$\Omega_{B/A} \otimes_B (B/J) = 0$ 。

(2)　B が A 上 I-順滑 $\Longleftrightarrow$ B の任意の開集合のイデアル J について，$H_1(A, B, B/J) = 0$ かつ $\Omega_{B/A} \otimes_B (B/J)$ は B/J 加群として，射影的。

特に，A，B ともにネター環で，$I=0$ のとき，

B が A 上 0-順滑 $\Leftrightarrow$ $\Omega_{B/A}$ は B 加群として，射影的，かつ，$A \longrightarrow B$ は正則。

さらに，I-etale とは，I-順滑 かつ I-不分岐 のことである。以下，$I=0$ のときは，単に 順滑（又は，不分岐，etale）と言うことにする。また，話はすべてネター環のときに限る。

§1. 体上順滑なネター局所環

体 k を含むネター局所環 $(A, \mathfrak{m}, K)$ が k 上 $\mathfrak{m}$-順滑であるための条件は，A が k 上幾何学的に正則になることであり、また、K が k 上分離的で，A が正則であれば，A は k 上 $\mathfrak{m}$-順滑であることは，よく知られている。では，0-順滑については，どのような特徴付けができるだろうか。次の定理は，それに対する一つの解答である。その結果を述べる前に，部分体 k についての定義を一つ述べる：

$\mathrm{rank}_K \Omega_{K/k} < \infty$ かつ K が k 上分離的であるとき，k を A の D-有限な部分体と呼ぶ。

準係数体とは，K が k 上 étale となる部分体 k のことであったから、“D-有限な部分体”は，準係数体の自然な拡張と見ることができる。また，k が A の D-有限な部分体であれば，K は k 上分離的ゆえに，k を含む A の準係数体が存在することが分かる。

定理 1.1　k が $\dim A = n$ のネター局所環 $(A, \mathfrak{m}, K)$ の D-有限な部分体であり，A が k 上順滑であるとする。このとき，A は excellent 正則局所環である。さらに，

(1)　$ch(k)=0$ のとき，$A^h \cong K\langle \underline{X} \rangle$ 。ここに $\underline{X}=\{X_1, \cdots, X_n\}$ は K 上の変数で，$K\langle \underline{X} \rangle = (K[\underline{X}], (\underline{X}))^h$ である。但し，^{h} はヘンゼル化を表す。逆に，$A^h = K\langle \underline{X} \rangle$ のとき，A は，K に含まれる A の任意の D-有限な部分体の上に，順滑である。ここに，“$\cong$”でなくて“$=$”であるのは，K の部分体を考える上で，意味がある。

(2)　$ch(k)=p>0$ のとき，A の正則巴系を $\underline{x}=\{x_1, \cdots, x_n\}$，$k$ を含む A の準係数体を ℓ とすれば，$A^p[\ell, \underline{x}] = A$ 。逆に，A が正則局所環で $A^p[\underline{x}, \ell] = A$ のとき，A は ℓ に含まれる A の任意の D-有限な部分体の上に順滑である。

証明、　A は k 上幾何学的に正則であるから、特に A は正則局所環で，強鎖状である。さて，$k \longrightarrow \hat{A}$ は正則であり，また，A が k 上順滑であることから，$\Omega_{A/k}$ は，自由 A 加群。よって，[1, Theorem 2.1] により，$A \longrightarrow \hat{A}$ は正則。よって，A は excellent。

後半の証明の前に，次のことに注意する。

補題、　$\underline{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ が A の正則巴系であり，l が k を含む A の準係数体であるとする。このとき，もし，A が k 上順滑であれば，A は $l[\underline{x}]$ 上 etale である。

証明、　環の準同型の列 $k \longrightarrow l[\underline{x}] \longrightarrow A$ に対して，次の完全系列を得る：

$$\Omega_{l[\underline{x}]/k} \otimes_{l[\underline{x}]} A \xrightarrow{\varphi} \Omega_{A/k} \longrightarrow \Omega_{A/l[\underline{x}]} \longrightarrow 0.$$

さて，$\Omega_{A/k}$ は自由 A 加群で，$\Omega_{l[\underline{x}]/k} \otimes_{l[\underline{x}]} A$ は，有限 A 加群。さらに，$\Omega_{A/l[\underline{x}]} \otimes_A (A/m) = 0$ ゆえに，$\mathrm{rank}_A\, \Omega_{A/k} < \infty$。よって，$\Omega_{A/l[\underline{x}]}$ は，有限 A 加群であり，NAK より $\Omega_{A/l[\underline{x}]} = 0$。また，$l[\underline{x}] \longrightarrow A$ は正則であるから，結局 A は $l[\underline{x}]$ 上 etale である。■

定理の証明の続き。　(1) $ch(k)=0$ のとき。A^h は A 上 etale ゆえ，補題より，A^h は $l[\underline{x}]$ 上 etale，よって，$l\langle\underline{x}\rangle$ 上不分岐。A^h は整域だから，A^h は $l\langle\underline{x}\rangle$ 上代数的。さて，K' を l を含む $\hat{A}$ の係数体とし，次の可換な図形を考える：

$$\begin{tikzcd}
K'\langle\underline{x}\rangle \arrow[r] & \hat{A} \\
l\langle\underline{x}\rangle \arrow[r] \arrow[u] & A^h \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ここに，$K'\langle\underline{x}\rangle$ は $l\langle\underline{x}\rangle$ 上代数的であり，$\widehat{K'\langle\underline{x}\rangle}\cong\widehat{A^h}\cong\hat{A}$。しかも，$K'\langle\underline{x}\rangle$，$A^h$ ともに excellent ゆえに，[3, (44.1) Theorem] より，いずれの環も $\hat{A}$ 内で代数的に閉じている。よって，$A^h=K'\langle\underline{x}\rangle$。逆に，$k$ が K に含まれる A の D-有限な部分体であり，l が k を含む A の準係数体，K' が l を含む $\hat{A}$ の係数体であるとする。$\underline{y}=\{y_1,\dots,y_n\}$ を A の正則巴系とし，次の可換な図形を考える：

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] & A^h=K\langle\underline{x}\rangle \arrow[r] & \hat{A} \\
k \arrow[r] & l[\underline{y}] \arrow[r] \arrow[u] & l\langle\underline{y}\rangle \arrow[r] \arrow[u] & K'\langle\underline{y}\rangle \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{tr.deg}_k K'=\mathrm{tr.deg}_k K=\mathrm{tr.deg}_k l$ ゆえに，A^h，$K'\langle\underline{y}\rangle$ ともに $l\langle\underline{y}\rangle$ 上代数的。しかも，$\hat{A}\cong\widehat{K\langle\underline{x}\rangle}\cong\widehat{K'\langle\underline{y}\rangle}$ ゆえ

に，[3，(44,1) Theorem] より，$A^h=K'\langle \underline{y}\rangle$。よって $\ell\subseteq K$ としてよい。さて，A^h は A 上 etale ゆえに $\Omega_{A/\ell[\underline{y}]}\otimes_A A^h\cong\Omega_{A^h/\ell[\underline{y}]}$ 。$A^h=K\langle\underline{y}\rangle$ は $\ell[\underline{y}]$ 上 etale ゆえに，$\Omega_{A^h/\ell[\underline{y}]}=0$ 。従って，$\Omega_{A/\ell[\underline{y}]}=0$ 。さらに，$\ell[\underline{y}]\longrightarrow A$ は正則であるから，結局，A は $\ell[\underline{y}]$ 上 etale。よって，A は k 上順滑になる。

(2) $ch(k)=p>0$ のとき。補題より，$\Omega_{A/\ell[\underline{x}]}=0$ 。従って，A は整域ゆえに，$Q(A^p[\ell,\underline{x}])=Q(A)$ 。さて，A は $\ell[\underline{x}]$ 上正則だから，$A^p\otimes_{\ell^p[\underline{x}^p]}\ell[\underline{x}]\cong A^p[\ell,\underline{x}]$ であり，[2，(6,14,1)] より，$A^p[\ell,\underline{x}]$ は整閉整域である。A は $A^p[\ell,\underline{x}]$ 上整であるから，結局，$A=A^p[\ell,\underline{x}]$ である。逆は，容易に従う。∎

系1、2　定理の条件のもとで，K が k を含む $\hat{A}$ の係数体であるとする。このとき，

(1) $ch(k)=0$ のとき，$A\subseteq K\langle\underline{x}\rangle$ 。

(2) $ch(k)=p>0$ のとき，$A\subseteq\bigcap_m K^{p^m}[[\underline{x}]][K]$ 。

系の (1)，(2) の右辺はいずれも，K 上順滑な正則局所環で，その完備化は $\hat{A}$ に一致することも，示すことができる。

§2. $A[[X_1,\cdots,X_n]]$ の A 上の I-順滑性

[4] において，A が体を含むとき，$A[[X_1,\cdots,X_n]]/J$ の型の環の A 上の順滑性を考察している。ここでは，A が必ずしも体を含まないとき，$A[[X_1,\cdots,X_n]]$ の A 上の I-順滑性について得られた結果を述べる。$\underline{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$ とおく。

まず，$I=0$ のときは，[4, Theorem 2.2] の自然な拡張が可能である。

定理 2.1　次は同値である。

(1) $A[[X_1,\cdots,X_n]]$ は，ある $n\geq 1$ について，A 上順滑。

(2) $A[[X_1,\cdots,X_n]]$ は，任意の $n\geq 1$ について，A 上順滑。

(3) $ch(A)>0$ かつ $ch(A)$ の任意の素因数 p について，A/pA は，有限 $(A/pA)^p$ 加群。

証明は略す。∎

次に，I が A の元で生成されているときは，次の結果を得る。

定理 2.2　$ch(A)>0$，かつ，$\mathfrak{a}$ が A のイデアルで $rad(A)$ に含まれるとする。さらに，A が N-環，すなわち，A の任意の

局所環の任意の形式的ファイバーが幾何学的に被約であるとする。このとき，次は同値である。

(1) $A[[\underline{X}]]$ は A 上 $\mathfrak{n}A[[\underline{X}]]$-順滑.

(2) $A[[\underline{X}]]$ は A 上 順滑。

証明は略すが，手法は [4, Theorem 2.2] の証明に類似している。∎

最後に，I が必ずしも A の元で生成されていないとき。結果を述べる前に，まず，[4] における次の定義に注意する。

定義　環 A が SC を満たすとは，任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ に対し，次のいずれかが成立していることを言う：

(1) $ch(A/\mathfrak{m}) = 0$ 。

(2) $ch(A/\mathfrak{m}) = p > 0$ かつ $[A/\mathfrak{m} : (A/\mathfrak{m})^p] = \infty$ 。

但し，$\mathrm{Max}(A)$ の元によって，剰余体の標数は異なってよいものとする。

この定義は，さほど窮屈なものではない。なぜなら，標数 0 の体を含む環はすべて SC であるし，局所環の場合は，そ

の剰余体の条件でSCか，そうでないかが決まるからである。

すると，次の定理を得る。

定理2,3　Aが SCを満たすネター環で，I が $A[[\underline{X}]]$ のイデアルであるとする。このとき，$A[[\underline{X}]]$ が A上 I-順滑であれば，$\dim A[[\underline{X}]]/I \leqq \dim A$ である。

証明（第1段）Aが体のとき。$A = K$ とおく。Iを含む任意の素イデアル P が $(\underline{X})$ に一致することを示せばよい。そこで，ある $P \in \mathrm{Spec}(K[[\underline{X}]])$ について，$I \subseteq P$ であるが，$P \neq (\underline{X})$ とする。$R = K[[\underline{X}]]/P$ は完備局所環だから，K上解析的に独立な Rの元 $\underline{y} = \{y_1, \cdots, y_r\}$ が存在して，R は有限 $K[[\underline{y}]]$ 加群になる。そこで，体の準同型 $K \longrightarrow K((\underline{y})) \longrightarrow L = Q(K[[\underline{X}]]/P)$ に対し，次の完全系列を得る：

$$H_1(K((\underline{y})), L, L) \longrightarrow \Omega_{K((\underline{y}))/K} \otimes_{K((\underline{y}))} L$$
$$\longrightarrow \Omega_{L/K} \longrightarrow \Omega_{L/K((\underline{y}))} \longrightarrow 0$$

ここに，1番目，4番目の加群は，いずれも L上有限生成である。さらに，K は SCを満たし，$\dim R > 0$ だから，容易に，$\mathrm{rank}_L \Omega_{K((\underline{y}))/K} \otimes_{K((\underline{y}))} L = \infty$ が従う。従って，$\mathrm{rank}_L \Omega_{L/K} = \infty$。一方，$K[[\underline{X}]]$ は K上 P-順滑だから，

§1の補題の証明と同様にして，$\mathrm{rank}_L \Omega_{L/K} < \infty$ であることが分かる。これは矛盾である。よって，$P = (\underline{X})$。

（第2段） A が一般の SC を満たすネター環のとき。$M \in \mathrm{Max}(A[[\underline{X}]])$ に対し，$M \cap A = m$ とおけば，$M = (m, \underline{X})A[[\underline{X}]]$ であり，（第1段）より $\sqrt{I + mA[[\underline{X}]]} = M$ 。よって，I の元 g_i で $g_i = X_i^t + f_i$ ，$f_i \in mA[[\underline{X}]]$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たすものが存在する。これより容易に $\dim A[[\underline{X}]]_M / IA[[\underline{X}]]_M \leqq \dim A_m$ であることが従う。よって結論が従う。∎

系　上の定理の条件のもとで，I が $(\underline{X})$ に含まれる素イデアルであるとする。このとき，$I = (\underline{X})$ である。

§3　問題

この節では，いくつかの問題を挙げる。

まず，定理2,1 より $A[[\underline{X}]]$ が A 上順滑であれば，任意の $m \in \mathrm{Max}(A)$ について，$A_m[[\underline{X}]]$ は A_m 上順滑であることが分かる。では，その逆は，果たして成立するだろうか。この問題については，次のことが証明できる。

定理 3.1　任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ について，$A_{\mathfrak{m}}[[\underline{X}]]$ は $A_{\mathfrak{m}}$ 上順滑であるとする。このとき，次は，同値である。

(1)　$A[[\underline{X}]]$ は A 上順滑である。

(2)　$A[[\underline{X}]]$ は G-ring である。

従って，上記問題を考えるためには，次の問題を考察すればよい。

問題　A が $ch(A) = p > 0$ のネター環で，任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ について，$[A/\mathfrak{m} : (A/\mathfrak{m})^p] < \infty$ であるとする。このとき，A が G 環であれば，$A[[\underline{X}]]$ も G-環になるか。

これは，A. Grothendieck によって出された問題の特別な場合である。その問題には，西村純一さんによって，反例が存在することが示されたが，それは我々の条件を満たしていない。又，もし，上のことが正しければ，定理 2.1 より，次のことが従う：

$ch(A) = p > 0$ で，任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ に対し，$A_{\mathfrak{m}}$ が有限 $A_{\mathfrak{m}}^p$ 加群であれば，A も有限 A^p 加群になる。

次の問題として，ネター環 A に対して，$\mathcal{L}_A(A[[\underline{X}]]) =$

$\{P \in \mathrm{Spec}(A[[\underline{X}]]) \mid A[[\underline{X}]]$ は A 上 P-順滑$\}$ を完全に求めることがある。[5, §4] においては，$\dim A = 1$ のネター局所環 $(A, \mathfrak{m})$ に対して，$\mathcal{L}_A(A[[\underline{X}]])$ を考察している。その結果たとえば，次の定理，

定理 3.2　A が SC を満たす $\dim A = 1$ の整域で，ある準係数体 k に対し，$\mathrm{rank}_{Q(A)}\, \Omega_{Q(A)/k} < \infty$ とする。このとき，$\mathcal{L}_A(A[[\underline{X}]]) = \{(\underline{X}), (\mathfrak{m}, \underline{X})\}$ 。

を得る。さらに，$\mathcal{L}_A(A[[\underline{X}]])$ のある条件を満たす素イデアルと，$\hat{A}$ の A 上の順滑性との関連も考察されている。$\hat{A}$ の A 上の順滑性については，[4] で考察されているから，$\mathcal{L}_A(A[[\underline{X}]])$ については，ある程度のことは分かる。しかし，完全に求めるまでには，まだ程遠いのが現状です。

参考文献

[1]　A.Brezuleanu and N.Radu, Excellent rings and good separation of the module of differentials, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 23 (1978), 1455 - 1470.

[2]　A.Grothendieck, Éléments de Géométrie Algébrique, Ch.

IV, Publ. IHES no. 20 (1964), no. 24 (1965), no. 32 (1967).

[3] M.Nagata, Local Rings, Interscience, (1962).

[4] H.Tanimoto, Some characterizations of smoothness, to appear.

[5] H.Tanimoto, Smoothness of noetherian rings, to appear.

Analytically unramified local ring について

広島大・理　伊藤史朗

Analytically unramified local ring $(A, \mathfrak{m})$ の ideal $\mathfrak{a}$ については $\overline{\mathfrak{a}^{n+s}} \subseteq \mathfrak{a}^n$ $(\forall n \geq 0)$ となる自然数 s の存在が知られている。($\overline{\mathfrak{a}}$ は ideal $\mathfrak{a}$ の integral closure.) このような s で最小のものは ideal $\mathfrak{a}$ の何らかの性質を表現していると考えられる。そこで A の parameter ideal $\mathfrak{q}$ に対し

$$r(\mathfrak{q}) = \inf\{ r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \overline{\mathfrak{q}^{n+r}} \subseteq \mathfrak{q}^n \quad \forall n \}$$

$$\delta(\mathfrak{q}) = \inf\{ r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \overline{\mathfrak{q}^{n+r}} = \mathfrak{q}^n \overline{\mathfrak{q}^r} \quad \forall n \}$$

で $r(\mathfrak{q})$, $\delta(\mathfrak{q})$ を定める。$r(\mathfrak{q})$ 及び $\delta(\mathfrak{q})$ の"分布"は A の性質を表わしていると考えられる。

*　*　*

まず $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ についての $r(\mathfrak{q})$, $\delta(\mathfrak{q})$ を考えよう。minimal reduction の存在を保証しておくために A は infinite field k を含み自然に $k \xrightarrow{\sim} A/\mathfrak{m}$ であるとしておく。比較のために $\mathfrak{m}$ の min. reduction $\mathfrak{q}$ の reduction exponent を $\inf\{s \mid \mathfrak{m}^{n+s} = \mathfrak{q}^n \mathfrak{m}^s \ \forall n\}$ と定めておく.

<u>Example</u> 1. $A = k[[y, x_1, \dots, x_d]]/(y^2 - f)$, $f \in k[[x_1, \dots, x_d]]$, $\mathrm{ord}(f) \geq 2$, $\mathfrak{q} = (x_1, \dots, x_d)A$ のとき, $r(\mathfrak{q}) = \delta(\mathfrak{q}) = [\mathrm{ord}(f)/2]$. 又, $\mathfrak{q}$ の reduction exponent は $\mathrm{ord}(f)$ に関係なく 2.

<u>Example</u> 2. $R = \sum_{n \geq 0} R_n$ が homog. graded ring ($R_0 = k$ = 体) のとき R が reduced であれば $A = R_M$ ($M = R_+$) は analytically unramified となる。Q を M の minimal reduction とすると, $r(QA) = \delta(QA) =$ Q の reduction exponent である。従って $R = k[t^4, t^3 s, ts^3, s^4]$, $M = R_+$, $Q = (t^4, s^4)R$, $A = R_M$ を考えると, $r(QA) = \delta(QA) = 2$.

さて 定義よりすぐにわかるように, $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ で $r(\mathfrak{q}) = 0$ (又は $\delta(\mathfrak{q}) = 0$) なるものの存在と A が regular であることとは同値である。さらに次の 3 条件は同値である。

(1) $r(\mathfrak{q}) = 1$ となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在する.

(2) $\delta(\mathfrak{q}) = 1$ 〃

(3) $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在し, さらに各 $\mathfrak{m}^n$ は integrally closed.

(1) $\Leftarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3) は明らかである. (1) $\Rightarrow$ (3) の略証を与えておく. $\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{m}$ の minimal reduction であることから $\mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ かつ $\mathfrak{q}^n \cap \overline{\mathfrak{m}^{n+1}} \subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$ ($\forall n$) である。従って $\overline{\mathfrak{m}^{n+1}} \subseteq \mathfrak{q}^n \cap \overline{\mathfrak{m}^{n+1}}$

$\subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$. 故に $\overline{\mathfrak{m}^{n+1}} = \mathfrak{m}^{n+1}$ $\forall n$.

上記の結果を使うと, $d = \dim A = 1$ のとき, $r(\mathfrak{q}) = 1$ となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在する必要十分条件は $\mathfrak{m}\overline{A} = \mathfrak{m}$ ($\overline{A}$ は $Q(A)$ での A の integral closure) であることが簡単に証明できる.

同様の特徴付けを CM, $d = \dim A = 2$, $e = e(A) = 2$ 又は 3 の場合にも考えたい.

* * *

以後しばらく $(A, \mathfrak{m})$ は (analytically unramified) C-M local ring, $d = \dim A = 2$ とする. 又 $r(\mathfrak{q}) = 1$ となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在すると仮定する.

$e = e(A) = 2$ であれば Example 1 より ($\operatorname{char} k \neq 2$ としておけば)

$$\hat{A} \cong k[[x, y, z]]/(z^2 - f)$$

$$f \in k[[x, y]], \quad \operatorname{ord}(f) = 2 \text{ 又は } 3$$

である。

$e = 3$ の場合は少々繁雑であるが次のようになる.

$\hat{A} \cong k[[x, y, z, w]]/I$, ただし I は

$$\begin{pmatrix} c_2 & w - c_3 & z \\ w & z - b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad (b_i, c_i \in R = k[[x, y]]) \text{ の } 2 \times 2 \text{ 小行列}$$

式で生成された ideal で b_i, c_i は以下のいずれかの条件をみたす.

(a) $o(c_2)=1$, $o(c_3)\geqq 2$, $o(b_2)=1$, $o(b_3)\geqq 2$

(b) 〃 〃 $o(b_2)\geqq 2$, $o(b_3)=1$

(c) 〃 〃 $o(b_2)\geqq 2$, $o(b_3)=2$

(d) $o(c_2)=o(c_3)=1$, $o(b_2)\geqq 2$, $o(b_3)=2$

(e) 〃 , $o(b_2)\geqq 2$, $o(b_3)=1$ かつ (*)

(f) 〃 , $o(b_2)=1$, $o(b_3)\geqq 2$ かつ (*)

(g) 〃 , $o(b_2)=o(b_3)=1$ かつ (*)

(h) $o(c_2)\geqq 2$, $o(c_3)=1$, $o(b_2)=1$, $o(b_3)\geqq 2$

(i) 〃 〃 , $o(b_2)\geqq 2$, $o(b_2)=2$.

(e), (f), (g) に現われる条件 (*) とは:

$$\bar{\ } : (x,y)R \longrightarrow (x,y)R/(x,y)^2R \hookrightarrow \sum (x,y)^nR/(x,y)^{n+1}R = G_0$$

を自然な写像としたとき,

(*) $W^3-\bar{c}_3W^2+\bar{b}_2\bar{c}_2W-\bar{b}_3\bar{c}_2^2\ (\in G_0[W])$ が G_0 に重根をもたないか又は、もし重根 $\bar{\alpha}$ ($\alpha\in(x,y)\in R$) をもてば $\mathrm{ord}(\alpha^3-c_3\alpha^2+b_2c_2\alpha-b_3c_2^2)=4$.

一応略証を与えておく. $r(q)=1$ なる m の min. reduction をとり $q=(x,y)A$, $R=k[[x,y]]$ とおくと $\hat{A}=$

$k[[x,y,z,w]]/I$, I は $\begin{pmatrix} c_2 & w-c_3 & z \\ w & z-b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ の 2×2 小行列式 ideal で b_i, c_i は (*)を除く (a)〜(i) のいずれかの条件をみたしていることが簡単にわかる。逆に $\hat{A}$ がそのような ring であるとき いつ $r(q)=1$ ($q=(x,y)A$) となるかを考えればよい。
$\mathcal{R}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} m^n t^n$, $S=\sum_{n\in\mathbb{Z}} (x,y)^n R t^n$, $\mathfrak{z}=uS$ ($u=t^{-1}$) とおくと $r(q)=1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_{\mathfrak{z}}$ は int. closed が証明できる。(h)(i) のときは直接 $\mathcal{R}_{\mathfrak{z}}$ が int. closed であることを示し, その他の場合は次の補題に帰着される。

<u>補題</u>. (S, uS) を DVR, $R=S[W]/(W^3-aW^2-bW-c)$ $(a,b,c\in S)$ のとき R が int. closed $\Leftrightarrow$ $\alpha\in S$ が mod uS で W^3-aW^2-bW-c の重根であれば $\mathrm{ord}(\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha-c)=1$.

* * *

A の filtration $\{\overline{m^n}\}$ は $H^d_m(A)$ の filtr. $\{F^n H^d_m(A)\}$ を導き, これによって $a(A)=\sup\{n \mid F^n H^d_m(A)\neq 0\}$ なる量が定義される ([W]). 一般に $a(A)\leq r(q)-d$ であって, A が CM であれば $a(A)=r(q)-d$ となる。特に A が CM であれば $r(q)$ は m の minimal reduction q の選び方によらないことがわかる。

又, A が rational sing. であれば (ある条件をみたす) 任意の filtration について $a(A)<0$ ([W]) である。ところが

Example 1 をみるとわかるように $a(A)<0$ なる filtr. (今の場合 $\{\overline{m^n}\}$) が存在しても rational とは限らないことがわかる.

References

[W] K. Watanabe Filtered Rings & Filtered Blow-up について. 第3回可換環セミナー報告集 (1981年)

[S] J. Shah Stability of two-dimensional local rings I, Invent Math. 64 (1981) 297-343

Balanced big Cohen-Macaulay module の局所化について

神戸大・教養　竹内康滋

以下において，A は局所環，M は A-module (not necessarily f.g.) である。

定義　M は big Cohen-Macaulay (C.-M.) with respect to (w.r.t.) system of parameters (s.o.p.) $\underbrace{}_{}$ $a_1, a_2, \dots, a_d$ である $\underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $a_1, a_2, \dots, a_d$ は M-sequence をなす。

M が有限生成のとき
「M が big C.-M. w.r.t. some s.o.p. $\Rightarrow$ M は big C-M. w.r.t. each s.o.p.」が成立するが，M が有限生成でないときには，このことは成り立たない。そこで Sharp はつぎの定義をした。

定義　M は balanced big C.-M. である $\underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$

M は big C-M. w.r.t. each s.o.p.

自然な問題としてつぎのものが考えられる。

問題： M が balanced big C-M. A-module のとき，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$ について $M_{\mathfrak{P}}$ は balanced big C-M. $A_{\mathfrak{P}}$-module となるか。

この問題の答えは"否"である。そこで Sharp は supersupport の概念を導入した。

定義 balanced big Cohen-Macaulay A-module M に対して

$$\mathrm{Supersupp}(M) \underset{\mathrm{Def}}{=} \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(M/(a_1, \cdots, a_r)M) \text{ for some } M\text{-sequence } a_1, \cdots, a_r\}$$

1981年に Sharp はつぎの予想を立てた。

Sharp's conjecture： balanced big C-M. A-module M について，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Supersupp}(M)$ ならば $M_{\mathfrak{P}}$ は balanced big C-M. $A_{\mathfrak{P}}$-module である。

1982年に Sharp 自身，Cousin complex を用いて，A が catenary local domain のとき，

このconjectureを肯定的に解決している。ところでAがもう少し一般の場合でも肯定的であることを我々は示し得た。我々結果はつぎのようである。

<u>Theorem 1.</u> Aはcatenary local ringで、Mはbalanced big C-M. A-moduleである。このとき、$\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$について

$M_{\mathfrak{P}}$がbalanced big C-M. $A_{\mathfrak{P}}$-moduleである

$\Longleftrightarrow$ parameter ideal Q for $A_{\mathfrak{P}}$が存在して, $M_{\mathfrak{P}} \neq QM_{\mathfrak{P}}$

<u>Cor.</u> 局所環がcatenaryのとき, Sharp's conjectureは肯定的である。

以下に Theorem 1 の証明の概略を述べる。Aおよび Mは Theorem 1 のものである。

<u>Lemma 0</u> (Sharp). $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \{\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \dim A/\mathfrak{z} = \dim A\}$.

<u>Lemma 1.</u> $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$, $x \in \mathfrak{P}$ のとき,

$x/1$ $(\in A_{\mathfrak{p}})$ が subsystem of parameters (s.s.o.p.) for $A_{\mathfrak{p}}$ ならば，x は non-zero divisor on $M_{\mathfrak{p}}$

証．$\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$ $(\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A))$ なら，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$．$M$ の balanced 性より，$\dim A/\mathfrak{q} = \dim A$．$A$ の catenary 性より $\dim A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$．これより明らか．

Lemma 2 (Sharp). $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$ に対して，$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$ をすべての prime ideal in $\mathrm{Ass}(M)$ で，$\mathfrak{P}$ に含まれているものとする。$\mathfrak{q}_i$-primary component of (0) in A を q_i とすれば，$(\bigcap_{i=1}^{s} q_i) M_{\mathfrak{p}} = 0$.

証明はつぎの論文を参照せよ。

R.Y. Sharp: Cohen-Macaulay properties for balanced big Cohen-Macaulay modules, Proc. Camb. phil. Soc. (1981) 90.

Lemma 2 もそうであるが，つぎの lemma も catenary の仮定は不要である

Lemma 3. $\mathfrak{P} \in \mathrm{Supp}(M)$，$x \in \mathfrak{P}$ のとき，

z が non-zero divisor on $M_{\underline{P}}$ ならば, $a \in \mathrm{Ann}_A(M_{\underline{P}})$ があって, $z+a$ が s.s.o.p. for A となる。

証. $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s$ を all prime ideals in $\mathrm{Ass}(M)$ で, $\mathfrak{p}_i \subseteq \underline{P}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ なるものとする. このとき $\dim A/\mathfrak{p}_i = \dim A$. そこで $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s, \mathfrak{p}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{p}_t$ を all prime ideals in A with $\dim A/\mathfrak{p}_i = \dim A$ とします。q_i を $\mathfrak{p}_i$-primary component of (0) in A とするとき, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{s} q_i$ とおく. Lem. 1 より $\mathfrak{a} M_{\underline{P}} = 0$. $zA + \mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$ だから, $a \in \mathfrak{a}$ があって, $z+a \notin \bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$. $z+a$ が s.s.o.p. for A となる。

<u>Theorem 2.</u> M は balanced big C-M. module over a catenary local ring A. $\underline{P} \in \mathrm{Supp}(M)$ のとき $z_1/1, z_2/1, \cdots, z_r/1$ が s.s.o.p. for $A_{\underline{P}}$ with $M_{\underline{P}} \neq (z_1, \cdots, z_r)M_{\underline{P}}$ $(z_i \in \underline{P})$ ならば, $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \underline{P}$ が存在して

1) $z_1+a_1, \cdots, z_r+a_r$ は s.s.o.p. for A をなす

2) $a_j(M_{\underline{P}}/(z_1+a_1, \cdots, z_{j-1}+a_{j-1})M_{\underline{P}}) = 0$ $(j=1,2,\cdots,r)$

をみたす。

証. $r=1$ のときは Lem. 3 より明らかである。$r>1$ として, r の帰納法で示す。$a_1, \cdots, a_{r-1}$

は存在したとする。$z_1' = z_1 + a_1, \ldots, z_{r-1}' = z_{r-1} + a_{r-1}$, とおく、さらに $\mathfrak{a} = a_1 A + \cdots + a_{r-1} A$ とおく。

$\mathfrak{z}_1^0, \ldots, \mathfrak{z}_k^0, \mathfrak{z}_1^1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell^1$ を all ~~prime~~ elements in $\mathrm{Ass}_A(A_{\mathfrak{p}}/(z_1', \ldots, z_{r-1}')A_{\mathfrak{p}})$ such that $\dim A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{z}_i^\varepsilon A_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - r + 1$ $(\varepsilon = 0, 1)$ $z_r \in \mathfrak{z}_i^0$, $z_r \notin \mathfrak{z}_j^1$ とする。このとき $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{z}_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. よって $\mathfrak{a} \cap (\bigcap_j \mathfrak{z}_j^1) - \bigcup_i \mathfrak{z}_i^0$ の元 a_r' に対して、$z_r' = z_r + a_r'$ とおくと、z_r' は s.s.o.p. for $A_{\mathfrak{p}}/(z_1', \ldots, z_{r-1}')A_{\mathfrak{p}}$ となる。Lem. 1 より z_r' は non-zero divisor on $M_{\mathfrak{p}}/(z_1', \ldots, z_{r-1}')M_{\mathfrak{p}}$ である。Lem. 3 を用いて、$a_r'' \in \mathrm{Ann}_A(M_{\mathfrak{p}}/(z_1', \ldots, z_{r-1}')M_{\mathfrak{p}})$ が存在して、$z_r' + a_r''$ は s.s.o.p. for $A/(z_1', \ldots, z_{r-1}')$ をなす。$a_r' + a_r''$ を a_r であらわすと、$a_1, a_2, \ldots, a_r$ は求めるものである。

Theorem 1 は Theorem 2 から明らかであろう。

<u>Corollary</u> M は balanced big C-M. module over a catenary local ring A. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ について $M_{\mathfrak{p}}$ が balanced big C-M. $A_{\mathfrak{p}}$-module $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supersupp}(M)$.

証 $\Leftarrow$)、 Cor. to Theorem 1 そのものである。

$\Rightarrow$)、 s.o.p. $z_1/1, z_2/1, \ldots, z_r/1$ for A_P ($z_i \in A$) に対して、 $PA_P \in \mathrm{Ass}(M_P/(z_1, \ldots, z_r)M_P)$ は $M_P \neq (z_1, \ldots, z_r)M_P$ よりとられる。 Theorem 2 より、 $a_1, \ldots, a_r \in P$ が存在して、 $z_1+a_1, \ldots, z_r+a_r$ は s.s.o.p. for A で、 $M_P/(z_1, \ldots, z_r)M_P = M_P/(z_1+a_1, \ldots, z_r+a_r)M_P$ となる。 よって、 $P \in \mathrm{Ass}(M/(z_1+a_1, \ldots, z_r+a_r)M_P)$、 ゆえに $P \in \mathrm{Supersupp}(M)$.

今回の松村英之先生の講演を聞いてわかったこと、およびその後にわかったことを付け加えさせていただくと

M が balanced big C-M. module over a local ring A のとき、

(1) $\mathrm{Supp}(M) = \{ \mathfrak{g} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{Ann}(M) \leq \mathfrak{g} \}$

(2) A が catenary のとき $\mathrm{Supersupp}(M) = \mathrm{supp}(M)$ (small support)

$\mathrm{End}(K_A)$ と K_A の存在について

愛媛大・理　青山陽一
日大・文理　後藤四郎

昨年の第4回シンポジウムで，canonical module の自己準同型環の Cohen-Macaulay 性に関する結果を与えたが，ここでは (quasi-) Gorenstein 性の問題を考える。(§1)　§2では，canonical module の存在についての局所コホモロジーが有限生成（次元以外で）である局所環の場合の結果を述べる。

§1.　この節では $(A, \mathfrak{m})$ を canonical module K を持つ局所環とし，$H = \mathrm{End}_A(K)$ とおく。$\mathscr{G}_A = \mathrm{Im}(K \otimes_A \mathrm{Hom}_A(K, A) \to A)$ とおく。$\mathscr{G}_A$ は一意的に定まる A の ideal である。[1, Corollary 4.3] により，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K)$ に対し $(\mathscr{G}_A)_{\mathfrak{p}} = \mathscr{G}_{A_{\mathfrak{p}}}$ である。

Proposition ([2, Proposition 3.3] cf. [4, Korollar 6.20]).

A quasi-Gorenstein 環 (i.e. $K \cong A$) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{J}_A = A$.

Corollary ([2, Corollary 3.4]). $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(K)$ に対し，$A_\mathfrak{p}$ quasi-Gorenstein 環 $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathcal{J}_A$. 従って，$\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$ のとき，$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_\mathfrak{p}$ quasi-Gorenstein$\}$ は open set である。

Corollary ([2, Corollary 3.5]). A Gorenstein 環 $\Longleftrightarrow$ K Cohen-Macaulay かつ $\mathcal{J}_A = A$.

以下この節では，$\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$ とする。（これは，$\mathrm{ann}_A(K) = 0$ と同値。）

$Z = A :_A H$ とおく。K は自然に H-module であるから，$\mathcal{J}_A$ は H の ideal でもあり，従って

$$\mathcal{J}_A \subseteq Z$$

である。もちろん，$\mathcal{J}_A = Z$ とは限らない。

Proposition ([2, Proposition 3.9]). H quasi-Gorenstein 環 $\Longrightarrow$ $\mathcal{J}_A = Z$.

この Proposition の逆は成立しない。

Example ([2, Example 3.10]). k を体，x, y を不定元とし，$B = k[[x^6, x^9, x^2y, x^5y, xy^2, y^3]]$, $\mathfrak{n} = B$ の極大 ideal，$R = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3]]$，$L = (x^2y, xy^2)R$ とおく。R は 2 次元の Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環で，L は R の canonical module である。R は有限生成 B-module で $B:_B R = \mathfrak{n}$ である。従って，$L = (x^2y, x^5y, xy^2)B$ は B の canonical module で，$R \cong \mathrm{End}_B(L)$ である。([2, Corollary 1.7]) $y/x, x^4/y \in \mathrm{Hom}_B(L, B)$ であるから，$\mathfrak{g}_B = \mathfrak{n}$ がすぐ判る。

§2. この節では，$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元の局所環とする。次の定理を証明するのが，この節の目的である。

Theorem. $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ は $i \neq d$ に対し有限生成とするとき，次は同値である。

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b)　A は dualizing complex を持つ。

(c)　A は canonical module を持つ。

(a)⇒(b)⇒(c) は一般の局所環に対し，よく知られている。（[5] 参照）

Proof of (c)⇒(b)：　K を A の canonical module とし，$I^{\cdot}$ を K の minimal injective resolution とする。$E^{\cdot} = H^0_{\mathfrak{m}}(I^{\cdot})$，$J^{\cdot} = I^{\cdot}/E^{\cdot}$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し，$K_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module で（[1, Corollary 4.3]），$A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay であるから，$J^i \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=i} E_A(A/\mathfrak{p})$ for $i<d$，$J^i = 0$ for $i \geqq d$ である。（[4, Satz 6.1]）

まず，$d \geqq 2$ の場合をやる。

$\operatorname{depth} K \geqq 2$ であるから $E^0 = 0$，$E^1 = 0$ である。

complex の完全列 $0 \to E^{\cdot} \to I^{\cdot} \to J^{\cdot} \to 0$ より長完全列 $\cdots\to H^{i-1}(I^{\cdot}) \to H^{i-1}(J^{\cdot}) \to H^i(E^{\cdot}) \to H^i(I^{\cdot}) \to H^i(J^{\cdot}) \to H^{i+1}(E^{\cdot}) \to \cdots$ を得る。$H^0(I^{\cdot}) = K$，$H^i(I^{\cdot}) = 0$ for $i \neq 0$，$H^i(E^{\cdot}) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(K)$，$H^0_{\mathfrak{m}}(K) = 0$，$H^1_{\mathfrak{m}}(K) = 0$ であるから，$H^0(J^{\cdot}) \cong K$，$H^i(J^{\cdot}) \cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(K)$ for $i>0$ である。[6, (1.5)] より，$i \neq d$ に対し $H^i_{\mathfrak{m}}(K)$ は有限

生成であるから，$H^i(J^\cdot)$は$i<d-1$で有限生成である。完全列 $0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(A) \to A \xrightarrow[h]{nat.} Hom_A(K,K) \to Coker(h) \to 0$ に $Hom_A(\ ,E_A(A/\mathfrak{m}))$を作用させて，完全列 $0 \to C \to H^d_{\mathfrak{m}}(K) \to E_A(A/\mathfrak{m}) \to U \to 0$ を得る。$H^0_{\mathfrak{m}}(A)$, $Coker(h)$は共に長さ有限であるから，C, U も共に長さ有限である。$H^{d-1}(J^\cdot) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(K) \to E_A(A/\mathfrak{m})$ より $J^{d-1} \to E_A(A/\mathfrak{m})$ を得る。そこで，

$$D^\cdot = \quad 0 \to J^0 = D^0 \to J^1 = D^1 \to \cdots \to J^{d-1} = D^{d-1} \to E_A(A/\mathfrak{m}) = D^d \to 0$$

とする。$H^i(D^\cdot) \cong H^i(J^\cdot)$ for $i<d-1$, $H^{d-1}(D^\cdot) \cong C$, $H^d(D^\cdot) \cong U$ である。従って，$D^\cdot$はAの fundamental dualizing complex である。([5] 参照)

$d=1$の場合をやろう。

depth $K>0$であるから，$E^0=0$である。$d \geq 2$の場合と同様にして，complexの完全列

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
0 & \to & J^0 \cong \bigoplus_{ht\,\mathfrak{p}=0} E_A(A/\mathfrak{p}) & \to & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & J^0 = 0 & \longrightarrow & J^1 \cong E_A(A/\mathfrak{m})^{\mu_1} & \longrightarrow & J^2 \cong E_A(A/\mathfrak{m})^{\mu_2} & \longrightarrow & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

を得る。完全列 $0 \to H^0_{\mathfrak{m}}(A) \to A \xrightarrow{nat.} Hom_A(K,K) \to 0$ より，完全列 $0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(K) \to E_A(A/\mathfrak{m}) \to U \to 0$ ($U = Hom_A(H^0_{\mathfrak{m}}(A), E_A(A/\mathfrak{m}))$) を得る。ここで，U は長さ有限である。また完全列 $0 \to K \to J^0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(K) \to 0$ がある。従って，$J^0 \to E_A(A/\mathfrak{m})$ を得る。そこで，$D^{\cdot} = \ 0 \to J^0 = D^0 \to E_A(A/\mathfrak{m}) = D^1 \to 0$ とする。$H^0(D^{\cdot}) \cong K$，$H^1(D^{\cdot}) \cong U$ である。従って，$D^{\cdot}$ は A の *fundamental dualizing complex* である。

Q. E. D. for (c) ⇒ (b).

(b) ⇒ (a) には次の Lemma を使う。

Lemma ([3, §10]). $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty$ *for* $i \neq d$, *depth* $A > 0$ とすると，Rees 環 $\mathcal{R}(A,\mathfrak{a}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{a}^i$ が *Cohen-Macaulay* となる様な $\mathfrak{m}$-準素 *ideal* $\mathfrak{a}$ が存在する。

Proof of (b) ⇒ (a): *depth* $A > 0$ の場合。

Lemma で言う様な $\mathfrak{a}$ をとる。$\mathcal{R}(A,\mathfrak{a})$ は A 上有限生成だから *dualizing complex* を持ち，*Cohen*－

macaulay であるから，Gorenstein 環の準同型像であり，従ってAもそうである。

depth $A=0$ の場合。

$(0)=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t\cap\mathfrak{q}$ を，$\dim A/\mathfrak{q}_i=d\ (i=1,\dots,t)$，$\mathfrak{q}$ $\mathfrak{m}$-準素 ideal なる準素分解とし，$U=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t\ (=H^0_{\mathfrak{m}}(A))$ とおく。A/U はAと同じ仮定を満たし，depth $A/U>0$ であるから，A/U は Gorenstein 局所環 R の準同型像である。$A/\mathfrak{q}$ は artinian だから Gorenstein 局所環 S の準同型像である。ここで，$\dim R=\dim S=d$ としてよい。$\varphi: R\oplus S\longrightarrow A/U\oplus A/\mathfrak{q}$ とし，$B=\varphi^{-1}(A)$ とする。B は環であり，次の可換図形を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & R\oplus S & \longrightarrow & R\oplus S/B & \longrightarrow & 0 \quad (ex.)\\
 & & \Downarrow & & \Downarrow\varphi & & \wr\Downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/U\oplus A/\mathfrak{q} & \longrightarrow & A/U+\mathfrak{q} & \longrightarrow & 0 \quad (ex.)
\end{array}$$

$\ell(A/U+\mathfrak{q})<\infty$ であるから，$R\oplus S$ は B 上有限生成加群となり，B は noether 環となる。従って，B は $\mathfrak{n}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ を極大 ideal とする局所環である。B はAと同じ仮定を満たし，depth $B>0$ で，canonical module を持つから，Gorenstein 環の準

同型像であり，従ってAもそうである。

Q.E.D. for (b)⇒(a).

最後に，Sharp の予想「dualizing complex を持てば，Gorenstein 環の準同型像である」([5]) について判っていることを少し述べておこう。

(小駒)　環の次元が2以下なら，予想は正しい。

(後藤)　局所環の場合，次元が4以下なら，予想は正しい。

条件 (S_2) を仮定して予想が正しければ，予想は正しい（だろう）。

他にも色々と条件を付けると判ることがあるのだが，省略する。

文　献

[1] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983) 85 - 94.

[2] Y. Aoyama and S. Goto, On the endomorphism ring of the canonical module, Preprint.

[3] S. Goto and K. Yamagishi, The theory of unconditioned strong d-sequences with applications to rings and modules possessing finite local cohomology, in preparation.

[4] J. Herzog, E. Kunz et al., Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[5] R.Y. Sharp, Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra, Sem. Alg. Dubreil 1977/8, Lect. Notes Math. 740, 213 - 229, Springer Verlag.

[6] N. Suzuki, Canonical duality for Buchsbaum modules, Preprint.

正準加群のイデアル化のBuchsbaum性について

東京理科大学大学院　山岸規久道

1. 序.　A はNoether局所環とし，$d = \dim A > 0$ で，$\mathfrak{m}$ はその極大イデアルとする。A の正準加群を ― それが存在するとき ― K_A で表わす。以下，K_A は存在するものと仮定する。(正準加群については [1] を参照。)

有限生成 A-加群 M のイデアル化を $A \ltimes M$ で表わす。イデアル化 $A \ltimes M$ とは A-加群 $A \oplus M$ に積 $(a, x) \cdot (b, y) = (ab, ay + bx)$ で環構造を持たせたものである [3]。このイデアル化 $A \ltimes M$ のBuchsbaum性に関する議論は前回軽井沢において報告されているが [6]，本稿の目的はその報告を補充する次の定理を紹介することであ

る。

定理を簡潔に述べるために，記号を一つ用意しよう。A のイデアル $\mathfrak{a}$ において，$\mathfrak{a}$ の非混合成分を $U_A(\mathfrak{a})$ で表わす。すなわち，

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A/\mathfrak{a}} I(\mathfrak{p})$$

を $\mathfrak{a}$ のある極小準素分解とすれば，

$$U_A(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A/\mathfrak{a} \\ \dim A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{a}}} I(\mathfrak{p})$$

である。もちろん $U_A(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の準素分解の取り方に依らない。また，特に $\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_s)$ ならば，これを単に $U_A(a_1, \cdots, a_s)$ と書く。

さて，我々は次を得る。

<u>定理</u>. A は Buchsbaum 環でかつ任意の A のパラメーター系 $a_1, a_2, \cdots, a_d$ に対して，

$$U_A(a_1,\cdots,a_{d-1}) \cdot U_A(a_2,\cdots,a_d) = (a_1,\cdots,a_{d-1}) \cdot U_A(a_2,\cdots,a_d) + (a_2,\cdots,a_d) \cdot U_A(a_1,\cdots,a_{d-1})$$

とする。 このとき，正準加群 K_A のイデアル化 $A \ltimes K_A$ は Buchsbaum 環である。

この定理は [6] の中で述べられている3次元での結果 —— 定理 (2.3) —— の一部を高次元の場合に拡張したものである。

以下，A は Buchsbaum 環とする。

2. 定理の証明.

まず，正準加群 K_A は $d\ (=\dim A > 0)$ 次元の Buchsbaum A－加群であることに注意する（[4] および [5]）。

<u>補題</u>（[6, (1.2)]）. M は d 次元 Buchsbaum A－加群とする。イデアル化 $A \ltimes M$ が Buchsbaum 環であるための必要十分条件は，すべての A の部分パラメーター系 $a_1, a_2, \cdots, a_{d-1}$ に対して，

$$\mathfrak{U}_A(a_1, \cdots, a_{d-1}) \cdot M = (a_1, \cdots, a_{d-1}) M$$

が成立することである。

従って，もし A が Cohen-Macaulay 環（あるいは，M が Cohen-Macaulay A-加群）であるならば，$A \ltimes M$ は自動的に Buchsbaum 環になる。また，A 自身のイデアル化 $A \ltimes A$ が Buchsbaum 環になるのは，A がもともと Cohen-Macaulay 環であるときに限ることも容易にわかる。

<u>定理の証明</u>． 一般に $\widehat{M}$ で A-加群 M の完備化を表わせば，$A \ltimes K_A$ が Buchsbaum 環であることと $\hat{A} \ltimes K_{\hat{A}}$ がそうであることとは同値なので，$A = \hat{A}$（すなわち，A は完備である）としてよい。従って，$K_A = \mathrm{Hom}_A(H_{\mathfrak{m}}^d(A), E_A(A/\mathfrak{m}))$．

証明は次元 d に関する帰納法による。$d \leqq 2$ ならば，K_A は Cohen-Macaulay A-加群であるから，補題より，主張を得る。よって，$d \geqq 3$ とし，$d-1$ 以下の次元

では定理は正しいものと仮定する。再び補題より，定理の証明のためには，$a_1, a_2, \cdots, a_{d-1}$ を A の任意の部分パラメーター系とするとき，包含関係

$$\mathfrak{U}_A(a_1, \cdots, a_{d-1}) \cdot K_A \subset (a_1, \cdots, a_{d-1}) K_A$$

が成り立つことを示せば十分である。

そこで，$b \in \mathfrak{U}_A(a_1, \cdots, a_{d-1})$，$f \in K_A$ とする。$A' = A/a_1 A$ とおくと，A-加群からなる完全系列

$$(\#) \quad 0 \to H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A) \xrightarrow{\lambda} H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A') \xrightarrow{\tau} H^{d}_{\mathfrak{m}}(A) \xrightarrow{a_1} H^{d}_{\mathfrak{m}}(A) \to 0$$

を得る。$f' = f \circ \tau$ とおくと，A' は $d-1$ 次元の Buchsbaum 環で定理の仮定を満たすから，d に関する帰納法の仮定より，A' と $K_{A'}$ は Buchsbaum 環である。従って，$bf' \in (a_2, \cdots, a_{d-1}) K_{A'}$ となり，すなわち適当な元 $f'_j \in K_{A'}$ $(2 \leqq j \leqq d-1)$ によって

$$bf' = a_2 f'_2 + \cdots + a_{d-1} f'_{d-1}$$

と表現される。このとき，[5] と同様の議論により，我々は次の Claim を得る。

Claim. $f'_j \circ \lambda = 0 \quad (2 \leqq j \leqq d-1)$.

$E = E_A(A/\mathfrak{m})$ は単射的 A − 加群であり (#) は完全系列であるから，各 $2 \leqq j \leqq d-1$ に対して，$f'_j = h_j \cdot \tau$ となる元 $h_j \in K_A = \mathrm{Hom}_A(H^d_{\mathfrak{m}}(A), E)$ が選べる。h_j の取り方から，明らかに

$$(bf - \sum_{j=2}^{d-1} a_j h_j) \cdot \tau = 0 .$$

再び E の単射性と (#) の完全性から，元 $h_1 \in K_A$ で

$$bf - \sum_{j=2}^{d-1} a_j h_j = a_1 h_1$$

となるものが取れる。従って，

$$bf = \sum_{i=1}^{d-1} a_i h_i$$

となり，すなわち $bf \in (a_1, \cdots, a_{d-1}) K_A$ である。

3. 例.

R は Cohen − Macaulay 局所環で $\dim R > 0$ とし，さらに K_R は存在するものとする。そして，M は Buchsbaum R − 加群で $\dim M = \dim R$ とする。今，

$$A = R \ltimes M$$

とおく。　すると，A はBuchsbaum環で K_A を持ち，K_A のイデアル化 $A \ltimes K_A$ はまたBuchsbaum環である（[6, (3.2)]）。

<u>証明.</u>　A がBuchsbaum環であることは補題より直ちにわかる。　また，K_A を有することも明らか。　$d = \dim A$ $(= \dim R)$ とおく。　$d \leqq 2$ なら，$A \ltimes K_A$ は明らかにBuchsbaum環であるから，$d \geqq 3$ とする。　A の任意のパラメーター系 $a_1, a_2, \cdots, a_d$ を取り，

$$a_i = (r_i, x_i)$$

$(1 \leqq i \leqq d)$ とおく。　すると，

$$U_A(a_1, \cdots, a_{i-1}) = (a_1, \cdots, a_{i-1})A + (0) \times [(r_1, \cdots, r_{i-1})M :_M r_i]$$

となることは容易に確かめられる $(1 \leqq i \leqq d)$.

$((0) \times M)^2 = (0)$ に注意すれば，明らかに

$$U_A(a_1, \cdots, a_{d-1}) \cdot U_A(a_2, \cdots, a_d) = (a_1, \cdots, a_{d-1})U_A(a_2, \cdots, a_d) + (a_2, \cdots, a_d)U_A(a_1, \cdots, a_{d-1})$$

が成立する。　よって，定理から，$A \ltimes K_A$ はBuchsbaum環である。

後記。　現在，以上の結果をまとめた論文[2]を準備中です。

References

[1] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 85-94.

[2] S. Goto and K. Yamagishi, Buchsbaum and quasi-Buchsbaum rings obtained by idealizations, in preparation.

[3] M. Nagata, Local rings, Wiley, New York/London, 1962.

[4] P. Schenzel, Applications of dualizing complexes to Buchsbaum rings, Ad. in Math., 44 (1982), 61-77.

[5] N. Suzuki, Canonical duality for Buchsbaum modules —— an application of Goto's lemma on Buchsbaum modules, in preprint.

[6] K. Yamagishi, Quasi-Buchsbaum rings obtained by idealizations, Proc. of the 4-th Symposium on Commutative Algebra in Japan (Karuizawa, 1982), 183-191.

$k[\![x_1, \cdots\cdots, x_n]\!]$, $k[\![x_1]\!][x_2, \cdots\cdots, x_n]$,
$k[\![x_1, \cdots\cdots, x_n]\!]_{x_1}$ について。

広大 理　　　　島田 勇治

主題は，$k[\![x_1, \cdots, x_n]\!]_{x_1}$ の maximal ideal は，complete intersection であることを示す。(i.e. regular sequence で生成される。)

Def. $(R, \mathfrak{m})$: a local ring
$f \in R[x]$ は，Weierstrass polynomial とは，
$f = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$, $a_i \in \mathfrak{m}$ $(i = 1, \cdots, m)$
となることをいう。

k : a field
$V(W) = \{ \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(k[\![x_1, \cdots\cdots, x_n]\!]) \mid \mathfrak{P} \ni {}^{\exists} f_{n-1}, \cdots, f_1$
$f_i \in k[\![x_1, \cdots, x_i]\!][x_{i+1}]$: Weierstrass polynomial $\}$
$V(W)_{x_1} = \{ \mathfrak{P} \in V(W) \mid \mathfrak{P} \not\ni x_1 \}$ とする。

Lemma

Let k : a field $R = k[\![x_1, \cdots, x_n]\!]$, $A = k[\![x_1]\!][x_2, \cdots x_n]$

φ : Spec $(R) \longrightarrow$ Spec (A) canonical map.

次が成り立つ。

i) for $^\forall \mathfrak{P} \in V(W)$, $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{P})) = \{\mathfrak{P}\}$

しかも，$\varphi(\mathfrak{P})R = \mathfrak{P}$.

ii) for $^\forall \mathfrak{P} \in V(W)_{x_1}$ $\mathfrak{P}R_{x_1}$; complete intersection.

proof

for $\mathfrak{P} \in V(W)$, $f_{n-1}, \cdots, f_1$ は定義のものとする。by Weierstrass Division Th.

$R/(f_{n-1}) \simeq k[\![x_1, \cdots, x_{n-1}]\!][x_n]/(f_{n-1})$

$k[\![x_1, \cdots, x_{n-1}]\!][x_n]/(f_{n-2}) \simeq \dfrac{k[\![x_1, \cdots, x_{n-2}]\!][x_{n-1}, x_n]}{(f_{n-2})}$

— — — — — — — — — — — — — — —

$k[\![x_1, x_2]\!][x_3, \cdots, x_n]/(f_1) \simeq A/(f_1)$

となり，これより，i) は，導かれる。

また，$A_{x_1} = k[\![x_1]\!]_{x_1}[x_2, \cdots, x_n]$ は，体上の多項式環となり，そして，$\varphi(\mathfrak{P})A_{x_1}$ は maximal ideal より $\varphi(\mathfrak{P})A_{x_1}$ は，complete intersection で，また，上の isomorphisms より $\mathfrak{P}R_{x_1}$ は，complete intersection となる。

Remark 上のRで, for $^\forall \mathfrak{P} \in V(W)$: $ht\,\mathfrak{P} \geq n-1$.

Th.

Rは, lemmaのものと同じとする。

for $^\forall \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R)$; $ht\,\mathfrak{P} = n-1$, $\mathfrak{P} \not\ni x_1$

$^\exists \sigma \in \mathrm{Aut}_k(R)$ s.t. $\sigma(x_1) = x_1$, $\sigma(x_n) = \sigma(x_n)$,

$\sigma(\mathfrak{P}) \in V(W)_{x_1}$. (ただし, $\mathrm{Aut}_k(R)$は, k-alg. としての自己同型の集合を表わすとする。)

Proof

次のことを使って証明する。

Def. Rは, Th.のものとする。

$f \in R$; regular in x_n of degree s とは,

$\mathrm{Ord}(f) = s \mod (x_1, \cdots, x_{n-1})$ となることをいう。

Weierstrass preparation Th.

$f \in R$; regular in x_n of degree s

$\Rightarrow$ $^{\exists 1}U$: unit $^\exists W$: a Weierstrass poly. in x_n of degree s (i.e, $W = x_n^s + W_1 x_n^{s-1} + \cdots + W_s$

$W_i \in (x_1, \cdots, x_{n-1})k[[x_1, \cdots, x_{n-1}]]$)

s.t. $W = Uf$

Lemma

for $0 \neq f \in R$, $^\exists \sigma \in \mathrm{Aut}_k(R)$ s.t. $\sigma(x_n) = x_n$

, $\sigma(f)$: regular in x_n

さらに、上の σ として、$\sigma(x_i) = x_i + x_n^{n_i}$ $i=1,\ldots,n-1$ の形にとれ、もし $\# k = \infty$ なら $\sigma(x_i) = x_i + a_i x_n$ $a_i \in k$ $i=1,\ldots,n-1$ の形でもとれる。

Th. の証明は、n に関する induction で示す。

$n=1$: clear.

$n>1$: $\mathfrak{P} \neq x_1 \Rightarrow \mathfrak{P} \ni {}^{\exists} f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x_1^i,\ f_0 \neq 0$

Lemma より ${}^{\exists}\tau \in \mathrm{Aut}_k(k[\![x_2,\ldots,x_n]\!])$ s.t. $\tau(x_n)=x_n$

$\tau(f_0)$: regular in x_n. $\sigma' \in \mathrm{Aut}_k(R)$: $\sigma'(x_1)=x_1$

$\sigma' | k[\![x_2,\ldots,x_n]\!] = \tau$ とすると、$\sigma'(f)$: regular in x_n $\Rightarrow$ Weierstrass preparation Th. より ${}^{\exists}u$: unit in R s.t. $u\,\sigma'(f)$: Weierstrass poly. in $k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!][x_n]$。$\sigma'(\mathfrak{P})$ を $\mathfrak{P}$ に代えても一般性を失わない。$\Rightarrow \mathfrak{P} \ni {}^{\exists} f_{n-1}$: Weierstrass poly. in $k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!][x_n]$ としてよい。

$\mathfrak{P} \cap k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!] = \mathfrak{q}$ とすると、

$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = n-2$ となり induction の仮定より、

${}^{\exists}\sigma'' \in \mathrm{Aut}_k(k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!])$ s.t. $\sigma''(x_1)=x_1$,

$\sigma''(\mathfrak{q}) \in V(W(k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!]))$.

$\Rightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}_k(R)$: $\sigma(x_n)=x_n$ $\sigma | k[\![x_1,\ldots,x_{n-1}]\!] = \sigma''$ とすれば

よい。

Cor. 1. R は、Th. のものと同じとする。

for $\forall P \in \mathrm{Max}(R_{x_1})$, P は、complete intersection となる。

Proof

for $\forall P \in \mathrm{Max}(R_{x_1})$, $\exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = n-1$ s.t. $P = \mathfrak{p}R_{x_1}$。この $\mathfrak{p}$ について Th. の σ と取ってやると、$\sigma(\mathfrak{p}) \in V(W)_{x_1}$、$\sigma$ は R_{x_1} の自己同型に拡張でき、最初の lemma より、$\mathfrak{p}R_{x_1}$ は、complete intersection になる。

Cor. 2.

k, R は上のものと同じ、$A = k[x_1][x_2, \dots, x_n]$

$\varphi : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ canonical map とする。

for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = n-1$, $\mathfrak{p} \not\ni x_1$,

$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$, しかも $\varphi(\mathfrak{p})R = \mathfrak{p}$.

Proof

上の $\mathfrak{p}$ について Th. の σ として、$\sigma|A \in \mathrm{Aut}_k(A)$ となるものがとれる。

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\sigma} & R \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\sigma|A} & A \end{array}$$

と、最初の lemma より導かれる。

Remark

上の $\mathfrak{q}$ の minimal generator として A の中からとれる。$B = A(x_1, \ldots, x_n)$ とし、$\mu(\mathfrak{a})$ は、ideal $\mathfrak{a}$ の minimal generator の元の個数を表わすとすると。$\mu(\mathfrak{q}) = \mu(\varphi(\mathfrak{q})B)$ となり

$$\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid ht\,\mathfrak{q} = n-1,\ \mathfrak{q} \ni x_1\} \xrightarrow{\text{canonical}}$$

$$\{\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(B) \mid ht\,\mathfrak{Q} = n-1,\ \mathfrak{Q} \ni x_1\}$$ は、

bijective となる。

Cor, 3。

Let k : a field $R = k[\![x, y, z]\!]$

for ${}^{\forall}\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$; $ht\,\mathfrak{q} = 2$,

$\Rightarrow$ $(x, y \pm z^r) \cap \mathfrak{q}$: set-theoretic complete intersection for ${}^{\forall}r \gg 0$

Proof

Th. の σ として、$\sigma(x) = x$ $\sigma(z) = z$

$\sigma(y) = y \pm z^r$ $({}^{\forall}r \gg 0)$ の形でとれる。

$\Rightarrow$ $\mathfrak{q} \in V(W)_x$ としてよい。($\because$ if $x \in \mathfrak{q}$, 上の主張は、成立する。) $\mathfrak{q}R_x$ の minimal generator

f, g として、$f = y^m + f_1 y^{m-1} + \cdots + f_m$

$\in k[\![x]\!][y]$ Weierstrass poly.

を取れる。 ($g \in k[[x]][y, z]$)

$\Rightarrow (x, y) \cap \mathfrak{p} = \sqrt{(f, xg)}$ となる。

References

1. E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg, 1979.

2. T. Y. Lam, Serre's Conjecture, Lecture Note in Math. No. 635, Springer, 1978.

3. O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra (Vol. II), Van Nostrand.

On the length of ideals in Artinian local rings.

Takeshi ISHIKAWA (Tokyo Metro. Univ.)

Introduction

Let R be an Artinian local ring with the maximal ideal $\underline{M}$. It is well known that R is Gorenstein if and only if $l(\underline{A}) + l(0:\underline{A}) = l(R)$ for each ideal $\underline{A}$ of R, where $0:\underline{A}$ denotes the annihilator of $\underline{A}$ and $l(M)$ denotes the length of an Artinian R-module M. In general we can say nothing about which is greater $l(\underline{A}) + l(0:\underline{A})$ or $l(R)$, equivalently $l(R/0:\underline{A})/l(\underline{A})$ is smaller than 1 or not.

In this note we will consider the value

$$T(\underline{A}) = T_R(\underline{A}) = l(R/0:\underline{A})/l(\underline{A})$$

for a non zero ideal $\underline{A}$ of R (for convinience we set $T(0) = 1$) and at first will give the upper bound and the lower bound of this value. That is, we have

$$1/r(\underline{A}) \leqq T(\underline{A}) \leqq r(\underline{A})$$

where $r(\underline{A})$ is the dimension of the socle of $\underline{A}$ as a vector space over the residue field $R/\underline{M}$, that is

$$r(\underline{A}) = \dim_{R/\underline{M}}((0:\underline{M}) \cap \underline{A}) = l((0:\underline{M}) \cap \underline{A}) .$$

As the set of values $T(\underline{A})$ is finite, we set

$$T(R) = \operatorname{Max} T(\underline{A})$$

where $\underline{A}$ runs over all ideals of R. Then from the above inequality obviously we have

$$1 \leqq T(R) \leqq r$$

where r is the type of the local ring R, that is $r = l(0:\underline{M})$

the dimension of the socle of R . And it will be proved that $T(R) = 1$ if and only if $r = 1$, that is R is Gorenstein. We will give an example which shows that the above inequality is best possible in a sense.

In the rest of the note we will study about when $T(R) = 1$ or $T(\underline{A}) \leqq 1$ for which $\underline{A}$.

Throughout of this note R will denotes an Artinian local ring with the maximal ideal $\underline{M}$.

1. Main Theorem.

At first we note the following

REMARK.

(1) It is well known that $T(\underline{A}) = 1$ for each ideal $\underline{A}$ of R if and only if R is Gorenstein ([1]).

(2) When $\underline{A}$ is principal, obviously we have $T(\underline{A}) = 1$.

(3) If $\underline{A}$ is contained in the socle of R , $T(\underline{A}) = 1/l(\underline{A}) \leqq 1$.

Now we will prove the following

THEOREM 1. Let $r = l(0:\underline{M})$. Then we have

(1) $1/r \leqq T(\underline{A}) \leqq r$ for each ideal $\underline{A}$ of R , and hence $1 \leqq T(R) \leqq r$.

(2) $T(R) = r$ if and only if $r = 1$ that is R is Gorenstein .

PROOF. It is well known that r is equal to the number of irreducible component of (0) . (f.g. [2]) So we have $(0) = \bigcap_{i=1}^{r} \underline{Q}_i$, where $\underline{Q}_i$ is an irreducible ideal of R . Then we have an embedding

$$\underline{A} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} (\underline{A} + \underline{Q}_i)/\underline{Q}_i \, .$$

Hence,

$$l(\underline{A}) \leqq \sum_{i=1}^{r} l((\underline{A} + \underline{Q}_i)/\underline{Q}_i)$$

As $\overline{R} = R/\underline{Q}_i$ is Gorenstein, we have $l_R((\underline{A} + \underline{Q}_i)/\underline{Q}_i) = l_{\overline{R}}(\overline{\underline{A}}) = l_{\overline{R}}(\overline{R}/(\overline{0}:\overline{\underline{A}})) = l_R(R/(\underline{Q}_i:\underline{A})) \leqq l_R(R/(0:\underline{A}))$. Thus we have

$$l(\underline{A}) \leqq r\, l(R/(0:\underline{A})) \quad \text{and} \quad 1/r \leqq T(\underline{A}) .$$

On the other hand, from $(0) = \bigcap_{i=1}^{r} \underline{Q}_i$, we also have $(0:\underline{A}) = \bigcap_{i=1}^{r} (\underline{Q}_i:\underline{A})$ and an embedding

$$R/(0:\underline{A}) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} R/(\underline{Q}_i:\underline{A}) .$$

So we have

$$l(R/(0:\underline{A})) \leqq \sum_{i=1}^{r} l(R/(\underline{Q}_i:\underline{A})) .$$

Since $\overline{R}$ is Gorenstein, similarly as above $l(R/(\underline{Q}_i:\underline{A})) = l((\underline{A} + \underline{Q}_i)/\underline{Q}_i) = l(\underline{A}/(\underline{A} \cap \underline{Q}_i)) \leqq l(\underline{A})$ and $l(R/(0:\underline{A})) \leqq r\, l(\underline{A})$. Hence we get $T(\underline{A}) \leqq r$.

Next, to prove the second assertion, let $T(R) = 1$, that is, there exists an ideal $\underline{A}$ of $T(\underline{A}) = r$. Then for this $\underline{A}$, equality must hold in the above inequality $l(R/(0:\underline{A})) \leqq \sum_{i=1}^{r} l(R/(\underline{Q}_i:\underline{A})) \leqq r\, l(\underline{A})$. Thus $R/(0:\underline{A}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} R/(\underline{Q}_i:\underline{A})$. Since R is local, we must have $r = 1$, Which completes the proof .

In the above Theorem we can estimate $T(\underline{A})$ more precisely as follows.

THEOREM 2. <u>Let</u> $r(\underline{A}) = l((0:\underline{M}) \cap \underline{A})$. <u>Then we have</u>

$$1/r(\underline{A}) \leqq T(\underline{A}) \leqq r(\underline{A}) .$$

PROOF. Let $R^* = R/(0:\underline{A}) \ltimes \underline{A}$ be the idealization of $R/(0:\underline{A})$-module $\underline{A}$. Then R^* is also an Artinian local ring with the maximal ideal $\underline{M}^* = \underline{M}/(0:\underline{A}) \ltimes \underline{A}$. Let $\underline{A}^* = \overline{0} \ltimes \underline{A}$. Then easily we have $0^*:\underline{A}^* = \underline{A}^*$ and $T_{R^*}(\underline{A}^*) = T_R(\underline{A})$. And furthermore we have $0^*:\underline{M}^* = \bar{0} \ltimes ((0:\underline{M}) \cap \underline{A})$. Thus we get the result by Theorem 1 .

COROLLARY 3. *If* $r(\underline{A}) = 1$, *then we have* $T(\underline{A}) = 1$.

For an Artinian R-module M we define

$T_R(M) = l(R/(0:M))/l(M)$.

Then we also have

COROLLARY 4. *Let* $r(M) = l((0:\underline{M})_M)$ *be the dimension of the socle of* M . *Then*

$1/r(M) \leqq T_R(M) \leqq r(M)$.

PROOF. Let $R^* = R \ltimes M$, $\underline{M}^* = \underline{M} \ltimes M$, $M^* = 0 \ltimes M$. Then we have $(0^*:M^*) = (0:M) \ltimes M$, $T_{R^*}(M^*) = T_R(M)$ and $r_{R^*}(M^*) = r(M)$. Thus we obtain the result by Theorem 2 .

Now we will give an example which shows that the inequality in Theorem 1 is best possible in a sense . That is, we will show that for any integer $r \geqq 2$ and any small number $e > 0$, there exists an Artinian local ring of type r and $r - e <$ $T(R) < r$.

EXAMPLE 5. Let K be a field, $X_i^{(k)}$, Y_i $(i=1,\ldots,n\,;$ $k=1,\ldots,r)$ be indeterminates and

$R = K[X_i^{(k)}, Y_i \mid 1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq r]/I = K[x_i^{(k)}, y_i]$

where $I = (X_i^{(k)} \mid 1 \leqq i \leqq n, 1 \leqq k \leqq r)^2 + (Y_1,\ldots,Y_n)^2 + (X_i^{(k)}Y_j \mid 1 \leqq i \neq j \leqq n,$ $1 \leqq k \leqq r) + (X_i^{(k)}Y_i - X_j^{(k)}Y_j \quad 1 \leqq i,j \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq r)$, and $x_i^{(k)}$, y_i are the images of $X_i^{(k)}$, Y_i respectively . Then R is an Artinian local ring with the maximal ideal $\underline{M} = (x_i^{(k)}, y_i)$. We have $\underline{M}^2 = (x_1^{(1)}y_1,\ldots,x_1^{(r)}y_1)$ and $\underline{M}^3 = (0)$ and $l(R) =$

$rn + n + r + 1$. And since $(0:\underline{M}) = \underline{M}^2$, $l(0:\underline{M}) = r$. Now let $\underline{A} = (y_1, \ldots, y_n)$. Then we have $(0:\underline{A}) = \underline{A}$ and $\underline{MA} = \underline{M}^2$, so we have $l(\underline{A}) = l(0:\underline{A}) = n + r$. Therefore $T(\underline{A}) = (rn + 1)/(r + n)$ $= r - \{(r^2 - 1)/(r + n)\}$. Thus we obtain the desired example , taking n sufficiently large .

2. <u>When</u> $T(\underline{A}) \leqq 1$?

In this section we will consider when $T(R) = 1$ or for which $\underline{A}$, $T(\underline{A}) \leqq 1$. Of course $T(R) = 1$ does not imply that R is Gorenstein (following Example 7) .

First, we give an easy proposition .

PROPOSITION 6. *For an ideal* $\underline{A}$ *of* R , *if there exists an* $a \in \underline{A}$ *such that* $(0:\underline{A}) = (0:a)$, *then* $T(\underline{A}) \leqq 1$.

PROOF. $T(\underline{A}) = l(R/(0:\underline{A}))/l(\underline{A}) = l((a))/l(\underline{A}) \leqq 1$.

EXAMPLE 7. Let K be a field, $X_1, \ldots, X_n$ be indeterminates and $R = K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)^m = K[x_1, \ldots, x_n]$. Then , for any $f \in R$, we have $(0:f) = (x_1, \ldots, x_n)^{m-k}$ for some k . Hence for any ideal $\underline{A} = (f_1, \ldots, f_t)$ of R , $(0:\underline{A}) = \bigcap_{i=1}^{t} (0:f_i)$ $= (0:f_s)$ for some s . So we have $T(R) = 1$ by the above Proposition , and obviously R is not Gorenstein for $m, n \geqq 2$.

Now let K , $X_1, \ldots, X_n$ be as above , $\underline{M} = (X_1, \ldots, X_n)$ a maximal ideal of $K[X_1, \ldots, X_n]$ and $\underline{Q}$ an $\underline{M}$-primary ideal generated by monomials of X_i's . And let $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\underline{Q} = K[x_1, \ldots, x_n]$. Can we say $T(R) = 1$? Unfortunately we can not say so . Even for graded ideals of $\underline{A}$ of R we have the case of $T(\underline{A}) > 1$ (following Example 10 due to S.Endo). But for ideals

$\underline{A}$ of R generated by monomials of x_i's , we have $T(\underline{A}) \leqq 1$ as following.

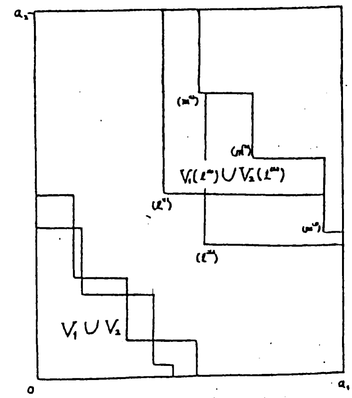
PROPOSITION 8. *Let* R *be the ring as above* $\underline{A}$ *be an ideal generated by monomials of* x_i's . *Then* $T(\underline{A}) \leqq 1$.

PROOF. Let $S = K[X_1,\dots,X_n]/(X_1^{a_1},\dots,X_n^{a_n}) = K[x_1,\dots,x_n]$ and we can write $R = S/B$ and $\underline{A} = A/B$, where $A = (M_1,\dots,M_r)$ is an ideal of S generated by monomials M_i's of x_i's and $B = (N_1,\dots,N_s)$ is an ideal of S generated by monomials N_j's of x_i's in A . Let $V = \{(l) = (l_1,\dots,l_n) \mid l_i \in N \cup \{0\},\ 0 \leqq l_i \leqq a_i\}$ and $M_i = x_1^{(l^{(i)}{}_1)} \cdots x_n^{(l^{(i)}{}_n)} = x^{(l^{(i)})}$, $(l^{(i)}) = (l^{(i)}{}_1,\dots,l^{(i)}{}_n) \in V$. Then $l(A) = \#\{(l) \in V \mid x^{(l)} \in A\} = \#\left[\bigcup_{i=1}^{r}\{(l) \in V \mid (l^{(i)}) \leqq (l)\}\right]$, where $(b) \leqq (c)$ means $b_i \leqq c_i$ for $i = 1,\dots,n$. Let $N_j = x^{(m^{(j)})}$, $j = 1,\dots,s$, and we have $x^{(l)}M_i \in (N_1,\dots,N_s)$ $\Leftrightarrow$ $x^{(l)}M_i \in (N_j)$ for some j $\Leftrightarrow$ $(l) + (l^{(i)}) \geqq (m^{(j)})$ for some j . Thus we have $l(S/(B:A)) = l(S) - l((B:A)) = l(S) - l(\bigcap_{i=1}^{r}(B:M_i)) = \#(V) - \#\left[\bigcap_{i=1}^{r}\{(l) \in V \mid (l) + (l^{(i)}) \geqq (m^{(j)})\text{ for some } j\}\right] = \#\left[\bigcup_{i=1}^{r}\{(l) \in V \mid (l) + (l^{(i)}) \ngeq (m^{(j)})\text{ for each } j\}\right]$. On the other hand $l(\underline{A}) = l(A) - l(B) = \#\left[\bigcup_{i=1}^{r}\{(l) \in V \mid (l) \geqq (l^{(i)})\text{ for some } i \text{ and } (l) \ngeq (m^{(j)}) \text{ for each } j\}\right]$. Since $T_R(\underline{A}) = l(R/(0:\underline{A}))/l(\underline{A}) = l(S/(B:A))/l(A/B)$, to prove $T_R(\underline{A}) \leqq 1$ we have only to prove the following

LEMMA 9. *For* $V_i = \{(l) \in V \mid (l) + (l^{(i)}) \ngeq (m^{(j)})$ *for each* $j\} \subset V$, *we have* $\#\{V_1 \cup \dots \cup V_r\} \leqq \#\{V_1(n^{(1)}) \cup \dots \cup V_r(n^{(r)})\}$ *for each* $(n^{(k)})$, *where* $V_i(n^{(i)}) = \{(l) + (n^{(i)}) \in V \mid (l) \in V_i\}$.

PROOF. We may assume $r = 2$ without loss of generality.

Lookig at the section by X_1X_2-plain, we may also assume $n = 2$. Then the assertion is obvious. (c.f. Figure).



EXAMPLE 10.(S.Endo). Let $R = K[X,Y,Z,W]/(X^2,Y^2,Z^2,W^2,XZ,XW,YZ,YW) = K[x,y,z,w]$, and $\underline{A} = (x+z,\ y+w)$. Then $l(\underline{A}) = 4$ and $l(0:\underline{A}) = 2$ and $l(R) = 7$. So $T(\underline{A}) = 5/4 > 1$.

T.H.Gulliksen [3] proved that $l(R) \leqq l(M)$ for any finitely generated faithful R-module M if dimension of the socle of R is not greater than 3 . Hence we have $T(\underline{A}) \leqq 1$ if $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{A})) \leqq 3$. Here we will give an elementary (but essentially same as his) proof of this fact and get his result as its corollary.

First, we prove a

LEMMA 11. *Let* $\underline{A}' \subset \underline{A}$ *be ideals of* R *such that* $T_{R/\underline{A}'}(\underline{A}/\underline{A}') \leqq 1$ *and* $T_R(\underline{A}') \leqq 1$. *Furthermore if* $T_{R/(0:\underline{A})}((0:\underline{A}')/(0:\underline{A})) \geqq 1$ (*or* $T_{R/(0:\underline{A})}((\underline{A}':\underline{A})/(0:\underline{A})) \geqq 1$), *then we have* $T_R(\underline{A}) \leqq 1$.

PROOF. $T_{R/(0:\underline{A})}((0:\underline{A}')/(0:\underline{A})) = l(R/((0:\underline{A}):(0:\underline{A}')))/l((0:\underline{A}')/(0:\underline{A})) = l(R/((0:(0:\underline{A}')):\underline{A}))/l((0:\underline{A}')/(0:\underline{A})) \leqq l(R/(\underline{A}':\underline{A}))/l((0:\underline{A}')/(0:\underline{A}))$. Thus we have $l((\underline{A}':\underline{A})/(0:\underline{A})) \leqq l(R/(0:\underline{A}'))$. (In another case we also have the same inequality as above by similar easy caliculation.) Therefore $l(\underline{A}) - l(R/(0:\underline{A})) = (l(\underline{A}/\underline{A}')-l(R/(\underline{A}':\underline{A}))) + (l(\underline{A}')-l(R/(0:\underline{A}'))) + (l(R/(\underline{A}':\underline{A}))-l((0:\underline{A}')/(0:\underline{A}))) \geqq 0$. Hence $T(\underline{A}) \leqq 1$.

THEOREM 12. *If* $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{A})) \leqq 3$, *then* $T(\underline{A}) \leqq 1$.

PROOF. If the assertion is not true, we can take an Artinian local ring R and an ideal $\underline{A}$ of R which is a counter example of minimal lehgth. If there exists $\underline{A}' \subset \underline{A}$ such that $(o:\underline{A}') = (0:\underline{A})$, then we have $T(\underline{A}) < T(\underline{A}')$. So we may assume that $(o:\underline{A}') \supset (0:\underline{A})$ for each $\underline{A}' \subset \underline{A}$. Furthermore we may assume that $(0;\underline{A}) \subset (\underline{A}':\underline{A})$ for any non-zero $\underline{A}' \subset \underline{A}$, by passing to $\overline{R} = R/\underline{A}'$. Now let $a_1, \ldots, a_d$ be a set of generators for $\underline{A}$ and $\underline{A}_i = (a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_d)$ for $i = 1, \ldots, d$. Then $(0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))/(0:\underline{A}) \neq 0$ and $\bigoplus_{i=1}^{d} (0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))/(0:\underline{A}) \hookrightarrow (0:\underline{AM})/(0:\underline{A}) = \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{A}))$. Therefore $d = \mu(\underline{A}) \leqq \dim\mathrm{Soc}(R/(0:\underline{A})) \leqq 3$. When $d = 1$, obviousely $T(\underline{A}) = 1$. If $d = 2$, then we have $\dim \mathrm{Soc}((0:a_1)/(0:\underline{A})) = 1$ (say) . Obviously $T_R((a_1)) = 1$ and $T_{R/(a_1)}(\underline{A}/(a_1)) = 1$, hence we have $T(\underline{A}) \leqq 1$ by the above Lemma . Now we may assume $d = 3$. In this case we have $\bigoplus_{i=1}^{3} (0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))/(0:\underline{A}) = (0:\underline{AM})/(0:\underline{A})$. On the other hand we have $\mathrm{Soc}(\underline{A}) = (0:\underline{M}) \cap \underline{A} = (0:\underline{AM})\underline{A}$. For, if $(0:\underline{M}) \cap \underline{A} = (0:\underline{AM})\underline{A} \oplus \underline{B}$ and $\underline{B} \neq (0)$, then $(0:\underline{A}) \subset (\underline{B}:\underline{A})$ and so there exists an $r \in (\underline{B}:\underline{A})$ and $r \notin (0:\underline{A})$. Hence $(0) \neq r\underline{A} \subseteqq \underline{B} \subsetneqq (0:\underline{M})$ and $r \in (0:\underline{AM})$. Therefore $(0) \neq r\underline{A} \subseteqq (0:\underline{AM})\underline{A} \cap \underline{B} = (0)$, which is a contradiction. Hence we have $\mathrm{Soc}(\underline{A}) = (0:\underline{AM})\underline{A} = \sum_{i=1}^{3}(0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))\underline{A} = \sum_{i=1}^{3}(0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))a_i = \sum_{i=1}^{3}(0:(\underline{A}_i + \underline{AM}))a = (0:\underline{AM})a$, where $a = a_1 + a_2 + a_3$, and we get an exact sequence

$$(0) \longrightarrow (0:((a)+\underline{AM}))/(0:\underline{A}) \longrightarrow (0:\underline{AM})/(0:\underline{A}) \xrightarrow{a} \mathrm{Soc}(\underline{A}) \longrightarrow (0)$$

Here, changing the set of generators for $\underline{A}$, we may take $a = a_1$. Then, since $(0:((a_1) + \underline{AM}))/(0:\underline{A}) \supseteqq (0:(\underline{A}_2+\underline{AM}))/(0:\underline{A}) \oplus (0:(\underline{A}_3+\underline{AM}))/(0:\underline{A})$, $\dim((0:((a_1)+\underline{AM}))/(0:\underline{A})) \geqq 2$, and hence we have $\dim \mathrm{Soc}(\underline{A}) = 1$. Therefore $T(\underline{A}) = 1$ by Cor.3, which completes the proof.

COROLLARY 13. (Gulliksen) *If* $\dim \mathrm{Soc}(R) \leqq 3$, *then we have* $l(R) \leqq l(M)$ *for every finitely generated faithful* R-*module* M.

PROOF. Let $R^* = R \ltimes M$ be the idealization of M and $M^* = (0) \ltimes M$ an ideal R^*. Since M is faithful, easily we have $\dim \mathrm{Soc}(R^*/(0:M^*)) = \dim \mathrm{Soc}(R)$ and $l(R)/l(M) = T_R(M) = T_{R^*}(M^*)$. Hence the assertion follows directly from Theorem 12.

3. Problems.

1) Do you have an example of Artinian local ring R such that $T(R) < T(R[X]/(X^2))$, where X is an indeterminate?

If $\underline{A} \subseteqq \underline{B}$ are ideals of R, $\underline{A} + \underline{B}x$ is an ideal of $R[x] = R[X]/(X^2)$ and it is easily seen that $\mathrm{Min}(T(\underline{A}), T(\underline{B})) \leqq T_{R[x]}(\underline{A} + \underline{B}x) \leqq \mathrm{Max}(T(\underline{A}), T(\underline{B}))$ and hence $T(R) \leqq T(R[x])$.

2) For a Noetherian local ring $(R, \underline{M})$ of dimension d, we also define the invariant $T(R)$ of R by $\mathrm{Sup}\, T(R/\underline{Q})$, where $\underline{Q}$ runs over all parameter ideals of R. Explor this invariant $T(R)$ of R. For example

(a) Is $T(R)$ always finite ? When $d = \dim R \leqq 3$, Goto-Suzuki [4] have shown that the type of R, that is $\mathrm{Sup}\, \mathrm{Type}(R/\underline{Q})$ where $\underline{Q}$ runs over all parameter ideals of R, is finite, and so we have $T(R)$ is finite if $d \leqq 3$.

(b) Characterize the local ring R of $T(R) = 1$.

Appendix

On a problem of N.V.Trung.

In the Problem Session at the 4-th Symposium on Commutative Algebra (Karuizawa,1982), N.V.Trung gave several problems. One of them was the following:

If $l(0:\underline{M}^2) > 2\cdot l(0:\underline{M})$, $\underline{M}$ contains no weakly regular element. Is the converse also true? (Problem 8,Proc. of Commntative Algebra, Karuizawa,Japan, 1982).

The condition $l(0:\underline{M}^2) > 2\cdot l(0:\underline{M})$ is same as $l((0:\underline{M}^2)/(0:\underline{M})) > l(0:\underline{M})$, that is , $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) > \dim \mathrm{Soc}(R)$. On the other hand, there exists an $a \in \underline{M}$ such that $(0:\underline{M}) = (0:a)$ if and only if $R/(0:\underline{M})$ can be embeded in R . Therefore his problem is the validity of the converse of the following trivial assertion : $R/(0:\underline{M}) \hookrightarrow R \Rightarrow \dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) \leqq \dim \mathrm{Soc}(R)$.

Of course, if $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) = 1$, $R/(0:\underline{M})$ is Gorenstein and so $(0:\underline{M})$ is irreducible, hence obviousely we have an $a \in \underline{M}$ such that $(0:\underline{M}) = (0:a)$. But if $\dim \mathrm{Soc}(R/(0;\underline{M})) \neq 1$, we can give an easy counter example as follows:

Let $R = K[X,Y]/(X^3,X^2Y,Y^3) = K[x,y]$. Then $(0:\underline{M}) = (x^2,xy^2)$ and $\dim \mathrm{Soc}(R) = \dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) = 2$, but $(0:\underline{M}) \subsetneqq (0:f)$ for each $f \in \underline{M}$. Because, let $f = ax + by + cxy + dy^2 + s$, $s \in (0:\underline{M})$, and if a or $b \neq 0$, $g = axy - by^2 \notin (0:\underline{M})$ and $g \in (0:f)$. If $a = b = 0$ and c or $d \neq 0$, then $h = dy - cx \notin (0:\underline{M})$ and $h \in (0:f)$. In other cases $f = s \in (0:\underline{M})$ and $(0:\underline{M}) \subsetneqq \underline{M} = (0:f)$.

We will give another example which is the case of $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) < \dim \mathrm{Soc}(R)$.

Let $R = K[X,Y]/(X^4, X^3Y, XY^3, Y^4) = K[x,y]$. Then we have $\dim \mathrm{Soc}(R/(0:\underline{M})) = 2 < \dim \mathrm{Soc}(R) = 3$ and $(0:\underline{M}) \subsetneqq (0:f)$ for each $f \in \underline{M}$. For, let $f \equiv ax + by$ ($\underline{M}^2$) and $h = ax^2y - bxy^2$. Then $h \in (0:f)$ and $h \notin (0:\underline{M})$ if a or b $\neq 0$. So if $(0:\underline{M}) = (0:f)$, $f \in \underline{M}^2$ and $x^2y \in (0:f)$, but $x^2y \notin (0:\underline{M})$, which is a contradiction.

References

[1] W.Gröbner, Uber Irreduzible Ideale in Kommutative Ringen, Math. Ann., 110 (1934).

[2] A.V.Geramita-C.Small, Introduction to Homological Methods in Commutative Rings, Queen's Papers in Pure and Applied Math., No. 43 (1976).

[3] T.H.Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand., 31 (1972).

[4] S.Goto-N.Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, To appiar in J. of Algebla.

Present Addres:

Department of Mathematics

Tokyo Metropolitan University

Fukazawa,Setagaya,Tokyo, 158.

次数付環の漸近的性質，擬平坦性と還元の理論

広大理学部　　大石　彰

0．序．　1954年に Northcott と Rees [8] によって創始された局所環のイデアルの還元（reduction）の理論は，重複度，イデアルの生成系の元の個数，Hilbert関数などを研究する上で重要な道具となっている．ネーター局所環 R のイデアル $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ の還元であるというのは，ある自然数 n に対して $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}$ が成り立つことであり，これは又，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{b}$ 上整，即ち $\mathfrak{a}$ の各元 x が $\mathfrak{b}$ 上の整方程式

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \quad c_i \in \mathfrak{b}^i$$

を満たすということで言い換えられる．更に $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{m}$-準素イデアルのときには

$e(\mathfrak{a})=e(\mathfrak{b})$と同値であることも知られている(Reesの定理，但しRは*quasi-unmixed*とする).
還元の理論では$\mathfrak{a}$の極小な還元$\mathfrak{b}$が重要である．$\mathfrak{b}$の最小生成系の元の個数は$\mathfrak{b}$の取り方によらず定まる量で，これを$\ell(\mathfrak{a})$と書き$\mathfrak{a}$のanalytic spreadという(但し，kは無限体とする)．$\ell(\mathfrak{a})=\dim G_{\mathfrak{a}}(R)\otimes_R k$と定義することもできる．$\ell(\mathfrak{a})$はイデアル$\mathfrak{a}$の重要な不変量である.
特異点の理論において重要な概念$\mathfrak{a}$に沿う正規平担性(*normal flatness*)より少し弱い$\mathfrak{a}$に沿う正規擬平担性(*normal pseudo-flatness*)という概念が広中により導入された．これは等式$\ell(\mathfrak{a})=ht(\mathfrak{a})$と同値でHerrmann, Orbanzらにより詳しく研究されている．例えばRが*quasi-unmixed*で$R/\mathfrak{p}$がregularであれば$\mathfrak{p}$に沿う正規擬平担性$\ell(\mathfrak{p})=ht(\mathfrak{p})$は$\mathfrak{p}$に沿う等重複度(*equimultiplicity*) $e(R)=e(R_{\mathfrak{p}})$と同値である．上のHerrmannとOrbanzの仕

事は，これを一般化して $l(\mathfrak{a}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{a})$ を Northcott と Wright による multiplicity symbol で特徴付けたものである．

又，Cowsik と Nori [2] は Cohen-Macaulay 環のイデアル $\mathfrak{a}$ が generically に完全交叉で，かつ R が $\mathfrak{a}$ に沿って正規擬平担ならば，$\mathfrak{a}$ は完全交叉であることを示し，特に正規擬平担性の条件は Burch と Brodmann の不等式

$$\begin{aligned} l(\mathfrak{a}) &\leqq \dim(R) - \operatorname{depth} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \quad \text{for all } n \gg 0 \\ &\leqq \dim(R) - \operatorname{depth} R/\mathfrak{a}^n \quad \text{for all } n \gg 0 \end{aligned}$$

により，$R/\mathfrak{a}^n$（又は $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$）が任意の $n \gg 0$ について Cohen-Macaulay であれば満たされることに注意した．ここで $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ が任意の $n \gg 0$ に対して CM という条件は，"無限個の $n \gg 0$ に対して $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ が CM" という形に弱めることができる．それは Cohen-Macaulay という性質が "漸近的な性質" であることによる．

この論文の目的は，以上の Northcott, Rees

によるイデアルの還元の理論を一般化した局所環 R 上の(斉次)次数付環 A の還元の理論を考え, A の analytic spread, A の擬平担性を定義し, 擬平担な次数付環の構造定理を示し, それを使った幾つかの応用を与えることである. 又, そのために擬平担性の判定条件及び一般の次数付加群の漸近的性質というものについても調べる.

1. 次数付加群の漸近的性質. 以下では R はネーター環, $A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ は homogeneous R-algebra (即ち, $A_0=R$, $A=R[A_1]$ を満たす) とし, $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ は有限生成次数付 A-加群を表わすものとする.

$\mathbb{Z}$ で定義された写像 f は十分大な n に対して $f(n)$ が一定であるとき, <u>安定</u>(stable) であるという.

定理 1. 次の不変量は安定である:

(1) $\mathrm{ann}_R(M_n)$

(2) $\mathrm{Supp}_R(M_n)$

(3) $\dim_R(M_n)$

(4) $\mathrm{grade}_R(M_n)$

(5) $\mathrm{Ass}_R(M_n)$

以下 R は局所環とする

(6) $\mathrm{depth}_R(M_n)$

(7) $\mathrm{hd}_R(M_n)$

(8) $\mathrm{id}_R(M_n)$.

証明. (1)：M は有限生成なので，十分大な n について $A_1M_n = M_{n+1}$，従って $\mathrm{ann}_R(M_n) \subset \mathrm{ann}_R(A_1M_n) = \mathrm{ann}_R(M_{n+1})$ となることから明白. (2), (3), (4) は (1) から分る. (5) は McAdam, Eakin [7] 参照. (6) は (5) を使って証明できる (Brodmann [1] にもある). (7)：十分大な n に対して $\mathrm{hd}_R(M_n) < \infty$ なら $\mathrm{hd}_R(M_n) = \mathrm{depth}(R) - \mathrm{depth}_R(M_n)$ なので (6) から明白. そうでなければ無限個の $n \geqslant 0$ に対して $\mathrm{hd}_R(M_n) = \infty$, 即ち $\mathrm{Tor}_r^R(M_n, k) \neq 0$,

$r = \mathrm{depth}(R)+1$. ここで $\mathrm{Tor}_r^R(M, k) = \bigoplus_n \mathrm{Tor}_r^R(M_n, k)$ が有限生成次数付 A-加群なので (1) より十分大な n に対して $\mathrm{Tor}_r^R(M_n, k) \neq 0$, 即ち $hd_R(M_n) = \infty$.

(8): 任意の n に対して $\dim_R(M_n) = d$ (一定) としてよい. 十分大な n に対して $id_R(M_n) = \infty$ ならば明白. そうでなければ無限個の $n \gg 0$ に対して $id_R(M_n) < \infty$, 即ち $\mathrm{Ext}_R^i(k, M_n) = 0$, $r \leqslant i \leqslant r+d$, $r = \mathrm{depth}(R)+1$. 従って, 任意の i ($r \leqslant i \leqslant r+d$) に対して, 無限個の $n \gg 0$ を取れば $\mathrm{Ext}_R^i(k, M_n) = 0$. ところが $\mathrm{Ext}_R^i(k, M) = \bigoplus_n \mathrm{Ext}_R^i(k, M_n)$ は有限生成次数付 A-加群なので, 十分大な n に対して $\mathrm{Ext}_R^i(k, M_n) = 0$ となる. これから, 十分大な n に対して $id_R(M_n) < \infty$ が分り, このとき $id_R(M_n) = \mathrm{depth}(R)$ なので主張は明らか. 証終.

P を有限生成 R-加群についての性質と

する．十分大な n に対して M_n が P であるとき，M は<u>漸近的に P</u>（asymptotically P）であるという．任意の A，M に対して，M_n が無限個の $n \geqslant 0$ に対して P であれば M が漸近的に P になるとき，P が<u>漸近的性質</u>（asymtotic property）であるという．

定理 2．次の性質は漸近的である：

(1) $M_n = 0$

(2) M_n は忠実

(3) M_n は torsion 加群

(4) M_n は torsion－free 加群

(5) M_n は torsionless 加群

以下 R は局所環とする

(6) M_n は free

(7) M_n は injective

(8) M_n は Cohen－Macaulay

(9) M_n は perfect

(10) M_n は Gorenstein ．

証明. (1) − (3), (6) − (10) は次のように特徴付けられるので主張は定理1から明白:
(1) $\operatorname{ann}_R(M_n) = R$, (2) $\operatorname{ann}_R(M_n) = 0$,
(3) $\operatorname{grade}_R(M_n) > 0$, (6) $\operatorname{hd}_R(M_n) = 0$,
(7) $\operatorname{id}_R(M_n) = 0$, (8) $\operatorname{depth}_R(M_n) = \dim_R(M_n)$,
(9) $\operatorname{hd}_R(M_n) = \operatorname{grade}_R(M_n)$, (10) $\operatorname{id}_R(M_n) = \operatorname{depth}_R(M_n)$. (4) は $t(E)$ を R-加群 E の torsion 部分加群として, $t(M) = \bigoplus_n t(M_n)$ に (1) を適用すればよい. (5) は $\operatorname{Ker}(M \to \bigoplus_n M_n^{**})$ (但し, $E^* = \operatorname{Hom}_R(E, R)$) に (1) を適用すればよい. 証終.

問題. 次の性質は漸近的性質だろうか: reflexive 加群, (S_n), Buchsbaum, generalized Cohen-Macaulay.

2. 次数付環の analytic spread と擬平担性.
$(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環とする. $\ell(M) = \dim_{A \otimes_R k}(M \otimes_R k)$ とおき, $\ell(M)$ を次数付加群 M の analytic spread という. $\mathfrak{a}$ が R の

イデアルのとき $\ell(R_{\mathfrak{a}}(R)) = \ell(G_{\mathfrak{a}}(R)) = \ell(\mathfrak{a})$，ここで $R_{\mathfrak{a}}(R) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n$，$G_{\mathfrak{a}}(R) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$，$\ell(\mathfrak{a})$ は Northcott, Rees によるイデアル $\mathfrak{a}$ の analytic spread である．
又，$\mathrm{emb}(A) = \mu(A_1)$（$R$-加群 A_1 の最小生成系の元の個数）とおき，A の <u>埋入次元</u>（embedding dimension）という．
analytic spread について次の命題は容易に分る：

命題3． (1) $\ell(M) = \ell(A/\mathrm{ann}_A(M))$

(2) $\ell(A) = 0$ であることは $A_n = 0$ for all $n \gg 0$ と同値

(3) $\mathrm{alt}(A_+) \leqslant \ell(A) \leqslant \mathrm{emb}(A)$

$$\mathrm{ht}(A_+) \leqslant \dim(A) - \dim(R) \leqslant \ell(A) \leqslant \dim(A),$$

但し，$\mathrm{alt}(A_+) = \max\{\mathrm{ht}(P) \mid P$ は A_+ の極小素イデアル$\}$

(4) $\dim(R) = 0$ なら $\mathrm{ht}(A_+) = \ell(A) = \dim(A)$，$\dim(R) > 0$ で任意の $P \in \mathrm{Min}(A)$ に対して

$P \cap R \in \mathrm{Min}(R)$ とすると $\ell(A) \leqslant \dim(A) - 1$

(5) $\ell(A) = ht(A_+)$ であるためには，$\dim A \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ が任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対して一定であることが必要十分である．

$\mathfrak{a}$ が R のイデアルのとき，

$ht(\mathfrak{a}) \leqslant \dim R - \dim R/\mathfrak{a} \leqslant \ell(\mathfrak{a}) \leqslant \dim(R)$,

$alt(\mathfrak{a}) \leqslant cora(\mathfrak{a}) \leqslant ara(\mathfrak{a}) \leqslant \ell(\mathfrak{a}) \leqslant \mu(\mathfrak{a})$

が成り立つ．但し，ここに $cora(\mathfrak{a}) = \max\{n \mid H^n_{\mathfrak{a}}(R) \neq 0\}$ ($\mathfrak{a}$ の <u>cohomological rank</u> 又は cohomological dimension)，$ara(\mathfrak{a}) = \min\{n \mid \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(a_1, \cdots, a_n)}$ for some $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{a}\}$ ($\mathfrak{a}$ の <u>arithmetical rank</u>)．

(4) の応用として，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$－準素でなく，$G_{\mathfrak{a}}(R)$ が既約ならば $\ell(\mathfrak{a}) < \dim(R)$ (Huneke).

$\ell(A) = ht(A_+)$ が成り立つとき，A は<u>擬平担</u> (pseudo-flat) な R－algebra であるという．$\mathfrak{a}$ が R のイデアルのとき，$G_{\mathfrak{a}}(R)$ が pseudo-flat $R/\mathfrak{a}$－algebra ということは $\ell(\mathfrak{a}) =$

$ht(\mathfrak{a})$，即ち R が $\mathfrak{a}$ に沿って <u>正規擬平担</u>（normally pseudo-flat，広中）であるということと同値である．これについては Herrmann，Orbanz による研究がある（[3]，[4]，[5]，[6] 等参照）．
擬平担であるための十分条件として

命題 4．(1) A が漸近的に平担ならば A は擬平担で，かつ $e(A\otimes_R K(\mathfrak{p}))$ は任意の $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)$ について一定である．

(2) 一般に $\ell(M)\leqslant \dim(M)-\mathrm{depth}_R(M_n)$ for all $n\gg 0$ が成り立つ．従って A が漸近的に maximal Cohen-Macaulay，即ち十分大な n に対して $\mathrm{depth}(M_n)=\dim(R)$ とすると，$\ell(A)=\dim(A)-\dim(R)$．更に，A が quasi-unmixed ならば A は擬平担である．

証明．(1)：A が漸近的に平担ならば $A\otimes_R K(\mathfrak{p})$ の Hilbert 多項式 $h(A\otimes_R K(\mathfrak{p}),n)$ は $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)$ の取り方によらず一定である

（R が reduced のときは 逆も正しい）．これから 主張は明白．(2) は $r = \mathrm{depth}_R(M_n)$ for all $n \gg 0$ についての 帰納法により 容易に分る．証終．

3．次数付環の 還元．$(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター局所環とし，A を homogeneous R-algebra とする．A の subhomogeneous R-algebra B は，A が有限生成 B－加群である（即ち，$B_1 A_n = A_{n+1}$ for some n）のとき A の <u>還元</u>（reduction）であるという．包含関係に関して 極小な A の 還元を A の <u>極小還元</u>（minimal reduction）という．

$\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ が R のイデアル のとき，$R_{\mathfrak{b}}(R)$ が $R_{\mathfrak{a}}(R)$ の reduction であることは，$\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}$ for some n，即ち $\mathfrak{b}$ が Northcott, Rees の意味で $\mathfrak{a}$ の reduction になっていることと 同値である．

次は 還元の 理論の 基本定理である：

定理5．(1)　BがAのreductionのとき，Bに含まれるAのminimal reductionが存在する．

(2)　kが無限体，BがAのreductionのとき，次は同値：

(a)　BはAのminimal reduction.

(b)　$B/\mathfrak{m}B$はregularで$\mathfrak{m}A \cap B = \mathfrak{m}B$，即ち$B/\mathfrak{m}B$は$A/\mathfrak{m}A$に含まれる多項式環である．

(c)　$\mathrm{emb}(B) = \ell(A)$.

（注意：(b)$\Longleftrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(a)はkが有限体でも成り立つ．）

還元の理論を使って，擬平担性は次のように特徴付けられる：

定理6．Rがreducedでkが無限体のとき，Aが擬平担であるためには，AがR上の多項式環の有限拡大になっていることが必要十分な条件である．

証明．十分性は容易（kは有限体でもよい）．必要性：BをAの minimal reduction とすると，仮定より $\ell(A) = ht(A_+)$，即ち $emb(B) = ht(B_+)$ が成り立つ．これはBがR上の多項式環であることを意味している．証終．

以下，定理6を使った幾つかの応用を与える：

定理7．Aが擬平担な R-algebra のとき，関数 $\mathfrak{P} \mapsto e(A \otimes_R K(\mathfrak{P}))$ は $\mathrm{Spec}(R)$ 上の上半連続な関数である．

証明．まずRが reduced でkが無限体の場合に帰着できる．$B = R[X_1, \cdots, X_v]$ をAの minimal reduction として $\{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(R) \mid e(A \otimes_R K(\mathfrak{P})) \leqslant n\} = \{Q \cap R \mid Q \in \mathrm{Spec}(B), \mu_{B_Q}(A_Q) \leqslant n\}$ が成り立つことを示せばよい．証終．

定理 8. R が reduced, A が擬平担で, $e(A \otimes_R k(\mathfrak{p}))$ が全ての $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について一定, 更に $A/\mathfrak{m}A$ が Cohen-Macaulay とすると A は R-free である.

証明. k は無限体としてよい. $B = R[X_1, \cdots, X_v]$ を A の minimal reduction とすると, 重複度についての条件は $\mu_{B_P}(A_P) = \mu_{B_\mathfrak{n}}(A_\mathfrak{n})$ for all $P \in \mathrm{Min}(B)$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus B_+$ と書き換えられる. 従って $A_\mathfrak{n}$ は $B_\mathfrak{n}$-free. 証終.

定理 9. R が regular local ring で, A が擬平担な Cohen-Macaulay R-algebra とすると A は R-free である.

証明. k は無限体としてよい. $B = R[X_1, \cdots, X_v]$ を A の minimal reduction とすると, $A_\mathfrak{n}$ が CM $B_\mathfrak{n}$-module であることにより $A_\mathfrak{n}$ は $B_\mathfrak{n}$-free となる. 証終.

参考文献

[1] M. Brodmann, Some remarks on blow-up and conormal cones, Commutative Algebra, Proc. Trento Conf. Dekker, 1983, pp. 23-37.

[2] R. C. Cowsik and M. V. Nori, On the fibres of blowing-up, J. Indian Math. Soc. 40 (1976), 217-222.

[3] M. Herrmann und U. Orbanz, Faserdimensionen von Aufblasungen lokaler Ringe und Äquimultiplizität, J. Kyoto Univ. Math. 20 (1980), 651-659.

[4] 同上, On equimultiplicity, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91 (1982), 207-213.

[5] 同上, Between equimultiplicity and normal flatness, Lecture Notes in Math. vol. 961 (1982), 200-232.

[6] J. Lipman, Equimultiplicity, reduction, and blowing-up, Commutative Algebra, Analytic Method, Dekker, 1982, pp. 111-147.

[7] S. McAdam and P. Eakin, The asymptotic Ass, J. of Algebra 61 (1979), 71-81.

[8] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145-158.

(November, 1983)

完備付値環の高階微分と自己同型

京大教養　　鈴木　敏

完備局所環　(R,m)　の２つの係数環　P，P′の間には、これらの剰余体には恒等写像を導く同型写像が存在することは完備局所環の構造定理により、良く知られて居るが、この同型写像が　R　の自己同型(従って　inertial automorphism)　に拡張出来るという一般的保障はない。とくに　(R,m)　が離散付値環であっても　unequal　characteristic　且つ分岐する場合(標数　0　の離散付値環で、その剰余体の標数　p　が　R　の素元でない場合のこと)にすでに、この反例があることは後に分かる。

そこで、一般の完備局所環に於いて、“R の任意の２つの係数環の間に於ける、上のような同型写像の拡張が、常に可能であるための、必要且つ十分な条件を見付け出せ。”という事が１つの大きな問題として考えられる。

ここでは、しかしこういう広い問題としては扱はないで、この問題を、R が完備離散付値環という特殊な場合にかぎって、高階微分と関連して考える。ここで、高階微分とは、Hasse－Schmidt の意味のものであるが、iterativity condition　は考えない。R が equal characteristic の時には問題にならないので、以下 R は　unequal　characteristic　であると仮定する。

この事は、数年前に西村純一氏との共著の論文　[４]　を書いた時に一応問題にしたが、その後そのままになっていた。しかし最近、更に数年前に書いた論文　[３]　の内容を考え直したりした結果いささかの希望が出て来たので、今回は、問題提出と部分的な解答という形で話をしてみる。

論文　[４]　の結果は一口にいえば、unequal　characteristic　な完備離散付値環を高階微分の観点から良い　class　と悪い　classs　の２つに分類した事であろう。今後この意味で良い class に入るものを ＤＧ (differentially　good) であり、悪い　class　に入るものを　ＤＢ (differentially bad)　であると呼ぶ。詳しい意味は後に説明する。

また任意の２つの係数環の間の上述の様な同型写像が必ず　R　の自己同型

写像に拡張出来る様な完備離散付値環は SG (structurally good) であるといい、そうでない時 SB (structurally bad) であると呼ぶ。

ここで提供したい問題は次のものである。

<u>問題</u> DG と SG は同値であるか？

後に述べる様に DG なら SG である事は既に示されている。従って問題は "SG なら DG であるか？" という事になる。

以下 [4] の結果を中心にして問題を詳述する。先ず記号を並べる。

R ： 標数 0 の完備離散付値環、 m ： R の極大イデアル

u ： R の素元、 $k=R/m$ ただし $ch(k)=p\neq 0$ とする

e ： R の分岐指数、 P ： R の係数環

$\{\bar{c}_\iota\}_{\iota\in I}$ ： k の p－independent base, $c_\iota\in P$ ： $\bar{c}_\iota$ の代表元

v ： R で定まる付値

この時、 X を P 上代数的独立な元として

$R\simeq P[X]/(f(X))$, $f(u)=0$

$f(X)=X^e+p(a_{e-1}X^{e-1}+\cdots+a_1X+a_0)$, $a_\iota\in P$, $p\nmid a_0$ (Eisenstein 多項式) と表わされる。

T を自然数の集合 N 乃至はその interval $\{1,2,\cdots,t\}$ とする。 S を可換環とする時 $A^T(S)$ を S の index domain を T とする higher differential algebra とし、$\{d_S^n\}_{n\in T}$ を S から A (S) への canonical な higher differential maps とする。

$\widehat{\ }$ で m－adic または p－adic completion を示せば

$$\widehat{A^T(P)}=\widehat{P[d_P^n c_\iota\,]}_{n\in T,\ \iota\in I}$$

である。但し $\{d_P^n c_\iota\}$ は P 上独立であり、右辺は $d_P^n c_\iota$ の可算個の monomials の P 上の一次結合である。さらに

$$A^T(R)=R\otimes_P A^T(P)[d^1u,d^2u,\cdots]$$

$$=(R\otimes_p \widehat{A^T}(P))[d^1X, d^2X, \cdots]/(d^1f(X), d^2f(X), \cdots)$$

ここに $\widehat{A^T(P[X])}$, $\widehat{A^T(R)}$ 等は d^iX, d^ic_i に weight i を与える事により graded ring の completion と考える。

ここで $\widehat{A^T(P[X])}$ の中で

$$(1)\quad d^n f(X)=\sum_{j=1}^{e}(f^{(j)}(X)/j!)\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_j=n\\ 1\le i_1,\cdots,i_j}} d^{i_1}X\cdots d^{i_j}X$$

$$+pG_n(d^1X, d^2X, \cdots;\ , d^ic_i, \cdots)\qquad (n\in T)$$

と表わされる。但し G_n は d^iX だけの項を持たない、可算個の n 次の単項の、収束する R 一次結合である。

ここで d^iX を順次代入する事により

$$(2)\quad (f'(u))^{2n-1}d_R^n u=F_n(\cdots, d^ic_i, \cdots)\qquad (n\in T)$$

と表わされる。 F_n は G_n と同じく n 次同次である。

<u>定義</u> $\Delta_p^n(u)=\min\ v(F_n$ の係数$)-(2n-1)v(f'(u))$ を n-th Neggers' number と呼ぶ。

$\Delta_p^n(u)$ は P と u の取り方には関係するが、c_i の取り方には無関係に定まる。それは例えば Neggers' number の言い替えに当たる次の Proposition 1 ([4], Proposition 5.3) から分かる。

<u>Proposition 1</u> n を正の数とする。 $\Delta_p^n(u)=h$ なる必要充分な条件は、十分大きな t に対して、 R の higher derivation $D=\{D^i\}_{i\in T}$, $T=\{1,2,\cdots n\}$ で $v(D^ib)\ge ti$ $(b\in P, 0<i\le n)$ なるものに対して $v(D^nu)\ge tn+h$ であり、各 t に対して、このような D で $v(D^nu)=tn+h$ なるものが少なくとも一つ存在する事である。

先に $\Delta_p^n(u)$ の値の意味する大きな特徴を述べて置く。

Theorem 1. $\Delta_p^n(u) \geq 0$ $(n \in T)$ なる必要十分条件は P から P' への index domain T を有する任意の higher derivation が R から R への higher derivation に拡張出来る事である。

Theorem 2. $\Delta_p^n(u) \geq 1$ $(n \in T)$ なる必要十分条件は k から k への index domain T を有する任意の higher derivation が R から R への higher derivation より導かれる事である。

Theorem 2 から $\Delta_p^n(u) \geq 1$ $(n \in T)$ なる事は P の取りかたにも u の取りかたにも無関係な R に固有な性質である事がわかる。しかし Theorem 1 は定理の叙述自身が P に関係する。

T＝N の時は、上の２つの場合が一致する事が分る。

Theorem 3.（西村の Lemma). $\Delta_p^n(u) \geq 1$ $(n \in N)$ なる必要十分条件は $\Delta_p^n(u) \geq 0$ $(n \in N)$ なる事である。

DG なら SG なる事は Theorem 1 の方の性質から導かれる。（但し係数環の取りかたに関係しないと言う点に関して Theorem 2 もどうしても必要となる。）

R の２つの係数環の間の同型写像 $H : P \longrightarrow P'$ で $H(a) = \dot{a}$ mod. m $(a \in P)$ なるものに対して

$D^1 c_\iota = Hc_\iota - c_\iota \in uR$, $D^i c_\iota = 0$ $(i > 1,\ \iota \in I)$ なる higher derivation $\{D^i\}_{i \in N}$ を取ると $Ha = \sum_{i=0}^{\infty} D^i a$ (convergent sum, $a \in P$, 但し $D^0 a = a$ と置く）と表わされて、この D を $R \longrightarrow R$ の derivation に拡張することにより、その和として R の自己同型が得られるのである。

さて肝心のこの逆の問題であるが、今の所、次の事実だけが分る。

<u>Proposition 2.</u> $\Delta^1_P(u) \leq 0$ なら、P から他のある係数環への、k には恒等写像を導く、同型写像で R の自己同型写像には拡張出来ないものが存在する。

この事実は次の3つの Lemmas から導かれる。実際 Lemmas 2,3 により、他の係数環 P′ で $\Delta^1_{P'}(u)$ の値が $\Delta^1_P(u)$ の値と異なるものが存在するが、もし P から P′ への同型写像が R の自己同型写像に拡張出来るとすれば、それによる u の image を u′ とすると $\Delta^1_P(u)$ と $\Delta^1_{P'}(u') = \Delta^1_{P'}(u)$ とが異なった値になり同型写像の意味からこれは矛盾である。

<u>Lemma 1.</u> $\Delta^1_P(u) < 0$ なら $\Delta^1_P(u)$ の値は素元 u の取り方に無関係である。

これは [2], Proposition 2 の Corollary であるが、後述の Proposition 3 の特殊な場合である。

<u>Lemma 2.</u> $\Delta^1_P(u) < 0$ の時 P を取り替えて $\Delta^1_{P'}(u) = 0$ と出来る。

<u>Lemma 3.</u> $\Delta^1_P(u) = 0$ の時 P を取り替えて $\Delta^1_{P'}(u) < 0$ と出来る。

これら2つの Lemmas の証明は本質的には [3] の Theorem の証明と変わりないが、次の様にする。

関係式(2)は今の場合

$f'(u)d^1 u = \sum_{i=1}^{\infty} m_i d^1 c_{\iota(i)}$, $m_i \in R$, $\iota(i) \in I$ であるが、

$s = \min v(m_i) = v(m_{\bar{i}})$ とする時 Lemma 2 では P′ として $\{c_\iota, c_{\iota(i)} +$

$u\}_{l\in I,\, l\neq l(i)}$ を含むと言う条件で一意的に定まる係数環を取る。Lemma 3 では $m=(m+m'u)u^s$, $f'(u)=(1+l'u)u^s$ $(m, m', l, l'\in R$, m, l は units) とする時 P' を $\{c_l\ , c_{l(i)}-(l/m)u\}_{l\in I,\, l\neq l(i)}$ を含むと言う条件で一意的に定まる係数環をとる。

最後に、一般の場合を考える為に、次の Proposition を証明しておく。

<u>Proposition 3</u>. $\triangle^i_P(u)\geq 0, \cdots, \triangle^{n-1}_P(u)\geq 0$, $\triangle^n_P(u)\leq 0$ の時 $\triangle^n_P(u)$ の値は u の取り方に関係しない。

<u>証明</u> Proposition 1 を用いる。そこの記号を用いて $v(D^i b)\geq ti$ $(b\in P)$ ならば、任意の $a\in R$ に対して

$$(*)\qquad v(D^n a)\geq tn+\triangle^n_P(u)$$

なることが示されればよい。何となれば $v(D^n u)=tn+\triangle^n_P(u)$ なる D が存在するから、結局十分大きな一定の t に対し

$$\triangle^n_P(u)=\min_{D,a} v(D^n a)-tn$$

となるが、右辺は u の取り方に無関係な数であるからである。故に (*) をしめす。

$a=h(u)$, $h(U)\in P[U]$ と表わす。この時

$$D\ a=h'(u)D\ u+\sum_{j=2}(h^{(j)}(u)/j!)\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_j=n\\ 1\leq i_1,\cdots,i_j}} D^{i_1}u\cdots D^{i_j}u$$

$$+g_n(D^1u, D^2u, \cdots ; \cdots, D^i c_l\ , \cdots)$$

ここに g は先の様な weight n の同次の形式である。

$D^i c_l\geq ti$ であるから $i<n$ の時、仮定より

$v(D^i u)\geq ti+\triangle^n_P(u)\geq ti$.

故に、第2項以下の value $\geq tn$.

故に $v(D^n a)\geq \min(v(h'(u)D^n u, tn)\geq tn+\triangle^n_P(u)$.

文献リスト

[1] N. Heerema, Inertial automorphisms of a class of wildly ramified v-rings, Trans. Amer. Math. Soc. 132-1(1968), 45-54.

[2] S. Suzuki, Differential modules and derivations of complete discrete valuation rings, J. Math. Kyoto Univ. 9-3(1969), 425-437. Its correction and suppl. ibid. 11-2(1971), 377-379.

[3] S. Suzuki, On Neggers' numbers of discrete valuation rings, J. Math. Kyoto Univ. 11-2(1971), 373-375.

[4] S. Suzuki & J. Nishimura, Higher Differential algebras of discrete valuation rings, J. Math. Kyoto Univ. 15-1(1975), 25-52.

1次元局所環の微分加群のねじれと付値半群

名大.理. 吉野雄二

§1. 序

本稿では，kはいつも標数0の体，Rは$k[\![X_1,\dots,X_n]\!]/\mathfrak{g}$の型をした1次元の完備局所環とする。このとき，$R$の$k$上での universally finite module of differentials Ω_R は，

$$\Omega_R = \bigoplus_{i=1}^{n} R\,dx_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \;\middle|\; f \in \mathfrak{g} \right)$$

で定義されるR－加群である。

Rの次元がいくつでも，『Rが正則局所環$\Leftrightarrow$ Ω_Rが自由R－加群』が成立することは，古くから知られている。([4]参照)．ところで，Rの次元を1と仮定すると，Ω_Rに関するもっと弱い条件からRの正則性が出るのではないかと予想される。たとえば，鈴木[5]によって，Rが完交環のときには，Rが正規ということと，Ω_RがねじれのないR－加群であるということが同値であることが示されているが，これを1次元の場合に適用すると，(1次元の

正規環は正則だから）Ω_R がねじれをもたないということから，Rの正則性が導かれることが分る。このような現象が，一般の1次元の局所整域で成立するであろうという予想が，実は，Berger [1] によって唱えられているのである。すなわち，

<u>Bergerの予想</u>； Rを上の通りとするとき，もし Ω_R がねじれのないR−加群ならば，Rは正則局所環であろう？

この予想に関して，まだ反例は見つけられていない。幾つかの部分的結果が出ているので，それらを次にまとめておく。

1963年，R. Berger [1]： Rが almost complete intersection のとき，予想は正しい。

1978年，J. Herzog [2]： Rの embedding dimension が小さい場合に，予想は正しい。

1981年，B. Ulrich [6]： Rの deviation $d(R)$ $\bigl(:=$ emb. dim. $(R)-\mu(\mathfrak{p})-1\bigr)$ が3以下なら，予想は正しい。

1983年，J. Herzog and R. Waldi [3]： Rが完交環の linkage class に入っているなら予想は正しい。

これらの証明は，Ω_R のR−加群としての free resolution

を使う homological な議論が中心となっている。本稿では、少し視点をかえてみて、Ω_R がねじれをもたないための必要条件を、R の付値半群に関する条件で言いかえてみたいと思う。(§3 の主命題) そして、その系として、R が半群環のとき、Berger の予想は、正しいことが示される。もっと詳しく言うと、R が正則であるための必要十分条件は、Ω_R がねじれをもたず、かつ、例外微分 (exceptional differential) をもたないことである。(§3の定理1参照。) この例外微分については、次の節で定義を与えよう。

§2. 例外微分

前節のごとく $R = k[[X_1, \dots, X_n]]/\mathfrak{g}$ は、1次元の整域とする。(ただし、k は標数0の体。) S を R の商体における整閉包とおくと、S は適当な $t \in S$ をとって、巾級数環 $k[[t]]$ の形をしている。S の離散付値 v で、$v(t) = 1$ となるものを、以下、固定しておく。このとき、R の付値半群 H は、

$$H := v(R) \subset \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

と定義される。t による微分から自然にえられる、

Ω_R から $\Omega_S = S\,dt$ への R-加群の写像を Φ とかく。
すなわち、 $\Phi(dx) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot dt$.

$\mathrm{Ker}\,\Phi$ が Ω_R のねじれ元の全体であることは見易い。

Dを Φ の像とするとき、D上にも自然に"valuation" v が次のように定義される。

$$v(\Phi(w)) = v(s) + 1$$

ただし、 $w \in \Omega_R$, $\Phi(w) = s\,dt$.

このとき、 $v(\Phi(w))$ の値は、上でとった S の素元ものとり方に、よらないことを注意しておこう。

次の補題は、定義よりほぼ明らかである。

<u>補題 1.</u> $H \setminus \{0\} \subset v(D)$

(証明) $h = v(x) \in H \setminus \{0\}$ とすると、 $h = v(x) = v\left(\frac{dx}{dt}\right) + 1 = v(\Phi(dx)) \in v(D)$ ■

ここで、逆の包含関係は、必ずしも成立しない。そこで、

<u>定義.</u> $w \in \Omega_R$ が $v(\Phi(w)) \notin H$ のとき、 w を例外微分 (exceptional differential) とよぶ。

<u>例 1.</u> $R = k[\![t^3, t^7 + t^8]\!] \subset S = k[\![t]\!]$ のとき、
$H = \langle 3, 7 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$.

ところで、

$$v\left(7(t^7+t^8)\frac{d}{dt}t^3-3t^3\frac{d}{dt}(t^7+t^8)\right)+1=11\notin H$$

なので，$7(t^7+t^8)d(t^3)-3t^3d(t^7+t^8)\in\Omega_R$ は，例外微分である。

命題 1. R が半群環ならば，Ω_R は例外微分をもたない。

（証明）$R=k[\![t^{a_1},t^{a_2},\ldots,t^{a_n}]\!]$ とかける。ただし，各 a_i は正整数である。$x_i=t^{a_i}$ $(1\leq i\leq n)$ とおくと，任意の $w\in\Omega_R$ は，$\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i$ $(y_i\in R)$ とかける。そこで，

$$\begin{aligned}v(\Phi(w))&=v\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)\right)+1\\&=v\left(\sum_i y_i a_i t^{a_i-1}\right)+1\\&=v\left(\sum_i a_i y_i x_i\right)\in H \quad\blacksquare\end{aligned}$$

この命題の逆は，必ずしも成立しないことを注意しておく。

例 2. $R=k[\![t^3,t^4+t^5]\!]$ は，半群環ではないが，Ω_R は，例外微分をもたない。

さて，R および D に v で filtration を入れる。すなわち，自然数 e に対して，$R_e=\{x\in R\mid v(x)\geqq e\}$，$D_e=\{w\in D\mid v(w)\geqq e\}$.

整数列 $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ を半群 H の生成系とし，更に，

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ を $v(x_i) = a_i \quad (1 \le i \le n)$ となるようにとる。このとき，$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ は R の極大イデアルを生成し，とくに，$\Omega_R = \sum_{i=1}^{n} R\,dx_i$ となる。

これらの記号のもとで，次が成立する。

命題 2. 任意の整数 e に対して，Ω_R が例外微分をもたないか，あるいは，$e > \max(v(D) \setminus H)$ ならば，

$$D_e = \sum_{i=1}^{n} R_{e-a_i}\,\Phi(dx_i).$$

証明は，R が完備局所環であることをつかって，容易に示されるので，ここでは省略する。

§3. 主命題

記号は，前節のとおりとする。ただし，半群 H の生成系 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ は，極小で，かつ，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ であるものをとっておく。（このような a_i は，H によって一意的に定まるものであることを注意しておく。）更に，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ は R の極大イデアルの生成系で，$v(x_i) = a_i \quad (1 \le i \le n)$ となるものとして固定しておく。$\{x_1, \ldots, x_n\}$ は必ずしも R の極大イデアルの生成系として極小でないことに注意が必要である。H の部分集合 $I(H)$ を，H のえで，$a_1, \ldots, a_n$ を使って2通りの和

にあらわすことのできる整数の全体とする。$I(H)$は、Hの関係式イデアル (relation ideal) とよばれる。

次の命題が、本稿の主命題であり、序にのべた幾つかの結果は、この命題より得られるのである。

主命題. $v(D) \setminus H = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ ($b_1 < b_2 < \ldots < b_r$) とする。$w = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$ ($y_i \in R$) を Ω_R の任意の元とする。いま、$h = \min\{v(y_i) + a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ とおくとき、$v(\Phi(w)) > \max\{h, b_r\}$ かつ Ω_R がねじれのない R-加群ならば、$h \in I(H)$ である。

この命題の証明は、あとまわしにして、これからどんな結果が得られるか、まず考えてみよう。

定理1. Ω_R がねじれがなく、かつ、例外微分もなければ、Rは正則局所環である。

(証明) Rを正則でないとする。このとき、付値半群Hは、1個の元では生成されえないから、$n \geqslant 2$ である。そこで、微分 $w = a_2 x_2 dx_1 - a_1 x_1 dx_2 \in \Omega_R$ を考えると、すぐに分るように、

$$v(\Phi(w)) > v(x_2) + a_1 = v(x_1) + a_2 = a_1 + a_2$$

よって主命題より，$a_1+a_2 \in I(H)$．（今の場合，主命題における$\{b_1, \dots, b_r\}$は空集合。）ところが，a_1, a_2は，Hの最小生成系の小さい方から2個の数をとったのだから，a_1+a_2が$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$をつかって，2通りの和の形であらわされることは，ありえない。矛盾。■

この定理1と前節の命題1を合わせて次の系を得る。

<u>系</u>．Rが半群環で，かつ，Ω_RがねじれのないR-加群ならば，Rは正則局所環である。

次の定理も定理1．と同様の方法で主命題から証明できる。

<u>定理2.</u>　もし，RがBergerの予想の反例となる環ならば，Rの付値半群Hは次の条件(*)をみたす。

(*)　$c \leq h \in H$，かつ，異なるi, j $(1 \leq i, j \leq n)$について，$h-a_i \in H$，$h-a_j \in H$ならば，$h \in I(H)$．

ただし，ここでcはHのconductorをあらわす．

この定理をつかうと，次の結果が容易に得られる。

<u>系</u>．Rが正則でないとき，$2m(R)+2 \geqq l(S/I)$ならば，Ω_Rはねじれをもつ。ここで，$m(R)$はRの重複度．

$\mathfrak{C}$ は R の S における conductor イデアルをあらわす。

(証明) 最初に $a_1 = m(R)$ であることに注意しておこう。仮定より、$a_1 + a_2 \geqq 2a_1 + 1 \geqq c - 1$ で、かつ $c-1 \notin H$ だから、$a_1 + a_2 \geqq c$。一方 $a_1 + a_2 \notin I(H)$ だから、$h = a_1 + a_2$ について、定理2の条件(*)がみたされていない。すなわち、この R は Berger の予想の反例とはなりえないから、Ω_R はねじれをもつ。■

また、定理2をつかうと、$c \leqq 20$ のとき、Berger の予想が正しいことが、計算によって確められる。(詳しくは、[7] 参照。)

§4. 主命題の証明

すべての記号は前節のとおりとする。R を巾級数環 $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ の像としてかき、その間の写像を Φ とする。$\Phi(X_i) = x_i$ ととっておく。また、$\mathfrak{g} = \mathrm{Ker}\,\Phi$ としておく。

すなわち、$R = k[[x_1, \ldots, x_n]] \cong k[[X_1, \ldots, X_n]]/\mathfrak{g}$.

$k[[X_1, \ldots, X_n]]$ の元 $f = \sum_{i_1 \cdots i_n} c_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$ $(c_{i_1 \cdots i_n} \in k)$ に対して、

$$\mathrm{ord}(f) = \inf\{ i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots + i_n a_n \mid c_{i_1 \cdots i_n} \neq 0 \}$$

と定義しておく。 また、

$$\partial_i f := \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) \bmod \mathfrak{p} \quad \in R \quad (1 \le i \le n)$$

とかくことにする。この記号のもとで，次の補題が成立することがわかる。（証明は［7］を見ていただきたい．）

<u>補題 2.</u> $f\ (\neq 0) \in k[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ のとき．

(a) $\quad \mathrm{ord}(f) \le v(\partial_j f) + a_j \quad (1 \le j \le n)$

(b) $\quad$ もし，$f \in \mathfrak{p}$ ならば，$\mathrm{ord}(f) \in I(H)$.

<u>補題 3.</u> 任意の $f\ (\neq 0) \in \mathfrak{p}$ に対して，次の2条件をみたす $\mathfrak{p}$ の元 g が存在する。

(a) $\quad \partial_i f = \partial_i g \quad (1 \le i \le n)$

(b) $\quad \mathrm{ord}(g) = \inf\{ v(\partial_i f) + a_i \mid 1 \le i \le n \}$.

さて，上の2つの補題をつかって，主命題を証明しよう。

$v(\Phi(w)) > b_r$ だから，第2節の命題2．より，

$$\Phi(w) = u_1 \Phi(dx_1) + u_2 \Phi(dx_2) + \cdots + u_n \Phi(dx_n)$$

とかける。ただし，$u_i \in R_{v(\Phi(w)) - a_i} \quad (1 \le i \le n)$.

これより，$w - \sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$ は，（$\mathrm{Ker}\,\Phi$ の元だから，）Ω_R のねじれ元となるが，今 Ω_R には，ねじれがないと仮定しているから，$w = \sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$．一方，$w = \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$ であったから，

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{n} (y_i - u_i)\, dx_i = 0$$

ここで，$v(y_i - u_i) \geq h - a_i \quad (1 \leq i \leq n)$ である。実際，h の定義と仮定より，$v(y_i) \geq h - a_i$ かつ $v(u_i) \geq v(\Phi(w)) - a_i > h - a_i$ だから，$v(y_i - u_i) \geq \inf.\{v(y_i), v(u_i)\} \geq h - a_i$ となる。更に，ある i_0 $(1 \leq i_0 \leq n)$ については，$v(y_{i_0}) = h - a_{i_0}$ となるから，同じようにして，$v(y_{i_0} - u_{i_0}) = h - a_{i_0}$ が出る。さて，$(**)$ より $\mathfrak{J}$ の元 f が存在して，$\partial_i f = y_i - u_i \quad (1 \leq i \leq n)$ となる。このとき，上で議論したことにより，

$$\inf.\{v(\partial_i f) + a_i \mid 1 \leq i \leq n\} = h.$$

となる。補題3によって，$\mathfrak{J}$ の元 g が存在して，$\mathrm{ord}(g) = h$ が成りたつ。すると補題2(a)より，$h \in I(H)$ が出る。∎

REFERENCES

[1] R.Berger, Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe, Math.Zeitschrift 81, 326-354 (1963).

[2] J.Herzog, Ein Cohen-Macaulay Kriterium mit Anwendungen auf den Konormalenmodul und den Differentialmodul, Math.Zeitschrift 163, 149-162 (1978).

[3] J.Herzog and R.Waldi, Cotangent functors of curve singularities, (preprint).

[4] G.Scheja and U.Storch, Differntielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren, Math.Ann. 197, 137-170 (1972).

[5] S.Suzuki, On torsion of the module of differentials of a locality which is a complete intersection, J.Math.Kyoto Univ. 4-3, 471-475 (1965).

[6] B.Ulrich, Torsion des Differentialmoduls und Kotangentenmodul von Kurvesingularitaten, Arch.Math. 36, 510-523 (1981).

[7] Y.Yoshino, Torsion of the differential modules and the value semigroups of one dimensional local rings, (preprint).

Every affine graded ring has a Hodge algebra structure

日比孝之（広島大学 理学部）

序. De Concini-Eisenbud-Procesi [2]で導入されたHodge algebraは、Eisenbud [1]に現れているalgebra with straightening laws（略してASL）を拡張した概念である. この両者の隔離は著しいもので、例えば、渡辺敬一氏が示した様に、体上の3次元homog. ASL domainはCohen-Macaulay環であるという結果がある反面、筆者の修士論文[7]では、任意のaffine semigroup ringが、比較的自然な方法で、Hodge alg.の構造を持つことが示されている.

$A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$を体$k$上のaffine graded ring、即ち、$A_0=k$で$A$は$k$-alg.として有限生成

なgraded ringとする．[7]の結果から考えれば，Aが適当な方法でHodge alg.の構造を持つのではないかと予想することも，そんなに不自然なことではないであろう．本講演の目的は，その予想が肯定的であること，即ち，表題に掲げた定理を証明することにある．証明の方針は，Stanley[4]（定理2.1）および，Baclawski-Garsia[3]（定理2.1）の証明で使われた，いくつかのideaに，本質的に，基づいている．

任意のaffine graded ringがHodge alg.の構造を持つということは，Hodge alg.の概念が，非常に広範なものであることを示している．従って，単に，Hodge alg.の構造を持つということから，何らかの環論的結果を期待することは全然できない．大切なことは，"良い性質"を持つHodge alg.の構造を探すことであり，その為には，どんなHodge alg.が"良い性質"を持つかを，環論的立場および組合せ論的立場から，具体的に調べなくて

はならない。そのことが、現在直面している課題であり、また、Hodge alg. の理論が、可換環論の一つの分野としての市民権を得る為には、どうしても乗り越えなければならない壁であると思う。

§1. Hodge algebra の定義と性質

H を有限集合とし、$\mathbb{N}$ を non-negative integer 全体の集合とする。$\mathbb{N}^H$ によって、H から $\mathbb{N}$ への写像全体から成る集合を表す。$\mathbb{N}^H$ の元を、H 上の monomial と呼ぶ。M と N が H 上の monomial の時、M と N との積 MN を、$MN(x) = M(x)+N(x)$ $(\forall x \in H)$ で定義する。また、N が M を割り切るとは、任意の $x \in H$ に対して、$N(x) \leq M(x)$ を満たす時を言う。M の support を、$\operatorname{Supp} M := \{x \in H ; M(x) \neq 0\}$ で定義する。次に、$\mathbb{N}^H$ の部分集合 Σ が、$M \in \Sigma$、$N \in \mathbb{N}^H$ ならば $MN \in \Sigma$ を満たす時、Σ を ideal of monomials と言う。monomial M が、

$M \in \Sigma$である時、Mを、Σに関して、standard と呼ぶ。また、Σの元Nが、Σの他の元で割り切れない時、NをΣの generator と言う。Hilbert の基底定理を使えば、ideal Σの generator 全体の集合は、有限集合であることが容易にわかる。

Aを単位元を持つ可換環とし、単射$\varphi : H \hookrightarrow A$が与えられているとする。その時、$H$上の monomial Mに対して、$\varphi(M) = \prod_{x \in H} \varphi(x)^{M(x)} \in A$と定義する。通常、$H$と$\varphi(H)$を同一視して、$\varphi(M) \in A$の代わりに、簡単に、$M \in A$と書くことにする。

さて、Rを単位元を持つ可換環とし、Aを可換なR-alg. とする。Hを有限半順序集合 (partially ordered set、以下 poset と略す) で、単射$\varphi : H \hookrightarrow A$が与えられており、$\Sigma$を ideal of monomials とする。その時、Aが、Σで governed され、Hで generated されるR上の Hodge algebra であるとは、次の公理を満たす時を言う：

(Hodge-1) Aは，Σに関するstandard monom. 全体の集合を基底に持つ，free R-mod. である．

(Hodge-2) N∈Σがgeneratorの時，Nはstandardではないから，(Hodge-1)より，

$$N=\sum_i r_{N,i} M_{N,i}, \quad 0 \neq r_{N,i} \in R,$$

と相異なるstandard monomialの和で書けるが，この時，Supp N に含まれる任意の $x \in H$ を取れば，各 i に対して，$y_{N,i} \in H$ で，$y_{N,i} \in \operatorname{Supp} M_{N,i}$ かつ $y_{N,i} < x$ を満たすものが存在する．

(Hodge-2)の関係式を，Aのstraightening relationと言う．Aがideal Σでgovernedされ，poset Hでgeneratedされる Hodge alg. の時，$A_0 := R[H]/\Sigma R[H]$ と定義する．ここで，$R[H]$ はHの元を変数とするR上の多項式環である．A_0 は(Hodge-2)の関係式の右辺がすべてempty sum (=0) となった，最も"簡単な" Hodge alg. であり，Aに対応する<u>discrete</u> Hodge alg. と呼ばれる．また，

Hodge alg. Aの ideal Σが、$\alpha \not\sim \beta$ なるHの元の積$\alpha\beta$ の全体を generator とする時、A を algebra with straightening laws と言う。ここで、$\alpha \not\sim \beta$ は、α、$\beta \in H$が、Hの順序で比較不可能なことを表す。

Hodge alg. の理論の基本精神は、A_0 の性質からAの性質を導くということであり、[2]で得られている次の結果は、Hodge alg. の基本定理である:

A_0 が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) 環であれば、Hを含むAの任意の素 ideal $\mathfrak{P}$ に対して、$A_{\mathfrak{P}}$ は Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) 環である。特に、基礎環Rが体kであり、$A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ が graded ring で、$A_0=k$、$H \subset A_+=\bigoplus_{n>0} A_n$ である時、A_0 が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) 環であれば、A も Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) 環である。

筆者は、[7]を書く時に、affine semigroup ring に Hodge alg. の構造を入れ、この基本

定理を応用し，Goto-Suzuki-Watanabe [5]，Goto-Watanabe [6] で得られている，affine semigroup ring が Serre の条件 (S_2) を満たせば，Cohen-Macaulay 環であるという結果の別証を与えることを目的とした．しかしながら，この試みは，simplicial monoid の時にしか遂行できなかった．

§2. affine graded ring の Hodge alg. としての構造

k を体とし，$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$，$A_0=k$，を k-alg. として有限生成な graded ring とし，$A_+=\bigoplus_{n>0}A_n$ と置く．その時

<u>定理</u>　$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ は体 k 上の Hodge alg. の構造を持つ．しかも，その構造を定める poset H は，A_+ の homog. element から成るものを取ることができる．

以下、本節では、$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n$ の Hodge alg. の構造を定める poset H は、A_+ の homog. element から成るものだけを考える。定理の証明は、A の次元 $\dim A$ に関する帰納法を使う。従って、具体的に graded ring が与えられた時に、poset と ideal を計算することはかなり難しい。しかしながら、[7]で考えた affine semigroup ring の Hodge alg. の構造では、poset と ideal を比較的簡単に計算することが可能である。

さて、定理の証明の概略を述べよう。

(第1段) $\dim A=0$ とせよ。

A の k-alg. としての homog. generator $y_1, \cdots, y_s$ ($\deg y_i = d_i \geq 1$) を取る。$y_1, \cdots, y_s$ は k-alg. の generator として minimal である必要はないが、k 上一次独立であるとしておく。簡単の為、$d_1 \leq \cdots \leq d_s$ とし、$H=\{y_1, \cdots, y_s\}$ と置き、$y_1 > \cdots > y_s$ とすることにより H を poset にする。即ち、H は chain であ

る．そして，単射 $\mathbb{N}^H \ni M \mapsto$

$$\left(\sum_{i=1}^{s} d_i M(y_i), M(y_s), \cdots, M(y_1)\right) \in \mathbb{N}^{s+1}$$

によって，$\mathbb{N}^H$ を $\mathbb{N}^{s+1}$ の部分集合と考え，$\mathbb{N}^{s+1}$ の辞書式順序から導かれた total order を $\mathbb{N}^H$ に入れる．すると，

$$(1) \quad N < M \quad \text{ならば} \quad NL < ML \quad (\forall L)$$

が成立する．そこで，

$$\Sigma = \left\{ N \in \mathbb{N}^H \;\middle|\; \begin{array}{c} N = \sum_{M_{N,i} < N} r_{N,i} M_{N,i} \\ \text{となる } r_{N,i} \in R \text{ が存在．} \\ (r_{N,i} = 0 \text{ も可}) \end{array} \right\}$$

と定義すれば，(1)より，Σ は $\mathbb{N}^H$ の ideal であり，A は (Hodge-1) を満たす．（ここまでは，本質的に，Stanley [4] の idea である．）

さて，NをΣの generator とし，

$$(2) \qquad N=\sum_i r_{N,i}M_{N,i}, \quad 0\neq r_{N,i}\in k,$$

を（Hodge-1）による関係式とせよ．(2)は（Hodge-2）を満たすとは限らない．そこで，

$$\Phi_N=\left\{M_{N,i}\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathrm{Supp}\,M_{N,i}\cap\{y\in H;\,y<x\}=\phi\\ \text{となる } x\in\mathrm{Supp}\,N \text{ が存在する.}\end{array}\right\}$$

と定義する．Σの任意の generator Nに対して，$\Phi_N=\phi$ となることが，（Hodge-2）の公理なのである．今，$\Phi_N\neq\phi$ なる generator Nが存在したと仮定せよ．$\Phi_N\neq\phi$ なる generator N全体の中で，$\sum_{i=1}^{s}d_iN(y_i)$が最小（$=d$とする）のものを，$N_1,\cdots,N_p$ とする．そして，$\bigcup_{j=1}^{p}\Phi_{N_j}=\{M_1,\cdots,M_q\}$，$z_j=\prod_{i=1}^{s}y_i^{M_j(y_i)}\in A$（$1\leqq j\leqq q$）と置く．その時，$\deg z_j=d$であること及び，$y_1,\cdots,y_s,z_1,\cdots,z_q$は$k$上一次独立であることに注意せよ．

次に、

$$d_1 \leqq \cdots \leqq d_v \leqq d < d_{v+1} \leqq \cdots \leqq d_s$$

とし、

$$H^{\#} = \{y_1, \cdots, y_v, z_1, \cdots, z_q, y_{v+1}, \cdots, y_s\}$$

と置き、

$$y_1 > \cdots > y_v > z_1 > \cdots > z_q > y_{v+1} > \cdots > y_s$$

なる順序を $H^{\#}$ に入れる. そして、$\mathbb{N}^{H^{\#}}$ から $\mathbb{N}^{s+q+1}$ への単射 $\mathbb{N}^{H^{\#}} \ni M \longmapsto$

$$\Big(\sum_{i=1}^{s} d_i M(y_i) + \sum_{j=1}^{q} d M(z_j),\ M(y_s), \cdots, M(y_{v+1}),$$
$$M(z_q), \cdots, M(z_1), M(y_v), \cdots, M(y_1)\Big)$$
$$\in \mathbb{N}^{s+q+1}$$

によって、$\mathbb{N}^{H^{\#}}$ を $\mathbb{N}^{s+q+1}$ の部分集合と考え、$\mathbb{N}^{s+q+1}$ の辞書式順序から導かれる total order を $\mathbb{N}^{H^{\#}}$ に入れる. ここで、再度、前半と同様の操作を繰り返すと、ideal $\Sigma^{\#}$ が得られるが、この時、$\Sigma^{\#}$ の generator N で

$$\sum_{i=1}^{s} d_i N(y_i) + \sum_{j=1}^{q} d N(z_j) \leqq d$$

を満たすものは、$\Phi_N = \phi$となることが容易に確かめられる。

さて、$A = \bigoplus_{n \geqq 0} A_n$は0次元故、$A_n = 0$（$\forall n \gg 0$）である。従って、以上の操作を有限回繰り返せば、AのHodge alg.の構造を定めるposetとidealが得られる。

（第2段）$\dim A > 0$とし、$\dim A$より低い次元の時には、定理は正しいとせよ。

まず、Aがhomog. non-zero divisor $\theta \in A_+$を含むとせよ。この時、$\dim A/(\theta) < \dim A$であるから、帰納法の仮定により、$A/(\theta)$はHodge alg.の構造を持つ。すると、次の補題によって、AもHodge alg.の構造を持つことがわかる。

<u>補題</u>　θがAのhomog. non-zero divisorで、$\deg \theta \geqq 1$とせよ。この時、$A/(\theta)$がHodge alg.の構造を持てば、AもHodge alg.の構造を持つ。

他方，$A_+=\bigoplus_{n>0}A_n$ の任意の homog. element が A の zero-divisor の時には，まず，Baclawski-Garsia[3]によって，次の条件を満たす A_+ の homog. element の列 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ が存在する：

(3) $\eta_1\neq 0$，$\eta_1 A_+=0$，

(4) $\eta_i\notin(\eta_1,\cdots,\eta_{i-1})$ であり，

$\eta_i[A/(\eta_1,\cdots,\eta_{i-1})]_+=0 \quad (2\leqq i\leqq m)$，

(5) $[A/(\eta_1,\cdots,\eta_m)]_+$ は，$A/(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ の homog. non-zero divisor を含む。

この時，$\eta_1,\cdots,\eta_m$ は k 上一次独立であり，任意の元 $f\in A_+$ に対して，

(6) $f\eta_\ell=\sum_{i=1}^{\ell-1} r_i^{(\ell)}\eta_i$

となる $r_i^{(\ell)}\in k$ が存在する（$1\leqq\ell\leqq m$）。

さて，$[A/(\eta_1,\cdots,\eta_m)]_+$ は $A/(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ の homog. non-zero divisor を含むから，（第2段）の前半の議論によって，$A/(\eta_1,\cdots,\eta_m)$ は Hodge alg. の構造を持つ。その構造を定める poset を $H=\{\xi_1,\cdots,\xi_t\}$，ideal を Σ とす

る．ここで，$z_i \in A_+$ で，$\bar{z}_i = z_i \bmod (\eta_1, \cdots, \eta_m) \in [A/(\eta_1, \cdots, \eta_m)]_+$ $(1 \leqq i \leqq t)$ である．まず，$\underline{H}^* = \{\eta_1, \cdots, \eta_m, z_1, \cdots, z_t\}$ と置き，$\underline{H}^*$ に次の様な partial order を入れる：

(7) $\underline{H}^*$ で $z_i < z_j$ であるのは，$\underline{H}$ で $\bar{z}_i < \bar{z}_j$ である時かつその時に限る．

(8) $\eta_1 < \cdots < \eta_m < z_i$ $(1 \leqq {}^{\forall} i \leqq t)$．

次に，ideal $\Sigma^* \subset \mathbb{N}^{\underline{H}^*}$ を次の様に定義する．$N \in \mathbb{N}^{\underline{H}^*}$ が Σ^* の generator であるのは，次の条件のいずれかを満たす時かつその時に限る：

(9) $\mathrm{Supp}\, N \subset \underline{H}$ で N は Σ の generator である．

(10) $N = \eta_i z$ $(1 \leqq {}^{\exists} i \leqq m,\ {}^{\exists} z \in \underline{H}^*)$．

この時，Σ に関する standard monomial 全体の集合が $\{\bar{M}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であれば，Σ^* に関する standard monomial 全体の集合は

$$\{\eta_i\}_{1 \leqq i \leqq m}, \qquad \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

であることに注意する．

以下，Aがideal Σ^*でgovernedされ，poset $\bar{H}^*$でgeneratedされるHodge alg.であることを示そう．($\bar{H}$odge-1)のspanningについては，(6)に注意すればよいし，linear independenceについては，$\eta_1, \cdots, \eta_m$がk上一次独立であることからわかる．次に，($\bar{H}$odge-2)について考えよう．まず，(9)の時には，$A/(\eta_1, \cdots, \eta_m)$で，$\bar{N} = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda M_\lambda$ $(a_\lambda \in k)$と表されれば，(6)より，Aでは，

$$(11) \quad N = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda M_\lambda + \sum_{i=1}^{m} b_i \eta_i \qquad (b_i \in k)$$

となる．従って，(7)と(8)によって，(11)は($\bar{H}$odge-2)の公理を満たす．また，(10)の時には，(6)より

$$(12) \quad \eta_i z_j = \sum_{l=1}^{i-1} b_l \eta_l \qquad (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq t)$$

$$(13) \quad \eta_i \eta_j = \sum_{l=1}^{i-1} b_l \eta_l \qquad (1 \leqq i \leqq j \leqq m)$$

と表されるから，この場合も，(7) と (8) によって，(12)，(13) は（Hodge-2）の公理を満たす．▨

系　$A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ が Cohen-Macaulay 環ならば，Aの Hodge alg. の構造で，対応する discrete Hodge alg. が，Cohen-Macaulay 環となるものが存在する．

〈注意〉定理の証明で，$\dim A=0$ の場合の Hodge alg. の構造の入れ方は，H の cardinality をできるだけ小さくしようと試みたものである．その様なことを考慮しなくてもよいならば，次の様なもっと簡単な Hodge alg. の構造も考えられる．$A=\bigoplus_{n\geq 0} A_n$ が0次元ならば，Aは k 上の vector 空間として有限次元，その基底で homog. element から成るもの $1, \eta_1, \cdots, \eta_n$ $(\dim_k A=n+1)$ を取り，$H=\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$，$\eta_i<\eta_j \underset{\mathrm{def.}}{\Leftrightarrow} \deg\eta_i>\deg\eta_j$，$\Sigma=(\eta_i\eta_j)_{1\leq i,j\leq n}$ とすればよい．

最後に，$\dim A = 0$ の時に，定理の証明の（第1段）に従って，A の Hodge alg. の構造を定める poset と ideal を計算する具体例を上げよう。

<u>例</u>　$A = k[x, y, z] = k[X, Y, Z]/I$，ただし，$I = (XY - XZ, X^2, Y^2, Z^3 - YZ^2, XZ^2, Z^4)$ とし，$\deg x = \deg y = \deg z = 1$ とする。

まず，$H = \{x, y, z\}$，$x > y > z$ とすると，$\Sigma = (y^2, yx, x^2, z^2y, z^2x, z^4)$ で standard monomials は，$1, z, y, x, z^2, zy, zx, z^3$ で，（Hodge-2）の関係式は，$y^2 = 0$，$yx = zy$，$x^2 = 0$，$z^2y = z^3$，$z^2x = 0$，$z^4 = 0$ となる。すると，$\Phi_N \neq \emptyset$ となる Σ の generator N は，z^2y であり，$\Phi_{z^2y} = \{z^3\}$ となる。

そこで，$w = z^3$（$\deg w = 3$）と置き，$H^\# = \{x, y, z, w\}$，$x > y > z > w$ とすれば，$\Sigma^\# = (y^2, yx, x^2, z^3, z^2y, z^2x, wz, wy, wx, w^2)$ で，standard monomials は，$1, z, y, x, z^2, zy, zx, w$ である。（Hodge-2）の関係式

は、$y^2=0$、$yx=zy$、$x^2=0$、$z^3=w$、$z^2y=w$、$z^2x=0$、$wz=0$、$wy=0$、$wx=0$、$w^2=0$ で、$\Sigma^\#$ の任意の generator N に対して $\Phi_N=\phi$ となる。

駄足ながら、この $\dim A=0$ の時の方法は、$\dim A>0$ の時にも適用できるか否か、即ち、$\dim A>0$ である場合にも、有限回の操作の後に、ideal Σ の任意の generator N に対して、$\Phi_N=\phi$ とすることが可能か否かは、現在のところ、未解決である。

Hodge alg. に関する話題として、最近、Vorst [9] は discrete Hodge alg. に関する Serre の問題を考え、次の様な結果

A を Noeth. 環 R 上の discrete Hodge alg. とし、$\forall n$ に対して、$R[T_1, \cdots, T_n]$ 上の有限生成 projective module は R から extend されるとせよ。この時、A 上の有限生成 projective module は R から extend される。

を得た。そこで、Vorst は、[9] の最後で、Question として、上記結果が一般の Hodge alg. に対して成立するか否かを問うている。しかし、任意の affine graded ring が Hodge alg. の構造を持つ以上、この Question は否定的である。もちろん、この Question が否定的と言うだけならば、[7] の affine semigroup ring の場合だけで話は片付く。例えば、$\mathbb{Q}[X^2, X^3]$ を考えればよい。

参 考 文 献

[1] D. Eisenbud : Introduction to algebras with straightening laws, in "Ring theory and algebra III", Dekker, 1980.

[2] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi : Hodge algebras, Astérisque 91 (1982).

[3] K. Baclawski and A. Garsia : Combinatorial decompositions of a class of rings, Adv. in Math. 39 (1981), 155-184.

[4] R. Stanley : Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 29 (1978), 57-83.

[5] S. Gōto, N. Suzuki and K. Watanabe : On affine semigroup rings, Japan. J. Math. 2 (1976), 1-12.

[6] S. Goto and K. Watanabe : On graded rings II, Tokyo J. Math. 1 (1978), 237-261.

[7] 日比孝之 : Affine semigroup rings and Hodge algebras, 修士論文, 広島大学, 1983.

[8] T. Hibi : Every affine graded ring has a Hodge algebra structure, preprint.

[9] T. Vorst : The Serre problem for discrete Hodge algebras, Math. Z. 184 (1983), 425-433.

有限次整拡大の研究

阪大理　吉田憲一

双有理拡大，特に双有理整拡大の研究は，Traverso によってあたえられた seminormalization によってかなり良くわかるに至ったと言えるが，この余勢をかって，有限次拡大にまで，その研究を拡大したいと思ったわけですが，しかしそううまくは行かない。明らかに双有理整拡大とは様子が異なるが，技術的には，conductor ideal を使う事が出来ない事もあるが，もっと基礎的な研究が不足しているからではないかとおもいます。もちろん有限次拡大を研究したいと言っても，まったく一般的に扱う事は不可能とおもいます，この講演では，まず一般論として，一つの結果を述べ，後半は，Kummer extension という強い条件のもとで今後の研究の展望を述べたいとおもい

ます。

§1. 一般論

以下我々の扱う可換環はネーター的整域で，ことわらぬかぎり，有限次整拡大を扱う。

まず次のよく知られた結果を証明抜きで述べる事から始めよう。

Proposition. R: Krull domain，A は R 上有限次整拡大で，代数的拡大次数を n とすれば，A の各元は n 次の monic relation over R を満たす。

ここで，R が Krull である事は必要である。又 A は R 上有限次整拡大で，代数的拡大次数を n とするとき，$\{\alpha \in A \mid \alpha$ は n 次の monic relation over $R\}$ は A の subring になるとは限らない。

以後この section では，$Q(A)$ と $Q(R)$ の間には non-trivial な中間体は存在しないとします。

又 $A \cap Q(R) = R$ とする。

Definition. $A \ni \alpha$ に対して，

$$J_\alpha := \{ a \in R \mid {}^\exists a_1, \cdots, a_n \in R,\ a\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \}.$$

J_α は R の ideal である。

Lemma. (i) $\alpha \in R \Rightarrow J_\alpha = R$

(ii) α は R 上 n 次の monic relation をみたす

$\Leftrightarrow\ J_\alpha = R$

(iii) J_α の prime divisors はすべて depth one

Proof (iii) のみを示しておこう。 $\alpha \notin Q(R)$ として，

α は $Q(R)$ 上 n 次の monic relation (これは unique) をみたす。それを

$$\alpha^n + \xi_1\alpha^{n-1} + \cdots + \xi_n = 0$$

とする。 I_ξ を ξ の分母 ideal を表わすとして，$J_\alpha = I_{\xi_1} \cap \cdots \cap I_{\xi_n}$，一方 J_α の prime divisor は，${}^\exists i$，I_{ξ_i} の prime divisor 故 depth one.

Corollary A の各元が R 上 n 次の monic relation をみたす $\Leftrightarrow$ $^\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ s.t. depth $R_\mathfrak{p} = 1$ に対して，α は $R_\mathfrak{p}$ 上 n 次の monic relation をみたす。従って local property として，n 次の monic relation をみたすことが得られる。

Proposition. A/R: flat であれば，A の各元は n 次の monic relation をみたす。

Proof. 我々の主張は local property なので，R は local ring と仮定してみせればよい。このとき A は rank n の free R-module である。そこで

$$A \hookrightarrow M_n(R)$$

なる環の表現が得られる。これは $A \ni \alpha$ に対して，A の free basis を $u_1, \cdots, u_n$ とすれば $\alpha u_i = \sum a_{ij} u_j$ として (a_{ij}) で与えられる。そこで線型代数のなつかしい結果から $\det(I_n X - (a_{ij})) = h(X)$ は n 次の R 上の monic polynomial で $h(\alpha) = 0$ //

Corollary. $A \ni \alpha$, α は n 次の monic relation をみたせば, $R[\alpha]$ の各元も々 n 次の monic relation をみたす。

Proof. $R[\alpha]$ は rank n の free R-module 故 flat.

A/R の中間環で R 上 flat なもの の内に, 最大のものがあるかというと, これはダメだが, unramified には最大のものがあることはよく知られている。今ここで考える環 R は無限体 k を含むとすれば, A/R が unramified であれば locally simple extension であるが, とくに R が normal であれば flat であることも良く知られた結果であったが, 次が成り立つ。

Proposition. A の各元は R 上 n 次の monic relation をみたし, A/R は locally simple extension であれば (従って unramified であればよい), A/R は flat である。

Proofは省略する。

以上で一般論は終わりとしましょう。

§2. Kummer extensionの場合。

§1は，可換環論Symposiumでの講演で話したものの一部であり，皆様に，なにか助言を下さい，と言ったところ数多くの人から素晴らしい助言をいただきましたが，その内の一人から，やはり強い条件のもとで考えなければだめでしょうというわけで，今度は一番，他分，強い条件であるKummer extensionというもののもとで考えましょう。

体 L/K がKummer extとは，(n次の)，1の原始n乗根 $\omega \in K$，そして，$L = K[\eta]$ $\eta^n \in L$。 L/K はcyclic group $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をもつGalois extensionである。 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{1 = \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}\}$ $\sigma_i(\eta) = \omega^i\eta$ で与えられる。

以下，$\mathrm{ch}\,K \nmid n$ と仮定し，$k \subset R$，k は無限体で $\omega \in k$ とする。

この§では，Aは商体としてLをもつとし，Rの商体はKとなるものとする。そして，ζはL/Kのgeneratorで$\zeta^n = a \in R$となるものとして，fixedしておく。

まず強力な味方である次の結果を述べておこう。

Proposition. AはG-stable $\Leftrightarrow$

$$A \ni {}^{\forall}\alpha,\quad \alpha = x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_{n-1}\zeta^{n-1} \Rightarrow x_i\zeta^i \in A$$

Proof $\Rightarrow$

$$A^n \ni \begin{pmatrix} \sigma_0(\alpha) \\ \sigma_1(\alpha) \\ \vdots \\ \sigma_{n-1}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1\zeta \\ \vdots \\ x_{n-1}\zeta^{n-1} \end{pmatrix}$$

で
$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{n-1} \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(\omega_i - \omega_j) \in k^{\times}$$

故invertible matrixですから$x_i\zeta^i \in A$を得る。

$\Leftarrow$ $\quad \sigma_1(\alpha) = x_0 + \omega(x_1\zeta) + \cdots + \omega^{n-1}(x_{n-1}\zeta^{n-1})$

$x_i\zeta^i \in A$ 故 $\sigma_1(\alpha) \in A$ $\therefore$ AはG-stable.

従って A が G-stable であれば

$$A = K_0 + K_1\zeta + \cdots\cdots + K_{n-1}\zeta^{n-1} \quad (\text{直和})$$

として表わされるが、ここで K_i は R の fractional ideal であるが、$K_0, \cdots, K_{n-1}$ は勝手に与えられるものではない。

Proposition. (i) K_0 は R を含む双有理整拡大環.

(ii) A の各元が n 次の monic relation over R をみたす $\Leftrightarrow$ $K_0 = R$ $\Leftrightarrow$ $A \cap K = R$.

(iii) A/R : flat $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} K_0 = R. \\ K_i : \text{invertible ideal} \end{cases}$

Proof は省略する。

先に $K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}$ は勝手に与えられるものではないと言ったが、$\zeta^n = a \in R$ としたので

$$R \subseteqq K_i \subseteqq a^{-1} R.$$

従って,

Corollary　$a \in R^\times$ であれば A/R は unramified で

$$A = R + R\zeta + \cdots + R\zeta^{n-1}$$

Corollary. A は G-stable で A/R が unramified

$\Rightarrow$ $A \cap K = R$ $(\Leftrightarrow K_0 = R)$ で A/R は flat.

Notation。 A が R 上 G-stable な ring と言うときは, $A \cap K = R$ なる G-stable な ring のこととしよう。

R 上 G-stable な rings には最大のものがあるかというと, 次の結果がある。

Definition. R が n-th root closed であるとは, $K \ni \alpha$, $R \ni \alpha^n \Rightarrow R \ni \alpha$.

このとき次が成り立つ。

Theorem　R は n-th root closed とすれば，R 上 G-stable な rings には最大のもの，$A = R + K_1\zeta + \cdots + K_{n-1}\zeta^{n-1}$ が存在する。

ここで $K_i = \{\alpha \in K \mid a^i\alpha^n \in R\}$ で与えられる。

従って R が normal であれば最大のものが存在する。特に R が regular であれば，この最大のもの，A は R 上 flat でもある。

さて多くの結果が得られたが，最後に unramified の事を論じよう。以下 A は R 上 G-stable.

Definition.　$H_A = \{\{a^i\alpha^n \mid \alpha \in K_i,\ (n,i)=1\}$ で生成された ideal$\}$

Lemma.　$\mathfrak{J} \in \operatorname{Spec} R$ に対して，

$A_{\mathfrak{J}}/R_{\mathfrak{J}}$: étale $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{J} \not\ni H_A$

実は $\sqrt{H_A}$ でよければ $(n, i)=1$ でなく、$i=1$ だけでよい。すなわち、

Proposition

$$\sqrt{H_A}=\sqrt{\{\{a\alpha^n \mid \alpha\in K_1\}\text{で生成された ideal}\}}$$

Theorem. A/R が flat であれば (K_1 が invertible であればよい)

$\sqrt{H_A}$ の prime divisors はすべて ht 1.

先の lemma から $\sqrt{H_A}$ は étale (~~我~~ 我々の場合、unramified から flat が出るので、unramified と同じ) である事の obstruction ideal だから、この theorem は Purity of branch locus が成り立つ、一つの条件と言える。

最後に A/R が unramified となるための条件を考えよう。

Theorem. A は R 上 G-stable な ring とする。このとき，

A/R : unramified $\Longleftrightarrow$ $^\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ に対して，

$^\exists \eta \in K\zeta$，

$A_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p} + R_\mathfrak{p}\eta + \cdots + R_\mathfrak{p}\eta^{n-1}$

$\Longleftrightarrow$ $A = R + K\zeta + (K\zeta)^2 + \cdots + (K\zeta)^{n-1}$

で $aK^n = R$

Corollary $\mathrm{Pic}\, R$ に n-torsion part が (0) 以外にないとすれば

A/R : unramified $\Longleftrightarrow$ $A = R + R\zeta + \cdots + R\zeta^{n-1}$

$\zeta^n = a \in R^\times$

以上 §2 には証明をつけずに書いたが，これらの結果は論文として発表する予定ですので，それを見て下さい。これ以外にも Kummer extension という条件のもとでは，R の fractional ideals の性質として，G-stable な ring A が決定されることがわかるが，もう少し一般化する事も出来るが，今はそう急がずに，少し

ずっ，少しずつこの有限次整拡大の研究を続けるつもりでいます。

F-pure型の ring と rational singularity との関係について.

名工大　渡辺 敬一

"F-pure ring" と "rational singularity" とは全く関係のない概念のように見えるが、local cohomology の観点からは類似の性質をもち、しかも rational singularity の方が強い性質であるように見える。そこで Hochster の、次の予想があった.

<u>予想</u> rational singularity ⟹ F-pure 型か?

筆者はこの予想を2次元で証明しようとして、意外な事に反例を発見した. 本稿では、F-pure ring, F-pure型の ring の性質を概観し、次に上の予想の反例を述べ、また上の予想を少し弱めた予想の部分的証明を試みる.

§ 1. F-pure rings について.

定義 1.1. A が標数 $p>0$ の体を含む可換環のとき, A が F-pure $\Leftrightarrow$ Frobenius 準同型, $F: A \to A$, $F(a) = a^p$ が pure

但し, 一般に ring homomorphism $A \xrightarrow{f} B$ が pure $\Leftrightarrow$ 任意の A 加群 M に対して, $M = M \otimes_A A \xrightarrow{1 \otimes f} B \otimes_A M$ が injective.

$f: A \to B$ が faithfully flat, 又は f が injection で, $\exists r: B \to A$, A-module hom. で, $r \circ f = 1_A$ なるとき, f は pure である.

F-pure ring の簡単な性質として,

(1.2) (0) A が F-pure $\Rightarrow$ A は reduced.

(i) regular local ring は F-pure (Kunz により, $F: A \to A$ が faithfully flat になる.)

(ii) F-pure ring の pure subring は再び F-pure となる. ($A \hookrightarrow B$ が pure のとき, A は B の pure subring であるという.)

特に, regular local ring 又は多項式環の linearly reductive 代数群 (とくに, 位数が p でわりきれない有限群) による invariant subring は F-pure

である。

(iii) $I \subset k[[x_1, \cdots, x_n]] = R$ (又は $I \subset k[x_1, \cdots, x_n] = R$) が square-free monomials で生成された ideal のとき, R/I は F-pure である。 ([3], 実際に retract $r : (R/I) \to (R/I)^{\ell}$ が簡単に作れる。)

$\dim A = 1$ のとき, (iii) の逆が成立する。即ち,

<u>定理</u> ([2]). $(A, \mathfrak{m})$ が 1 次元 complete local ring, $A/\mathfrak{m} = k$ が代数閉体で, A が F-pure

$$\Longrightarrow \quad A \cong k[[X_1, \cdots, X_n]]/(X_iX_j \mid i \neq j).$$

(1.3). F-pure ring の重要な性質として,

<u>定理</u> ([3], 2.1, 2.2) A が F-pure, I が A の ideal $\Longrightarrow$ F が induce する map $H^i_I(A) \xrightarrow{F} H^i_I(A)$ はすべての i に対し <u>injective</u>.

特に, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が体 k 上の graded ring で, $\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$ とすると, $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ は Artinian module だから, R が F-pure $\Rightarrow$ $[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_n = 0$ $(n > 0)$.

$$a(R) = \max\{n \mid (H^d_{\mathfrak{m}}(R))_n \neq 0 \quad (d = \dim R)\}$$

とおくと, R が F-pure $\Rightarrow a(R) \leqq 0$ となる。

この事実は R が rational singularity $\Rightarrow a(R) < 0$ ([4], Th. 2.2) との類似を感じさせる。

最近の R. Fedder の論文 [1] は F-pure rings に関するいくつかの基本的結果を与えている。

(1.4) ([1], 1.1, Cor) $F: A \to A$ が finite のとき, A が F-pure $\Longleftrightarrow$ A^p は A^p-module として A の直和因子.

特に $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が体 k 上の graded ring のとき, R が F-pure $\Longleftrightarrow$ $\exists \rho: R \longrightarrow R^p$, graded R^p-mod. hom. で, $\forall x \in R^p$, $\rho(x) = x$.

(1.5) ([1], 1.12) $(S, \mathfrak{m})$ が標数 p の regular local ring, $R = S/I$ のとき,

$$R \text{ が F-pure} \Longleftrightarrow I^{[p]} : I \not\subset \mathfrak{m}^{[p]}$$

但し, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ のとき, $I^{[p]} = (x_1^p, \ldots, x_n^p)$.

(1.6) Cor. $R = S/fS$ のとき, R が F-pure $\Longleftrightarrow f^{p-1} \notin \mathfrak{m}^{[p]}$.

例. (1.7). $R = k[x, y, z]/(x^a + y^b + z^c)$ $(a, b, c \geq 2)$ のとき, $(ch(k) = p$ とする$)$

(i) $1/a + 1/b + 1/c < 1$ のとき, $x \in R_{bc}$, $y \in R_{ac}$, $z \in R_{ab}$ とするように R を graded ring にすると, $a(R) = -bc - ac - ab + abc > 0$. ゆえに (1.3) により, R は F-pure でない.

(ii) $1/a + 1/b + 1/c = 1$ のとき,

$(a, b, c) = (2, 3, 6), (3, 3, 3)$ のとき, R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod 3$.

$(a, b, c) = (2, 4, 4)$ のとき, R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p \equiv 1 \pmod 4$.

(iii) $(a, b, c) = (2, 2, n)$ のとき, R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p \neq 2$.

$(a, b, c) = (2, 3, 3), (2, 3, 4)$ のとき, R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p \neq 2, 3$,

$(a, b, c) = (2, 3, 5)$ のとき, R が F-pure $\Leftrightarrow$ $p \neq 2, 3, 5$.

後で示すように, "F-pure" という性質はかなり気難かしい。もう少し扱い易い性質として "F-injective" が定義される。

<u>定義</u> (1.8) ([1], §3). (R, m) が標数 $p > 0$ の local ring のとき, R が <u>F-injective</u> $\Leftrightarrow$ $\forall i$, $F : H^i_m(R) \to H^i_m(R)$ が injective.

(1.9). (a) R が F-pure $\Rightarrow$ R は F-injective ((1.3)).

(b) R が Gorenstein ring のとき, R が F-inj.

$\Longrightarrow$ R は F-pure ([1], 3.3).

"F-injective" の扱い易さとして,

(1.10). <u>定理</u> ([1], 3.4) f が R の non-0-divisor のとき,

(i) R が Cohen-Macaulay, $R/(f)$ が F-injective

$\Longrightarrow$ R は F-injective.

(ii) R が Gorenstein, $R/(f)$ が F-pure $\Longrightarrow$ R も F-pure.

$R/(f)$ が F-pure でも R が F-pure <u>でない</u>例が [1] に与えられているがこの例の R は integral domain でなく, また有限個の p にのみ反例になるので, 完全に満足できる"反例"ではなかった。

rational singularity は標数 0 の概念だから, "関係" という以上, 標数 0 の概念を定義する必要がある。

<u>定義</u> (1.11). (i) A が mixed characteristic の ring, $R = A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ は ideal) のとき, R が open F-pure 型 (resp. F-inj. 型) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, U \subset \mathrm{Max}(A)$, Zariski open subset, s.t. $\forall\, \mathfrak{m} \in U$, $R \otimes_A A/\mathfrak{m}$ は

F-pure (resp. F-injective).

U を open subset の代りに (Zariski top.) で, dense subset とすると, dense F-pure 型, dense F-injective 型 が定義できる。

(ii) K が標数 0 の体, $R = K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ のとき, R が open F-pure 型 $\Leftrightarrow$ $\exists A \subset K$, A は mixed char. の subring で, R は A 上 def. され, ($R = K \otimes_A R_0$, $R_0 = A[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$). R_0 は (i) の意味で open F-pure 型. dense F-pure (F-inj.) 型も同様に定義される。

定理 (1.12) ([1], 2.5) $R = K[X_1, \dots, X_n]/(f)$ が標数 0 の体 K 上の graded ring (i.e. f は quasi-homogeneous) で, isolated singularity をもつとき,

(i) $a(R) < 0 \Leftrightarrow$ R は open F-pure 型.

(ii) $a(R) = 0 \Leftrightarrow$ R は dense F-pure 型, だが, open F-pure 型 でない.

(iii) $a(R) > 0 \Rightarrow$ R は dense F-pure 型でない.

Remark. ([5], Th 1.11). (1.12) の仮定の下に,

(i) $a(R) < 0 \Leftrightarrow$ R は rational singularity

(ii) $a(R) = 0 \Leftrightarrow \delta_m(R) = 1 \quad (\forall m > 0)$.

(iii) $a(R) > 0 \Leftrightarrow \delta_m(R) \to +\infty \quad (m \to +\infty)$.

§2. 2次元 normal graded rings の場合.

この§では, "rational singularity ⟹ F-pure型 (又は F-inj. 型) か ?" という問題を2次元 normal graded ring の場合に考える。勿論, 一般次元や2次元 normal で graded でない場合にも考えたいのだが, 筆者にはこの場合だけで十分難かしい.

(2.1)
R を体 k 上有限生成 normal graded ring とすると, $R = R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n \hookrightarrow k(X)[T]$ と書ける。ここで, $X = \mathrm{Proj}(R)$, D は有理係数の X 上の Weil divisor である $N > 0$ に対し ND が ample Cartier divisor になるものとする。

($R(X, D)$ という記法については [4a] 参照).

R が $\overbrace{\text{rational}}^{\text{(2次元.)}}$ $\overbrace{\text{singularity}}^{(k=\bar{k})}$ とすると(*), $X = \mathbb{P}^1$ として良い. (R が rat! sing. $\Leftrightarrow$ $a(R) < 0$ $\Rightarrow$ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $\Leftrightarrow$ $X \cong \mathbb{P}^1$). なお, $\mathrm{supp}(D) \subset \mathbb{P}^1$ の座標が, k の subring A の元で書けているとき, $R(X, D)$ も A 上定義されることが容易にわかる。また, $D = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot P_i$, P_i の座標が A の元で表わされ, $m \in \mathrm{Max}(A)$ とする。このとき, P_i の mod m へ

(*) 以下 $k = \bar{k}$ は仮定する。

の reduction を $\mathcal{P}_i' \in \mathbb{P}^1_{(A/m)}$, $\mathcal{P}_i' \neq \mathcal{P}_j'$ $(i \neq j)$ のとき, $R(X, D)$ の A/m への reduction $= R(\mathbb{P}^1_{(A/m)}, D')$, 但し $D' = \sum_{i=1}^n r_i \mathcal{P}_i'$.

(2.2) 例. $D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} \cdot \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i \longleftrightarrow a_i \in K$ $(a_i \in \mathbb{A}^1_K \subset \mathbb{P}^1_K$ と思う) のとき, $R = R(\mathbb{P}^1_K, D) = K[T, \frac{1}{x - a_i} \cdot T^{d_i} \mid i = 1, \dots, n]$
$\cong K[T, X_1, \dots, X_n] / (X_i X_j - \frac{1}{a_i - a_j}(X_i \cdot T^{d_j} - X_j \cdot T^{d_i}) \mid i \neq j)$.
(但し, $K(\mathbb{P}^1) = K(x)$ とする.)

このとき, $R/TR \cong K[X_1, \dots, X_n]/(X_i X_j \mid i \neq j)$.
$\mathrm{char}(K) = p > 0$ のとき, (1.2) (iii) より R/TR は F-pure, 従って F-injective. 従って (1.10) より R は F-injective.
$\mathrm{char}(K) = 0$ のときは, R は open F-injective 型である.
(mod. m で $a_i \equiv a_j$ となる m を除く).

(2.3) 命題. $R = R(\mathbb{P}^1_K, D)$, $D \geqq 0$ とする.
$(D \geqq 0 \iff R \ni T$, D が $D' \geqq 0$ と linearly equivalent $\iff R_1 \neq 0)$ このとき,

(i) $\mathrm{char}(K) = p > 0$ なら, R は F-injective

(ii) $\mathrm{char}(K) = 0$ のとき, R は open F-injective 型.

(証明) (i) を示せば十分. $D = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{q_i} \cdot \mathcal{P}_i$ とする
$(q_i, p_i > 0$, $q_i, p_i \in \mathbb{Z}$, (q_i, p_i) は互いに素) $^\forall p_i = 1$ のときは (2.2). 一般には $d = \prod_{i=1}^n p_i$ とすると,

$\frac{1}{d}\cdot D = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i'}\cdot P_i$ ， $q_i' = \frac{1}{q_i}\cdot\frac{d}{p_i} \in \mathbb{Z}$． また， $dn(\frac{1}{d}\cdot D)$ $= nD$ だから， $R(\mathbb{P}^1, D) \cong R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{d}D)^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0}(R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{d}D))_{nd}$． $R' = R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{d}D)$ は (2.2) により F-injective だから $R = (R')^{(d)}$ も F-injective．

(注). (i) $D \geq 0$ のとき， $\forall n \geq 0$, $\lfloor nD \rfloor \geq 0$ （$\lfloor nD \rfloor$ は nD の整数部分） $\Rightarrow \forall n \geq 0$, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(nD)) = 0$ $\Rightarrow a(R(\mathbb{P}^1, D)) < 0$． ゆえに R は rational singularity である。

(ii) $\dim R = 2$ のとき， 特異点解消の理論は， 標数 $p > 0$ でも標数 0 の同様にうまく行くから， rational singularity も標数 0 のときと同様に定義できる。 しかし， $R = k[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$ は， 任意標数で rational singularity だが (1.7) で見たように， $p = 2, 3, 5$ では R は F-pure で（従って F-injective でも） ない．

(2.4) さて， $R(\mathbb{P}^1, D)$ がいつ F-pure （又は F-pure 型） か？ という問題を考えよう。 もし $R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure とすると， (1.4) により， R^p は graded R^p-module として， R の直和因子となる。 従って， $R = R^p \oplus V$ と graded R^p-module

として直和分解する。各次数ごとに見ると、$V_{np} \subset R_{np}$ $(n=0,1,2,\cdots)$が存在して、$V_{np} \oplus (R_n)^{\ell} = R_{np}$、かつ $(R_m)^{\ell} \cdot V_{np} \subset V_{(m+n)\ell}$ となる。更に、$D \geqq 0$ の時を考えると、$T \in R_1$ だから、$T^{\ell} \in R_p$
$\therefore$ $f \cdot T^{n\ell} \in R_{np}$ のとき、$f \cdot T^{n\ell} \in V_{n\ell} \Leftrightarrow f \cdot T^{(n+m)\ell} \in V_{(m+n)\ell}$。ゆえに、このとき、$S = \bigcup_{n \geqq 0} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(nD)) \subset k(\mathbb{P}^1)$ とおくと、$R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure $\Leftrightarrow$ $S = S^{\ell} \oplus W$ という S^{ℓ}-module としての直和分解で、任意の $n \geqq 0$ に対して、

$$(*)\quad H^0(\mathcal{O}(npD)) = (H^0(\mathcal{O}(nD)))^{\ell} \oplus (W \cap H^0(\mathcal{O}(npD)))$$

をみたすものが存在する。

<u>記号</u>. 以下に於て、$k(\mathbb{P}^1) = k(x)$、$a \in \mathbb{A}^1$ に対して、$\mathrm{div}(x-a) = (a) - (\infty)$ とする。$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(nD)) = \{ f \in k(x) \mid \mathrm{div}(f) + nD \geqq 0 \}$. また、$\llcorner nD \lrcorner$ は nD の整数部分とする。例えば、$D = \frac{1}{2}(\infty) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{7}(-1)$ のとき、$\llcorner 9D \lrcorner = 4(\infty) + 3(0) + (-1)$.

小手調べとして、$D = \frac{1}{2}(\infty) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{7}(-1)$、$p = 5$ のとき、$R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure <u>でない</u>事を示そう。
(このとき、$\overbrace{R(\mathbb{P}^1, D)}^{\text{任意標数で}} = k[xT^2, x^{-1}T^3, \frac{1}{x+1} \cdot T^7, T]$
$\cong k[X, Y, Z, T]/(XY - T^5, XZ - T^9 + T^2Z, YZ - YT^7 + ZT^3)$

であり，任意標数で $R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure <u>でない</u>ことが後に示される。）次の表を見よう.

n	$\lfloor 5nD \rfloor$	$H^0(\mathcal{O}(5nD))$ の basis	$(H^0(\mathcal{O}(nD)))^5$ の basis
1	$2(\infty)+(0)$	$1, x, x^2, x^{-1}$	1
2	$5(\infty)+3(0)+(-1)$	$1, x, \cdots, x^5, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, (x+1)^{-1}$	$1, x^5$
3	$7(\infty)+5(0)+2(-1)$	$1, x, \cdots, x^7, x^{-1}, \cdots, x^{-5}, (x+1)^{-1}, (x+1)^{-2}$	$1, x^5, x^{-5}$
5	$12(\infty)+8(0)+3(-1)$	$1, x, \cdots, x^{12}, x^{-1}, \cdots, x^{-8}, (x+1)^{-1}, (x+1)^{-2}, (x+1)^{-3}$	$1, x^5, x^{10}, x^{-5}$
6	$15(\infty)+10(0)+4(-1)$	$1, x, \cdots, x^{15}, x^{-1}, \cdots, x^{-10}, (x+1)^{-1}, \cdots, (x+1)^{-4}$	$1, x, x^{10}, x^{15}, x^{-5}, x^{-10}$

さて，我々は W の basis を探すのだが，まず，$H^0(\mathcal{O}(5D))/H^0(\mathcal{O}(D))^5$ の basis が x, x^2, x^{-1} である事より，$\exists a_1, a_2, b \in k$，$x+a_1$，$x^2+a_2$，$x^{-1}+b_1 \in W \cap H^0(\mathcal{O}(5D))$.

同様に，$W \cap H^0(\mathcal{O}(10D))$ の basis は，$x+a_1$, x^2+a_2, $x^3+a_3+c_3x^5$, $x^4+a_4+c_4x^5$ $x^{-1}+b_1$, $x^{-2}+b_2+d_2x^5$, $x^{-3}+b_3+d_3x^5$ $(x+1)^{-1}+e_1+f_1x^5$ とできる筈である（$a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in k$）

ところが，W は $(S)^5$-module，$x^5 \in (S)^5$ だから，

x^2+a_2, $x^{-3}+b_3+d_3x^5 \Rightarrow (x^2+a_2) - x^5(x^{-3}+b_3+d_3x^5)$

$= a_2 - b_3x^5 - d_3x^{10} \in W$. 一方，もちろん，

$a_2 - b_3x^5 - d_3x^{10} \in (S)^5$ $\therefore$ $a_2 - b_3x^5 - d_3x^{10} \in W \cap (S)^5$

$=(0)$. 従って，$a_2 = b_3 = d_3 = 0$ でなければならない．同様の議論を行うと，W の basis として，

$x+a$, x^2, $x^3+b_2x^5$, $x^4+b_1x^5$

(もっと一般には, $(x+a)x^{5n}$, x^{5n+2}, $(x^3+b_2x^5)x^{5n}$, $(x^4+b_1x^5)\cdot x^{5n}$)の形の元をとれる事が示せる。

次に, $W\cap H^0(\mathcal{O}(25D))$の, $(x+1)^{-3}+f(x^5)$ の形の元に注目しよう. $(x+1)^5=x^5+1\in(S)^5$ だから, $(x+1)^{-3}+f(x^5)\in W$ とすると, $((x+1)^{-3}+f(x^5))(x^5+1)$ $=x^2+2x+1+(x^5+1)f(x^5)\in W$. $x^2, 2(x+a)$ を引き算すると, $1-2a+(x^5+1)f(x^5)\in W\cap(S)^5=(0)$. $f(x^5)=f_{-1}x^{-5}+f_0+f_1x^5+f_2x^{10}$ $(f_i\in k)$ より, $f(x^5)=0$ が容易にわかり, $1-2a=0$ でなければならない. しかし, $W\cap H^0(\mathcal{O}(30D))\ni(x+1)^{-4}+g(x^5)$ について同様にすると, $g(x^5)=0$, $(x^5+1)(x+1)^{-4}-(x+a)$ $=(x+1)-(x+a)=1-a=0$ を得る。$1-2a=0$と$1-a=0$ は明らかに両立し得ないから, 我々の求める直和分解 $S=(S)^5\oplus W$ は存在し得ない事. 即ち, $R(\mathbb{P}^1, D)$ は F-pure で有り得ない事がわかる。これを一般化すると, 次の定理を得る。

(2.5) 定理. $D = r_1(\infty) + r_2(0) + r_3(-1)$ ($r_i \in \mathbb{Q}$, $0 < r_i < 1$ $(i=1,2,3)$) とする。$l_i = \max\{l \in \mathbb{N} \mid l r_i < 1\}$ とおくと，標数 $p > 0$ で，$R(\mathbb{P}^1, D)$ が

$$\text{F-pure} \iff [p l_1 r_1] + [p l_2 r_2] + [p l_2 r_2] \leqq 2p-2$$

(但し，$r \in \mathbb{Q}$ に対し，$[r] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqq r\}$)

従って，標数 0 で，$R(\mathbb{P}^1, D)$ が

$$\text{open F-pure 型} \iff l_1 r_1 + l_2 r_2 + l_3 r_3 < 2$$

$$\text{dense F-pure 型} \iff l_1 r_1 + l_2 r_2 + l_3 r_3 \leqq 2.$$

(2.6) 例. (a) $D = \frac{1}{2}(\infty) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{n}(-1)$ のとき，

$n = 2 \Rightarrow [\, R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure $\iff p \neq 2\,]$

$n = 3, 4 \Rightarrow [\quad$ 〃 $\quad \iff p \neq 2, 3\,]$

$n = 5 \Rightarrow [\quad$ 〃 $\quad \iff p \neq 2, 3, 5\,]$

$n = 6 \Rightarrow [\quad$ 〃 $\quad \iff p \equiv 1 \pmod 6\,]$

$n \geqq 7 \Rightarrow R(\mathbb{P}^1, D)$ は任意の標数 p で F-pure でない

(b) $D = \frac{1}{2}(\infty) + \frac{1}{3}(0) + \frac{m}{7}(-1)$ のとき，

$m = 1, 2, 3, 6$ ならば $R(\mathbb{P}^1, D)$ は任意の標数 $p > 0$ で F-pure でない。$m = 4$ のとき，$R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure $\iff p \neq 2$，$m = 5$ のとき $R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure $\iff p \neq 2, 3$.

(定理 (2.5)の証明) (2.4) に述べた例と同じ議論をすると, $S = S^{\ell} \oplus W$ と (2.4)の(*)を満すように直和分解したとすると, W の basis として,

$$(+)\begin{cases} x^i + a_i & (1 \leq i \leq p-1-[p\ell_2 x_2]) \\ x^i & (p-[p\ell_2 x_2] \leq i \leq [p\ell_1 x_1]) \\ x^i + b_i \cdot x^{\ell} & ([p\ell_1 x_1]+1 \leq i \leq p-1) \end{cases}$$

の形の元がとれる事がわかる ($a_i, b_i \in k$). 一方, $1 \leq j \leq [p\ell_3 x_3]$ に対して, $(x+1)^{-j} + \sum_{n=-s}^{t} c_n x^{np}$ の形の元が W に属する。$(x+1)^{\ell}\{(x+1)^{-j} + \sum c_n x^{\ell n}\}$ は (+)の形の元の一次結合で書ける筈だから,

$p-j \leqq [p\ell_1 x_1]$ のとき, $c_n = 0 \quad (\forall n)$

$\ell-1 \geqq p-j \geqq [p\ell_1 x_1]+1$ のとき, $c_n = 0 \quad (n \neq 0)$で,

$[p\ell_3 x_3] \geqq j \geqq \ell-[p\ell_1 x_1]$ のとき,

$$(x+1)^{\ell-j} = \sum_{i=p-[p\ell_2 x_2]}^{\ell-j} \binom{\ell-j}{i} x^i + \sum_{i=1}^{p-1-[p\ell_2 x_2]} \binom{p-j}{i} (x^i + a_i)$$

$\ell-1-[p\ell_1 x_1] \geqq j \geqq 1$ のとき,

$$(x+1)^{\ell-j} + c_j(1+x^{\ell}) = \sum_{i=[p\ell_1 x_1]+1}^{\ell-j} \binom{\ell-j}{i} (x^i + b_i x^{\ell}) + \sum \binom{\ell-j}{i} x^i + \sum \binom{\ell-j}{i} (x^i + a_i)$$

と書けるから, (+)の定数 a_i, b_i は次のような連立一次方程式をみたさねばならない. (簡単のため, $A = p-1-[p\ell_2 x_2]$, $B = [p\ell_1 x_1]+1$, $C = \ell-[p\ell_3 x_3]$ とおく)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \quad p-B \quad & \quad A \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} p-B \\ \\ \\ B-C \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
-\binom{p-1}{p-1} & \cdots & & -\binom{p-1}{B} & \binom{p-1}{A} & \cdots & & \binom{p-1}{1} \\
 & -\binom{p-2}{p-2} & \cdots & -\binom{p-2}{B} & \binom{p-2}{A} & \cdots & & \binom{p-2}{1} \\
 & & & \vdots & & & & \\
 & & & -\binom{B}{B} & \binom{B}{A} & \cdots & & \binom{B}{1} \\
\hline
 & & & & \binom{B-1}{A} & \cdots & & \binom{B-1}{1} \\
 & O & & & & \cdots\cdots & & \\
 & & & & \binom{C}{A} & \cdots & & \binom{C}{1}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} b_{p-1} \\ \vdots \\ b_B \\ \hline a_A \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
\qquad (++)
$$

この行列は、$\left(\binom{i}{j}\right)_{\substack{1\le i\le p-1 \\ 1\le j\le p-1}}$ の最初の $p-B$ 列の符号を変え、中間の $(B-A-1)$ 列と下方の $C-1$ 列を取り除いたもので、$\det\left(\binom{i}{j}\right)=1$ はすぐわかるから、連立方程式 (++) が解をもつ $\Leftrightarrow$ $A \geqq B-C$ $\Leftrightarrow$ $[p\ell_1x_1]+[p\ell_2x_2]+[p\ell_3x_3] \leqq 2p-2$. (証明終)

(2.6) Remark. $n \geqq 4$ に対して、$D=\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i)$ とおくと、"未知数"の個数 $(2p-2)-[p\ell_1x_1]-[p\ell_2x_2]$ に対し、"方程式の個数"は $[p\ell_3x_3]+\cdots+[p\ell_nx_n]$ で(方程式の"独立性"がまだ言えてないのだが)、予想としては、$n=4$, $x_i=\frac{1}{2}$ $(i=1,\ldots,4)$ 以外は決して F-pure でなく、$D=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}\cdot(\alpha_i)$ のときも dense F-pure 型で open F-pure 型でないと思う.

(2.7) $D \geqq 0$, $P \in \mathbb{P}^1$ のとき, $R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-pure $\Leftrightarrow$ $R(\mathbb{P}^1, D+P)$ が F-pure は容易にわかる.

$D \geqq 0$ でないときの処理方法はまだ解らない.

§ 3. F-injective 型について、及び、いくつかの予想.

(3.1) $R(\mathbb{P}^1, D)$ が rational singularity $\Rightarrow$ F-inj. 型か? という問を考える。$D \geqq 0$ のときは (2.3) で示したから, $D = -(\infty) + \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i)$, $0 < x_i < 1$ として良い. (もし $D = -s\cdot(\infty) + \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i)$, $s \geqq 2$, $0 < x_i < 1$ とすると, $\lfloor D \rfloor = -s\cdot(\infty)$ だから, $H^1(\mathcal{O}(D)) \neq 0$, $a(R) > 0$ となり rational singularity でなくなる。従って, 「$R(\mathbb{P}^1, D)$ が F-inj. 型」を示すためには,

$$F: H^1(\mathcal{O}(-D)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}(-pD))$$

が injective である事を示せば十分である $(p \gg 0)$.

(3.2) F を実際に記述するために, $H^1(\mathcal{O}(-D))$ を $\mathbb{P}^1$ の open covering を使って記述しよう.

$U_0 = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$, $U_1 = \mathbb{P}^1 - \{0\}$ とおくと, $H^1(\mathcal{O}(-D))$ は

$$H^0(U_0, \mathcal{O}(-D)) \oplus H^0(U_1, \mathcal{O}(-D)) \to H^0(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}(-D))$$

の cokernel となる。$\lfloor -D \rfloor = (\infty) - \sum_{i=1}^{n} (a_i)$ 簡単のため

$\forall a_i \neq 0, \infty$ とすると，$f = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ とおくと，

$H^0(U_0, \mathcal{O}(-D)) = f \cdot k[x]$，$H^0(U_1, \mathcal{O}(-D)) = x \cdot (\prod_{i=1}^{n}(x^{-1} - a_i^{-1})) \cdot$

$\times k[x^{-1}] = x^{-n+1} f\, k[x^{-1}]$，$H^0(U_0 \cap U_1, \mathcal{O}(-D)) = f \cdot k[x, x^{-1}]$

だから，$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-D))$ の basis は $x^{-1}f, \ldots, x^{-n+2}f$ ととれる。同様に，$\lfloor -pD \rfloor = p \cdot (\infty) - \sum_{i=1}^{n} l_i (a_i)$，$g = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{l_i}$，

$f^p = g \cdot h$ とおくと，$H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-pD))$ の basis は，$x^{-1}g, \ldots, x^{p+1-\sum_{i=1}^{n} l_i} \cdot g$ ととれる。∴ $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-D))$ の元の代表元を $\sum_{i=1}^{n-2} c_i \cdot x^{-i} \cdot f$ であらわすと，$F(\sum_{i=1}^{n-2} c_i x^{-i} f)$

$= \sum c_i^p x^{-pi} f^p = \sum (c_i^p x^{-pi} h) g$ ゆえに，"F が inj." と，「$c_i^p x^{-pi} h$ の x^{-j} の係数 $(1 \leq j \leq \sum_{i=1}^{n} l_i - p - 1)$ がすべて 0 ならば $c_1 = \cdots = c_{s-2} = 0$」が同値になる。$a_i$ を 0，∞ におくと，次は容易に出る。

(3.3) $D = -(\infty) + \sum_{i=1}^{n} r_i (a_i)$ $(0 < r_i < 1, \sum r_i > 1$，$R(\mathbb{P}^1, D)$ は rational singularity) とし，$n \leqq 3$，又は (a_i) が general な点ならば，$R(\mathbb{P}^1, D)$ は F-injective 型である。

以上述べてきた限りでは次が成立

<u>予想</u>. rational singularity は F-injective 型か？

(3.4) 以上述べて来たのは graded ring の場合だが，graded ring でない 2次元特異点の典型的な例として "cusp singularity" がある。resolution が rational curve の輪を exceptional curves としてもつ singularity を cusp singularity というが，emb. dim. $\leqq 5$ のとき，中村郁氏の結果から，cusp sing. は F-pure である事がわかっている。emb. = 3 のときは cusp. sing. は

$$xyz + x^p + y^q + z^r = 0 \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\right)$$

と anal. isom. で，これは (1.6) を見ても，任意の標数で F-pure となる。一般には，

<u>予想</u>. $\mathcal{O}$ が cusp sing. のとき $\mathcal{O}$ の filtration $F^{\cdot}$ が存在して，対応する associated graded ring $G^{\cdot}(\mathcal{O}) \cong k[\Delta]$，$\Delta$ は simplex で $|\Delta| \cong S^1$?

emb$(\mathcal{O}) \leqq 5$ のとき中村氏の計算より上が正しい．

曲面の特異点の分類理論より，次の予想も大変もっともらしい．

<u>予想</u>. $\mathcal{O}$ が 2次元 normal Gorenstein local ring (標数0). もし $\mathcal{O}$ が F-pure 型なら，$\mathcal{O}$ は

(a) rational double point (b) cusp singularity

(c) simply elliptic singularity のいずれかである ?

References.

[1] R. Fedder : F-purity and rational singularity, TAMS 278 (1983), 461 ~ 480

[2] S. Goto - K. Watanabe : The Structure of One-Dimensional F-pure Rings, J. Alg. 49 (1977), 415 ~ 421

[3] M. Hochster & J. L. Roberts : The purity of the Frobenius and Local Cohomology, Adv. in Math. 21 (1976), 117 ~ 172.

[4] K-i. Watanabe : Rational singularities with k^*-action, in "comm. alg.", Proc. Trento Conf., Dekker 1983.

[5] Kimio Watanabe : On plurigenera of normal isolated singularities, I, Math. Ann. 250 (1980), 65 ~ 94.

Tangent cone の Buchsbaum 性について

日大・文理　後藤四郎

以下（A，$\mathfrak{m}$）によって、Noether 局所環をあらわし、さらに $d = \dim A$，$G = G_{\mathfrak{m}}^{\cdot}(A)$，$M = G_{+}$ とおきます。考えたい問題は何かと申しますと，

問　局所環 G_M が Buchsbaum であれば、A も Buchsbaum となるのか？

という問いです。ここで Buchsbaum 局所環というのは、いろいろな特徴付けや判定法がありますが、定義としては，差

$$I(A) = l_A\left(\frac{A}{\mathfrak{q}}\right) - e_{\mathfrak{q}}(A)$$

が、A のパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ のとりかたによらないで、一定となる —— を採用した

いと思います。基本的なこととして、Aが Buchsbaum であれば、

(1) Aは quasi-Buchsbaum である，すなわち $\mathfrak{m}\cdot H_{\mathfrak{m}}^{i}(A)=(0)$ $(i\neq d)$ となる。

(2) $I(A) = \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\cdot \ell_A(H_{\mathfrak{m}}^{i}(A))$.

(3) $\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A - \{\mathfrak{m}\}$ なら $A_{\mathfrak{p}}$は Cohen-Macaulay で $\dim A_{\mathfrak{p}} = d - \dim \frac{A}{\mathfrak{p}}$ となる。

といったことが知られています。

重複度の理論を純代数的にとり扱えるようにしたいというのが、局所環論の出発点の一つではないのかと考えているのですが、このような視点にたつ時、差 $\ell_A(\frac{A}{\mathfrak{q}})-e_{\mathfrak{q}}(A)$ を control したい —— たとえば一定になるのは、どのような環なのか知りたいというのは、私には魅力的な問いに思えるのです。

Cohomology 論に基礎をおく局所環論には、もちろんいろいろなものがありますが、それらは —— 雑な言い方ですが —— 正則

局所環のもっている様々な良い性質を，formulationを工夫することによって，何とかして全然正則ではない局所環にも拡張して，代数学にとどまらず，できれば他の分野の問題を解くのにも使えるようにしたいというのが目的であるような気がします。これらの理論の中で，上の問いにどのような解答が与えられているかをふり返ってみますと，

正則性や　C-I，Gorenstein，C-M，あるいは正規性

といった性質については，すべてyesの答が出ています。そこでBuchsbaumの場合でも，当然yesであってほしい（そうなる方が自然なように私には思える）のですが，残念なことに反例があって一般には正しくないことがわかっています。

反例（M. Steurich）$A=k[[X,Y,Z]]/(X^2, XY, XZ-Y^3, Y^4, XZ^2)$.

この例では，$d=1$ で $H_{\mathfrak{m}}^{0}(A)=xA$ となります。$X\mathfrak{z}\neq 0$ ですから，A は Buchsbaum ではありません。しかし、$G=k[X,Y,Z]/(X^2,XY,XZ,Y^4,Y^3Z)$ はたしかに Buchsbaum になります。

上にも述べましたように、正則性から正規性までの性質については、どうして我々の問いが肯定的に解決され、一方で Buchsbaum については反例が生じるのかということも不思議なことの一つです。証明を検討してみましょう。$R=A[\{at\mid a\in\mathfrak{m}\},t^{-1}]$ とおきます。すると t は A 上の超越元ですので、$u=t^{-1}$ は R-正則で、また $G=R/uR$ となります。そこで $N=(at\mid a\in\mathfrak{m})+\mathfrak{m}R+uR$ としますと，(R,N) はほとんど局所環と同じふるまいを示すために，G_M がこれらの性質をもてば R も global にそれらの性質をもち，従って，$A=R/(1-u)R$ も同時にその性質をもつことになります。ところが Buchsbaum case では G の性質が実は R にもちあがってこないのです。（実際もし R_N が Buchsbaum であれば，

$R[\frac{1}{t}] = A[t, t^{-1}]$ は，はじめに示しました基本性質(3)により，Cohen-Macaulay となります。もちろん $A[t, t^{-1}]$ は A-free ですから，そのような A は Cohen-Macaulay に限られてしまうのです。）

このようなわけで，どうしたものかと手がつかずに放り出してあったところに，池田さんが次のような大変興味深い事実を指摘してくれました。

定理1. A 内に $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$ となるようなパラメーターイデアル $\mathfrak{q}$ が含まれているならばはじめの問いの答は yes である。

最初にうかがった折には，「$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ となるような $\mathfrak{q}$ が存在すれば…」と言っておられたようですが，実際に（しばらくしてから）証明をきかせて頂いた時は，すでに上の形になっていました。もう大分前のことになりますが，$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$ となるような Buchsbaum

局所環Aに対しては，G_MもまたBuchsbaumになることを証明しておきましたので，ひょっとしたらその逆を考えておられたのかも知れません。自明なことですが，池田さんの結果により

系. A内に$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}$となるようなパラメーターイデアル$\mathfrak{q}$があれば，$G_M$がBuchsbaumであるためには，$A$がBuchsbaumであることが必要かつ十分である。

が得られます。一方で上のSteurich（の反例）では，$\mathfrak{m}^4 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^3$ですので，このように"$\mathfrak{m}^{r+1} = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^r$となるような$r$についての条件"としては，池田さんの結果がbest possibleであることになります。

しかし，彼の議論の本質は，もう少し精密に調べてみますと，実はrについての条件ではなくて，local cohomology $H_M^i(G)$の出現の仕方についての条件をさがすというこ

とにあることが明きらかとなってくるのです。この観点から拡張した形で、結果を述べてみますと、次のようになります。

定理 2. $n \in \mathbb{Z}$ があって、次の条件(1)と(2)をみたしていると仮定せよ：

① $[H^i_M(G)]_p = (0)$ $(i \neq d;\ p \neq n-i-1,\ n-i)$,

② $[H^d_M(G)]_p = (0)$ $(p > n-d)$.

このとき，G_M が Buchsbaum であれば，A も Buchsbaum であって、その上 $l_A(H^i_M(G)) = l_A(H^i_{\mathfrak{m}}(A))$ $(i \neq d)$ となる。

もしも $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{q}\mathfrak{m}^2$ であれば，$n = 2$ に対して、定理 2 の二つの仮定がみたされますので、この定理は，定理 1 の一般化であると考えられます。

定理 1 と 2 は，我々の問いに対する最初（そして、いまのところ最良）の結果であり、また定理 2 には、かなり沢山の系が続く

のですが、それらについては文献[G]を見て頂くことにして、この講演では許された時間内で、定理2の証明をできる限り詳しく与えてみることにしましょう —— そうすることによって、Buchsbaum 局所環がどのようなものであるかが把握できるようにも思えますので。

証明のあらすじ

$a(G) \geqq -d$ ですから，$n \geqq 0$ となることに注意します。次に

補題. $d > 0$ なら，$m \cdot H_m^0(A) = (0)$ かつ $l_G(H_M^0(G)) = l_A(H_m^0(A))$.

実際，$n = 0$ なら，$H_M^0(G) = (0)$ だから、depth $A > 0$. そこで $n > 0$ と仮定し，$W = H_m^0(A)$ とおき，完全系列

$$0 \to W^* \to G \to G(A/W) \to 0$$

を考えます。もちろん $l_G(W^*) = l_A(W) < \infty$

ですから、$W^* \subset H_M^0(G)$ となります。

一方で $H_M^0(G)$ は $n, n-1$ 次の元のみよりなるので，$W \cap m^t = (0)$ $(t \geqq n+1)$ がえられます。さて $mW = (0)$ を示しましょう。$a \in W$ について，もしも $ma \neq (0)$ であれば $f = I_n(a)$ の次数は必ず $n-1$ か n ですから，$a \in m^{n-1}$ としてよいことがわかります。ところが仮定より、$M \cdot W^* = (0)$ ですので，$ma \subset W \cap m^{n+1}$ で、したがって $ma = (0)$. よって $mW = (0)$ となります。

次に $R = \bigoplus_{i \geqq 0} m^i$, $I = R_+$, $N = mR + I$ とおき、次の二つの完全系列

$$0 \to I \to R \to A \to 0, \quad 0 \to I(1) \to R \to G \to 0$$

から、local cohomology の完全系列

$$0 \to H_N^0(I) \to H_N^0(R) \to H_m^0(A) \to H_N^1(I) \to H_N^1(R) \to H_m^1(A) \to \cdots,$$

$$0 \to H_N^0(I)(1) \to H_N^0(R) \to H_M^0(G) \to H_N^1(I)(1) \to H_N^1(R) \to H_M^1(G) \to \cdots$$

をつくります（$I(1) \cong mR$ に注意すること）。すると $H_m^p(A)$ は 0 次のみよりなり，$H_M^R(G)$ は仮定より，$n-p-1$，$n-p$ 次のみよりなることから，

$$[H_N^1(I)]_{n+1} \cong [H_N^1(R)]_{n+1} \cong [H_N^1(I)(1)]_{n+1} = [H_N^1(I)]_{n+2} \cong \cdots = (0),$$

$$[H_N^1(I)]_n \cong [H_N^1(R)]_n \twoheadleftarrow [H_N^1(I)(1)]_n,$$

が導びかれ，結局

$$[H_N^1(I)]_p = (0) \quad (p \geqq n)$$

となることがわかります。とくに

$$0 \to H_N^0(I)(1) \to H_N^0(R) \to H_M^0(G) \to 0$$

は完全です。よって $\operatorname{depth} A > 0$ ならば，$H_M^0(G) = (0)$ がわかります。$\operatorname{depth} A = 0$ のときには，A/W をとおして，$\operatorname{depth} A > 0$ の場合に帰着させて，上の補題の証明が完成

します。

定理の証明を続けます。体 $A/\mathfrak{m}$ をふくらませて，$|A/\mathfrak{m}|=\infty$ として十分です。そこで G_1 の $\frac{A}{\mathfrak{m}}$－basis $f_1, f_2, \cdots, f_r$ をそのうちのどの d 個も G の sop となるようにとります。$f_i = I_n(a_i)$ と書いておきます。（もちろん $a_1, a_2, \cdots, a_r$ は $\mathfrak{m}$ の極小生成系となります。）$W = H_{\mathfrak{m}}^0(A)$ とし

$$0 \to W^* \to G \to G(A/W) \to 0$$

（完全）としますと，上の補題より，
$H_M^0(G(\frac{A}{W})) = (0)$ ですから，f_1 は $G(A/W)$－正則で，

$$G(A/W)/f_1G(A/W) \cong G(A/(a_1A+W))$$

となります。d についての帰納法で証明することにして，$d \geqq 2$ で $d-1$ 以下では，定理2は正しいと仮定してよいわけですから，これより

$$h^i(A/(a_1A+W)) = h^i(G(A/W)/f_1G(\tfrac{A}{W})) \quad (i \neq d)$$

が得られます。（ここで $h^i(A)$ は，$l_A(H_{\mathfrak{m}}^i(A))$ をあらわします。$h^i(G)$ についても同様です。）

よって，

$$
\begin{aligned}
I(G) - h^0(G) &= I(G(A/W)) \\
&= I(G^{(A/W)}/f_1 G(A/W)) \\
&= I(A/(W + a_1 A)) \\
&= \sum_{i=0}^{d-2} \binom{d-2}{i} h^i(A/(W + a_1 A)) \\
&\leqq \sum_{i=0}^{d-2} \binom{d-2}{i} \left[h^i(A/W) + h^{i+1}(A/W) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(A/W) \\
&= I(A/W) \\
&= I(A) - h^0(A)\text{。}
\end{aligned}
$$

一方で，$H_M^i(G)$ $(i \neq d)$ が有限生成であるため，一般論より，$I(G) \geqq I(A)$ となることがわかっていますので，さきの補題より実は上の不等式は，

$$h^i(A/W + a_1 A) = h^i(A/W) + h^{i+1}(A/W) \qquad (0 \leqq i \leqq d-2)$$

かつ　$I(G) = I(A)$　であることになります。

ゆえに

$$a_1 H_{\mathfrak{m}}^i(A/W)=(0) \qquad (i \neq d).$$

a_1 を a_j's ととりかえることによって,

$$\mathfrak{m}\cdot H_{\mathfrak{m}}^i(A/W)=(0) \qquad (i\neq d).$$

したがって, $\mathfrak{m}\cdot H_{\mathfrak{m}}^i(A)=(0)$ $(i\neq d)$ となることがわかります。すなわち, A は quasi-Buchsbaum だから, 再び一般論より、任意の $\ell \geqq 2$ について,

$$\begin{aligned}
I(G) &= \ell_G(G/(f_1,f_2^\ell,\cdots,f_d^\ell)) - e_G((f_1,f_2^\ell,\cdots,f_d^\ell)) \\
&\geqq \ell_G(G(A/(a_1,a_2^\ell,\ldots,a_d^\ell))) - e_G((f_1,f_2^\ell,\cdots,f_d^\ell)) \\
&= \ell_A(A/(a_1,a_2^\ell,\ldots,a_d^\ell)) - e_A(a_1,a_2^\ell,\cdots,a_d^\ell)) \\
&= \ell_A\left(\frac{(a_2^\ell,\cdots,a_d^\ell):a_1}{(a_2^\ell,\cdots,a_d^\ell)}\right) \\
&= I(A)
\end{aligned}$$

が得られます。上に示したように $I(G)=I(A)$ でしたから、このことより,

$$G/(f_1,f_2^\ell,\cdots,f_d^\ell) \cong G(A/(a_1,a_2^\ell,\cdots,a_d^\ell)),$$

すなわち, すべての $t>0$ について

$$(a_1, a_2^{\ell}, \cdots, a_d^{\ell}) \cap \mathfrak{m}^t = (a_2^{\ell}, \cdots, a_d^{\ell})\mathfrak{m}^{t-\ell} + a_1\mathfrak{m}^{t-1}$$

となる；　とくに，すべての　$t > 0$ について

$$a_1 A \cap \mathfrak{m}^t = a_1 \mathfrak{m}^{t-1} .$$

故に　$G/f_1 G \cong G(A/a_1 A)$　となり，

d についての仮定より，$A/a_i A$ は Buchsbaum（$1 \leqq i \leqq d$）となることがわかります。先に示しましたように，A は quasi-Buchsbaum でしたので，このことから A 自身が Buchsbaum となります。*)　一方で，

$$\begin{aligned} h^i(G) &= h^{i-1}(G/f_1 G) - h^{i-1}(G) \\ &= h^{i-1}(A/a_1 A) - h^{i-1}(G) \\ &= h^i(A) + [h^{i-1}(A) - h^{i-1}(G)] \end{aligned}$$

ですから，$h^0(A) = h^0(G)$ を上の補題で得ているため，i についての帰納法で，

$$h^i(A) = h^i(G) \qquad (0 \leqq i < d)$$

となることがわかります。

定理2の仮定(1)，(2)は，G が体 $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ 上

で *linear resolution* をもつことと大変近い関係にあり、この点が [G] 内で詳しく論じられています。しかし、我々の問いを解くための仮定としては、やはりいかにも人工的な条件であるとの印象が否定できません。もっと自然で、適用対象の広い条件をみつけることが切実に期待されます。上の方面の研究に参加して下さる方を募って、私の講演を締めくくりたいと考えます。

*) 一般に、A が *quasi-Buchsbaum* の時極大イデアル $\mathfrak{m}$ の生成系 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ をどの d 個も A の sop であって、かつすべての i について A/a_iA が *Buchsbaum* となるようとれるならば、A は *Buchsbaum* である。

文献

[G] S. Goto, Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings, J. Algebra, in press.

スケジュール

１０月５日

19：30～20：10　渡辺　純三（名大・理）

m－full　ideal

20：20～21：00　池田　信（名大・理）

On the Gorensteinness of Rees algebras over Buchsbaum rings

１０月６日

9：30～ 9：50　浅沼　照雄（富山大・教育）

Pic(R[X,X^{-1}]) について

10：00～10：50　小野田　信春，吉田　憲一（阪大・理）

Remarks on quasinormal rings

11：00～11：40　石田　正典（東北大・理）

土橋のカスプ特異点について

11：45～12：15　金光　三男（愛知教育大）

Krull 環についての注意

19：00～19：50　西村　純一（京大・理）

いろいろな反例の作り方

20：00～20：40　谷本　洋（名大・理）

I－smoothness について

20：50～21：20　伊藤　史朗（広大・理）

Analytically unramified local ring について

１０月７日

9：00～ 9：35　竹内　康滋（神戸大・教養）

Balanced big CM module の局所化について

9：40～10：15　青山　陽一（愛媛大・理）
後藤　四郎（日大・文理）

End(K_A) と K_A の存在について

10：25～11：10　山岸　規久道（東京理科大・理）

Canonical module の ideal 化の Buchsbaum 性について

11：25～12：15　後藤　四郎（日大・文理）

Tangent cone の Buchsbaum 性について

14：00～14：25　島田　勇治（広大・理）

$k[\![x_1,\cdots,x_n]\!], k[\![x_1]\!][x_2,\cdots,x_n], k[\![x_1,\cdots,x_n]\!]_{x_1}$ について

14：35～15：00　石川　武志（都立大・理）

On the length of ideals in Artinian local rings

15：10～15：40　大石　彰（広大・理）

Asymptotic properties, analytic spread and pseudo-flatness of graded algebras

15：50～16：30　鈴木　敏（京大・教養）

完備付値環の高階微分と自己同型

16：40～17：00　吉野　雄二（名大・理）

Torsion of the differential modules and the value semigroups of one dimensional local rings

20：00～22：00　懇親会

10月8日

9：00～ 9：40　日比　孝之（広大・理）

Every affine graded ring has a structure of Hodge algebras

9：50～10：30　渡辺　敬一（名工大）

Rings of F-pure type と rational singularity

10：40～11：10　　吉田　憲一（阪大・理）

有限次拡大について

11：20～12：00　　松村　英之（名大・理）

Foxby の small　support について