第 6 回
可換環論シンポジウム報告集

昭和59年度科学研究費総合A

(課題番号 59340002.代表 西 三重雄)

1984年11月 8 日～11日

於 広島大学西条共同研修センター

序

この報告集は1984年 11月 8日～11日の4日間、広島県東広島市広島大学西条共同研修センターで開催された第6回可換環論シンポジウムの講演者から提出された原稿をそのまま印刷する方式により作成したものであります。

今回のシンポジウムは、予てから案のありました特別講演を初めて企画したこともあって当初の予定を大きく上回る講演数となりましたが、講演内容の充実、活発な討論により、強行日程であることを忘れさせる非常に活発なシンポジウムとなり大変有意義でありました。

なお、この会を開くにあたって、西条共同研修センターの方々の多大な協力がありました。又、講演者の旅費等のシンポジウムの経費ならびにこの報告集の出版費は、広島大学の西　三重雄　先生の科研費によってまかなわれました。ここにあらためて感謝いたします。

1985年　1月

伊藤史朗
大石　彰

参加者 （五十音順）

青山陽一	愛媛大・理	鈴木直義	静岡薬科大
秋葉知温	京大・教養	竹内康滋	神戸大・教養
浅沼照雄	富山大・教育	谷本　洋	江南女子短大（非常勤）
石川武志	都立大・理	張　徳祺	阪大・理
石田正典	東北大・理	露峰茂明	
石橋康徳	広大・学校教育	泊　昌考	京大・数理研
伊藤史朗	広大・理	成瀬　弘	岡山大・教育
岩上辰男	広大・総合科学	西　三重雄	広大・理
宇田広文	宮崎大・教育	西村純一	京大・理
大石　彰	広大・理	馬場　清	大分大・教育
岡部　章	群馬工業高専	日高文夫	専修大北海道短大
岡部芳夫	岡山理科大	日比孝之	広大・理
奥山　廣	徳島大・教育	広森勝久	神戸大・教養
小駒哲司	高知大・理	松田隆輝	茨城大・理
小野田信春	福井大・教育	松村英之	名大・理
金光三男	愛知教育大	宮崎充弘	京大・理
河合　治	阪大・理	村瀬清紀	岡山理科大
菊池徹平	奈良教育大	柳原弘志	兵庫教育大
久保田一二	防衛大	山内紀夫	岐阜教育大
後藤四郎	日大・文理	山岸規久道	東京理科大
小山陽一	金沢工大	山田　浩	名工大
坂口通則	広島修道大	吉田憲一	岡山理科大
佐久間元敬	広大・総合科学	吉野雄二	名大・理
島田勇治	広大・理	渡辺敬一	名工大
下田保博	城北高	渡辺純三	名大・理
菅谷　孝	富山大・理	渡辺雅之	前橋工業短大
鈴木　敏	京大・教養	渡辺　守	岡山理科大

目　次

LINKAGE（１９７０年以降）

名大、理　　吉野雄二

可換環におけるlinkageの概念は、古くは次の様な人々の仕事のなかにすでに見られるようである。即ち、A.Cayley,M.Noether,R.Apery,F.Gaeta,P.Dubreilらである。しかるに、ここでその概略を述べようと思うlinkageの定義は、PeskineとSzpiro［１］によって、１９７４年に与えられたもので、必然この講義も、それ以降のものに話しを限ることにする。勿論、１９７０年以降Peskine-Szpiro以前に、本質的にlinkageに触れた論文が存在する。特に、Artin-Nagata［３］とJ.Watanabe［４］の２論文は、重要である。これが、副題として、１９７０年以降と書いた所以である。Peskine-Szpiro以降、特にこの方面で著しい成果を上げているのは、C.HunekeとA.P.Raoであろう。C.Hunekeは、純粋に代数的に、A.P.Raoは、純粋に幾何学的に、このlinkageを扱っている。この話しでは、おおよそC.Hunekeの方法に従って、議論を進めることにする。

§１　定義と基本性質

以下、（R，m，k）は Gorenstein 局所環（または、Cohen-Macaulay）とする。

(1.1)定義;(a) Rのイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が、linked(=algebraically linked)とは、$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ に含まれるR上の正則列　$x = x_1, x_2, \ldots, x_n$　が存在して、次の条件を満たすときを言う。$(x) : \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$，$(x) : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$．更に、このとき、$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$（via (x)）　と書くことにする。

(b) Rのイデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が、geometrically linkedとは、$\mathfrak{a}$も$\mathfrak{b}$も共に清純で、共通の既約成分を持たず、かつ、$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ は完全交叉（＝正則列で生成されるイデアル）であるときをいう。更に、このとき，$\mathfrak{a} \infty \mathfrak{b}$ と書くことにする。

(c) VとWが、Spec(R) またはProj(R)の閉部分集合のとき、対応するRのイデアルが、linked(resp.geometrically linked)である時、VとWは、linked(resp.geometrically linked)と言い、V～W (resp.V∞W) と書くことにする。

(1.2)注意；(a)geometrically linkedならばlinkedである。実際、a∞bならば、（a∩b）：a＝bとなるからである。

(b)a～b via（x）のとき、aとbの全ての素因子は、（x）の素因子である。特に、aとbは共に清純なイデアルで、高度nを持つ。実際、証明には、（x）＝（0）としてよい。そこで、（0）$=q_1\cap q_2\cap ... \cap q_m$をRにおける（0）の準素分解とするとき、pがaの素因子ならば、Rの元wが存在して、p＝a：w＝（0：b）：w＝0：wb$=\bigcap_{i=1}^{m}$（q_i：wb）となる。したがって、あるiについて、p＝q_i：wb＝rad（q_i）となるので、pがRの素因子であることが示される。

(1.3)定理([1][16])a～bのとき、つぎが成立する。

(a)　R/aがCohen-Macaulayであることと、R/bがCohen-Macaulayであることは同値である。

(b)　R/aがBuchsbaum ringであることと、R/bがBuchsbaum ringであることは同値である。

(証明の概略)証明には、a～b via(0)として構わない。F．を R/a のR加群としての自由分解とするとき、もしR/aがCohen-Macaulayならば、$\mathrm{Ext}_R^i(R/a,R)=H_m^{d-i}(R/a)\hat{}=(0)$ $(i\neq 0)$．したがって、Hom_R(F.,R)は、acyclicとなり、その最初のhomologyは、$\mathrm{Hom}_R(R/a,R)=0:a=b$ である。特に、bは任意のnについて、n-th syzygyとなるので、b自身Cohen-Macaulay加群となる。よって、R/bは、Cohen-Macaulay ringとなる。Buchsbaum ringについても、証明は殆ど同じであるので、ここでは省略する。

(1.4)注意；一般に、Gorenstein性は、linkageで遺伝しない。しかし、次のことは、成立する。aがGorenstein idealで、a～bのとき、bはalmost complete intersectionである。

ここで次のHartshorneの問題を、ふりかえってみよう。

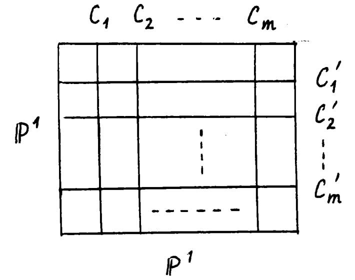
(＊)Bが P^3 の中の代数曲線の斉次座標環のとき、BがCMならば、BredもCMであろう？

この問題（＊）は、P^3 の中の代数曲線は皆、集合論的完全交叉であろう、という昔からの予想と関わりがある。例えば、次の様な例を考えてみよう。

k[x,y,z,w]→k[s,t]を(x,y,z,w)→(s^4,s^3t,st^3,t^4)で定義して、その核イデアルで定義さ

れる曲線Ｃを考えると、これは算術的にＣＭではない。もし、このＣを集合論的に完全交叉とすると、ある完交環Ｂがあって、ＢredがCの斉次座標環となり、これはＣＭではない。したがって、もし（＊）が正しければ、このＣは集合論的に完全交叉ではなくなり、上記の予想の反例が得られたことになる。しかし、［１］でこの問題（＊）が間違っていることが、反例をもって示された。（実は、上の例のＣは、集合論的に完全交叉である。）ここでは、$\mathbf{P}^3$の中の曲線で、集合論的完全交叉であって、算術的にＣＭでないという例を、linkageを使って構成してみよう。

(1.5)Geramita-Maroscia-Vogelの例；



$\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1\simeq Q\subset\mathbf{P}^3$　を２次曲面とする。

$C_1,\dots,C_m,C'_1,\dots,C'_n$を図のように、与えられたＱ上の直線らとする。

そして、$C(m,n)$ をＱ上の因子としての、これら全ての直線の和とする。

このとき、次の定理が示される。

(1.5.1)定理([20])；(a)$C(m,n)$は、いつも集合論的に完全交叉である。さらに、$m=n$ならば、$C(m,n)$はイデアル論的にも完全交叉である。

(b)$C(m,n)$が算術的にＣＭであるための必要十分条件は、$|m-n|\leqq 1$ である。

(c)$C(m,n)$が算術的にBuchsbaumであるための必要十分条件は、$|m-n|\leqq 2$である。

(証明)(a)$H(i,j)$ をC_iとC'_j を含む$\mathbf{P}^3$の平面とする。$H(i,j)\cap Q=C_i+C'_j$ である。$H=H(1,1)\cup H(2,2)\cup\ \dots\ \cup H(m,m)\cup H(m,m+1)\cup\ \dots\ \cup H(m,n)$ と置くと、Hは超曲面で、$H\cap Q=C(m,n)+(n-m)\ C_m$（Ｑ上の因子として）が成立する。ここで、右辺は集合論的に$C(m,n)$に等しいので、$C(m,n)$は集合論的に2つの超曲面の交わりであることが分かる。また、$m=n$ならば、このことはイデアル論的に成立する。

(b)(c)$m<n$として構わない。Ｌを$(n-m)$重直線とする。$C(n,n)=C(n,m)+L$が成立する。ここで、$C(n,n)$は完全交叉的であり、$C(n,m)$とＬは互いに共通成分をもたないので、$C(n,m)\infty L$ である。よって、(1.3)より$C(m,n)$が算術的にＣＭ (resp.Buchsbaum)であるためには、Ｌがそうであれば良い。

R＝k[x,y,z,w]/(xy-zw)と置き、pをx，zで生成されたRの素イデアルとすると、$R/p^{(n-m)}$がLの斉次座標環となる。したがって、問題はこの環がCM (resp.Buchsbaum)となるための条件を求めれば良いが、それは読者に委ねることとしよう。

次の定理は、linkageの理論において大変有用である。

(1.6)定理([1])；a～b　via (x) で、aはperfect(i.e. pd(R/a)=ht(a))とする。F．をR/aのR加群としての自由分解、K．を列(x)に関するKoszul複体、そして、f：K．→F．を自然な複体写像とする。このとき、R/bのR加群としての自由分解は、Hom(f,R)の写像錐(mapping cone)で与えられる。

（証明）C．をHom(f,R)の写像錐とする。このとき、次の複体の完全列がある。
0→Hom(K.,R)→C.→Hom(F.,R)[-1]→0.これと、aがperfectであることから、C．はR/bとquasi-isomorphicであることが分かる。

この定理の応用として、ここで次のような例を考えてみよう。

R＝k[x,y,z,w]の2つのイデアル $a=(xw-yz,xz-y^2,yw-z^2)$，$c=(xw-yz,xz-y^2)$を考える。このとき、次の可換図がある。

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
0 \arrow[r] & R^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} y & -z & -x \\ -z & w & y \end{bmatrix}"] & R^3 \arrow[r, "\begin{bmatrix} xw-yz \\ xz-y^2 \\ yw-z^2 \end{bmatrix}"] & R \arrow[r] & R/a \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r, "{[-xz+y^2,\ xw-yz]}"'] \arrow[u, "{[y\ x]}"] & R^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} xw-yz \\ xz-y^2 \end{bmatrix}"'] \arrow[u, "\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}"'] & R \arrow[r] \arrow[u, "1"'] & R/c \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

これより、b＝c：aと置くと、定理(1.6)より、R/bの自由分解は、次の様にあたえられる。

$$0 \to R \xrightarrow[\left[xw-yz,\ xz-y^2,\ yw-z^2,\ 1\right]]{} R^4 \xrightarrow[\begin{bmatrix} y & -z & -1 & 0 \\ -z & w & 0 & -1 \\ -x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xw-yz & xz-y^2 \end{bmatrix}]{} R^4 \xrightarrow[\begin{bmatrix} y \\ x \\ -xz+y^2 \\ xw-yz \end{bmatrix}]{} R \to R/b \to 0$$

$$0 \to R \xrightarrow[\left[-x \quad y\right]]{} R^2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}]{} R \longrightarrow R/b \longrightarrow 0$$

結局、b＝(x,y)Ｒとなることが分かる。この例の計算で、ある程度分かる様に、このａの様な自由分解をもつイデアルについては、上手にlinkageをとると、生成元の個数を1個減らすことができるのである。一般に、次の定理が成り立つ。

(1.7)定理[1](Liaison theorem for height 2 perfect ideals)

ａをＲの高さ２のperfect idealのとき、次のようなlinkageの列：

$$a = a_0 \sim a_1 \sim a_2 \ \ldots \sim a_n$$

が存在して、a_n は２個の元で生成される。更にこのとき、n＝v(a)－２とすることができる。但し、v(a)はイデアルａの生成元の個数である。

この定理の内容は既に、AperyやGaeta等によって知られていたらしいが、この定理の形で述べたのは、PeskineとSzpiroが最初であろう。この定理のように、与えられたイデアルが適当なlinkageの後にcomplete intersectionとなるという内容の定理を、上のようにLiaison theoremと呼ぶ。現在までに知られているLiaison theoremは、上記の定理(1.7)と次の定理のみである。

(1.8)定理[4](Liaison theorem for height 3 Gorenstein ideals)

ａを正則局所環Ｒの高さ３のGorenstein idealとする。このとき、Ｒのイデアルのlinkage: ａ～ｂ～ｃ が存在して、ここでｃも高さ３のGorenstein idealで、v(c)＝v(a)－２とすることができる。従って、次のようなlinkageの列が存在する。

$$a=a_0 \sim b_1 \sim a_1 \sim b_2 \sim a_2 \cdots\cdots \sim b_n \sim a_n$$

ここで a_n はcomplete intersection（3個の元で生成される）イデアルである。更にこのとき、$v(a)=2n+3$ となる。

この定理(1.7)と(1.8)をながめて次のような問題を考えることもあながち無意味ではなかろう。

(1.9)問題. 正則局所環の適当なイデアルの族でLiaison theoremが成立するものが、上の他にあるか?

§2. Linkageの不変量

局所環Rのイデアル a に対して、$L(a):=\{b\in R \mid$ linkageの列: $a=a_0\sim a_1\sim\dots\sim a_n=b$ が存在する$\}$ と置いて、これを a のlinkage classという。Rのイデアルの全体はいくつかのlinkage classに分割する。更に、次のことに注意しよう。長さの等しい正則列で生成された2つのイデアルは同じlinkage classに属する。即ち、$a=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $b=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ がそれぞれRの正則列で生成されたイデアルの時、$b\in L(a)$ が成立する。証明には、$a=(x)$, $b=(y)$ として良く、そのときには、$(xy):a=b$, $(xy):b=a$ となるので、$a\sim b$ via(xy) が成立する。このことから、Rの高さ n のcomplete intersectionのlinkage classというものが定まる。これを、L(c.i.(of ht n))と書くことにする。ここで考えようとしている問題は次のようなものである。

(1) L(a)内のイデアルたちについて不変な量には、どのようなものがあるか?

(2)与えられたイデアルがcomplete intersectionのlinkage classに入ることを判定する良い条件はあるか?

これらの問題にたいして先鞭をつけたのは、A.P.Raoであった。

(2.1)定理[13]: $\mathbf{P}^3$ の中の曲線というのを、locally CM,generically complete intersectionであるような $\mathbf{P}^3$ のcodimension 2 subschemeのこととする。そして、つぎのように置く。$S=k[x,y,z,w]$, $M=\{$graded S-modules of finite length$\}/\equiv$. ただし、≡は次で生成されるrelationである。

$$N\equiv N(n)\ \ (n\in Z)\ ,\ N\equiv \mathrm{Hom}_S(N,\ k)$$

更に、$\mathbf{P}^3$ の曲線Cにたいして、

$$N(C)=\bigoplus_{n\geq 0} H^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{I}_C(n)) \quad (=H^1_{\mathfrak{m}}(S/I(C)))$$

と定義する。定理の主張は、上のN( )は次のような全単射を導くということである。

$$\{\text{Linkage classes of curves in } \mathbb{P}^3\} \to M$$

証明については原論文を参照していただきたい。このRaoの定理に刺激を受けて、C. Hunekeが先の問題について考えはじめた。

(2.2)定理[7]; CM局所環Rのイデアル$a=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$にたいして、

$$H_i(a\ ;\ R)\ =H_i(x_1,x_2,\ldots,x_n;R)$$

と定義する。ただし、この右辺はRの元の列 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ についてのKoszul homologyである。これは、aの生成元の取りかたに依存するが、この加群が全てのiについてCMかどうかという性質は生成元の取りかたに依らない。もしRの3つイデアルa, b, cについて、$a\sim b\sim c$ かつ $H_i(a\ ;\ R)$ が全てのiについてCMならば、$H_i(c\ ;\ R)$もすべてのiについてCMである。

(2.2)系;もしaが complete intersectionのlinkage class に入るならば、任意のiについて、$H_i(a\ ;\ R)$ はCM加群である。

さて次に、このHunekeの定理の応用を考えてみよう。

(2.4)例; Xを2×4 generic matrixとする。R=k[X]と置き、RのイデアルaをXの2次の小行列式で生成されるものとする。このとき、aはcomplete intersection のlinkage class に入らない。

(注意)Xが2×3行列のときには、bを2次の小行列式で生成されたRのイデアルとすると、bは高さ2のperfect idealなので、(1.7)によって、b∈L(c.i.)となる。(2.4)の例では、aは高さ3のイデアルで、R/aは CM normal,non-Gorenstein domainである。

(2.4)の証明を簡単に見ておこう。D_{ij}をXのi列とj列からできる2次の行列の行列式とする。aはこれらのD で生成される。Koszul complex $K.=K.(\{D_{ij}\},R)$を考えよう。Z_1をK.の1次のcycles、B_1をK.の1次のboundariesとする。$B_1\subset aK_1$であるから、R加群の写像 $f: H_1=Z_1/B_1\to K_1/aK_1=(R/a)^6$ がえられる。実は、H_1がCMならば、fは単射でなければいけないことが分かっている。そこで、今の場合fが

単射でないことを示そう。そうすれば、系(2.3)より結論が導かれる。Plückerの関係式：

$$D_{12}D_{34}-D_{13}D_{24}+D_{14}D_{23}=0$$

が成立するので、$w=D_{12}e_{34}-D_{13}e_{24}+D_{14}e_{23}\in K_1$と置くと、$w\in aK_1\cap Z_1$,一方で$w\notin B_1$がなりたつので、wは$H_1$の0でない元をあたえるが、$f(w)=0$となる。（ここで、$e_{ij}$は$K_1$の基底をあらわす。）

この例と全く同じようにして、次のような例を示すこともできる。

(2.5)例；Xを3×3generic matrix,$R=k[X]$, aをXの2次の小行列式全体で生成されるRのイデアルとする。このとき、aはcomplete intersectionのlinkage classに入らない。この例では、aは高さ4のGorenstein idealである。更に、適当なlinkage $a\sim b$を取るとbはalmost complete intersectionだから、

$H_0(b;R)=R/b=CM$, $H_1(b;R)=$the canonical module of $R/b=CM$,

$H_i(b;R)=0\ (i\neq1,2)$

この例で分かるように、任意のiに対して$H_i(a;R)$がCMであるという性質はodd linkageで保たれない。

(2.6)最近 C.Huneke はlinkageにたいして数値的不変量(numerical invariant)を与えることに成功した。([11]) 即ち、局所環Rのイデアルaにたいして、ある多項式$P(a;t)\in Z[t]$ が定義できて、これが even linkage での invariant となっていることを示した。しかし、彼のこのinvariantは具体的な例では殆どうまく計算ができない。(上の(2.4)や(2.5)の例について、この $P(a;t)$ を計算するために、Hunekeはコンピュータを必要とした。）もっと見易い簡単なinvariantを構成することが望ましい。

上記の他のinvariantとして次の定理を揚げておこう。

(2.7)定理(Herzog,Huneke[11]) $S=k[[x_1,x_2,\ldots,x_n]]$ と置き、RとR' をSの1次元のreduced quotientsとする。RとR' が互いにevenly linkedするとき、次の等式が成立する。$l(T_2(R/k,R))=l(T_2(R'/k,R'))$.

§3. Generic Linkage

HunekeとUrlichは次の定理を証明した。

(3.1)定理[12] Rを正則局所環、aをそのイデアルとして次のことを仮定する。

（1）R/a はＣＭである。（2）ht(p/a)≦1 となる素イデアルｐについて、a_p は complete intersectionである。

このとき、ＣＭ normal local domain ＳとＳの正則列$(a_1,a_2,...,a_n)$が存在して、

(i) $cl(S) = \mathbb{Z}[K_S]$ (i.e. Ｓのdivisor class group はＳのcanonical moduleのclassで生成されるrank 1 のfree abelian groupである。)

(ii) $R \simeq S/(a_1,a_2,...,a_n)$

これを証明するために、彼らはgeneric linkageなるものを定義した。それを次に述べよう。

Ｒを正則局所環、ａをそのイデアルで $\{f_1,f_2,...,f_m\}$で生成されるものとする。更に、ｇをａの高度とする。このとき、ｍｇ個の変数Y_{ij} $(1\leqq i\leqq g, 1\leqq j\leqq m)$を用意する。

$$Q := R[Y_{ij}] \supset aQ \supset c_i := \sum_{j=1}^{m} Y_{ij} f_j$$

$$L(f) := (c_1,c_2,...,c_m) : aQ$$

と置くことにする。このＬ(f)は勿論ａの生成元ｆの選びかたによるのだが、実は、”本質的には”依存しない。(i.e. Ｑ／Ｌ(f)の環論的性質はｆには依らない。）そこで、これをＬ(a)と書き、(Ｑ，Ｌ(a))のことをａのgeneric linkageと呼ぶ。

次のような事実が知られている。

(3.2) ａがgenerically complete intersectionならば、Ｌ(a)は素イデアルで、

$$L(a) \sim aQ \text{ (geometrically linked).}$$

(3.3) R/a がＣＭならば、ａの任意のlinkageはＬ(a)の特殊化として得られる。即ち、$d_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j$ $(i=1,2,...,g)$で、$a \sim b$ via$(d_1,d_2,...,d_g)$とすると、$h: Q \to R$ を $h(Y_{ij}) = a_{ij}$ と定義することによって、$h(L(a)) = b$ となる。

おおざっぱに言って定理(3.1)のＳは、ａから始めて２度generic linkageをとることで得られるのである。定理(1.7)(1.8)で示されているように、linkageを上手にとると前よりも簡単なものになるという思想がここでも活きているように思われる。

更に、今までのlinkageの理論をこのgeneric linkageの立場から見直すことで何か新たな展望が開けるような気がするのだが、それは今後の問題としてこの辺で話しを終えることとする。

REFERENCES

[1] C. Peskine, L. Szpiro; Liaison des varietes algebrique I, Inv. Math. 26 (1974), 271-302.

[2] L. Szpiro; Lectures on equations defining space curves, Tata Lecture Note (Springer) 62(1979).

[3] M. Artin, M. Nagata; Residual intersections in Cohen-Macaulay rings, J. Math. Kyoto Univ. 12(1972), 307-323.

[4] J. Watanabe; A note on Gorenstein rings of embedding codimension 3, Nagoya Math. J. 50(1973), 333-341.

[5] E. Kunz; Almost complete intersections are not Gorenstein rings, J. Alg. 28 (1974), 111-115.

[6] C. Huneke; Almost complete intersections and factorial rings, J. Alg. 71 (1981), 179-188.

[7] C. Huneke; Linkage and the Koszul homology of ideals, Amer. J. Math. 104 (1982), 1043-1062.

[8] C. Huneke; Linkage and the symmetric algebra of ideals, Comtemp. Math. 13 (1982), 229-235.

[9] C. Huneke; Strongly Cohen-Macaulay schemes and residual intersections, Trans. A.M.S. 227(1982), 739-763.

[10] C. Huneke; Invariants of liaison, Lecture Note in Math.(Springer) vol.1008 (1983), 65-74.

[11] C. Huneke; Numerical invariants of liaison classes, Inv. Math. 75(1984), 301-325.

[12] C. Huneke, B. Ulrich; Divisor class groups and deformations, preprint.

[13] A.P. Rao; Liaison among curves in $\mathbb{P}^3$, Inv. Math. 50(1979), 295-302.

[14] A.P. Rao; Liaison equivalence classes, Math. Ann. 258(1981), 169-173.

[15] A.P. Rao; On self-linked curves, Duke Math. J. 49(1982), 251-273.

[16] P. Schenzel; Note on liaison and duality, J. Math. Kyoto Univ. 22-3(1982), 485-498.

[17] P. Schenzel; Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum-Rings, Springer Lecture Note 904(1982).

[18] P. Schenzel, W. Vogel; On liaison and arithmetical Buchsbaum curves in $\mathbf{P}^3$, Asterisque 87-88(1981), 379-388.

[19] H. Bresinsky, P. Schenzel, W. Vogel; On liaison, arithmetical Buchsbaum curves and monomial curves in $\mathbf{P}^3$, Aarhus Univ. Math. Inst. Preprint Series 1980/81 no.6. (Also in Queen's University Preprint no.24(1981).)

[20] A.W. Geramita, P. Moroscia, W. Vogel; On curves linked to lines in $\mathbf{P}^3$, Queen's Univ. Preprint no.61(1982), B.

[21] L.P. Botta, A. Verra; Alcune proprieta di dualita per gli schemi geomet-ricamente legati, Ann, Univ. Ferrara, Sez VIII, vol. 25(1978), 135-145.

[22] M. Lejeune-Jalabert; Liaison at residu, Springer Lecture Note in Math. vol. 961(1982), 233-240.

[23] R.-O. Buchweitz; Thesis, l'Universite Pari VII(1981).

[24] A.R. Kustin, M. Miller; A general resolution for grade four Gorenstein ideals, Manuscripta Math. 35 no.1-2(1981), 221-269.

[25] M. Fiorentini; Intersections residuelles dans les anneaux de Cohen-Macaulay et un critere de regularite relative, Proc. of the week of Algebraic Geometry (Bucharest, 1980) Teubner Texte zur Math. 40(1981), 50-62.

有限数列と可換環

広島大学・理学部　日比孝之

序．各項が整数から成る有限数列 $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ は，我々の身近にある数学的対象である．combinatoricsに登場する有限数列の問題に対して，可換環論や代数幾何の手法を応用したり，また，逆に，可換環論に現れる有限数列に，combinatorialな解釈を与えるといった試みは，比較的最近になって始められたことである．

本講演の目的は，前者の代表として，R. Stanleyの仕事であるUpper Bound Conjectureおよびsimplicial convex polytopeに関するMcMullen予想の肯定的解決，また，後者の代表として，前者と関連の深いGorenstein sequenceの話題を題材に取り上げ，"有限数列"というものを媒介とした，combinatoricsと可換環論の結び付きを概説することにある．全般的に参考にしたのは，McMullen-Shephard [18]（絶版?），Stanley [26] であって，特に [26] は一読する価値がある．

§1. Combinatoricsにおける有限数列

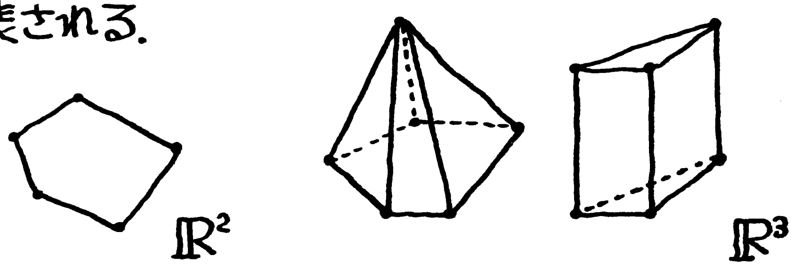
$\mathbb{R}^n$をn次元Euclid空間とする. $\mathbb{R}^2$におけるpolygonや$\mathbb{R}^3$におけるpolyhedronの概念を$\mathbb{R}^n$に拡張したものがconvex polytopeである. 即ち

<u>定義</u>(1.1) $\mathbb{R}^n$の有限個の点の凸閉包(convex hull)を$\mathbb{R}^n$の<u>convex polytope</u>(簡単にpolytope)と言う.

具体的には, 有限個の点$v_1, \cdots v_s$ ($v_i \in \mathbb{R}^n$)の凸閉包$[v_1, \cdots v_s]$は

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n ;\ x = \sum_{i=1}^{s} r_i v_i ,\ \sum_{i=1}^{s} r_i \leq 1 ,\ 0 \leq r_i \in \mathbb{R}\ (\forall i) \right\}$$

と表される.

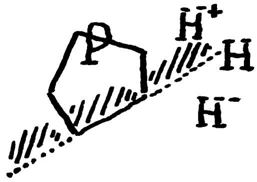


B^dをd次元ballとしよう. $\mathbb{R}^n$のpolytope Pに対して$P \underset{\text{homeo.}}{\cong} B^d$となる整数$d \geq 0$が存在する. dをPの<u>次元</u>と言い$\dim P = d$と書く.

さて, polyhedronにおける頂点・面・辺の概念はどう解

釈するかというと，

<u>定義</u>(1.2)　Pを$\mathbb{R}^n$のpolytope, Hを$\mathbb{R}^n$の超平面とする．HがPの<u>supporting hyperplane</u>であるとは，$H \cap P \neq \phi$かつPがH^+またはH^-に含まれる時を言う．そして，この時，$H \cap P$をPの<u>face</u>と呼ぶ．



$\mathbb{R}^n$のpolytope Pは有限個のfaceを持ち，それぞれのfaceは再びpolytopeである．0次元faceを<u>vertex</u>，1次元faceを<u>edge</u>，またPがd次元の時，$(d-1)$次元faceを<u>facet</u>と呼ぶ．Pのvertex全体の集合を$\{v_1, \cdots, v_s\}$とすれば，$P = [v_1, \cdots, v_s]$であって，更に，Pのそれぞれのface Fは，$F \cap \{v_1, \cdots, v_s\}$の凸閉包である．また，$\partial P \underset{\text{def.}}{=} \bigcup_{F:\text{facet}} F$を$P$の<u>boundary</u>と言う．

<u>定義</u>(1.3)　Pをd次元polytopeとする．

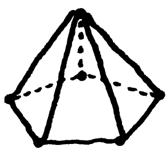
$$f_i = f_i(P) = \#\{P\text{の}i\text{次元face}\} \quad (0 \leqq i \leqq d-1)$$

と置き，$f = f(P) = (f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$を$P$の<u>f-vector</u>と言う．

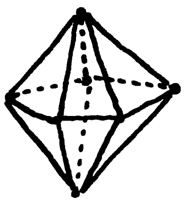
こうして、polytope Pから有限数列 $f(P)$ が得られるのである。

例(1.4) i) <u>simplex</u> $\{v_1,\cdots,v_{d+1}\}$ を$\mathbb{R}^n$のaffine independent set (即ち, $\sum_{i=1}^{d+1} r_i v_i=0$, $\sum_{i=1}^{d+1} r_i=0$ならば $r_i=0$ $(\forall i)$) とする時, $d+1$個の点$v_1,\cdots,v_{d+1}$ の凸閉包$[v_1,\cdots,v_{d+1}]$がd次元simplex T^d である. $d=2$の時は triangle, $d=3$の時は tetrahedron である. T^d のf-vector は, $f_i(T^d)=\binom{d+1}{i+1}$ となる.

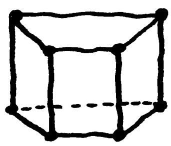
ii) <u>pyramid</u> iii) <u>bipyramid</u> iv) <u>prism</u>



$f=(6,10,6)$



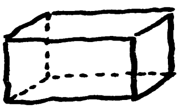
$f=(7,15,10)$



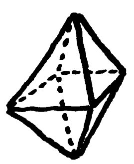
$f=(8,12,6)$

<u>定義</u>(1.5) d次元polytope が<u>simplicial</u>とは, 任意の face が simplex (cf.(1.4) i)) である時を言う.

例えば, $\mathbb{R}^3$ では



not simplicial



simplicial

さて，$f=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ を d 次元 polytope P の f-vectorとしよう．f-vector は，このままでは，扱い易くはないので，

$$h_i = h_i(P) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1} \qquad (0 \leqq i \leqq d)$$

（ただし，$f_{-1}=1$）として，<u>h-vector</u> $h=h(P)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ を定義する．

例えば，$d=3$，$f=(f_0, f_1, f_2)$ の時

$$h_0 = f_{-1} = 1$$

$$h_1 = -3f_{-1} + f_0 = f_0 - 3$$

$$h_2 = 3f_{-1} - 2f_0 + f_1 = f_1 - 2f_0 + 3$$

$$h_3 = -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = f_2 - f_1 + f_0 - 1$$

となる．逆に，f_0, f_1, f_2 を h_0, h_1, h_2, h_3 で表すと

$$f_0 = h_1 + 3h_0$$

$$f_1 = h_2 + 2h_1 + 3h_0$$

$$f_2 = h_3 + h_2 + h_1 + h_0$$

となる．

<u>注意</u>(1.6) 一般に，d 次元 polytope の f-vector の成分 $f_0, f_1, \cdots, f_{d-1}$ は，$h_0, h_1, \cdots, h_d$ の非負整数を係数とす

るlinear combinationで表される.

なお,(1.4) のh-vectorは, i) $(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{(d+1)個})$, ii) $(1,3,1,1)$, iii) $(1,4,4,1)$, iv) $(1,5,-1,1)$ となる. iv)でわかる様に, $h_i<0$となることも起こるのである.

<u>定理</u>(1.7) Pがd次元simplicial polytopeで, そのh-vectorを$h=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$とする時,

$$h_i = h_{d-i} \qquad (0 \leqq {}^\forall i \leqq d)$$

が成立する. これを<u>Dehn-Sommerville equations</u>と言う.

もちろん, Pがsimplicialでなければ, これは成立しない. (1.4) の ii), iv)を参照せよ. しかしながら,

<u>定理</u>(1.8) Pが(必ずしもsimplicialとは限らない一般の)polytopeで, $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$をそのf-vectorとする時

$$\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j f_j = 1+(-1)^{d-1}$$

が成立する. (Eulerの定理)

Eulerの定理は，h-vector の言葉で書けば$h_0=h_d$に他ならない．特に，$d=3$とすると，Eulerの定理は $f_2-f_1+f_0=2$，即ち

(頂点の数)+(面の数)−(辺の数)＝2

という周知の結果となる．なお，この結果から，正多面体が5種類しかないということが従うことに注意しよう．

さて，Dehn-Sommerville equationsに刺激され，当然のことながら，$(h_0, h_1, \cdots, h_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ が適当なd次元simplicial polytope のh-vectorとなりうる為の必要十分条件は何であるかという問題が生起する．

<u>定義</u>(1.9) h, i がpositive integer の時

$$h=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}$$

$$n_i>n_{i-1}>\cdots>n_j\geqq j\geqq 1$$

とuniqueに書ける．この時

$$h^{\langle i\rangle}\underset{\text{def.}}{=}\binom{n_i+1}{i+1}+\binom{n_{i-1}+1}{i}+\cdots+\binom{n_j+1}{j+1}$$

また，$0^{\langle i\rangle}\underset{\mathrm{def.}}{=}0$ とする．

具体的に，$n_i, n_{i-1}, \cdots, n_j$ を求める方法を述べよう．まず $h\geq\binom{n}{i}$ なる整数 $n>0$ のうちで最大のものを n_i とする．この時，$h>\binom{n_i}{i}$ ならば，次は $h\geq\binom{n_i}{i}+\binom{m}{i-1}$ なる整数 $m>0$ のうちで最大のものを n_{i-1} とする．以下，同様にして等号が成立するまで，順次 $n_{i-2}, \cdots, n_j$ を定めればよい．例えば，$h=95$，$i=5$ とすると

$$95=\binom{8}{5}+\binom{7}{4}+\binom{4}{3}$$

となる．

<u>定義</u>(1.10) $(h_0, h_1, \cdots, h_d)\in\mathbb{Z}^{d+1}$ が M-vector であるとは，

$$h_0=1,\ 0\leq h_1,\ 0\leq h_{i+1}\leq h_i^{\langle i\rangle}\quad(1\leq i\leq d-1)$$

を満たす時を言う．

例えば，$(1,3,5,h)$ が M-vector であるとすると，

$$5=\binom{3}{2}+\binom{2}{1},\quad 5^{\langle 2\rangle}=\binom{4}{3}+\binom{3}{2}=7$$

だから，$0\leq h\leq 7$ である．

さて，simplicial polytope の h-vector に関して，1971 年に McMullen は [16] において次の予想を提出した．

<u>McMullen's conjecture</u>　$(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が適当なd次元 simplicial polytope のh-vectorとなる為の必要十分条件は

(i) $h_0 = 1$

(ii) $h_i = h_{d-i}$　$(0 \leqq i \leqq d)$

(iii) $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \cdots, h_{[d/2]} - h_{[d/2]-1})$ はM-vector である.

この予想は, 十分条件であることが, Billera-Lee [2] で combinatorial な手法によって, また, 必要条件であることが Stanley [22] において代数幾何の議論を経由して, それぞれ1980年に肯定的に解決された.

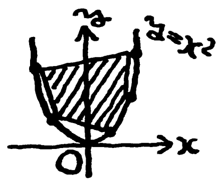
例えば, $h = (1, 2, 4, 2, 1)$ は, (1.11) の(i), (ii)を満たすが, (iii)は満たさないから, $h(P) = (1, 2, 4, 2, 1)$ となる5次元 simplicial polytope Pは存在しない.

<u>Cyclic polytope</u>　$\mathbb{R}^d$ の中の moment curve

$$M = \{(t, t^2, \cdots, t^d) \in \mathbb{R}^d ; \ t \in \mathbb{R}\}$$

を考えよう. M上にs個の相異なる点 $v_1, v_2, \cdots, v_s$ $(s > d)$ を取り, これらの点の凸閉包$[v_1, v_2, \cdots, v_s]$を cyclic polytope と言い$C(s, d)$ と書く.

$C(s,d)$ は d 次元 simplicial polytope であって，$c_i(s,d) \underset{\text{def.}}{=} f_i(C(s,d))$ $(0 \leqq i \leqq d-1)$ は i，s と d のみに depend し，s 個の点の選び方には無関係である．そして，



$C(5,2)$

$0 \leqq i < [d/2]$ の時，$c_i(s,d) = \binom{s}{i+1}$ が成立する．なお，$c_i(s,d)$ の詳細な値は，McMullen-Shephard [18, Prop. 19, P. 86] を参照．

ところで，この $c_i(s,d) = \binom{s}{i+1}$ という値を考えよう．一般に，P を s 個の頂点を持つ d 次元 simplicial polytope とする時，その i 次元 face の個数 $f_i(P)$ は高々 $\binom{s}{i+1}$ である．そして，この f-vector の上限となる $\binom{s}{i+1}$ を cyclic polytope $C(s,d)$ は，$0 \leqq i < [d/2]$ の範囲で獲得している．ところが，simplicial polytope では，Dehn-Sommerville equations (1.7) が成立するから，$f_{[d/2]}$，$f_{[d/2]+1}, \cdots, f_{d-1}$ のそれぞれは，$f_0, f_1, \cdots, f_{[d/2]-1}$ で表すことが可能である．従って，$C(s,d)$ の f-vector $c_i(s,d)$ は $[d/2] \leqq i < d$ の範囲でも，恐らく，d 次元 simplicial polytope の f-vector の上限を与えるであろうことが期待される．これが Motzkin [19] の内容であって，

<u>Upper Bound Conjecture</u> (U.B.C) <u>for polytopes</u>

$\mathcal{P}_s^d$ を $f_0(P) = s$ となる d 次元 polytope 全体の集合とし，

$$\mu_i(s,d) \underset{\text{def.}}{=} \max_{P \in \mathcal{P}_s^d} f_i(P)$$

とすれば，$\mu_i(s,d) = c_i(s,d) \quad (0 \leqq {}^\forall i < d)$ が成立する．

このMotzkin のU.B.Cは1957年に提出され，最終的には1970年にMcMullen[17] によって解かれた．この間の歴史を簡単に述べよう．まず，$d \leqq 4$の時は，即に，前世紀にBrücker[3]によって得られていたことに注意しよう．Motzkin[19] 以来，特に，$i = d-1, [d/2]$ の時が，sの値に制限を付けて，Fieldhouse[7], Gale[8], Klee[13], Grünbaum[9] 等によって研究された．なお，Klee[13]において

補題(1.11)　Pを任意のd次元polytopeとせよ．この時，d次元simplicial polytope Qで，$f_0(P) = f_0(Q)$, $f_i(P) \leqq f_i(Q) \quad (1 \leqq {}^\forall i < d)$ を満たすものが存在する．

が示されていたことは，その後のU.B.Cの研究を大きく進歩させることになった．何故ならば，この結果によって，U.B.Cはsimplicial polytopeのみを考察の対象とすればよく，しかる時にはDehn-Sommerville equations (1.7) が使える

のである．

さて，Bruggesser-Mani[4] は，任意の d 次元polytope P の boundary ∂P が，次の意味で shellable であることを示した．即ち，P の facet の labelling $F_1, \cdots, F_m$ ($m = f_{d-1}(P)$) で

$$F_t \cap \left(\bigcup_{\nu=1}^{t-1} F_\nu \right) \underset{\text{homeo.}}{\cong} B^{d-2} \qquad (1 < {}^\forall t \leq m)$$

となるものが存在する．

そして，McMullen[17] は，$P \in \mathcal{P}_s^d$ が simplicial の時 Dehn-Sommerville equations によって，$f_i(P) \leq c_i(s, d)$ ($1 \leq {}^\forall i < d$) が

$$(*) \quad h_i(P) \leq \binom{s-d+i-1}{i} \qquad (1 \leq {}^\forall i < [d/2])$$

と同値であることをまず示し，∂P の shellability を利用して，U.B.C for polytopes を肯定的に解いたのである．

なお，Bruggesser-Mani の結果は，Hochster[11] においても，本質的であることに注意しておく．[11]は，可換環論と combinatorics の結び付きを，始めて世に示した，記念碑的な論文である．

さて，U.B.C をもう少し一般の状況で考えよう．まず，

Δをvertex set $V=\{v_1,\cdots,v_s\}$上のsimplicial complexとしよう．即ち，ΔはVの部分集合の集合であって，

(i) $\{v_i\}\in\Delta \quad (\forall i)$

(ii) $\sigma\in\Delta,\ \tau\subset\sigma \Rightarrow \tau\in\Delta$

を満たすものである．$\sigma\in\Delta$をface，$\#(\sigma)=i+1$の時，σをi次元faceと言う．また，

$$\dim\Delta \underset{\text{def.}}{=} \max_{\sigma\in\Delta}\#(\sigma)-1$$

と定義する．さて，$\dim\Delta=d-1$とする時，polytopeの場合と同様にして，

$$f_i=f_i(\Delta)=\#\{\Delta \text{ の } i \text{ 次元 face}\} \quad (0\leqq i<d)$$

と置き，$f=f(\Delta)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$を$\Delta$の$f$-vector，

$$h_i=h_i(\Delta)\underset{\text{def.}}{=}\sum_{j=0}^{i}\binom{d-j}{d-i}(-1)^{i-j}f_{j-1} \quad (0\leqq i\leqq d)$$

（ただし，$f_{-1}=1$）とし，$h=h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$を$\Delta$の$h$-vectorと言う．

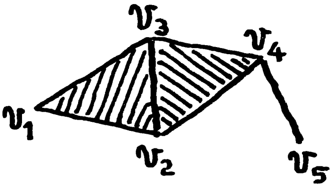
定義(1.12) $\mathbb{R}^n$の有限個のsimplex $T_1,T_2,\cdots$から成る集合KがEuclidean complexであるとは，

(i) T_iの任意のfaceはKに属する

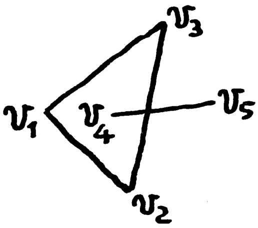
(ii) $T_i\cap T_j\neq\emptyset$の時，$T_i\cap T_j$はT_i, T_jのfaceである

を満たす時を言う.

例えば, $\mathbb{R}^2$ では,



Euclidean complex



not Euclidean complex

Euclidean complex $\mathbb{K}$の次元を $\dim \mathbb{K} \underset{\text{def.}}{=} \max_{T \in \mathbb{K}} \dim T$ で定義する. また, $\mathbb{K}$は$\mathbb{R}^n$のsimplexの集合であるから, $\mathbb{K}$自身は$\mathbb{R}^n$の"図形"ではないが,

$$|\mathbb{K}| \underset{\text{def.}}{=} \bigcup_{T \in \mathbb{K}} T$$

とすることによって, $\mathbb{K}$に$\mathbb{R}^n$の図形的な意味を与えることができる. $|\mathbb{K}|$を$\mathbb{K}$の<u>Euclidean polyhedron</u> と言う.

さて, Euclidean complex $\mathbb{K}$に含まれる各simplexのvertex全体の集合を$V=\{v_1, \cdots, v_s\}$とし, $T \in \mathbb{K}$の時, σ_T をTのvertexの集合としよう. この時

$$\Delta_{\mathbb{K}} = \{\sigma_T \,;\, T \in \mathbb{K}\}$$

と置くと，Δ_KはV上のsimplicial complexとなる．また逆に，$V=\{v_1,\cdots,v_s\}$上のsimplicial complex Δが与えられた時，$\Delta_K=\Delta$ となるEuclidean complex Kが存在する．実際，例えば，

$$e_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^s$$

とし，$\sigma\in\Delta$の時，T_σを$\{e_i\,;\,v_i\in\sigma\}$の凸閉包とし，$K=\{T_\sigma\,;\,\sigma\in\Delta\}$と置けば，$e_i$と$v_i$を対応させることによって，$\Delta_K=\Delta$となる．この時，$|K|$をsimplicial complex Δの<u>geometric realization</u>と言い，$|\Delta|$とも書く．またtopological space Xで，$X\underset{\text{homeo.}}{\cong}|\Delta|$となる時，$\Delta$を$X$の<u>triangulation</u>と呼ぶ．

$\boxed{\text{例}}$(1.13) Pがd次元simplicial polytope，$V=\{v_1,\cdots,v_s\}$をPのvertex全体の集合としよう．TがPのfaceの時，Tのvertexの集合を$\sigma_T\ (\subset V)$とすれば

$$\Delta_P=\{\sigma_T\ ;\ T\text{は}P\text{のface}\}$$

はV上のsimplicial complexであって，

$$\dim\Delta_P=d-1\ ,\ f_i(P)=f_i(\Delta_P)\ ,\ |\Delta_P|=\partial P\,(\underset{\text{homeo.}}{\cong}S^{d-1})$$

となる．Δ_Pをsimplicial complex Pの<u>boundary complex</u>と言う．

ところで，simplicial polytopeに対して成立したDehn-Sommerville equations (1.7) は，次の様に拡張することができる．即ち，

<u>定理</u>(1.14) Δがsimplicial complexで$\dim\Delta=d-1$とせよ．もし$|\Delta| \underset{\text{homeo.}}{\cong} S^{d-1}$ならば，$h_i=h_{d-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq d)$ が成立する．

そして，U.B.C for polytopesもKlee[13]で暗示されている様に，

<u>Upper Bound Conjecture for spheres</u>

Δがsimplicial complexで，$\dim\Delta=d-1$，$|\Delta| \underset{\text{homeo.}}{\cong} S^{d-1}$，$f_0(\Delta)=s$ の時，

$$f_i(\Delta) \leqq c_i(s,d) \qquad (0 \leqq {}^\forall i < d)$$

が成立する．

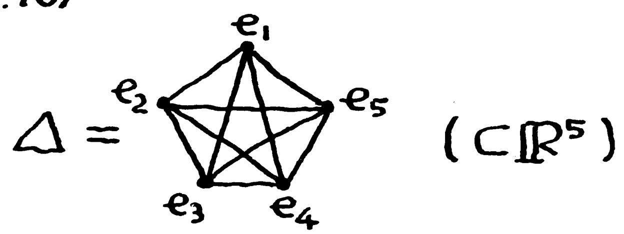
なる形に自然に到る．もちろん(1.14) の御陰で，これは

$$h_i(\Delta) \leqq \binom{s-d+i-1}{i} \qquad (1 \leqq {}^\forall i < [d/2])$$

と同値である．

注意(1.15) Grünbaum-Sreedharan[10]ではsphereのtriangulationでsimplicial polytopeのboundary complexとはなり得ないものの存在が示されている.

例(1.16)



とすると, $f(\Delta)=(5,10)$, $h(\Delta)=(1,3,6)$ となるが, cyclic polytope $C(5,2)$ の f-vectorは, $(5,5)$ であるから, Δに対しては, U.B.Cは成立しない.

§2. Stanley's proof of U.B.C for spheres

変数 $y_1,\cdots,y_t$ のmonomial $y_1^{a_1}\cdots y_t^{a_t}$ 全体の集合 M の空でない有限部分集合 Γ が<u>order ideal of monomials</u>(または<u>multicomplex</u>)であるとは,

$$w\in\Gamma,\ w'|w \Rightarrow w'\in\Gamma$$

を満たす時を言う。$\Gamma \neq \phi$ より，定義から $1 \in \Gamma$ が従うことに注意しよう。

定義(2.1) $(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が O-sequence であるとは，体 k 上の graded ring $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_d$ で，$R_0 = k$，$R = k[R_1]$，$\dim_k R_i = d_i$ $(\forall i)$ を満たすものが存在する時を言う。

Stanley[23, Th.2.1]によって，$(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ が O-seq. であることと，変数 $y_1, y_2, \cdots, y_t$ $(t = h_1)$ の order ideal of monomials Γ で，$\#\{w \in \Gamma ; \deg w = i\} = h_i$ $(\forall i)$ となるものが存在することとは同値である。ただし，$\deg y_i = 1$ $(\forall i)$ である。

なお，monomial の集合 M で，divisibility による order ($w' \leq w \underset{def.}{\Longleftrightarrow} w' | w$) を考えれば，$\Gamma$ はその maximal elements が与えられれば決定する。$w_1, w_2, \cdots, w_l$ が Γ の maximal elements の時，$\Gamma = \langle w_1, w_2, \cdots, w_l \rangle$ と書くことにしよう。例えば，$\Gamma = \langle x^2 y^3 z, z^3 \rangle$ の時，Γ から得られる O-seq. は，$(1, 3, 6, 7, 5, 3, 1)$ である。

O-seq. が Γ から構成できるということは，O-seq. の例を沢山作るには便利であるが，与えられた有限数列が O-seq.

であるか否かを判断する手段としては，あまり役に立たない．
ところが，

命題(2.2) (Stanley[23, Th.2.2], Macaulay[15])
M-vector と O-seq. の概念は一致する．

によって，環論的な概念である O-seq. が combinatorial な M-vector に結び付くのである．

定義(2.3) 変数 $y_1, y_2, \cdots, y_t$ ($\deg y_i = 1$) の order ideal of monomials Γ の maximal elements の degree がすべて等しい時，Γ を pure と言う．そして，pure な Γ から得られる O-seq. を pure O-seq. と呼ぶ．

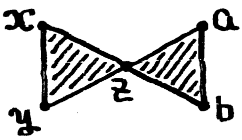
例(2.4) $\Gamma = \langle xy^2z^3, x^3y^3 \rangle$ は pure だから，Γ より得られる O-seq. (1, 3, 6, 10, 8, 5, 2) は pure である．また，(1, 3, 1) は O-seq. であるが，pure O-seq. ではない．

一般に，$(h_0, h_1, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ が O-seq. であれば，$h_i \leq \binom{h_1+i-1}{i}$ であり，また，pure O-seq. ならば，更に，$h_i \leq h_d \binom{d}{i}$ が成立する．

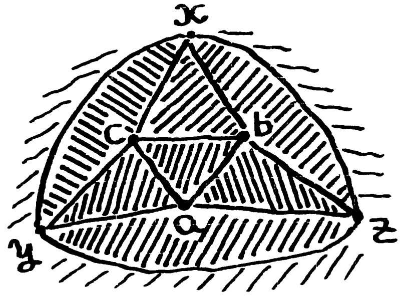
<u>Stanley-Reisner ring</u> $k[\Delta]$　Δをvertex set $V=\{v_1,\cdots,v_s\}$ 上の simplicial complex とする. kを体とする時, 多項式環 $k[v_1,\cdots,v_s]$ の ideal I_Δを

$$I_\Delta=(v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_r} \mid i_1<i_2<\cdots<i_r, \{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}\}\notin\Delta)$$

で定義し, $k[\Delta]=k[v_1,\cdots,v_s]/I_\Delta$ と置く. $k[\Delta]$ を simplicial complex Δの <u>Stanley-Reisner ring</u> と呼ぶ.

$\boxed{例}$(2.5) 

$I_\Delta=(ax,bx,ay,by)$



$I_\Delta=(ax,by,cz)$

Stanley-Reisner ring $k[\Delta]$ の簡単な性質を述べよう. $\dim\Delta=d-1$ とし, $f(\Delta)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$, $h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ を, それぞれ, Δの f-vector, h-vector とする.

命題(2.6) $\dim k[\Delta] = \dim\Delta + 1 \ (= d)$

次に，$\deg v_i = 1 \ (\forall i)$ とすると，$k[\Delta] = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ は $k = R_0$ 上の graded ring で，$k[\Delta]$ は k 上 R_1 で生成される．$H(k[\Delta], n)$，$P(k[\Delta], \theta)$ を $k[\Delta]$ の Hilbert function，Poincaré series とする．即ち，

$$H(k[\Delta], n) = \dim_k R_n, \quad P(k[\Delta], \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H(k[\Delta], n)\theta^n$$

この時，

$$(2.7) \qquad H(k[\Delta], n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{n-1}{i} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

$$(2.8) \qquad P(k[\Delta], \theta) = \frac{h_0 + h_1\theta + \cdots + h_d\theta^d}{(1-\theta)^d}$$

が成立する．これより，simplicial complex Δ の f-vector や h-vector なる combinatorial な概念が，$k[\Delta]$ を媒介と

して，Hilbert function や Poincaré seriesといった可換環論の概念と関係してくるのである．

さて，しばらくの間，$k[\Delta]$ の Cohen-Macaulay，Gorensteinといった性質を扱おう．

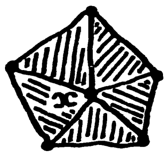
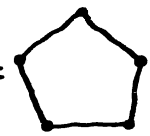
<u>定義</u>(2.9) kを体とする．simplicial complex Δが Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) over k であるとは $k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein)環である時を言う．

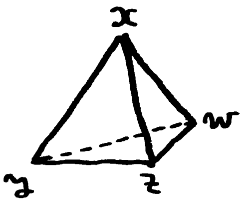
$k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) であるか否かの combinatorial な結果は，Hochster[12]，Reisner[27]で得られている．それを述べる前に，少し準備をしよう．Δがsimplicial complex の時，$\sigma\in\Delta$ に対して，

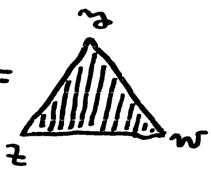
$$\mathrm{lk}_\Delta(\sigma) \underset{\mathrm{def.}}{=} \{\tau\in\Delta \,;\, \sigma\cap\tau=\phi,\ \sigma\cup\tau\in\Delta\}$$

とし，σ の<u>link</u>と言う．なお，便宜上，$\sigma=\phi$の時も考え，$\mathrm{lk}_\Delta(\phi)=\Delta$とする．

$\boxed{\text{例}}$(2.10)

$\Delta =$  の時, $lk_\Delta(\{x\}) =$ 

$\Delta =$ 

の時, $lk_\Delta(\{x\}) =$ 

tetrahedron

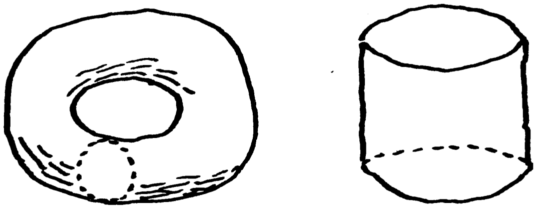
また, $\tilde{H}_i(\Delta; k)$で, kを係数に持つΔの i-th reduced simplicial homology を表す. $\tilde{H}_i(\Delta; k)$ の定義については Hochster[12, §2] 等を参照のこと. この時,

<u>定理</u>(2.11) (Reisner[27]) ΔがCohen-Macaulay over k である為の必要十分条件は, 任意の $\sigma \in \Delta$ ($\sigma = \emptyset$ も含む) に対して

$$\tilde{H}_i(lk_\Delta(\sigma); k) = 0 \qquad 0 \leq {}^\forall i < \dim lk_\Delta(\sigma)$$

が成立することである.

例(2.12)



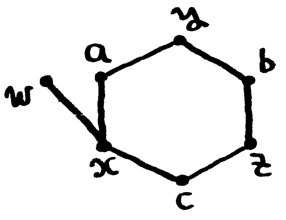
: not Cohen-Macaulay

定理(2.13) (Hochster[12]) $\dim\Delta \geqq 1$ の時，次は同値である：

(i) 任意の体 k に対して，$k[\Delta]$ は Gorenstein 環である．

(ii) 任意の体 k に対して，$k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay 環であり，かつ，任意の $(\dim\Delta-2)$ 次元 face σ に対して，$lk_\Delta(\sigma)$ は circle または高々3個の頂点を持つ line である．

例(2.14)



は，Cohen-Macaulay であるが，Gorenstein ではない)．

系(2.15)　$|\Delta| \underset{\text{homeo.}}{\cong}$ sphere　ならば, 任意の体kに対して $k[\Delta]$ はGorenstein 環である.

なお, $k[\Delta]$がCohen-Macaulayであるか否かは, $|\Delta|$ によって決まり, $|\Delta|$ の triangulation には関係しないのである (Munkres[20]) が, Gorenstein では事状は異なる. 例えば,


: Gorenstein


: not Gorenstein

以上の準備の下で, Stanley[24]では, 次の様にして, U.B.C for spheres を証明している. まず,

命題(2.16)　Δが或る体k上Cohen-Macaulayならば, h-vector $h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$　$(\dim \Delta = d-1)$ は, O-seq. である.

[証明] kは無限体であるとしてよい. すると, $k[\Delta]$ が d次元 Cohen-Macaulay環であることから, degree 1の homogeneous elements から成る regular sequence

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_d$ が取れる. $k[\Delta]$ の Poincaré series は (2.8) で与えられていたから, $k[\Delta]/(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_d)$ の Poincaré series は $h_0 + h_1\theta + \cdots + h_d\theta^d$ である. 従って, $h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ は O-seq. である. ▨

系(2.17) $\dim\Delta = d-1$, $f_0(\Delta) = s$ で, Δ が或る体 k 上 Cohen-Macaulay ならば, $h_i(\Delta) \leqq \binom{s-d+i-1}{i}$ $(1 \leqq {}^\forall i \leqq d)$ である.

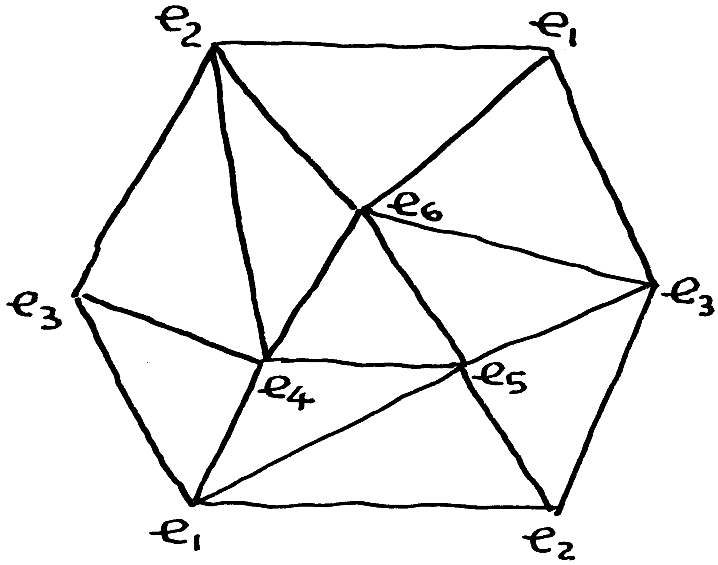
[証明] $h_1(\Delta) = H(k[\Delta]/(\eta_1, \cdots, \eta_d); 1) = H(k[\Delta]; 1) - d = s-d$ であり, $h(\Delta)$ は O-seq. だから,

$$h_i(\Delta) \leqq \binom{h_1(\Delta)+i-1}{i} = \binom{s-d+i-1}{i}$$ ▨

系(2.18) U.B.C for spheres が成立する.

$|\Delta| \underset{\text{homeo.}}{\cong}$ sphere から, Δ が Cohen-Macaulay であることを導く過程で Reisner の結果を使ったことを認めてしまえば, 他の議論は, きわめて elementary であり, "idea の素晴しさ" というものを感じることができよう. 可換環論の combinatorics へのきわめて dramatic な応用である.

なお，$k[\Delta]$がCohen-Macaulay環，Gorenstein環であるか否かは，体kの標数にdependする．Cohen-Macaulayについては，Reisner[27]で実射影平面のtriangulation



が記されている．また，Gorensteinについては，最近，Gräbe[28]において，

$\boxed{\text{例}}$(2.19) $V=\{e_1, e_2, \cdots, e_8\}$とし，$1 \leqq \alpha < \beta < \gamma < \delta \leqq 8$の時，$V$の部分集合$\{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta\}$を，簡単に$(\alpha\beta\gamma\delta)$と書くことにする．この時

(1235), (1236), (1237), (1245),
(1246), (1248), (1278), (1345),
(1347), (1348), (1368), (1467),

(1678), (2346), (2347), (2348),
(2358), (2457), (2578), (3456),
(3568), (4567), (5678)

とそれらの部分集合全体から成るvertex set V上のsimplicial complexをΔとすれば、$k[\Delta]$は、kの標数が$\neq 2$の時Gorensteinであり、kの標数が$=2$の時はCohen-Macaulayですらない。なお、$|\Delta|$は、3次元実射影空間である。

§3. 可換環論における有限数列

kを体とする。$R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$がgraded ringで

$$R_0=k, \quad R=k[R_1], \quad \dim_k R_1<\infty$$

を満たす時、Rを<u>standard</u> k-alg. と言う。この時、Hilbert function $H(R,n)$, Poincaré series $P(R,\theta)$を

$$H(R,n) \underset{\text{def.}}{=} \dim_k R_n$$

$$P(R,\theta) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} H(R,n)\theta^{n}$$

で定義する. $\dim R = d$ とすると, $H(R,n)$ は $n \gg 0$ の時 n の $(d-1)$ 次式であり,

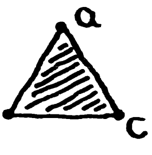
$$(※) \quad F(R,\theta) = \frac{h_0 + h_1\theta + \cdots + h_s\theta^{s}}{(1-\theta)^{d}} \qquad (h_s \neq 0)$$

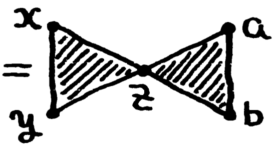
と書ける.

<u>定義</u>(3.1) (※)における$(h_0, h_1, \cdots, h_s)$, $h_s \neq 0$, をRの<u>h-vector</u>と言い, $h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$と書く.

なお, simplicial complex Δ の h-vector $h(\Delta)$ と, Stanley-Reisner ring $k[\Delta]$ の, standard k-alg. としての, h-vector $h(k[\Delta])$ は, 一般には異なり, $h(\Delta)$ は, $h(k[\Delta])$ に何個かの 0 を付け加えたものとなる.

例(3.2)

$\Delta_1 =$ 

$\Delta_2 =$ 

の時，$f(\Delta_1)=(3,3,1)$，$h(\Delta_1)=(1,0,0,0)$，$h(k[\Delta_1])=(1)$，$f(\Delta_2)=(5,6,2)$，$h(\Delta_2)=(1,2,-1,0)$，$h(k[\Delta_2])=(1,2,-1)$となる．

もう少し詳細に$h(\Delta)$と$h(k[\Delta])$の関係を述べよう．
Δ が vertex set V 上の simplicial complex で，
$v\in V$ の時，

$$\mathrm{st}\{v\} \underset{\mathrm{def.}}{=} \{\sigma\in\Delta\,;\,\sigma\cup\{v\}\in\Delta\}$$

$$\mathrm{core}\,V \underset{\mathrm{def.}}{=} \{v\in V\,;\,\mathrm{st}\{v\}\subsetneqq\Delta\}$$

とし，更に，core V 上の simplicial complex core Δ を

$$\mathrm{core}\,\Delta \underset{\mathrm{def.}}{=} \{\sigma\in\Delta\,;\,\sigma\subset\mathrm{core}\,V\}$$

と定義する．この時，$\dim\Delta=d-1$，$h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$，$h(k[\Delta])=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$，$h_s\neq 0$，ならば，$\dim\mathrm{core}\,\Delta=s-1$ であって，

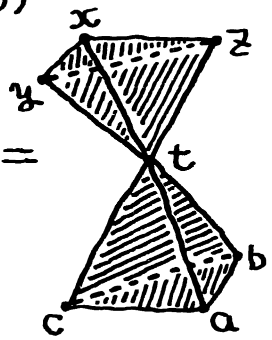
$$h(\mathrm{core}\,\Delta)=h(k[\mathrm{core}\,\Delta])=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$$

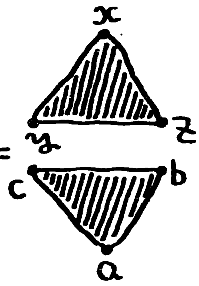
となる．環論的には，

$$k[\Delta] = k[\mathrm{core}\,\Delta][v \,;\, v \in V - \mathrm{core}\,V]$$

である.

例(3.3)

$\Delta =$ 

の時, $\mathrm{core}\,V = \{t\}$, $\mathrm{core}\,\Delta =$ 

であって,

$f(\Delta) = (7, 12, 8, 2)$, $h(\Delta) = (1, 3, -3, 1, 0)$, $h(k[\Delta]) = (1, 3, -3, 1)$, $f(\mathrm{core}\,\Delta) = (6, 6, 2)$, $h(\mathrm{core}\,\Delta) = (1, 3, -3, 1)$, $h(k[\mathrm{core}\,\Delta]) = (1, 3, -3, 1)$ である.

命題(3.4) R が Cohen-Macaulay standard k-alg. で $h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$, $h_s \neq 0$, が R の h-vector の時,

$$h_s \leqq \mathrm{type}(R)$$

である.

[証明] 一般性を失なうことなく，$\dim R=0$ と仮定してよい．すると，

$$R=R_0\oplus R_1\oplus\cdots\oplus R_s\ ,\ R_0=k,\ R_s\neq(0)$$

であって，

$$h_i=\dim_k R_i \qquad (0\leqq i\leqq s)$$

となる．

$$R_+=R_1\oplus\cdots\oplus R_s$$

と置くと，

$$\mathrm{Soc}(R)\underset{\mathrm{def.}}{=}\{\xi\in R\ ;\ \xi R_+=0\}\supset R_s$$

従って，

$$\mathrm{type}(R)\underset{\mathrm{def.}}{=}\dim_k(\mathrm{Soc}(R))\geqq\dim_k R_s=h_s$$

となる．▨

<u>定義</u>(3.5) Cohen-Macaulay standard k-alg. R が $h_s=\mathrm{type}(R)$ を満たす時，<u>level ring</u> と言う (cf. Stanley[25])．Gorenstein環は，$h_s=1$ なる level ring である．

<u>定義</u>(3.6) $(h_0,h_1,\cdots,h_s)\in\mathbb{Z}^{s+1}$，$h_s\neq0$，が <u>Cohen-Macaulay</u> (resp. <u>level</u>, <u>Gorenstein</u>) <u>seq</u>. であるとは，$h(R)=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ を満たす"或る"体

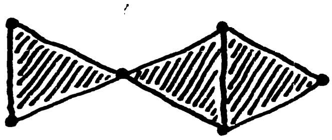
k上の standard k-alg. Rで，Cohen-Macaulay（resp. level，Gorenstein）環であるものが存在する時を言う．

この様にして，可換環論において有限数列が定義されるわけであるが，当然，これらの combinatorial な特徴付けがどうなるかが興味の対象になる．

<u>定理</u>(3.7)　$(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $h_s \neq 0$, なる sequence が，Cohen-Macaulay seq. である為の必要十分条件は，$(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ が O-seq. となることである．

[証明] 必要性は (2.16) の類似である．十分性は O-seq. $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ を与える $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_s$ ($R_0 = k$, $R = k[R_1]$) は，0次元故 Cohen-Macaulay 環となることから従う．▨

例えば，

$\Delta =$ 

とすると，$f(\Delta)=(6,8,3)$，$h(\Delta)=(1,3,-1,0)$で，$h(\Delta)$には-1が現れるから，$h(\Delta)$はO-seq. ではない．故に，ΔはCohen-Macaulayではない．

例(3.8)　$R=k[x,y,z,t]/I$

$$I=(x^2,y^2,xt,yt,zt,t^2)$$

とすると，$h(R)=(1,3)$はO-seq. であるが，RはCohen-Macaulayではない．

さて，O-seq. は，(2.2)によってM-vectorであり，M-vectorというものは，combinatorialな概念だから，(3.7)によって，Cohen-Macaulay seq. についてのcombinatorialな特徴付けが完全に得られたことになる．しかしながら，level seq. やGorenstein seq. については状況は複雑で見通しはまだ暗い．

命題(3.9)　pure O-seq. (cf. (2.3))は，level seq. である．

[証明]　$(h_0,h_1,\cdots,h_s)$，$h_s\neq0$，がpure O-seq. の時，それに対応する変数$y_1,\cdots,y_t$ $(t=h_1,\ \deg y_i=1)$の

pure order ideal of monomials Γを取って, Γの元をfree basisとする0次元standard k-alg.

$$R = k[y_1, \cdots, y_t]/\Sigma = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_s$$

を作る. ただし, Σは, $y_1, \cdots, y_t$のmonomial全体の集合$\mathcal{M}$におけるΓのcomplementである. この時, $h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$である.

以下, Rがlevel ringであることを示そう. $M \in \Gamma$, $i = \deg M < s$とすると, Γがpureであることから, $M' \in \Gamma$, $\deg M' = s$で, $M \mid M'$となるものが存在する. そこで, $M' = MN$とすると,

$$N \in R_{s-i} \subset R_+ = R_1 \oplus \cdots \oplus R_s$$

で, $MN \neq 0$だから, $M \notin \mathrm{Soc}(R)$, 従って,

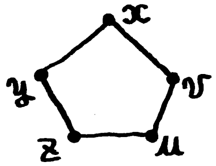
$$\mathrm{Soc}(R) = R_s$$

となり, Rはlevel ringである. ▨

$\boxed{例}$(3.10) O-seq. (1, 3, 1)はpureではない (cf. (2.4))が, level seq. である. 実際, $R = k[x, y, z]/I$

$$I = (xy, yz, zx, x^2 - y^2, y^2 - z^2, x^3, y^3, z^3)$$

とすれば, Rはlevel ringであって, $h(R) = (1, 3, 1)$となる. なお, $\mathrm{type}(R) = 1$だから, RはGorenstein環であり, (1, 3, 1)は, Gorenstein seq. である. なお,

$\Delta =$ 

であれば, $|\Delta|$ は S^1 と homeo. だから, (2.15)より, Δは Gorenstein であって, $f(\Delta)=(5,5)$, $h(\Delta)=(1,3,1)$ となる.

<u>定義</u>(3.11) O-seq. $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ が $h_i = h_{s-i}$ $(\forall i)$ を満たす時, <u>weakly Gorenstein seq.</u> と言う.

Stanley[23, Th.4.1] によって, Gorenstein seq. は weakly Gorenstein seq. である.

$\boxed{\text{例}}$(3.12) $(1,4,3,4,1)$ は weakly Gorenstein seq. であるが, Gorenstein seq. ではない.

[証明] $(1,4,3,4,1)$ が O-seq. であることは, (2.2) と(1.10) によって, 計算で確認できる. すると, weakly Gorenstein seq. である.

さて, $(1,4,3,4,1)$ が Gorenstein seq. と仮定すると, $h(R)=(1,4,3,4,1)$ となる 0 次元 Gorenstein standard k-alg. $R=R_0\oplus R_1\oplus R_2\oplus R_3\oplus R_4$ $(R_0=k)$が存在する．Rは Gorenstein 環だから，$0\neq x\in R_1$ を取って，$I=[0:x]$ とすれば，R/I は Gorenstein 環となる．実際，

$$\mathrm{Soc}(R/I)=[\mathrm{Soc}(R):x]/I\hookrightarrow \mathrm{Soc}(R)$$

だから，$\dim_k \mathrm{Soc}(R/I)=1$ となるからである．

そこで，$h(R/I)=(1,a,a,1)$ とすれば，$xR\cong R/I$ だから，$h(R/x)=(1,3,3-a,4-a)$ である．しかしながら，任意の $a\geqq 1$ に対して，$(1,3,3-a,4-a)$ は O-seq. にはならない．故に，$h(R)=(1,4,3,4,1)$ となる Gorenstein 環 R は存在しない．▨

例(3.13) $R=k[x,y,z,t]/I$

$$I=(x^2,xy^2,y^3,xt,yt,zt,t^2)$$

とすると，$h(R)=(1,3,1)$ は Gorenstein seq. であるが，R は Cohen-Macaulay ではない (cf. [6])．

定義(3.14) Gorenstein seq. $(h_0,h_1,\cdots,h_s)$, $h_s\neq 0$, が <u>strongly Gorenstein seq.</u> であるとは，或る体 k 上の Gorenstein simplicial complex Δ で，$h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ となるものが存在する時を言う．

しからば，strongly Cohen-Macaulay seq. を定義したらどうかという提案が出るであろうが，

<u>定理</u>(3.15) kが体，$(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$，$h_s \neq 0$，がO-seq. の時，$k$上のCohen-Macaulay simplicial complex Δ で，$\dim \Delta = s-1$，$h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ となるものが存在する（cf. Stanley[25, Th.6]）．

というKruskal-Kotana の結果があるから，その様な数列を定義することは無意味である．

さて，strongly Gorenstein seq. に関して，Klee[14] では，

<u>定理</u>(3.16) $(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$，$h_s \neq 0$ がstrongly Gorenstein seq. の時

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_{s-1} \geqq (s-1) h_1$$

が成立する．

が得られているし，更に，Stanley による次の予想も興味深い．

<u>Conjecture</u> (3.17) $(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $h_s \neq 0$, が strongly Gorenstein seq. である為の必要十分条件は

(i) $h_i = h_{s-i}$ $(\forall i)$

(ii) $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \cdots, h_{[s/2]} - h_{[s/2]-1})$ は O-seq. である.

肯定的に解決された McMullen's conjecture を考慮すれば, (3.17) は, strongly Gorenstein seq. を与える Gorenstein simplicial complex Δ として, simplicial polytope の boundary complex (1.13) が取れるかという予想である. なお, Stanley[23, Th.4.2]によって, $h_1 \leqq 3$ の時は, (3.17) の (i), (ii) は, $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ が Gorenstein seq. となる為の必要十分条件である. 従って, $h_1 \leqq 3$ の時は, Gorenstein seq. と strongly Gorenstein seq. の概念は一致する (cf. Buchsbaum-Eisenbud[5]).

<u>Construction of Gorenstein sequence</u>

$(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $h_s \neq 0$, を level seq. とし, standard k-alg. $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_s$ は, $h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ なる level ring とする. Stanley[23, Ex.4.3] (cf. Reiten[21], Aoyama[1]) において示され

ている様に、$E=\mathrm{Hom}_k(R,k)$を自然にR-mod.と考え、idealization $R\ltimes E$を作ると、これは、

$$(h_0, h_1, \cdots, h_s, 0)+(0, h_s, h_{s-1}, \cdots, h_1)$$

をh-vectorに持つ0次元Gorenstein standard k-alg.となる。

要するに、level seq.が与えられれば、その順序を逆にして、項を1つずつずらして、加えることによって、Gorenstein seq.が構成できるのである。

例(3.18) $R=k[x,y,z]/(x,y,z)^4$は、pure O-seq. (1, 3, 6, 10)をh-vectorとして持つlevel ringである。すると、

$$(1,3,6,10,0)+(0,10,6,3,1)$$

によって、(1, 13, 12, 13, 1) なるGorenstein seq.が得られる。なお、Kleeの定理(3.16)によって、この数列はstrongly Gorenstein seq.ではない。

例(3.19) $n(\geqq 3)$, mを自然数とし、

$$R(n,m)=k[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(x_1, x_2, \cdots, x_n)^m$$

とする。$R(n,m)$は、level ringであって、そのh-vectorを$h(R(n,m))=(h_0^{(n,m)}, h_1^{(n,m)}, \cdots, h_{m-1}^{(n,m)})$とすれば、

$$h_i = \binom{n+i-1}{n-1}$$

となる. そして, この level seq. $h(R_{(n,m)})$ から得られる Gorenstein seq. を $(h_0^{(n,m)}, h_1^{(n,m)}, \cdots, h_m^{(n,m)})$ とすれば, $h_0^{(n,m)} = h_m^{(n,m)} = 1$ で

$$h_i = \binom{n+i-1}{n-1} + \binom{n+m-i-1}{n-1} \quad (1 \leq i < m)$$

となる. 従って,

$$h_1^{(n,m)} > h_2^{(n,m)} > \cdots > h_{[m/2]}^{(n,m)}$$

であることに注意しよう.

$\boxed{例}$(3.20) 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の pure な order ideal of monomials $\Gamma_{(n,m)} = \langle x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m \rangle$ による pure O-seq. $(1, n, n, \cdots, n)$ から得られる Gorenstein seq. は

$$(1, \overbrace{2n, 2n, \cdots, 2n}^{m-1\text{個}}, 1)$$

である.

$\boxed{例}$(3.21) $(1, 3, 3, 3, 1)$ は適当な4次元 simplicial polytope の h-vector であるから, (2.15) によって Gorenstein seq. である. しかしながら,

$$(h_0,h_1,h_2,h_3,0)+(0,h_3,h_2,h_1,h_0)=(1,3,3,3,1)$$

となる level seq. (h_0,h_1,h_2,h_3) は存在しない).

Gorenstein seq. $(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ が凸型 (resp. 凹型) であるとは,

$$h_1<h_2<\cdots<h_{[s/2]}$$
$$(\text{resp. } h_1>h_2>\cdots>h_{[s/2]})$$

が成立する時を言う. §1 で述べた simplicial polytope の h-vector として得られる Gorenstein seq. は, 概ね凸型であるが, (3.19) における Gorenstein seq. は凹型である. 更に,

例(3.22) (3.19) で, $n=3$, $m=5$ とすると, Gorenstein seq. $(1,18,16,16,18,1)$ が得られる. そこで, $h(R)=(1,18,16,16,18,1)$ となる 0 次元 Gorenstein standard k-alg. R を取って, $R[x]/(x^2)$ $(\deg x=1)$ を考えると, $R[x]/(x^2)$ 再び 0 次元 Gorenstein standard k-alg. となり, その h-vector $h(R[x]/(x^2))$ は,

$$(1,18,16,16,18,1,0)+(0,1,18,16,16,18,1)$$

即ち，$(1,19,34,32,34,19,1)$ となる．この Gorenstein seq. $h(R[x]/(x^2))$ は，凸型でも凹型でもない．

さて，以上の如くして Gorenstein seq. を沢山構成することは可能であるが，combinatorial な特徴付け，あるいは，もっと一般的な構成法が得られないことには，物足りない感が避けられない．また，(3.19)の凹型の seq. や，(3.22) の凸型でも凹型でもない seq. は，むしろ病的な類のものであり，もっと"自然に現れる" Gorenstein seq. はやはり凸型になっているのではないかという気がする．そこで，

<u>Conjecture</u> (3.23) R が Gorenstein standard k-alg. で，更に，R は <u>domain</u> であるとせよ．この時，Gorenstein seq. $h(R)$ は凸型である．

と予想するのはどうであろうか．なお，R が domain ということは，かなり強い条件であって，実際 Stanley[23, Th.4.4] の内容は

<u>定理</u>(3.24) weakly Gorenstein seq. $(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ を h-vector に持つ standard k-alg. R で，Cohen-Macaulay domain であるものが存在するならば，$(h_0, h_1, \cdots, h_s)$ は Gorenstein seq. である．

また，standard k-alg. R が <u>complete intersection</u> であれば，Stanley[23, Cor. 3.4] によって，$h(R)$ は凸型である．

最後に，Gorenstein seq. の定義(3.6)をちょっと振り返ってみよう．そこでは，"或る" 体 k 上の… となっていたことに注意しよう．しからば，体 k を固定して考えた時にはどうなるであろうか．定理(3.7)によって，ある sequence が Cohen-Macaulay か否かは，体 k には依存しない．では，Gorenstein seq. についてはどうであろうか．

参 考 文 献

[1] Y. Aoyama : Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ. <u>23</u> (1983), 85-94.

[2] L. Billera and C. Lee : Sufficiency of McMullen's

conjecture for f-vectors of simplicial polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 2 (1980), 181-185.

[3] M. Brücker: Die Elemente der Vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope, Jber. Ver. Naturk. Zwickau (1893).

[4] H. Bruggesser and P. Mani: Shellable decompositions of cells and spheres, Math. Scand. 29 (1971), 197-205.

[5] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud: Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math. 99 (1977), 447-485.

[6] M. Boratyński and J. Święcicka: Hilbert-Samuel functions of Cohen-Macaulay rings, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 19-24.

[7] M. Fieldhouse: Linear programming, Ph. D. thesis, Cambridge Univ. 1961.

[8] D. Gale: On the number of faces of a convex polytope, Canad. J. Math. 16 (1964), 12-17.

[9] B. Grünbaum: Some results on the upper bound conjecture for convex polytopes, SIAM J. Appl. Math. 17 (1969), 1142-1149.

[10] B. Grünbaum and V. P. Sreedharan: An enumeration of simplicial 4-polytopes with 8-vertices, J. Combinatorial Theory 2 (1967), 437-465.

[11] M. Hochster: Rings of invariant of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.

[12] M. Hochster: Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Dekker, 1977, 171-223.

[13] V. Klee: On the number of vertices of a convex polytope, Canad. J. Math. 16 (1964), 701-720.

[14] V. Klee: A d-pseudo manifold with f_0 vertices has at least $df_0-(d-1)(d+2)$ d-simplices, Houston J. Math. 1 (1975), 81-86.

[15] F. S. Macaulay: Some properties of enumeration in the theory of modular systems, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531-555.

[16] P. McMullen: The number of faces of simplicial polytopes, Israel. J. Math. 9 (1971), 559-570.

[17] P. McMullen: The maximal number of faces of a convex polytope, Mathematika 17 (1970), 179-184.

[18] P. McMullen and G. C. Shephard: Convex polytopes and the upper bound conjecture, Cambridge Univ., 1971.

[19] T. S. Motzkin: Comotone curves and polyhedra, Bull. Amer. Math. Soc. 63 (1957), 35.

[20] J. Munkres: Topological result in combinatorics, Michigan Math. J. 31 (1984), 113-128.

[21] I. Reiten: The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 417-420.

[22] R. Stanley: The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. in Math. 35 (1980), 236-238.

[23] R. Stanley: Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[24] R. Stanley: The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Applied Math. 54 (1975), 135-142.

[25] R. Stanley: Cohen-Macaulay complexes, Higher Combinatorics, Reidel, 1977. 51-62.

[26] R. Stanley: Combinatorics and commutative algebra, Birkhäuser, 1983.

[27] G. A. Reisner: Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Adv. in Math. 21 (1976), 30-49.

[28] H.G.Gräbe: The Gorenstein property depends on characteristic, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 17 (1984), 169-174.

Projective dimension 1 の ideal について

広島大 理　　島田 勇治

Set-theoretic complete intersection について次の問題がある
k は field $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ (resp. $R = k[[X_1, \cdots, X_n]]$)
について, equi-codimension $n-1$ の ideal $\mathfrak{a}$ (resp. height $n-1$ の ideal $\mathfrak{a}$) は, set-theoretic complete intersection であるか。 これについては, char. $k > 0$ の場合は, 本質的に肯定的である。char. $k = 0$ の場合は, 特別な ideal についてしか, わかっていない。 ここでの目標は, $n = 3$ の場合について, 上の問題へのアプローチを試みるものである。(しかし, ほとんど, 成功していない。)

次のことを考える。R は, noetherian ring $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ は, R の ideal。このとき, $g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$ で $\mathfrak{a} \subsetneq (g_1, \cdots, g_{n-1}) \subsetneq R$ 又は, $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{(g_1, \cdots, g_{n-1})} \subsetneq R$ となる $g_1, \cdots, g_{n-1}$ が, 存在する条件は, 何か。

以下の議論で次の基本定理(※)を使う。(cf. [2] p.148) $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$ は R の non-zero ideal で(ただし, $\mathfrak{a} = R$ でもよい。) 自然な exact sequence

$$0 \longrightarrow R^{n-1} \xrightarrow{\ \alpha\ } R^n \xrightarrow{[f_1, \cdots, f_n]} \mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

が, 存在するとする。 $\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}, \cdots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1\,1}, \cdots, a_{n-1\,n} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ある R の non-zero-divisor c が存在して(ただし, c は, unit でもよい。)

$$f_i = c \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\,1}, & \cdots, & a_{n-1\,n} \\ 0, \cdots, 0, & 1, & 0 \cdots, 0 \end{vmatrix} \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ とできる。}$$

$\qquad\qquad\uparrow$
$\qquad\qquad i$

以下, R は, noetherian ring で, すべての finite projective module は free とする。

Lemma 1. ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n) \subsetneq R$ について次の自然な exact sequence

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R^n \xrightarrow{[f_1, \cdots, f_n]} \mathfrak{a} \longrightarrow 0 \quad \text{で}$$

もし, $\exists\, [x_1, \cdots, x_n] \in N$ は, unimodular,

$\Rightarrow \exists\, g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$ は, $\mathfrak{a} \subseteq (g_1, \cdots, g_{n-1}) \subsetneq R$。

Proof. 自然な exact sequence

$0 \to L \to R^n \xrightarrow{[x_1, \cdots, x_n]} R \to 0$ で

$L = Rv_1 + \cdots + Rv_{n-1}$, $v_i = [v_{i1}, \cdots, v_{in}]$ とする。

仮定より $L \simeq R^{n-1}$。基本定理(*)より $(v_{i1}, \cdots, v_{in})$

$= R$ $(i = 1, \cdots, n-1)$。ゆえに、$[f_1, \cdots, f_n]$ は、L の

base の一部には、なりえない。$\Rightarrow$ $\exists g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$

で、$[f_1, \cdots, f_n] = g_1 v_1 + \cdots + g_{n-1} v_{n-1}$ かつ

$(g_1, \cdots, g_{n-1}) \subsetneqq R$。

Proposition 2. $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n) \subsetneqq R$ について

p.d. $\mathfrak{a} = 1$ とする。自然な exact sequence

$0 \to N \to R^n \xrightarrow{[f_1, \cdots, f_n]} \mathfrak{a} \to 0$ で もし $\exists h$

$= [h_1, \cdots, h_n] \in N$ は、N の base の一部になり、

しかも、p.d. $(h_1, \cdots, h_n) \leq 1$, $\Rightarrow$ $\exists g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$

は、$\mathfrak{a} \subseteq (g_1, \cdots, g_{n-1}) \subsetneqq R$。

Proof. $N = Rh_1 + Rh_2 + \cdots + Rh_{n-1}$ ただし

$h_1 = h$, $h_i = [h_{i1}, \cdots, h_{in}]$ $(i = 2, \cdots, n-1)$ とする。

Lemma 1 より $(h_{i1}, \cdots, h_{in}) \subsetneqq R$, $(h_1, \cdots, h_n) \subsetneqq R$ として

よい。自然な exact sequence

$0 \to L \to R^n \xrightarrow{[h_1, \cdots, h_n]} (h_1, \cdots, h_n) \to 0$ で

$a = [f_1, \cdots, f_n]$ は、L の base の一部になりえない

ことを示せば，十分である。もし，$\mathfrak{a}$ は，L の base の一部となり $L = R\mathfrak{a}_1 + R\mathfrak{a}_2 + \cdots + R\mathfrak{a}_{n-1}$ ただし $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ とすると，$\Longrightarrow$ (＊) より，$(b_1, \cdots, b_n) \subseteq \mathfrak{A} \subseteq (b_1, \cdots, b_n)(b_{21}, \cdots, b_{2n})$ となる。そして，R の maximal ideal $\mathfrak{m}$ で，$\mathfrak{m} \supseteq (b_{21}, \cdots, b_{2n})$ となるものが存在する。$\Longrightarrow$ $(b_1, \cdots, b_n)R_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{A}R_{\mathfrak{m}} \subseteq (b_{21}, \cdots, b_{2n})(b_1, \cdots, b_n)R_{\mathfrak{m}}$，また，仮定より $\mathfrak{A}R_{\mathfrak{m}} \neq 0$ となるから，矛盾である。

Proposition 3. $(R, \mathfrak{m})$ は，local ring とする。
$\mathfrak{A} = (f_1, \cdots, f_n) \subsetneqq R$ は，p.d. $\mathfrak{A} = 1$ とする。自然な exact sequence $0 \longrightarrow N \longrightarrow R^n \xrightarrow{[f_1, \cdots, f_n]} \mathfrak{A} \longrightarrow 0$ で，もし $\exists\, x = [x_1, \cdots, x_n] \in N$ は，次の条件をみたす
(i) x は，N の base の一部には，なりえない。
(ii) $(x_1, \cdots, x_n)$ は，non-zero primary ideal である。
$\Longrightarrow$ $\exists\, g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$ は，$\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{(g_1, \cdots, g_{n-1})} \subsetneqq R$。

Proof. $\mathfrak{A}$ の minimal generator の元の個数は，n 個としてよい。$N = Rb_1 + \cdots + Rb_{n-1}$，$b_i = [b_{i1}, \cdots, b_{in}]$ とする。$x = g_1 b_1 + \cdots + g_{n-1} b_{n-1}$ とおく。仮定より，
$(g_1, \cdots, g_{n-1}) \subsetneqq R$。

$$f_i = \begin{vmatrix} b_{11}, & \cdots, & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n-1\,1}, & \cdots, & b_{n-1\,n} \\ 0, \cdots, 0, & \underset{i}{1}, & 0, \cdots, 0 \end{vmatrix} \quad (i = 1, \cdots, n)$$ としてよい。

$$g_j f_i = \begin{vmatrix} h_{11}, & \cdots, & h_{1n} \\ \vdots & & \\ g_j h_{j1}, & \cdots, & g_j h_{jn} \\ \vdots & & \\ h_{n-1\,1}, & \cdots, & h_{n-1\,n} \\ 0, \cdots, 0, & \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, & 0, \cdots, 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11}, & \cdots, & h_{1n} \\ \vdots & & \\ x_1, & \cdots, & x_n \\ \vdots & & \\ h_{n-1\,1}, & \cdots, & h_{n-1\,n} \\ 0, \cdots, 0, & \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, & 0, \cdots, 0 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, n \\ j = 1, \cdots, n-1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad g_j \mathfrak{a} \subseteq (x_1, \cdots, x_n) \subseteq \mathfrak{m}\,(g_1, \cdots, g_{n-1}) \quad (j = 1, \cdots, n-1)$

$\Rightarrow \quad (x_1, \cdots, x_n) \subsetneqq (g_1, \cdots, g_{n-1}) \Rightarrow$ ある g_j について $g_j \notin (x_1, \cdots, x_n)$ となる。仮定(ii)より、

$\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{(x_1, \cdots, x_n)} \subseteq \sqrt{(g_1, \cdots, g_{n-1})}$ 。

Remark. 上の命題で、R のすべての finite projective module は、free であると仮定は、変えられるかどうかは、分かっていない。

上の2つの Proposition から、簡単に次の結果がでる。

Corollary 4. $(R, \mathfrak{m})$ は、3-dimension regular local ring とする。$(x_1, \cdots, x_n)$ は、height 2 の primary ideal とする。次の自然な、exact sequence $0 \to N \to R^n \to (x_1, \cdots, x_n) \to 0$ について、$[f_1, \cdots, f_n] \in N$ は、次の条件をみたす、

(i) $[f_1, \cdots, f_n]$ は, unimodular でない。

(ii) p.d. $(f_1, \cdots, f_n) \leq 1$ 。

$\Longrightarrow$ $\exists\, g_1, \cdots, g_{n-1} \in R$ st. $(f_1, \cdots, f_n) \subseteq \sqrt{(g_1, \cdots, g_{n-1})} \subsetneq R_0$

References.

[1] H. Bresinsky, Monomial Gorenstein curves in A^4 as set-theoretic complete intersections, Manus. Math., 27 (1979), 353-358.

[2] I. Kaplansky, Commutative Rings, Chicago (1974).

[3] R.C. Cowsik and M.V. Nori, Affine curves in characteristic p are set theoretic complete intersections, Invent. Math., 45 (1978), 111-114.

[4] T.T. Moh, A result of the set-theoretic complete intersection problem, Proc. Amer. Math. Soc., 86 (1982), 19-20.

[5] E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg (1979).

[6] T.Y. Lam, Serre's conjecture, Lecture Notes in Math., Springer, 635 (1978).

Lipmanの一定理の証明について

奈良教育大学　菊池徹平

Lipmanの論文 Stable ideals and Arf rings (Amer. J. Math. 93, 1971) 冒頭の定理の証明における若干の不透明さを解消したいというのが動機である。Lipmanの Proposition 1.1. は次の通りである。

A : Cohen-Macaulay semilocal ring of dim. 1.

$\bar{A}$: the integral closure of A in $Q(A)$.

I : Aの一つの regular element を含むAの ideal

$A^I \underset{\text{def.}}{=} \bigcup_{n \geq 0} I^n :_{\bar{A}} I^n$ (Lipmanの意味の blowing up)

$\Longrightarrow$ (1) A^Iは finite A-module であって

$A^I = I^n : I^n$ for $\forall n \gg 0$

(2) $IA^I = xA^I$ for $\exists$regular element $x \in A^I$

(3) Aと$\bar{A}$の中間環Bについて

IBが単項イデアル $\Longleftrightarrow$ $A^I \subseteq B$

ここで transversal element と superficial element

の定義を述べておく。

<u>Def.</u> A: Noetherian ring

I : proper ideal of A containing a regular element

$x \in A$, s: integer $\geqq 0$ のとき

(1°) x が <u>I-transversal of order s</u>

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $x \in I^s$

(ii) $xI^r = I^{r+s}$ for $\forall r \gg 0$

(2°) x が <u>I-superficial of order s</u>

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $x \in I^s$

(ii) $(I^{r+s} :_A xA) \cap I^t = I^r$ for $\forall r \gg 0$

をみたす positive integer t がある。

Lipman の証明の keypoint は、<u>或る positive order s の I-transversal element x が存在する</u>という点にあり、それを用いて $I^sA^I = xA^I$ を示すことに帰着させるわけであるが、その x の存在証明のために、graded ring $G = \bigoplus_{n \geqq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ ($\mathfrak{m}$ は J-radical) における $x \in A$ の "leading form" という well-defined でない「概念」を用いている。

そこで基礎からやり直してみた結果を以下に述べる。

以下では　A: Noetherian ring

I: proper ideal of A containing a regular element

とする。また先程と同様に

$$A^I \underset{\text{def.}}{=\!=} \bigcup_{n\geq 0} I^n :_{\bar{A}} I^n \quad (\bar{A}\text{は全商環の中の整閉包})$$

と定義し、そのほかにもう一つのタイプの rings

$$A[I^s/x] \quad (x \in I^s \quad x: \text{regular})$$

を考える。　A^I, $A[I^s/x]$ はどちらも A を含む Q(A) の部分環であり、つねに　$A^I \subset A[I^s/x]$　である。

このとき、次の定理が得られる。

Theorem 1　次の4条件は互いに同値である。

(1°)　$A^I = A[I^s/x]$

(2°)　$A[I^s/x]$ が finite A-module.

(3°)　x が I-transversal of order s.

(4°)　$I^s A^I = x A^I$

Lipman の Prop. 1.1. の主定理 (2) は、(4°) の x の存在と同値である（∵ A が semilocal）から、結局 (3°) の I-transversal element x of some positive order s の存在と同値である。

そこで、I-transversal element の characterization について反省してみる。

Def. $G = gr_I(A) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ における零イデアル(0)の irredundant homogeneous primary decomposition を

$$(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_p \cap \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_g$$

とする。ただし $\mathfrak{q}_i$ は non irrelevant, $\mathfrak{Q}_j$ は irrelevant とする。(すなわち、$\mathfrak{M} = \bigoplus_{n>0} I^n/I^{n+1}$ について $\sqrt{\mathfrak{q}_i} \not\supseteq \mathfrak{M}$, $\sqrt{\mathfrak{Q}_j} \supseteq \mathfrak{M}$ とする。) ここで

$$\mathfrak{m}_0 \underset{\text{def.}}{=} \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_p \ , \quad \mathfrak{m}_1 \underset{\text{def.}}{=} \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_g$$

とおくと(I が regular element を含むと仮定したため) $\mathfrak{m}_0$ は proper homogeneous ideal of G である。

<u>Lemma 2</u> ① $x \in I^s$, x: regular, $\bar{x}$ = the residue class of x in I^s/I^{s+1} とすると、次の3条件は互いに同値である。

(1) x が I-superficial of order s である。

(2) $(0 :_G \bar{x}) \cap (I^n/I^{n+1}) = (0)$ for $n \gg 0$.

(3) $\mathfrak{m}_0 :_G \bar{x} = \mathfrak{m}_0$. ただし $G = gr_I(A)$ である。

② I-superficial element of some positive order が存在する。

③ 特に $(A, \mathfrak{m})$ が local で、$A/\mathfrak{m}$ が無限体ならば、I-superficial element of order 1 が存在する。

<u>Lemma 3</u>　上の①と同じ前提のもとで、次の4条件は互いに同値である。

(1)　x が I-transversal of order s である。

(2)　i)　$I \subset \sqrt{xA}$

　　ii)　$I^{r+s} : xA = I^r$ for $\forall r \gg 0$

(3)　i)　$I \subset \sqrt{xA}$

　　ii)　x が I-superficial of order s である。

(4)　i)　$I \subset \sqrt{xA}$

　　ii)　$\mathfrak{m}_0 :_G \bar{x} = \mathfrak{m}_0$.

ところが次のことが言える。

<u>Lemma 4</u>　A が Cohen-Macaulay semilocal ring of dim. 1 で $I \subset J$-radical of A ならば、Lemma 3 において $I \subset \sqrt{xA}$ の条件はとり除くことができる。（つまり、I-transversal $=$ I-superficial である。）

よって次の Corollary が得られる。

<u>Corollary 5.</u>　$(A, \mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay local ring of dimension 1 ならば

(1)　I-transversal element of some positive order が存在する。

(2) 特に $A/\mathfrak{m}$ が無限体ならば order 1 の I-transversal element が存在する。

これを用いて、$I \neq$ J-radical of A の場合を考えると、

<u>Proposition 6</u>.

A : Cohen-Macaulay semilocal ring of dim. 1

$\mathfrak{p}$: maximal ideal of A

I : $\mathfrak{p}$-primary ideal of A

$\Longrightarrow$ (1) I-transversal element of some positive order s が存在する。

(2) $A/\mathfrak{p}$ が無限体ならば、order 1 の I-transversal element が存在する。

(∵) (1) Lemma 3 の条件をみたす x の存在を示せばよい。注意すべきは $gr_{I_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = gr_I(A)$ という点である。これを G とおく。

① Cor. 5 (または Lemma 2) から $I_\mathfrak{p}$-superficial element $\xi\ (\in I_\mathfrak{p}^s)$ of order s (s は或る positive integer) が在る。$\xi = x/1$ in $A_\mathfrak{p}$ for $\exists x \in I^s$ としてよい。すると、$\mathfrak{m}_0 :_G \bar{x} = \mathfrak{m}_0$ だから x は I-superficial of order s である。

② x を含む maximal ideal は $\mathfrak{p}$ のほかにあるかもしれないが、x を取り直して、x が $\mathfrak{p}$ 以外の maximal ideal には

含まれないようにすることができる。

③ そうすると（ξ が $A_{\mathfrak{p}}$ で regular であることから）x は必然的に A で regular である。

④ すると x は regular で、唯一つの maximal ideal $\mathfrak{p}$ に含まれるから $\sqrt{xA} = \mathfrak{p} \supset I$ である。

(2) $A/\mathfrak{p}$ が無限体ならば最初から $s=1$ の ξ がとれる。

$\square$

これを使うと Lipman の最初の定理が証明できる。

<u>Theorem 7</u>

A: Cohen-Macaulay semilocal ring of dim. 1.

I: proper ideal of A containing a regular element.

$\Longrightarrow$ (1) I-transversal element of some positive order が存在する。

(2) 特に、$\forall \mathfrak{m} \in m\text{-}\mathrm{Spec}(A)$ について $A/\mathfrak{m}$ が無限体ならば、order 1 の I-transversal element が在る。

(:) (1) $I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_r$ を irredundant primary decomposition of I with $\sqrt{I_i} = \mathfrak{m}_i$ とすると、各 $\mathfrak{m}_i$ は maximal ideal であり、$I = I_1 I_2 \cdots I_r$ である。

Prop. 6 から I_i-transversal element x_i of positive order s_i がある。$s_1, \cdots, s_r$ の最小公倍数を s とすれば、$s_1 = s_2 = \cdots = s_r = s$ であるとしてよい。すると $x \overset{\text{def}}{=} x_1 x_2 \cdots x_r$ は

I-transversal of order s である。

(2) $A/\mathfrak{m}_i$ が無限体ならば、最初から $s_i = 1$ $(i=1, 2, \cdots, \nu)$ にとれる。 $\square$

2次元 ASL (Algebras with Straightening Law) の分類

名工大　渡辺 敬一

ASL (又は Hodge Algebra) の概念は determinantal varieties, Schubert varieties, 或は variety of complexes 等の normality, Cohen-Macaulay である事を示すのに非常に有効に使われて来ているが, axiom から出発していろいろな性質を導くという議論は, ASL が対応した "discrete ASL" の flat deformation である という事以外には余りないように思う. それで, 試みに, 2次元 graded ASL を代数閉体上で分類してみたのが本稿である. 道具としては, graded ring R の invariant a(R) の理論と reduced connected curve の理論が基本的である. ある graded ring と幾何的な対象との対応は normal の場合に Demazure のきれいな記述があるが, 一般の場合にはまだ完全な記述が得られていないので, "graded ring とは何か" を考えるサンプルとして, 本稿の手法は他にも使えるのではないかと思っている.

§1. graded ring の理論, curve の幾何からの準備.

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は graded ring, $R_0 = k$ は体, R は R_0 上有限生成とする。また, $\dim R = d$ とする。以下に於ては体 k を fix して, この形の graded ring のみを考える事にする.

<u>定義</u>. $a(R) = \max\{n \mid [H^d_m(R)]_n \neq 0\}$

$K_R = \underline{\mathrm{Hom}}_k(H^d_m(R), k)$ を R の canonical module とする. これらに関して必要な性質をいくつかあげておく.

(1.1) (i) R が Cohen-Macaulay, $x \in R_m$ が R-regular なら, $K_{(R/xR)} \cong (K_R / x \cdot K_R)(m)$, 特に, $a(R/xR) = a(R) + m$

(以下に於て $\cong$ は graded modules の同型, $M(m)$ は $[M(m)]_n = M_{m+n}$ で定義される.)

(ii) R' が R の graded subring で, $\underbrace{\dim R/R' < \dim R}_{R \text{は} R' \text{上 finite}}$ のとき, $a(R') \geq a(R)$. 特に, R が integral domain, $\overline{R}$ が R の normalization のとき, $a(R) \geq a(\overline{R})$.

(iii) $R' = R/\mathfrak{a}$, ($\mathfrak{a}$ は R の graded ideal), $\underbrace{\dim R = \dim R'}_{R \text{は Cohen-Macaulay}}$ のとき, $K_{R'} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_R(R', K_R) \cong [0 : \mathfrak{a}]_{K_R}$. 特に, $a(R') \leq a(R)$.

(証明は [4], Chap. 2 参照).

<u>Cor.</u> (1.2). R が Gorenstein, $R' = R/\mathfrak{a}$, $\dim R' = \dim R$, $\mathfrak{a} \neq 0$ $\Rightarrow$ $a(R') < a(R)$.

(証明) R が Gorenstein だから, $K_R = R \cdot \omega$, $\omega \in (K_R)_{-a(R)}$.

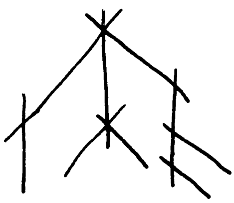
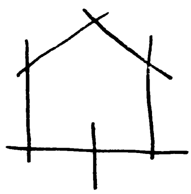
$\alpha \neq 0$ なら，$\omega \notin [0:\alpha]_{K_R}$．$(K_R)_{-a(R)} = k\cdot\omega$ より，$a(R') < a(R)$.

(1.3) $k=\bar{k}$ とし，X は k 上の reduced connected projective scheme，$\dim X = 1$ とする．このとき $H^1(X,\mathcal{O}_X)=0 \Leftrightarrow$ 次の a) b) c).

a) X の各 irreducible component は $\mathbb{P}^1$.

b) $x\in X$ で r 本の $\mathbb{P}^1$ が交わっているとき，$\mathcal{O}_{X,x}$ の embedded dimension は r．即ち，$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[z_1,\dots,z_r]]/(z_iz_j \mid i\neq j)$.

c) X は $\mathbb{P}^1$ の cycle を含まない．即ち，X の各成分を /，X_i と X_j が交わっているとき対応する / を交わらせると，そのグラフは tree になる．

例.  は O.K.  は cycle を含むからダメ.

(証明は [1], Prop. 1.8 参照).

Cor (1.4). R が2次元 reduced, Cohen-Macaulay, $X=\mathrm{Proj}(R)$ とおくと,

(i) $a(R)<0$ のとき，X は (1.3) の a) b) c) をみたす．

(ii) R が Gorenstein, $a(R)=0$, X が (1.3) の a), b) をみたすとき, X は $\mathbb{P}^1$ の cycle.

(証明) (i) は $H^1(X,\mathcal{O}_X(n)) \cong [H^2_m(R)]_n$ から得られる．

(ii) $a(R)=0$ より，$H^1(X,\mathcal{O}_X)\neq 0$．ゆえに X は $\mathbb{P}^1$ の cycle を含む．$Y\subset X$ を X に含まれる $\mathbb{P}^1$ の cycle とすると，$Y \subsetneq X$ とす

ると，$\mathfrak{a} \subset R$，$\mathrm{Proj}(R/\mathfrak{a}) = Y$ となる graded ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ がとれる．$H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$ だから，$a(R/\mathfrak{a}) \geqq 0$ となり (1.2) に矛盾．

次の Lemma が ASL の分類の key lemma である．

<u>Lemma</u>. (1.5). R が Cohen-Macaulay integral domain，$k = \bar{k}$，R の grading は $\mathrm{GCD}\{n \mid R_n \neq 0\} = 1$ となるようにつけられているとする．このとき，$a(R) \leqq -2$，$0 \neq x \in R_m$，$0 < m \leqq -a(R)$ のとき，$V_+(x)_{red} \subset \mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}(R)$ は高々 2 点．

（証明は [7]，p 87～90 に述べたので繰り返さない）．

§2. ASL の基本的性質

k を基礎環（本稿では体とする），R を k-algebra とする．H を finite poset (=partially ordered set)，H の R への埋めこみを fix して，$H \subset R$ と考える．H の元の積（空集合の積 1 を含む）を <u>monomial</u>，$\overbrace{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n}^{\alpha_i \in H \ (i=1,\cdots,n),}$ のとき $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ の形の R の元を <u>standard monomial</u> という．

<u>定義</u>．R が ASL on H over k とは，

(ASL-1) R は k-free module で，{standard monomial} が R の k 上の basis．

(ASL-2) $\alpha, \beta \in H$，α と β が比較できないとき ($\alpha \nsim \beta$ と書く)，$\alpha\beta$ は standard monomial でないので，

$$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{r} c_i \gamma_{i1}\gamma_{i2}\cdots\gamma_{in_i} \quad (c_i \in k,\ \gamma_{i1} \leq \gamma_{i2} \leq \cdots \leq \gamma_{in})$$

と standard monomials の一次結合に唯一通りに表わされるが, ((ASL-1) による) このとき, $\gamma_{i1} \leq \alpha, \beta$.

本稿に於ては, graded ASL $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ のみを扱う. 即ち, $\forall \alpha \in H$, $\exists w(\alpha) \in \mathbb{Z}_+$; $\alpha \in R_{w(\alpha)}$, かつ (ASL-2) の両辺は同じ degree をもつとする.

定義. $I \subset H$ が poset ideal $\Leftrightarrow$ $\alpha \in I$, $\beta \leq \alpha$ ならば $\beta \in I$.

R が H 上の ASL, I が H の poset ideal のとき, R/IR は $H \setminus I$ 上の ASL である事が ASL の公理からすぐにわかる.

定義. H と $w: H \to \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ の組 (H, w) を weighted poset という. R が H 上の graded ASL のとき, $w: H \to \mathbb{Z}_+$ を $\alpha \in R_{w(\alpha)}$ となるように定めるとき, R は (H, w) 上の ASL であるという.

定義. weighted poset (H, w) の Poincaré series を

$$P((H, w), t) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k R_n) t^n$$

で定義する. 但し R は (H, w) 上の任意の ASL. (例えば, $R = k[X_\alpha \mid \alpha \in H] / (X_\alpha \cdot X_\beta \mid \alpha \nsim \beta)$.) どの (H, w) 上の ASL R をとっても, 同じ Poincaré series を定義することは, R の k 上の free basis が「同じ」である事からあきらかである.

定義. finite poset H に対して,

$$\operatorname{rank}(H) = \max\{n \mid \exists (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n) \text{ in } H\}.$$

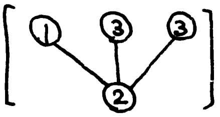
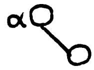
R が ASL on H over k (=体) のとき, $\dim R = \operatorname{rank}(H)$ である.

(例えば，Rの次元はRの Poincaré series $P(R,t)$ の $t=1$ での極の位数によって決まる事を利用すればすぐにわかる．)

<u>定義</u>. (H,w) を weighted poset とする．$P((H,w),t)=\frac{g(t)}{f(t)}$ ($f(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$) のとき，

$$a(H,w)=\deg(g(t))-\deg(f(t))$$

とおく．

<u>例</u> $H=$  のとき（$\alpha\in H$ を○で，$w(\alpha)$ を円内にかく． のとき $\alpha\geqq\beta$）．

$$P((H,w),t)=1+\frac{t^2}{1-t^2}+\frac{t}{1-t}+\frac{2t^3}{1-t^3}+\frac{t^3}{(1-t)(1-t^2)}+\frac{2t^5}{(1-t^2)(1-t^3)}$$
$$=\frac{1+t+t^2+2t^3}{(1-t^2)(1-t^3)}$$

$a(H,w)=\ 3-5=-2.$

(2.1) (i) R が Cohen-Macaulay ASL on (H,w) のとき，

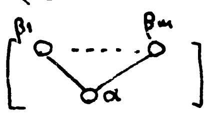
(i) $a(R)=a(H,w)$.

(ii) $a(R)\leqq 0$

(証明) (i) R が Cohen-Macaulay graded ring，$P(R,t)=\frac{g(t)}{f(t)}$ のとき，$a(R)=\deg(g(t))-\deg(f(t))$ は容易に示せる．

(ii) $$P((H,w),t)=\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_n}\frac{t^{w(\alpha_1)+\cdots+w(\alpha_n)}}{(1-t^{w(\alpha_1)})\cdots(1-t^{w(\alpha_n)})}+1$$

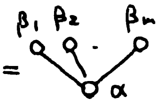
よりあきらか．（上の式については [6]，p63 参照）．

(2.2) $H=$ ，$m\geqq 2$ のとき，$a(H,w)=-w(\alpha)$.

(証明) R を H 上の ASL とすると，$\alpha\in R_{w(\alpha)}$ は R-regular. $\overline{R}=R/\alpha R$ とおくと，$\overline{R}\cong k[X_1,\cdots,X_m]/(X_iX_j\mid i\neq j)$，$a(\overline{R})=0$.　(1.1)(i) より $a(R)=-w(\alpha)$.

§3. 2次元 graded ASL domain と homogeneous case.

まず，$k=\bar{k}$ で，R が2次元 graded ASL-domain であるときの結果を復習する（証明は［7］参照）.

<u>定理</u> (3.1). R が2次元 graded ASL domain on $H=$ 

over $k=\bar{k}$ とする. 更に, $\mathrm{GCD}\{w(\alpha) \mid \alpha\in H\}=1$ と仮定する.

(0) $m=1$ のとき, $R=k[\alpha,\beta_1]$ は多項式環

(i) $m=2$ のとき, $R\cong k[X,Y_1,Y_2]/(Y_1Y_2-X^s)$,

(ii) $m\geqq 3$ のとき, $w(\alpha)=1$ で, 相異なる $c_1,\cdots,c_m\in k$ に対して, $R\cong k[T,\ \frac{1}{x-c_i}T^{w(\beta_i)} \mid i=1,\cdots,m] \hookrightarrow k(x)[T]$.

(ASL-2) は $\beta_i\cdot\beta_j=\frac{1}{c_i-c_j}\cdot(\beta_i\cdot\alpha^{w(\beta_j)}-\beta_j\cdot\alpha^{w(\beta_i)})$ $(i\neq j)$ で得られる.

<u>系</u>. 2次元 graded ASL domain over $k=\bar{k}$ は normal かつ rational singularity.

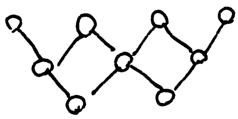
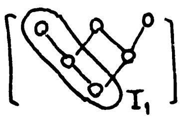
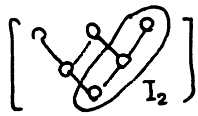
次に，一般の2次元ASLに移ろう. まず, Hが連結でない場合は連結成分よりすぐ得られるから, 以後<u>Hは連結</u>とする。Hの極小元が2つ以上ある場合は, 次に述べる貼り合せを極小元1つの場合に次々と行って得られる.

<u>定義</u> (3.2). H_1, H_2 を二つの finite posets, I_i $(i=1,2)$ を H_i $(i=1,2)$ の poset ideals とする. $\varphi: H_1\setminus I_1 \xrightarrow{\sim} H_2\setminus I_2$ が posets

の同型写像のとき，

$$H_1 \bigcup_{\varphi} H_2 := H_1 \amalg I_2 \cong H_2 \amalg I_1$$

と定義する．但し，$\alpha \in H_1, \beta \in I_2$ に対する relation は，$\alpha \in I_1$ のとき，$\alpha \not> \beta$，$\alpha \in H_1 \setminus I_1$ のとき，$\alpha \geqq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \geqq \beta$ とする．

例．  は $H_1 =$  と $H_2 =$ 

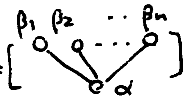
の貼り合わせで得られる．

Proposition (3.2). H_i, I_i $(i=1,2)$ は (3.1) と同じとし，$H = H_1 \bigcup_{\varphi} H_2$ とおく． R が ASL on H over k のとき，

$R \cong R_1 \times_S R_2$，但し，$R_1 = R/I_2R$，$R_2 = R/I_1R$，$S = R/(I_1 \cup I_2)R$．

$\psi_i : R_i \to S$ は canonical surjection，$R_1 \times_S R_2 = \{(a,b) \in R_1 \times R_2 \mid \psi_1(a) = \psi_2(b)\}$．

証明は簡単なので省略するが，Proj(R) は Proj(R_1) と Proj(R_2) の Proj(S) に沿っての貼り合せである．

従って，2次元 ASL R は $H_n =$  上の ASL を何回か貼り合せて得られる．R が homogeneous（即ち，$R = k[R_1]$）のとき，H_n 上の homogeneous ASL は次のように特徴づけられる．

定理 (3.3) R : graded ASL on H_m over $k = \bar{k}$ かつ，α, β_i $(i=1, \cdots, m) \in R_1$ とする．このとき $X = \mathrm{Proj}(R)$ は $\mathbb{P}^m$ の degree m の reduced connected curve で，$\mathbb{P}^m$ の任意の hyperplane に含まれず，次をみたす．

(i) X の任意の既約成分は $\mathbb{P}^1$ である．

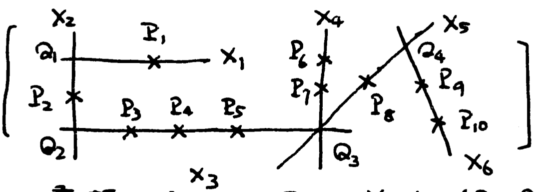
(ii) X は $\mathbb{P}^1$ の cycle を含まない.

(iii) $P \in X$ で s 本の $\mathbb{P}^1$ が交わるとき, $\hat{\mathcal{O}}_{X,P} \cong k[[x_1,\dots,x_s]]/(x_ix_j \mid i\neq j)$

(iv) $P_i = V_+((\alpha,\beta_j \mid j\neq i))$ とおくと, P_i は X の smooth point.

逆に reduced connected curve X と X 上の指定された点の集合 $\{P_i \mid i=1,\dots,m\}$ ($P_i \neq P_j$ for $i\neq j$) が与えられ, X の各既約成分上に少くとも一つの P_i があり, 上の (i)〜(iv) をみたすとき, H_m 上の ASL R で $\mathrm{Proj}(R)=X$ となり, $V_+((\alpha,\beta_j \mid j\neq i)) = P_i$ となるものが構成できる.

証明は紙数の関係で省略するが ([8]参照), $(X, \{P_i \mid 1\le i\le m\})$ から R の構成法を例で見よう. ×印を指定された点とする.

例 $X =$ 

X_i と X_j の交点を Q_ℓ で表わす.

$X_1, \dots, X_6$ の座標を fix して, X_1 上 $(P_1,Q_1)=(\infty,0)$, X_2 上 $(Q_1,P_2,Q_2)=(0,1,\infty)$, X_3 上 $(Q_2,P_3,P_4,P_5,Q_3)=(0,c_3,c_4,c_5,\infty)$ 等々とする. R を $(k(x_1)\times k(x_2)\times\cdots\times k(x_6))[T]$ の subring として次のように実現させる。 $\alpha = T = (1,\dots,1)T$, $\beta_1 = (x_1,0,\dots,0)\cdot T$, $\beta_2 = (0,\frac{1}{x_2-1},-1,\dots,-1)T$ $\beta_i = (0,0,\frac{1}{x_3-c_i},-\frac{1}{c_i},\dots,-\frac{1}{c_i})T$ $(i=3,4,5)$; 等々. つまり, $P_j \in X_i$ のとき, $\beta_j = f_j\cdot T$, f_j は P_j で1位の pole をもち, 他の X_ℓ $(\ell\neq j)$ 上では const. funct. になるようにとる. 容易にわかるように, (ASL-2) の式は, $\beta_1\beta_2=0$, $\beta_1\beta_j=0$ $(j=3,4,5)$, $(\beta_2+\alpha)\beta_i=0$ $(i=3,4,5)$, 等で与えられる.

§4.　2次元 Gorenstein ASL.

Cohen-Macaulay posets, Cohen-Macaulay complexes については，最近かなり研究が進んでいる．同様に "Gorenstein poset" を「$k[H] := k[X_\alpha \mid \alpha \in H]/(X_\alpha X_\beta \mid \alpha \not\sim \beta)$ が Gorenstein になるもの」と定義すると，ASL の理論から云うと，この定義は甚しく強すぎる。つまり「ある H 上の ASL が Gorenstein である」という性質と「$k[H]$ が Gorenstein である」という性質の gap が大きすぎるのである．そこで，"Gorenstein poset" の概念を三つほど用意して見た．

<u>定義</u>.(4.1).　(H, w) を weighted poset とする．

(a) H が k 上 strongly Gorenstein $\Leftrightarrow$ $k[H]$ が Gorenstein.

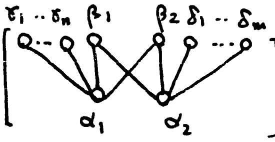
(b) (H, w) が k 上 weakly Gorenstein $\Leftrightarrow$ k 上定義された，(H, w) 上の Gorenstein ASL が存在する．

(c) (H, w) が k 上 numerically Gorenstein

$\Leftrightarrow$ $P((H,w), t^{-1}) = (-1)^r \cdot t^{-a} \cdot P((H,w), t)$ となる $a \in \mathbb{Z}$ が存在する．

(このとき，$a = a(H,w)$ である事は容易にわかる)．$r = \mathrm{rank}(H)$.

R. Stanley の結果により weakly Gorenstein $\Rightarrow$ numerically Gorenstein. ([5] 参照.)．また R が (H, w) 上の ASL <u>domain</u> で，(H, w) が numerically Gorenstein，R が Cohen-Macaulay なら，R は Gorenstein である．

例. $H=\left[\right.$ 

$\left.\right]$ とおき, $w: H \to \mathbb{Z}_+$ をある weight とするとき,

(i) $n>0$ 又は $m>0$ のとき $k[H]$ は Gorenstein でない 即ち, H が strongly Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $n=m=0$

(ii) (H,w) が numerically Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $w(\alpha_1)=w(\gamma_i)$, $w(\alpha_2)=w(\delta_j)$ $(\forall i,j)$.

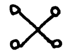
(iii) $w(\alpha_i)=w(\gamma_j)=w(\delta_\ell)=1$ $(\forall i,j,\ell)$ のとき, (H,w) は weakly Gorenstein である（後述).

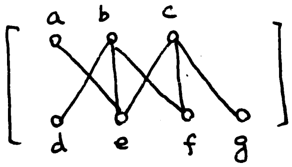
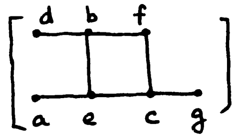
次に Gorenstein ASL の分類に移ろう. $a(R)<0$ のときと, $a(R)=0$ のときに分けて分類を行う. 以下 H は常に連結とする.

(4.2) H を rank 2 の finite poset, $c_0=|H|$, $c_1=\#\{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in H,\ \alpha<\beta\}$ とする。更に (H,w) は numerically Gorenstein weighted poset とする。このとき, (2.1) により $a(H,w)\leqq 0$ だが,

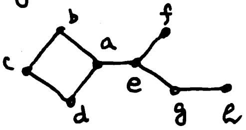
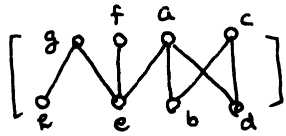
(i) $a(H,w)<0 \Rightarrow c_0=c_1+1$, 特に $\Delta(H)$ は可縮 ($\Delta(H)$ は circle を含まない。)

(ii) $a(H,w)=0 \Rightarrow c_0=c_1$, $\Delta(H)$ は cycle に「枝」が生えたもの.

ここで, $\Delta(H)$ は H より define される simplicial complex で, rank 2 の場合何回も書いている Hasse 図形で,  は「交わってないもの」と考えたものである. 例えば, ([2], [3] 参照)

例. $H =$  のとき $\Delta(H) =$ 

また, cycle のある点から出ている可縮な部分を「枝」という.

例えば  のとき $\{e, f, g, \ell\}$ を $\Delta(H)$ 又は H の「枝」という. この場合, $H =$  又は順序を逆にしたもの.

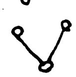
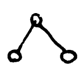
((4.2) の証明) (H, w) が numerically Gorenstein のとき,

$$P((H,w),t) = 1 + \sum_{\alpha \in H} \frac{t^{w(\alpha)}}{1-t^{w(\alpha)}} + \sum_{\alpha<\beta} \frac{t^{w(\alpha)+w(\beta)}}{(1-t^{w(\alpha)})(1-t^{w(\beta)})} = t^{a} \cdot P((H,w),t^{-1})$$

$$= t^{a} \cdot \left\{ 1 - \sum_{\alpha \in H} \frac{1}{1-t^{w(\alpha)}} + \sum_{\alpha<\beta} \frac{1}{(1-t^{w(\alpha)})(1-t^{w(\beta)})} \right\} \quad (a = a(H,w)).$$

両辺の $t \to \infty$ の極限値をとると, $a<0$ のとき, $1-c_0+c_1=0$, $a=0$ のとき, $1-c_0+c_1=1$ を得る. $\Delta(H)$ の記述はこの式から容易に出る.

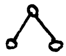
定理 (4.3). (H, w) を weighted $\overbrace{\text{poset,}}^{\mathrm{rank}(H)=2}$ とする.

(i) (H, w) が weakly Gorenstein, $a(H, w) < 0$ のとき, H は , ,  のいずれか.

(ii) (H, w) が weakly Gorenstein, $a(H,w)=0$ のとき, $H = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}$, $m \geqq 2$, $r \geqq 0$ で, $\beta_i \geqq \alpha_j \iff j \equiv i$ 又は $i+1 \pmod m$, $\forall \gamma_i$, $\exists j = j(i)$, $\gamma_i \geqq \alpha_{j(i)}$ かつ, H には他の関係はなく, また, $w(\gamma_i) = w(\alpha_{j(i)})$ $(i=1, \dots, r)$.

(iii) (H, w) が numerically Gorenstein, $a(H,w)=0$ のとき, (H,w) 上の ASL R が Gorenstein $\iff$ $\mathrm{Proj}(R)$ が

$\mathbb{P}^1$ のcycleである。

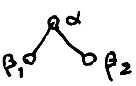
(注) 1°. Hが , ,  のいずれかのときH上のASLはあきらかにGorensteinである。

2°. (H,w)が (4.3)(ii)で与えられたposetのとき、(H,w)上に常にGorensteinが存在する。$r>0$のとき、Gorensteinでない ASLを作る事ができる。

3°. 「Proj(R)がcycle」を環の言葉だけで云うと次のようになる。"Rのmin. primeの集合を$\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$とする。(RはASLだから $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r = 0$, また、各$\mathfrak{p}_i$はgraded) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j)$ は $i \equiv j \pm 1 \pmod{r}$ のとき1、それ以外は2である ($i \neq j$)."

(証明) いくつかのstepにわけてHの可能性を狭めて行く。以下に於て、(H,w)はrank 2のconnected (⇔ Cohen-Macaulay) weighted posetとする。

1°. Rが(H,w)上のGorenstein ASLとする。$H \supset \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$, β_1, β_2はα以外の元と比較不能とする。このとき、$H = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$.

(証明). 条件より $I = H \setminus \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ はHのposet ideal. $I = \phi$を示す。条件よりK_RはR-freeである。生成元をωとする。$I \neq \phi$とすると、$\omega \notin [0:IR]_{K_R}$, $\beta_1\omega, \beta_2\omega \in [0:IR]_{K_R}$.


上の任意のASLはGorensteinだから、$K_{(R/IR)}$は単項生成。(1.1)(iii)より $K_{R/IR} \cong [0:IR]_{K_R}$ だが、$\beta_1\omega, \beta_2\omega$はあきらかに$[0:IR]_{K_R}$の一部だから、$K_{R/IR}$は単項ではありえな

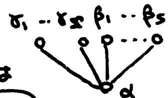
い。 ∴ $I=\phi$.

2°. $H\supset\{\alpha,\beta\}$, $\beta\geqq\alpha$, αはHの他の元と比較不能とする。

Rが(H,w)上の<u>Gorenstein</u> ASL, $H\neq\{\alpha,\beta\}$ とすると、$a(R)=-w(\beta)$.

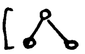
(証明) 1°と同様に、$K_R=R\cdot\omega$ $(\omega\in(K_R)_{-a(R)})$ とする。$I=H\setminus\{\alpha,\beta\}$とおくと、$\alpha\cdot\omega$が$[0:IR]_{K_R}$の最低次数の元だから、$\deg(\alpha)+\deg(\omega)=-a(R/IR)$. $R/IR\cong k[\alpha,\beta]$だから、$a(R/IR)=-w(\alpha)-w(\beta)$. ∴ $a(R)=-\deg(\omega)=-w(\beta)$.

3°. Rが(H,w)上のGorenstein ASL, αをHのmin. elem., $\{\beta\in H\mid\beta\geq\alpha\}=\{\gamma_1,\dots,\gamma_r,\beta_1,\dots,\beta_s\}$とする。ここで、$\gamma_1,\dots,\gamma_r$は$\alpha$以外とは比較不能な元、$\beta_1,\dots,\beta_s$は$\alpha$以外のある元と比較可能な元とする。$r+s\geqq2$, $s\geqq1$のとき、$a(R)=a(H,w)=0$で、$s=2$, $w(\alpha)=w(\gamma_i)$ $(i=1,\dots,r)$.



(証明) $I=H\setminus\{\alpha,\gamma_1,\dots,\gamma_r,\beta_1,\dots,\beta_s\}$とおく。(Iはposet ideal.) R/IRは上のASLだから$K_{R/IR}$は$r+s-1$個のdegree $w(\alpha)$の元で極小に生成されている。$s\geqq1$の仮定より$I\neq\phi$, $K_{R/IR}$のもう一つの表し方として$K_{R/IR}=\underline{\mathrm{Hom}}_R(R/I,K_R)=[0:I]_R(a(R))$となる。$K_R$の生成元$\omega$ $(\deg\omega=-a(R))$ とすると、$[0:I]_R\cdot\omega$の極小生成系は$\alpha\omega,\gamma_1\omega,\dots,\gamma_r\omega$である。ゆえに、$r+1=r+s-1$, $-a(R/I)=w(\alpha)=-a(R)+w(\alpha)=-a(R)+w(\gamma_i)$ $(i=1,\dots,r)$を得る。これより$a(R)=0$, $w(\alpha)=w(\gamma_i)$ $(i=1,\dots,r)$.

((4.3) (i), (ii) の証明). R が (H, w) 上の Gorenstein ASL とする.

(i) $a(R)<0$ とし, α を H の一つの minimal element とする. 3° で, $s+r \geqq 2$, $s \geqq 1$ とすると $a(R)=0$ となるから, $s=0$, 即ち, α が H の唯一つの極小元となるか, 又は, $s=1$, $r=0$ である. 前者の場合あきらかに, H は  又は  となる. 後者の場合, $\exists_1\, \beta \in H$, $\beta \geqq \alpha$. 仮定より, $\exists \alpha' \in H$, $\alpha' \neq \alpha$, $\beta \geq \alpha'$. α' について再び 3° を使うと, α' より「大きい」H の元は β のみ. $\{\alpha, \alpha', \beta\}$ は 1° の条件をみたすから, $H =$ [].

(ii) $a(R)=0$ のとき, 2° により H の任意の極小元 α に対し α より大きい H の元が少くとも二つある. ゆえに, α に対して 3° を適用すると, $s=2$, $w(\alpha)=w(\gamma_i)$ $(i=1, \dots, r)$. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ を H の極小元全体の集合, $\{\beta_1, \dots, \beta_{m'}\} = \{\beta \in H \mid \exists \alpha, \alpha' \in H, \beta \geq \alpha, \alpha', \alpha \neq \alpha'\}$ とおくと, 各 α_i に対して $\beta_j \geq \alpha_i$ となる j が丁度 2 つという事と, (4.2) の等式 $c_0 = c_1$ より, $m' = m$ で, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ は 1 つの cycle をなす. これで (4.3) の (ii) が示せた.

((4.3) (iii) の証明). $\mathrm{Proj}(R)$ が cycle のとき, $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$, pure, ht 0 の ideal をとるとき, $\mathrm{Proj}(R/\mathfrak{a}) \subsetneq \mathrm{Proj}(R)$ はもはや $\mathbb{P}^1$ の cycle を含まないので, (1.3) により $a(R/\mathfrak{a})<0$. 逆に R が (H, w) 上の Gorenstein ASL とすると, R は min. elem. が 1 個の H 上の ASL の貼り合せで得られるから, ((3.3) 参照), $\mathrm{Proj}(R) = X$ の各既約成分は $\mathbb{P}^1$ であり, $a(H, w) = 0$ のとき, (4.2) により, $\Delta(H)$ が

cycle を含むから、　　X は必ず $\mathbb{P}^1$ の cycle を含む．Z を X に含まれる $\mathbb{P}^1$ の cycle，とし $Z \subsetneq X$ とすると，$\exists\, \mathfrak{a} \subset R, \mathfrak{a} \neq 0, a(R/\mathfrak{a}) = 0$．この事実より，(iii) は次の定理に帰着する．

<u>定理</u> (4.4)．$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は $R_0 = k$ = 体上有限生成な，Cohen-Macaulay graded ring，$\dim R = d$，かつ R の Poincaré series $P(R,t)$ は $P(R,t) = (-1)^d \cdot t^a \cdot P(R,t^{-1})$ をみたすとする．($a = a(R)$)．このとき，

R が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $0 \neq \forall \mathfrak{a} \subset R$, $\dim R/\mathfrak{a} = \dim R$, $a(R/\mathfrak{a}) < a(R)$.

(証明) $\Rightarrow$) は (1.2) で述べた．

$\Leftarrow$)．$P(R,t)$ に関する条件より，$0 \neq \omega \in (K_R)_{-a}$ が const. を除いて unique に定まる。K_R と $R(a)$ は同じ Poincaré series をもつから，$\mathrm{Ann}_R(\omega) = (0)$ を示せば，$K_R \cong R(a)$ となり，R が Gorenstein となる。$\mathrm{Ann}_R(\omega) = \mathfrak{a} \neq (0)$ とすると，$\mathrm{Ass}_R(K_R) = \mathrm{Ass}_R(R)$，$R$ は Cohen-Macaulay だから，$\dim R/\mathfrak{a} = \dim R$．また，$K_{(R/\mathfrak{a})} \cong [0 : \mathfrak{a}]_{K_R} \ni \omega$ だから，$a(R/\mathfrak{a}) = a(R)$．　　(証明終)．

(注) (4.4) は Stanley の定理「R が C-M graded domain で，$P(R,t) = (-1)^d \cdot t^a \cdot P(R,t^{-1})$ なら R は Gorenstein」の精密化になっている。

本来，一般の graded ASL の分類が続くべき所だが，まだ満足すべき記述が得られていないので，別の機会に発表したいと思っている．

REFERENCES

[1] F. Catanese, Pluricanonical-Gorenstein-Curves, "Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry", Progress in mathematics, 24, Birkhauser, 1982, 51-95.

[2] De Concini, Eisenbud and Procesi, Hodge Algebra, Asterisque, 91 (1982).

[3] D. Eisenbud, Introduction to algebras with straightening laws, Ring Theory and Algebra, III, Dekker (1980), 243-268.

[4] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 179-213.

[5] R. Stanley, Hilbert Functions of Graded Algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[6] R. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Progress in mathematics, 41, Birkhauser, 1983.

[7] K. Watanabe, ASL (Algebras with straightening laws) に関するいくつかの結果, 数理研講究録 465 (1982), 80-95.

[8] K. Watanabe, Study of algebras with straightening laws of dimension 2, in preparation.

Rings of Siegel Modular Forms of degree ≥3 are not Cohen-Macaulay.

露峰茂明

１９７１年に、‘Modular forms の環は Cohen-Macaulay（今後、C-M とする）か？’という問題が Eichler により提起された［２］。ここに述べるのは次数 g が４以上の時 Siegel modular forms の環が C-M でないこと、即ち Eichler の問題の否定的解決（Siegel modular form の場合）である。結果は $g=3$ の時も成立するが、手法が全く異なるため、ここには紹介できない。また $g=1, 2$ のとき，Siegel modular form の環は C-M となる（cf. 井草［８］，［９］）。

Freitag［３］，［４］により、$g\geq 3$ ならば Siegel modular form の環は factorial になっているが、従って Siegel modular form の環は‘U.F.D は C-M.か？’という Samuel の問題［１１］の反例に加わることになる。これはシンポジウムの最中に御指摘いただいたことだが、我々の証明は Siegel modular form の環の projective spectrum が C.-M. scheme とならな

いことを示しており、実際はBuchsbaumにもならない例となっている。

以下記号を紹介する。H_gをg次のSiegel space，即ち$\{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}\,Z > 0\}$，とし、$\Gamma_g$をmodular群$Sp_{2g}(\mathbb{Z}) = \{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathbb{Z}) \mid A{}^tD - B{}^tC = 1_g,\ A{}^tB = B{}^tA,\ C{}^tD = D{}^tC\}$とする。$\Gamma_g$は$H_g$にmodular変換

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

で作用する。H_g上の正則関数fは次を満たすとき，Siegel modular form of weight k という；(i) fは

$$f(MZ) = |CZ+D|^k f(Z) \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

を満たし，(ii) fはcuspでも正則である。$g > 1$の場合は条件(ii)は自動的に満たされるため不要である。$A(\Gamma_g) = \bigoplus_{k \geq 0} A(\Gamma_g)_k$で、次数$g$のSiegel modular formの環を表わす、ここで$A(\Gamma_g)_k$はweight kのもののなす線型空間である。$X = X_g = H_g/\Gamma_g$を商空間とすると、これは$\mathbb{C}$上定義されたg次元のprincipally polarized abelian varietiesのmoduli空間である。X_gは佐竹compact化と呼ばれる自然なcompact化を持つ、それをX_g^*で表わせば、集合論的には、

$$X_g^* = X_g \cup X_{g-1} \cup \cdots \cup X_1 \cup X_0 = X_g \cup X_{g-1}^*$$

となる、ここでX_0は1点である。またX_g^*はnormal projective varietyであり、$X_g^* = \mathrm{Proj}\,(A(\Gamma_g))$となる。

abelian varieties の moduli の構造を調べるという立場からも、$A(\Gamma_g)$ の環論的性質は大事なものと思われる。

§1. Siegel modular forms の sheaf.

n で $\dim X_g$, 即ち $g(g+1)/2$ を表わす。整数 k が、kn が偶数なるとき、X^* 上の coherent sheaf $\mathcal{L}(k)$ を次のように定義する。p を H_g から X への自然な射影を表わすものとして、

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(U, \mathcal{L}(k)) \\
&= \{ f \in \Gamma(p^{-1}(U \cap X), \mathcal{O}_{H_g}) \mid (i)\ f(MZ) = |CZ+D|^k f(Z) \text{ for } \\
&\qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g,\ Z \in p^{-1}(U \cap X)\ \ (ii)\ f \text{ は } U \text{ に} \\
&\qquad \text{正則関数として拡張される} \},
\end{aligned}
$$

ここで U は X^* 上の開集合である。条件 (ii) は $g > 1$ ならば、不必要となる。$\Gamma(X^*, \mathcal{L}(k))$ が $A(\Gamma_g)_k$ である。$\mathcal{L}(k)$ は torsion free であり、さらに reflexive (即ち $\mathcal{L}(k)$ の double dual は元に戻る) になっていることは容易に確かめられる。$\mathcal{L}(k)$ を、Siegel modular forms of weight k に対応する sheaf という。k が偶数ならば、$\mathcal{L}(k)|X^*_{g-1}$ は X_{g-1} 上の Siegel modular forms of weight k に対応する coherent sheaf となる。次を確かめるのは容易である。

補題1．次を満たす正整数 N_0 が存在する。

i) $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(N_0)$ は ample な可逆層である。

ii) $\mathcal{L}(k+N_0) = \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{L}_0$ がすべての k に対して成立する。

iii) algebra $\bigoplus_{s \geq 0} \Gamma(X^*, \mathcal{L}_0^{\otimes s})$ は $\Gamma(X^*, \mathcal{L}_0)$ で生成される。

Γ_g は偶数 order の固定点を H_g に持つので、N_0 は偶数でなければならない。

X^0 によって、固定群が自明（即ち $\{\pm 1_{2g}\} \subset \Gamma_g$）である H_g の点の p による像とする。$g \geq 3$ ならば X^0 は X の smooth locus になっている。$\mathcal{L}(k)$ は X^0 上では可逆層になっているのは定義より容易である。また固定点 Z_0，その固定元 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$ に対し，$|CZ_0+D|^k = 1$ であれば $\mathcal{L}(k)$ は Z_0 で可逆層となる。次の補題も確かめるのは難かしくない。

補題2．$\mathrm{codim}\,(X_g^* - X_g^0) \geq g-1$。$k$ が偶であれば、$\mathcal{L}(k)$ は、codim g 以上の subvariety を除いた所で，可逆層となる。

§2、主結果とその証明の方針

$g \geq 4$ のときに，$A(\Gamma_g)$ が C.-M. でないのを示すのが目的である。もし $A(\Gamma_g)$ が C.-M. であれば、$X^* = \mathrm{Proj}\,(A(\Gamma_g))$ は

C.-M. scheme となる。そうなれば X^* 上で Serre duality theorem が成立しなければならない。即ち、$N_0 | k$ なるとき、

$$H^i(X^*, \mathcal{L}(k)) \simeq H^{n-i}(X^*, \mathcal{L}(-k) \otimes \omega_{X^*})^\vee$$

もしくは、

$$H^i(X^*, \mathcal{L}(k) \otimes \omega_{X^*}) \simeq H^{n-i}(X^*, \mathcal{L}(-k))^\vee$$

である。ここで ω_{X^*} は dualizing sheaf、即ち任意の X^* 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対し $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{X^*}) \simeq H^n(X^*, \mathcal{F})^\vee$ なる functorial な同型を与えるもので、projective variety の上では必らず存在し、同型を除いて一意である。従って Euler-Poincaré 指標において、

$$\chi(X^*, \mathcal{L}(k)) = (-1)^n \chi(X^*, \mathcal{L}(-k) \otimes \omega_{X^*})$$

もしくは、

$$\chi(X^*, \mathcal{L}(k) \otimes \omega_{X^*}) = (-1)^n \chi(X^*, \mathcal{L}(-k))$$

が成立しなければならない、ただし $N_0 | k$ である。

$Z = (z_{k\ell}) \in H_g$ とし、$\omega = dz_{11} \wedge dz_{12} \wedge \cdots \wedge dz_{nn}$ とおく。$M\omega = |CZ+D|^{-g-1} \omega$ $\left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)$ である。U を X^* の開集合としたとき、$f \in \Gamma(U, \mathcal{L}(g+1))$ に対し $f\omega$ は Γ_g-不変である。これより

$$\mathcal{L}(g+1)|_{X^0} \simeq K_{X^0}$$

である、ただし K_{X^0} は X^0 上の canonical 可逆層である。Grauert-Riemenschneider [5.] により、$g \geq 3$ のとき

$$\omega_{X^*} \simeq i_* K_{X^0}$$

である、ここで i は X^0 から X^* への自然単射である。Koecher's principle [10] 及び正則関数は codimension 2 の subvariety を超えて拡張されることより

$$i_* K_{X^0} \simeq i_* (\mathcal{L}(g+1)|_{X^0}) \simeq \mathcal{L}(g+1), \quad g \geq 3$$

従って

$$\omega_{X^*} \simeq \mathcal{L}(g+1), \qquad g \geq 3$$

を得る。上述の、$A(\Gamma_g)$ が C.-M. ならば成立するはずの Euler-Poincaré 指標の等式は

$$\chi(X^*, \mathcal{L}(k)) = (-1)^n \chi(X^*, \mathcal{L}(-k+g+1))$$

もしくは、

$$\chi(X^*, \mathcal{L}(k+g+1)) = (-1)^n \chi(X^*, \mathcal{L}(-k))$$

と書き直せる。ここで簡単のため

$$Q(k) = \chi(X^*, \mathcal{L}(k))$$

とおく。$Q(k+sN_0)$ は補題 1 より、任意に k を固定したとき s の numerical polynomial になる。さて実際の所、我々は次の命題を証明する。

命題 1.

1) $g \geq 3$ を奇数とし，$N_0 | k$ とする。このとき、

$$Q(k) = (-1)^n Q(-k+g+1) - (2^{g-2}-2)\,\chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k)|_{X^*_{g-1}}) + O(k^{n-g-1})。$$

2) $g \geq 4$ を偶数とし、$\nu_0 | k$ とする。このとき、

$$Q(k+g+1) = (-1)^n Q(-k) + (2^{g-2}-1)\,\chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k)|_{X^*_{g-1}}) + O(k^{n-g-1})。$$

$\chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k)|_{X^*_{g-1}})$ は最高次は $n-g = \frac{1}{2}g(g-1)$ であるから、$A(\Gamma_g)$ が C.-M. ならば成立するはずの等式は $g \geq 4$ に対しては成立しないことになる。これより次を得る。

定理. $g \geq 4$ とする。佐竹 compact化 $(H_g/\Gamma_g)^*$ は C.-M. scheme ではなく、また graded ring $A(\Gamma_g)$ は C.-M. でない。

以下では、命題1を証明することを目的とするが、1), 2) も殆んど同様な議論のため、特に1) $g \geq 3$, 奇数の場合のみ扱うことになる。

§3. 準備

$\overline{X}$ を、[1] により構成された X の toroidal compactification とする。$\overline{X}$ は X^*_g の X^*_{g-1} に concentrate したある ideal の sheaf による blow up の normalization によっても得られる。$\pi : \overline{X} \longrightarrow X^*$

をその写像とする。 $D = \overline{X} - X = \pi^{-1}(X^*_{g-1})$ は normal crossings のみを持ったXの divisor である。 $\mathcal{J}_D$ を D を定義する ideal の sheaf とし,

$$\mathcal{M}(k) = \pi^* \mathcal{L}(k)$$

とおく。また $K_{\overline{X}}$ を Grauert-Riemenschneider の意味での $\overline{X}$ の canonical coherent sheaf とする。$\overline{X}$ は quotient singularities のみを持つ variety であり、$K_{\overline{X}}$ は同時に dualizing sheaf も与えている。

命題2. X_{g-1} 上で

$$R^i\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}} \simeq R^i\pi_*\mathcal{O}_D \qquad i > 0.$$

証明） $\Gamma_g(\ell) := \{ M \in \Gamma_g \mid M \equiv 1_{2g} \bmod \ell \}$ を level ℓ の principal congruence subgroup とする。 $X(\ell) = H_g/\Gamma_g(\ell)$ とおき, $X^*(\ell)$, $\overline{X}(\ell)$ を各々その佐竹 compact 化、toroidal compactification とする。また $D^*(\ell) := X^*(\ell) - X(\ell)$, $D(\ell) := \overline{X}(\ell) - X(\ell)$ とする。π は $\overline{X}(\ell)$ から $X^*(\ell)$ への morphism とすると、π は $D(\ell)$ を $D^*(\ell)$ へ写す。また $X'(\ell)$ を $n-g$ 次元の cusp を表わす、それは $H_{g-1}/\Gamma_{g-1}(\ell)$ の disjoint union である。

さて命題を証明するには、$X'(\ell)$ 上で $R^i\pi_*\mathcal{O}_{\overline{X}(\ell)} \simeq$

$R^i\pi_*\mathcal{O}_D$, $i>0$ を示せばよい。これが示せれば Grothendieck [7] Théorème 5.3.1 より命題が導びかれる。

$\mathcal{J}_{D^*(l)}$ を $X^*(l)$ 上の $D^*(l)$ を定義する ideal の sheaf と $\mathcal{J}:=\mathcal{J}_{D^*(l)}\mathcal{O}_{\bar{X}(l)}$ おく（$\mathcal{O}_{X^*(l)}\hookrightarrow\mathcal{O}_{\bar{X}(l)}$ に注意）。

今後 $l\geq 3$ とする。この時 [1] の構成により、$\pi^{-1}(X(l)\cup X'(l))$ は $X(l)\cup X'(l)$ の $X'(l)$ にそっての monoidal transformation になり、さらに

$$\pi:\pi^{-1}(X'(l))\longrightarrow X'(l)$$

は $g-1$ 次元 abelian variety の flat な fibre space となることが分かる。$\mathcal{J}$ は $\pi^{-1}(X(l)\cup X'(l))$ 上では $\pi^{-1}(X'(l))$ を定義する可逆層である。$\pi^{-1}(X(l)\cup X'(l))$ 上で

$$0\longrightarrow\mathcal{J}^{j+1}\longrightarrow\mathcal{J}^{j}\longrightarrow\mathcal{J}^{j}/\mathcal{J}^{j+1}\longrightarrow 0$$

は exact sequence である、ここで $\mathcal{J}^j/\mathcal{J}^{j+1}$ は $\pi^{-1}(X'(l))$ 上の可逆層である。これより

$$\longrightarrow R^i\pi_*\mathcal{J}^{j+1}\xrightarrow{\alpha_{ij}}R^i\pi_*\mathcal{J}^{j}\longrightarrow R^i\pi_*\mathcal{J}^{j}/\mathcal{J}^{j+1}\longrightarrow R^{i+1}\pi_*\mathcal{J}^{j+1}\longrightarrow$$

なる long exact sequence を得る。$x\in X'(l)$, $j>0$ に対して、$(\mathcal{J}^j/\mathcal{J}^{j+1})_{\pi^{-1}(x)}$ は ample であるが、従って cohomology 群 $H^i(\pi^{-1}(x),(\mathcal{J}^j/\mathcal{J}^{j+1})_{\pi^{-1}(x)})$ は $i>0$ に対して消える、ここで $\pi^{-1}(x)$ は abelian variety であることを注意する。base change theorem より、$R^i\pi_*\mathcal{J}^j/\mathcal{J}^{j+1}$ は $x\in X'(l)$ で $i>0$, $j>0$ に対して消えるため、同じ条件のもとで

$\alpha_{i,j}$は全射である。$R^i\pi_*\mathcal{J}^j = 0$, $j \gg 0$である（Grothendieck [6], Théorème (2.2.1), (ii)）から、これは$R^i\pi_*\mathcal{J}$が$i>0$に対して消えることを意味する。上記のlong exact sequenceで$j=0$の場合を考えれば、$X'(\ell)$上で$R^i\pi_*\mathcal{O}_{\bar{X}(\ell)} \simeq R^i\pi_*\mathcal{O}_{D(\ell)}$, $i>0$を得る。（証明終）

さて、$0 \leq k_1 < N_0$なる整数k_1を固定する。$\bigoplus_{s\geq 0}$ {cusp forms of weight k_1+sN_0} は$\bigoplus_{s\geq 0} H^0(X^*, \mathcal{L}_0^{\otimes s})$上のgraded moduleである。補題1より、Hilbert polynomial $P(k_1+sN_0)$が存在する。これより$P(k)$がすべてのkに対して定義され

$$P(k) = \dim \{\text{cusp forms of weight } k\}, \quad k \gg 0$$

である。kが偶で、$\gg 0$であるとすれば

$$Q(k) = P(k) + \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}})$$

である。

命題3. $\mathcal{J}_D$を$\bar{X}$上の，Dを定義するidealのsheafとしたとき、$g\geq 3$，偶なるkに対し

$$\chi(\bar{X}, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{J}_D) = P(k) + O(k^{(g-1)(g-2)/2})$$

を得る。

証明） short exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

に $\mathcal{M}(k)$ を tensor して

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{I}_D \longrightarrow \mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$\chi(\bar{X}, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{I}_D) = \chi(\bar{X}, \mathcal{M}(k)) - \chi(D, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D)。$$

次の Leray spectral sequence を考える；

$$E_2^{p,q} = H^p(X^*, R^q\pi_*\mathcal{M}(k)) \Longrightarrow H^{p+q}(\bar{X}, \mathcal{M}(k))$$

$$E_2^{p,q} = H^p(X^*_{g-1}, R^q\pi_*(\mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D)) \Longrightarrow H^{p+q}(D, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D)。$$

N_0 を補題1のものとすると，$\mathcal{M}(N_0)$ は可逆層である。projection formula を用い、また $\pi^*\mathcal{L}(N_0) = \mathcal{M}(N_0)$ であり、$\mathcal{L}(N_0)$ が ample であることより、

$$H^0(X^*, R^i\pi_*\mathcal{M}(k)) = H^i(\bar{X}, \mathcal{M}(k)), \quad k \gg 0,$$

$$H^0(X^*_{g-1}, R^i\pi_*(\mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D)) = H^i(D, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D), \quad k \gg 0。$$

ここで $\mathcal{L}'(k)$ で $\mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}}$，即ち X^*_{g-1} 上の Siegel modular forms of weight k に対応する coherent sheaf とすると、補題2、命題2、projection formula より $i > 0$ に対し、$R^i\pi_*\mathcal{M}(k)$, $R^i\pi_*(\mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D)$ はともに X^*_{g-1} から codim $g-1$ の subvariety を引いた所では $\mathcal{L}'(k) \otimes R^i\pi_*\mathcal{O}_D$ に同型となる。よって $i > 0$ に対し

$$\dim H^0(X^*, R^i\pi_*\mathcal{M}(k)) = \dim H^0(X^*_{g-1}, R^i\pi_*(\mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D))$$
$$+ O(k^{(g-1)(g-2)/2}), \quad k \gg 0,$$

従って

$$\chi(\overline{X}, \mathcal{M}(k)) - \chi(D, \mathcal{M}(k)\otimes \mathcal{O}_D)$$

$$= \dim H^0(X^*, \mathcal{L}(k)) - \dim H^0(X^*_{g-1}, \mathcal{L}'(k)) + O(k^{(g-1)(g-2)/2})$$

$k>>0$，である。$P(k)$ は $\dim H^0(X^*, \mathcal{L}(k)) - \dim H^0(X^*_{g-1}, \mathcal{L}'(k))$ に、$k>>0$ で等しいから、命題は示された。（証明終）.

§4 命題Iの証明.

この節では、$g\geq 3$ で奇数とする。$\overline{X}^0$ を $\overline{X}$ の smooth locus とすれば〔1〕Chap IV. Theorem 1 と Grauert-Riemenschneider〔5〕より

$$K_{\overline{X}} = i_*((\mathcal{M}(g+1)\otimes \mathcal{I}_D)|\overline{X}_0)$$

を得る、ここで $i: \overline{X}_0 \hookrightarrow \overline{X}$ である。ここで $\mathrm{codim}(\overline{X}-\overline{X}^0) > 2$ であること、及び Kodaira 型の vanishing theorem (cf〔5〕) より、$N|k$，$k>>0$ に対し、

$$\chi(\overline{X}, \mathcal{M}(k)\otimes K_{\overline{X}})$$

$$= \dim H^0(\overline{X}, \mathcal{M}(k)\otimes K_{\overline{X}}) = \dim H^0(\overline{X}^0, \mathcal{M}(k)\otimes K_X)$$

$$= \dim H^0(\overline{X}^0, \mathcal{M}(k+g+1)\otimes \mathcal{I}_D)$$

$$= \dim H^0(\overline{X}, \mathcal{M}(k+g+1)\otimes \mathcal{I}_D)$$

$$= P(k+g+1)$$

を得る。$N|k$ に対し $\chi(\overline{X}, \mathcal{M}(k)\otimes K_{\overline{X}})$ と $P(k+g+1)$ は numerical polynomial であるから，$k>>0$ の条件無しに等しくなる。

さて命題3及びその証明より

$$P(k)+O(k^{(g-1)(g-2)/2})=\chi(\overline{X},\mathcal{M}(k))-\chi(D,\mathcal{M}(k)\otimes\mathcal{O}_D)$$

である。又従常に $N \mid k$ として、

$$\chi(\overline{X},\mathcal{M}(k))=(-1)^n\chi(\overline{X},\mathcal{M}(-k)\otimes K_{\overline{X}})$$

$$=(-1)^n P(-k+g+1),$$

$$\chi(D,\mathcal{M}(k)\otimes\mathcal{O}_D)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\dim H^i(D,\mathcal{M}(k)\otimes\mathcal{O}_D)$$

$$=\sum_{i=0}^{g-1}(-1)^i\dim H^0(X_{g-1}^*,\mathcal{L}(k)\otimes R^i\pi_*\mathcal{O}_D)+O(k^{(g-1)(g-2)/2})$$

ここで、命題3の証明と同じ議論を用いている。さて、

$$\pi:\pi^{-1}(X_{g-1}^*)\longrightarrow X_{g-1}^*$$

は generic fibre が $g-1$ 次元の Kummer variety (即ち abelian variety の $\{\pm 1\}$ による商) になっている、そして Zariski open subset の上では Kummer variety の flat family である。$g-1$ 次元の Kummer variety K に対しては

$$H^i(K,\mathcal{O}_K)=\begin{cases}0, & i:\text{奇数 又は } i<0,\ i>g-1\\ \binom{g-1}{i}\text{次元}, & i:\text{偶数 } 0\leq i\leq g-1\end{cases}$$

であるから、base change theorem より X_{g-1}^* の Zariski open set の上で

$$R^i \pi_* \mathcal{O}_D = \begin{cases} 0 & i:\text{奇数, 又は } i > g-1 \\ \text{rank } \binom{g-1}{i} \text{ の vector bundle,} & i:\text{偶数 } \leq g-1 \end{cases}$$

となる。従って

$$\chi(D, \mathcal{M}(k) \otimes \mathcal{O}_D) = 2^{g-2} \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}}) + O(k^{n-g-1})$$

である。以上をまとめて、

$$P(k) = (-1)^n P(-k+g+1) - 2^{g-2} \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}}) + O(k^{n-g-1})$$

を得る。これより、$Q(k) = P(k) + \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}'(k))$ が偶数 k に成立すること、また $(-1)^n \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(-k+g+1) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}}) = \chi(X^*_{g-1}, \mathcal{L}(k) \otimes \mathcal{O}_{X^*_{g-1}}) + O(k^{n-g-1})$（ここにも g が奇数であることを使っている）を用いれば、命題 1, 1) の式が得られる。2) の場合も似たような議論が通用する。

文献

[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y.-S. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math. Sci. Press, Brookline. Massachusettts. (1975).

[2] M. Eichler, Projective varoeties and modular forms, Lecture Notes in Math., 210, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1971).

[3] E. Freitag, Stabile Modulformen, Math. Ann.. 230 (1977),

197 - 211.

[4] ————, Die Irreducibiuität der Schottky relation (Bemerkungen zu einem Satz von Igusa), Archiv der Math., 40 (1983), 255 - 259.

[5] H. Grauert and O. Riemeschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent. Math., 11 (1970), 263 - 292.

[6] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébriques, III, Publ. Math. I.H.E.S., 11 (1961).

[7] ————, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., 9 (1957), 119 - 221.

[8] J. Igusa, On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math., 84 (1962), 175 - 200.

[9] ————, On Siegel modular forms of genus two (II), Amer. J. Math. 86 (1964) 392 - 412.

[10] M. Koecher, Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I. Math. Z. 59 (1954) 399 - 416; II, ibid., 61 (1955) 455 - 466.

[11] P. Samuel, On unique factorization domains, Illinois. J. Math., 5 (1961), 1 - 17.

[12] S. Tsuyumine, Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay, (preprint).

擬多項式環について

富山大学教育学部　浅沼照雄

R が可換環であるとき n 変数多項式環を $R^{[n]}$ で表わす。R の素イデアル $\mathfrak{p}$ についてその剰余体 $Q(R/\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ をいつものように $k(\mathfrak{p})$ と書く。A が R-代数とするとき A の係数拡大 $A \otimes k(\mathfrak{p})$ は A の $\mathfrak{p}$ におけるファイバー環といわれるが一般に A より A のファイバー環の方が環としての構造が簡単である。そこで A のすべてのファイバー環の構造がわかっているとき A の構造はどの程度わかるかという問題が考えられる。その典型的な場合が次の問題1である。

問題1. R-代数 A について R の任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ におけるファイバー環 $A \otimes k(\mathfrak{p})$ が $k(\mathfrak{p})^{[n]}$ に同型とする。ここで n は $\mathfrak{p}$ によらないある固定された正の整数である。このときある射影 R-加群 M が存在して A は M 上の対称代数 $Sym_R(M)$ に同型となるか？

この問題の特殊な場合として

問題2. R が局所環のとき問題1をみたす A は多項式環であるか？

A に R 上有限生成という仮定をくわえれば問題1及び2は同値であることが［BCW］によってわかる。一般の A についてその同値性はわからないが問題2について考えることが先決である。

さて D を離散的付値環として πD をその極大イデアル，$K=D[\pi^{-1}]$ を商体，$k=D/\pi D$ を剰余体とする。$R=D$ のときがまず最初に問題になる。D の素イデアルは (0) 及び πD の2つだけであるから D-代数 A のファイバー環は $A\otimes K$（生成ファイバー）及び $A\otimes k$（閉ファイバー）がすべてである。ゆえ $R=D$ のとき問題2を具体的に書くと

問題3. A は D-代数で $A\otimes K\cong K^{[n]}$ かつ $A\otimes k\cong k^{[n]}$ をみたすとする。このとき $A\cong D^{[n]}$ がなりたつか？

定理．　A が整域とすると　$n=1$ のとき問題3は肯定的である。

例．　$A=D[x, y, \pi^{-1}y, \pi^{-2}y, \cdots]/(\pi x=0)$
とおく。　すると次の (1)〜(3) がなりたつ。

(1)　Aは整域でない。とくに　$A \ncong D^{[1]}$．これは明らか。

(2)　$A\otimes K \cong K^{[1]}$．　なぜならば　$\varphi : A \longrightarrow A\otimes K$　を自然な準同型とすると　$\pi x=0$　より　$\varphi(x)=0$．また π は　$D[y, \pi^{-1}y, \pi^{-2}y, \cdots]$　では零因子ではない。ゆえ　φ の　$D[y, \pi^{-1}y, \pi^{-2}y, \cdots]$　への制限は同型であることがわかる。ゆえに

$$A\otimes K \cong \varphi(A)\otimes K \cong K[y] \cong K^{[1]}.$$

(3)　$A\otimes k \cong k^{[1]}$．なぜならば

$$\pi^{-m}y = \pi(\pi^{-m-1}y) \in \pi A \quad (m=0, 1, 2, \cdots)$$

であるから自然な準同型　$\psi : A \longrightarrow A/\pi A$　によって
$\psi(\pi^{-m}y)=0$．　ゆえ

$$A/\pi A = \psi(A) = \psi(R)[\psi(x)] = k[\psi(x)].$$

$\psi(x)$ が k 上代数的でないことは x の代数的な関係が $\pi x=0$　のみであることからわかる。　ゆえに　$k[\psi(x)]$ は　$k^{[1]}$　に同型，つまり　$A\otimes k \cong A/\pi A \cong k^{[1]}$．

この例はAが整域でないときの問題3の反例になっている。

この反例は noether 環ではないが同様にして noether 環の反例も作ることが出来る。 Aが整域でないときを含めて

問題4. Aは有限生成な D-代数で $A\otimes K\cong K^{[1]}$ かつ $A\otimes k\cong k^{[1]}$ とする。 このとき $A\cong D^{[1]}$ か?

さて $n=2$ のときは次の定理がなりたつ。

定理 (Sathaye - Kambayashi [S], [K]) Aが D上有限生成な整域かつ $D\supset\mathbb{Q}$ (= 有理数体) ならば $n=2$ のとき問題3は肯定的である。

Sathaye - Kambayashi の定理から"有限生成"という仮定をとり除くことが出来る。

D が $\mathbb{Q}$ を含まなければ $n=2$ のとき $A^{[1]}\cong D^{[3]}$ をみたす問題3の反例 A が存在する。 ゆえ $n=2$ のときは A が有限生成, 忠実平坦な整域という仮定の下でも問題3は否定的である。

$n \geqq 3$ のときは反例の存在も含めて何にもわかっていない。
一つの予想として

予想. A が整域ならば問題3の仮定,すなわち $A \otimes K \cong K^{[n]}$ かつ $A \otimes k \cong k^{[n]}$ をみたす A は安定的に多項式環であろう。ここで A が安定的に多項式環であるとはある正の整数 m が存在して $A^{[m]} \cong D^{[n+m]}$ なることである。

以上問題3についてくわしくは [A2] を参照してください。さて問題1にもどって考えてみよう。まず次の定義をする。

定義. 環 R の素イデアル $\mathfrak{p}$ について $R/\mathfrak{p}$ の $k(\mathfrak{p})$ における整閉包を $J(\mathfrak{p})$ で表わす。
$R/\mathfrak{p} \subset J(\mathfrak{p}) \subset k(\mathfrak{p})$ に注意する。R-代数 A が n 変数の擬多項式環とはすべての $\mathfrak{p} \subset R$ について
$A \otimes J(\mathfrak{p}) \cong J(\mathfrak{p})^{[n]}$ なることである。ここで n は $\mathfrak{p}$ によらないある固定された正の整数を表わす。

定義よりただちに R が整閉整域ならば擬多項式環は多項式環にほかならない。擬多項式環の構造はかなりよくわかっ

ている。とくに次の定理がなりたつ。

定理. R は局所 noether 環, A は R 上有限生成で平坦な R-代数とする。Rの任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について $A\otimes k(\mathfrak{p})\cong k(\mathfrak{p})^{[1]}$ ならば A は擬多項式環である。

この定理の系として

系. Rが noether 環で半正規(semi-normal)ならば $n=1$ のとき問題1は肯定的である。

定理. Rを Krull 次元が1なる noether環として A は R 上有限生成で平坦な R-代数とする。Rの任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について $A\otimes k(\mathfrak{p})\cong k(\mathfrak{p})^{[2]}$ とし, さらに $R\supset\mathbb{Q}$ と仮定する。このとき $A\cong R^{[2]}$ なるための必要十分条件は A の微分加群 $\Omega_R(A)$ が自由なることである。

擬多項式環については A_1 を参照してください。

参考文献

[A_1] T. Asanuma, On quasi-polynomial algebras, J. Pure and Appl. Algebra 26 (1982) 115-139

[A_2] 浅沼照雄, Polynomial fibre rings of algebras over valuation rings, 代数幾何学シンポジウム記録, 於広島市 1984年11月

[BCW] H. Bass, E.H. Connel and D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Inventions Math. 38 (1977) 279-299

[K] T. Kambayashi, On one parameter family of affine planes, Inventions Math. 52 (1979) 275-281

[S] A. Sathaye, Polynomial rings in two variables over a D.V.R.: a criterion, Inventions Math. 74 (1983) 159-168

Artin局所環上のrich algebrasとpoor algebras

名大・理　　吉野雄二

§1　序

Tを一般の(可換な)ネータ環，RをT-algebraとするとき，次のような問題を考えてみよう。

__問題__；　自明でないT-injective R-moduleがいつ存在するか.

この問題を考えるとき，次のRemarkによって本質的には，TがArtin局所環の場合のみが重要であることが分る。

(1.1) __Remark__　　T，Rが上の通りのとき，次の2つは同値.

(1)　自明でないT-injective R-moduleが存在する。

(2)　あるTのminimal prime $\mathfrak{p}$に対して，自明でない$T_{\mathfrak{p}}$-injective $R_{\mathfrak{p}}$-moduleが存在する。

このRemarkによって，以下では，TはいつもArtin局所環で，$\mathfrak{m}$をそのmaximal ideal，$k = T/\mathfrak{m}$とすることにする。

(1.2) __Definition__　　T-algebra Rに対して自明でないT-injective R-moduleが存在するとき，Rをrich T-algebraと呼び，そうでないとき，poor T-algebraと呼ぶことにする。

このrich algebraとpoor algebraに対して，次の2つのLemmaは容易に示される。

(1.3) <u>Lemma</u> (a) 右図のようなalgebrasのdiagramがある時，

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & R' = R \otimes_T T' \end{array}$$

(a-1) Rがrich T-alg.ならば，R'はrich T'-alg.である。

(a-2) T'がflat T-alg.ならば(a-1)の逆も成立する。

(b) ring homomorphisms $T \to S \to R$があって，TとSは共にArtin局所環であるとする。このとき，

(b-1) Sがrich T-alg.かつRがrich S-alg.ならば，Rはrich T-alg.である。

(b-2) Rがrich T-alg.ならば，Sもrich T-alg.である。

(1.4) <u>Lemma</u> (a) $T \to R$がring retractionをもてば，Rはrich T-alg.である。

(b) Rがflat T-alg.ならば，Rはrich T-alg.である。

(c) Rがrich T-alg.ならば，自然なring homomorphism $T \to R$によって，$T \subset_{\oplus} R$ (as T-module)である。

(1.4)(b)(c)について，それぞれ逆が成立しない例がある。

(1.5) <u>Example</u> (a) $T = k[\![X, W]\!]/(X^2, W^4)$

$R = k[\![X, Y, Z, W]\!]/(X^2, W^4, XW - YZ, X^2Z - Y^3, YW^2 - Z^3, XZ^2 - Y^2W)$

とおくとき，Rはrich T-alg.であるが，flatでない。（この例は

(1.4)(a)の逆が成立しない例にもなっている。)

(b) Vを離散付値環, tをVの素元とする。$T=V/(t^2)$

$R=T[X]/(tX, X^2+t)$ とおくとき, $T\lessdot\!\!\oplus R$ であるが,

Rは poor T-algebra である。

この講演の第1の目的は, このような例をいかにして構成するのか, 明らかにすることである。

§2. Generic poor algebras の構成.

以前と同様 (T, m, k)をArtin局所環とする。天下りではあるが, 次のようにして, T-algebra $u_\ell(T)$ $(\ell\in\mathbb{N})$を構成する。

kのT-moduleとしてのminimal free resolutionを考える。

$$\cdots\longrightarrow T^{d'}\xrightarrow[A=\left[a_{ij}\right]]{}T^{d}\xrightarrow[\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{bmatrix}]{}T\longrightarrow k\longrightarrow 0$$

ここで, d, d'はTによりuniqueに定まることに注意しておこう。

このとき, 任意の$n\in\mathbb{N}$に対して,

$$Y_n := \begin{bmatrix} y_{11}^{(n)}, & \cdots & y_{1n}^{(n)}, & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{d1}^{(n)}, & \cdots & y_{dn}^{(n)}, & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} = \text{変数と}0\text{からなる } d\times\infty \text{ 行列}$$

と置き,

$$(Y_n, x) = \begin{bmatrix} y_{11}^{(n)}, & \cdots, & y_{1n}^{(n)}, & x_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{d1}^{(n)}, & \cdots, & y_{dn}^{(n)}, & x_d & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

と書くことにする。

更に　$Z_{nj} := \begin{bmatrix} z_{11}^{(nj)} & \cdots & z_{1d}^{(nj)} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{d'1}^{(nj)} & \cdots & z_{d'd}^{(nj)} \end{bmatrix}$ = 変数の $d' \times d$ 行列（但し，$1 \leq j \leq n$）

$W_n := [w_{n1}, \ldots, w_{nd}]$ = 変数の $1 \times d$ 行列

最後に，$E := [1, 0, 0, 0, \cdots]$ = $1 \times \infty$ 行列

とおく。これらの記号のもとで，任意の $l \in N$ に対して，

$$u_l(T) := \frac{T[Y_1, \ldots, Y_l, Z_{nj}\ (1 \leq n \leq l-1, 1 \leq j \leq n), W_1, \ldots, W_l]}{\left(AY_1, AY_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} Z_{nj}(Y_j, X)\ (1 \leq n \leq l-1), E - \sum_{j=1}^{l} W_j(Y_j, X)\right)}$$

と定義する。

ここで，$T[Y_1, \ldots, Y_l, Z_{nj}\ (1 \leq n \leq l-1, 1 \leq j \leq n), W_1, \ldots, W_l]$ は，各行列 Y_i, Z_{nj}, W_i の成分である変数を T に添加した多項式環をあらわし，分母のイデアルは各行列（AY_1 等）の成分で生成されたものをあらわす。この時，定義より

$$u_l(T) \big/ (Y_l,\ Z_{l-1,j}\ (1 \leq j \leq l-1), W_l) = u_{l-1}(T)$$

が直ちに分る。そこで，T-algebras の列：

$$\cdots \twoheadrightarrow u_l(T) \twoheadrightarrow u_{l-1}(T) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow u_2(T) \twoheadrightarrow u_1(T)$$

が得られる。そして，この $u_l(T)$ は，k の minimal free resolution の取り方には依存しないことも証明される。

そして，次の定理を証明することができる。

(2.1) <u>Theorem</u>　T-algebra R に対して，R が poor T-alg.

であるための必要十分条件は，Rがある$\mathcal{U}_\ell(T)$の specialization を含むことである。

この定理によって $\mathcal{U}_\ell(T)$ $(\ell \in \mathbb{N})$ を generic poor T-alg. と呼ぶことが自然であると思われる。そして，全ての poor T-alg. について，その構造の特殊性はこの定理から導びかれるはずである。

先の example (1.5)(b) は，$\mathcal{U}_3(T)$ の specialization として得られる poor T-algebra である。

§3. Rich algebras の構成.

Tを以前と同じくArtin局所環とする。Cohenの構造定理より，正則局所環Uが存在して，TはUの準同型像である。今U上の finite local algebra V で，$\dim U = \dim V$ となるものを1つ取っておく。このようなVが豊富に存在することは知られている。このとき，T-algebra $R := V \otimes_U T$ を考える。次の定理によって，殆んどの場合に，Rは rich T-alg. である。

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
T \arrow[r] & R
\end{tikzcd}
$$

(3.1) <u>Theorem</u> もし，Vが big CM module をもてば，Rは rich T-algebra である。（したがって，Tが equicharacteristic ならば，Rは rich T-algebra である。）

この定理の証明は，big CM に関する standard technique

でなされる。

先の example (1.5)(a) においては，$U = k[\![x, w]\!]$,

$V = k[\![x, y, z, w]\!]/(xw - yz, x^2z - y^3, yw^2 - z^3, xz^2 - y^2w)$

と置くことによって，$R = V \otimes_U T$ だから，上の定理によって，

R は rich T-alg. であることが帰結される。

§4. Big CM module の存在

実は上で示した定理(3.1)の逆が証明できるのである。

正確に言うと次の定理がなりたつ。

(4.1) <u>Theorem</u> U を正則局所環，V を U 上の finite local algebra で，$\dim U = \dim V$ とする。このとき，次は同値である。

(a) V 上には big CM module が存在する。

(b) U の任意の 0 次元 quotient T と $R = V \otimes_U T$ に対して，いつも R は rich T-algebra である。

(c) $x_1, \dots, x_d$ を U の正則巴系とし，任意の $n \in N$ に対して

$$T_n = U/(x_1^n, \dots, x_d^n)U, \quad R_n = V/(x_1^n, \dots, x_d^n)V$$

とおくとき，全ての n について，R_n は rich T_n-algebra である。

この定理の (c) ⇒ (a) の証明のためには，分離超積（と筆者がよぶもの）が必要である。(c)の仮定のもとで，各 $n \in N$ に対して自明でない T_n-injective R_n-module M_n が存在する。このとき，V 上の big CM module を作りたい分けであるが，それはこれら M_n $(n \in N)$ のある意味での極限であろうと直感される。

そこでその'極限' $\widetilde{M}$ を次のように構成する。

先ず，M_n の超積 M^* を作る。M^* は R_n の超積 R^* 上の加群である。ここで，R^* は局所環であることが分るので，その極大イデアルによる M^* の分離化を $\widetilde{M}$ と置くのである。このとき，

(4.2) <u>Claim</u>　$\widetilde{M}$ は V 上の balanced big CM module である。

これによって定理 (4.1) (c) $\Rightarrow$ (a) が示される。

上で述べた分離超積については，数理研短期共同研究（1984年7月）報告集における筆者の報告を参照していただきたい。

定理 (4.1) によって，Hochster の homological conjectures といわれるものが，Artin 環の問題としてとらえ直すことが，できたわけである。問題の解決には，いまだ程遠いのだが，少なくともそれに一歩近づいたことは確かである。

1985年 1月 17日

―――――― × ―――――― × ――――――

(*) 上で述べた定理の詳しい証明については，筆者が現在準備中の論文を見て下さい。

ネター環のイデアル完備化

京大・理　西村純一

以下、環は単位元を持つ可換ネター環とする。$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$により、局所環の性質(例えば、正則，正規，被約，CM，Gorenstein，等)を表わす。また、環Aで、任意の$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対し、局所環$A_{\mathfrak{p}}$の形式ファイバー(の各局所環)が$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$を満たすものを、$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$-環と呼ぶ。さて、次のLifting Problem(持ち上げ問題)を考えよう。

<u>Lifting Problem</u>.　Aを環，IをAのイデアルとする。いま、AがI(進位相により)-完備、かつ、A/Iが$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$-環なら、Aもまた、$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$-環か？

(特に、$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$-環のイデアル完備化は、$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$-環か？)

我々は、上記Lifting Problemを肯定的に解くための標準的手続を知っている。本稿では、その粗筋を、定義や既知の結果を交え、(証明抜きで)述べる。(詳細は、[N]を参照。)

まず、多くの重要な$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$が満たす条件、および、$\underset{\sim}{\mathrm{P}}$に関連した定義を述べる。

<u>定義1.</u> A, Bを環、$\varphi : A \to B$ を環準同型とする。φが $\mathbf{P}$-準同型とは、i) φは平坦, ii) 任意の$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, および $k(\mathfrak{p})$ の任意の有限拡大体k', $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Spec}(B \otimes_A k')$ について、局所環$(B \otimes_A k')_{\mathfrak{P}'}$ が$\mathbf{P}$を満たす、ことである。

また、$(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ を局所環, $\varphi : A \to B$ を局所準同型とし、次の条件を考える:

$\mathbf{P}_{\mathrm{I}}$: φが$\mathbf{P}$-準同型で、Aが$\mathbf{P}$を満たすなら、Bも$\mathbf{P}$を満たす。

$\mathbf{P}_{\mathrm{II}}$: φが平坦で、Bが$\mathbf{P}$を満たすなら、Aも$\mathbf{P}$を満たす。

$\mathbf{P}_{\mathrm{III}}$: Aが完備(局所環)のとき、$R_{\mathbf{P}}(A) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}}$ が$\mathbf{P}$を満たす$\}$ は、開集合である。

$\mathbf{P}_{\mathrm{IV}}$: (局所環)Aが$\mathbf{P}$を満たせば、任意の$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$について、$A_{\mathfrak{p}}$ も$\mathbf{P}$を満たす。

$\mathbf{P}_{\mathrm{V}}$: 非零因子$t (\in \mathfrak{m})$について、A/tA が$\mathbf{P}$を満たせば、Aも$\mathbf{P}$を満たす。

$\mathbf{P}_{\mathrm{V}}^{*}$: Aが catenary で、非零因子$t (\in \mathfrak{m})$について、A/tA が$\mathbf{P}$を満たせば、Aも$\mathbf{P}$を満たす。

さらに、環Aについて、

<u>定義2.</u> 1) $R_{\mathbf{P}}(A)$ が開集合のとき、Aを$\mathbf{P}$-1 と呼ぶ。

2) 任意の有限A-代数Bが$\mathbf{P}$-1のとき、Aを$\mathbf{P}$-2 と呼ぶ。

3) Aが$\mathbf{P}$-環, かつ、$\mathbf{P}$-2のとき、Aを$\mathbf{P}^{*}$-環という。

手続の第1歩：　次の命題1を示す。

命題1　$(A, \mathfrak{m})$, $(B, \mathfrak{n})$ を局所環，$\varphi : A \to B$ を局所準同型とする。いま，0) $\underset{\sim}{P}$ が $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{I}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{II}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{IV}}$ と $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{V}}$（または $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{V}}{}^{*}$）を満たし，1) φ は平坦かつ $\overline{\varphi} = \varphi \otimes A/\mathfrak{m} : A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$ が $\underset{\sim}{P}$-準同型，2) A が $\underset{\sim}{P}$-環なら，φ もまた $\underset{\sim}{P}$-準同型。

命題1は $\underset{\sim}{P}$ = 正則，正規，被約，Gorenstein，また A が標数0の体を含む場合は一般の $\underset{\sim}{P}$，について成り立つことが知られている。

手続の第2歩：　命題1は命題2（局所Lifting Problem）を導く。

命題2　A を半局所環，I を A のイデアルとする。いま，0) $\underset{\sim}{P}$ が $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{I}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{II}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{III}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{IV}}$ と $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{V}}{}^{*}$ を満たし，1) A が I-完備かつ A/I が永田 $\underset{\sim}{P}$-環なら，A もまた永田 $\underset{\sim}{P}$-環。

ここで，永田判定法（NC）と $\underset{\sim}{P}$-特異点解消（RPS）について復習しておこう。

永田判定法（NC）　次の性質を持つとき，$\underset{\sim}{P}$ は永田判定法（NC）を満たす，という：　環 A と $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ について，$\mathfrak{p} \in R_{\underset{\sim}{P}}(A)$ かつ $R_{\underset{\sim}{P}}(A/\mathfrak{p})$ が（空でない）開集合を含むなら，$R_{\underset{\sim}{P}}(A)$ も（閉部分集合）$V(\mathfrak{p})$ の（空でない）開集合を含む。

$\underset{\sim}{P}$-特異点解消（RPS）　整域 A が $\underset{\sim}{P}$-特異点解消（RPS）を持つとは，スキーム X と proper 双有理写像 $f : X \to$

Spec(A)で、すべての $x \in X$ について、$\mathcal{O}_{X,x}$ が $\underset{\sim}{P}$ を満たし、$f|_{f^{-1}(R_P(A))}: f^{-1}(R_P(A)) \xrightarrow{\sim} R_P(A)$ であるものが見つけられるとき、をいう。

手続の第3歩： 命題1，2，および RPS は、Rotthaus の補助定理（Appendix参照）と共に、次の（Lifting Problem にほぼ等しい）命題3を示す。

命題3．Aを環、IをAのイデアルとする。いま、0) $\underset{\sim}{P}$ が、P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V^* と、NC を満たし、1) A が I-完備かつ、A/I が永田 P^*-環 なら、Aも永田 P^*-環である。

ところで、RS（特異点解消）が、命題1を導くことは、よく知られている。故に、残された「問題」は、

問題（universally catenary，永田）局所 P-環は、いつも RPS を持つか？

なお、上述の手続により、次の定理を得る。

定理1．Aを環、IをAのイデアルとする。いま、A が I-完備かつ、A/I が 永田環で（すべての）形式ファイバーが正規なら Aの形式ファイバーもすべて正規。

定理2．Aを環、IをAのイデアルとする。いま、1) A が I-完備かつ、A/I が quasi-excellent，2) Aが標数0の体を含むなら、Aも quasi-excellent。

<u>Appendix.</u>　まず，次の記号と定義を準備する。環Aにおいて，$\mathrm{Max}(A)$ で，Aの(すべての)極大イデアルの集合を表わし，$\Gamma=\{\gamma\subset \mathrm{Max}(A)\mid \gamma$ は有限集合$\}$，$\Gamma(\gamma_0)=\{\gamma\in\Gamma\mid \gamma_0\subset\gamma\}$ ($\gamma_0\in\Gamma$ は固定)，$A_\gamma=S_\gamma^{-1}A$，ここで，$S_\gamma=A-\bigcup_{\mathfrak{m}\in\gamma}\mathfrak{m}$ (積閉集合)，とする。ところで，$x\in A$ を指定(かつ固定)し，任意のA-代数Bに対し，B^*で，BのxB-完備化を表わす。特に，$\gamma'\supset\gamma$ なら $A_\gamma^*=(S_\gamma^{-1}A_{\gamma'}^*)^*$。いま，$\mathfrak{p}_\gamma^*\in \mathrm{Spec}(A_\gamma^*)$ を各 $\gamma\in\Gamma(\gamma_0)$ に対応させるとき：

<u>定義3.</u> $\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}$ が，素イデアル列とは，任意の $\gamma,\gamma'\in\Gamma(\gamma_0)$ ($\gamma'\supset\gamma$) について，$\mathfrak{p}_{\gamma'}^*=\mathfrak{p}_\gamma^*\cap A_{\gamma'}^*$ ，をいう。

<u>定義4.</u> 素イデアル列$\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}$が"good"とは，$\gamma_1\in\Gamma(\gamma_0)$ が存在し，$\mathfrak{p}_\gamma^*=\mathfrak{p}_{\gamma'}^*A_\gamma^*$ が，任意の γ',γ ($\gamma'\supset\gamma\supset\gamma_1$) について成り立つことをいう。

また，素イデアル列$\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}$ に対し，$B_\gamma=A_\gamma^*/\mathfrak{p}_\gamma^*$，$\overline{B_\gamma}=B_\gamma$ の整閉包，と記し，次の($\mathrm{Spec}(A)$ の部分)集合を考える。

$$\Delta_\gamma(x)=\{Q=\overline{Q}\cap A\mid \overline{Q}\in \mathrm{Ass}(\overline{B_\gamma}/x\overline{B_\gamma})\},$$

$$\Delta(x)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}\Delta_\gamma(x).$$

<u>定義5.</u> $\Delta(x)$が，有限集合のとき，素イデアル列$\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}$は"bounded"，という。さらに，"good"かつ"bounded"のとき，"simple"という。

さて，

Rotthausの補助定理. Aを環とし, $x \in A$ と, $\gamma_0 \in \Gamma$ を固定する。いま, 1) AはxA-完備, 永田環, 2) $\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma(\gamma_0)}$ が"simple"素イデアル列, なら, $\mathfrak{p}_\gamma = \mathfrak{p}_\gamma^* \cap A$ $(\gamma \in \Gamma(\gamma_0))$ と定めるとき, $\gamma_2 \in \Gamma(\gamma_0)$ が存在し, 3) 各 $\gamma \in \Gamma(\gamma_2)$ について, $\mathfrak{p}_\gamma^* \in \mathrm{Ass}(A_\gamma^*/\mathfrak{p}_\gamma A_\gamma^*)$。

なお, 重要な多くの場合, 素イデアル列が"bounded"なら, 自動的に"good"である。すなわち,

命題4. Aを環とし, $x \in A$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$, および $S_{\underset{\sim}{P}}(A_\mathfrak{m}^*) = \mathrm{Spec}(A_\mathfrak{m}^*) - R_{\underset{\sim}{P}}(A_\mathfrak{m}^*)$ の極小元 $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}^*$ を固定する。各 $\gamma \in \Gamma(\{\mathfrak{m}\})$ について, $\mathfrak{p}_\gamma^* = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}^* \cap A_\gamma^*$ とおく。いま, 1) $\underset{\sim}{P}$ が $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{I}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{II}}$, $\underset{\sim}{P}_{\mathrm{III}}$ と, 局所Lifting Problem(命題2)を満たし, 2) A/xA が, 永田$\underset{\sim}{P}$-環 のとき, もし $\{\mathfrak{p}_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma(\{\mathfrak{m}\})}$ が"bounded"なら, さらに"good"。

参考文献

[N] J.NISHIMURA-T.NISHIMURA: Ideal-adic completion of noetherian rings, II, preprint.

$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ の normality, seminormality と quasinormality

江南女子短大・非常勤
谷本　洋

Aが reduced noetherian ring のとき，A上の変数Xに対して，$\mathrm{Pic}\,A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,A[X]$ をみたすとき，Aは seminormal であると言われ，$\mathrm{Pic}\,A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,A[X, X^{-1}]$ をみたすとき，Aは quasinormal であると言われる。normal $\Longrightarrow$ quasinormal $\Longrightarrow$ seminormal はよく知られている。また，いろいろな人達がこれらの性質について調べているが，具体的な環，特に，$\mathbb{Z}$ 上有限生成な環で，これらの性質が調べられたものとしては次のものが挙げられる：

(1) 有限アーベル群πによって生成された群環 $\mathbb{Z}\pi$
　(Bass - Murthy, Pedrini, Greco など)

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $d \in \mathbb{Z}$ （大石氏）

(3) 可換な monoid で生成された semigroup ring (Hochster)

ただし，(2), (3) は seminormality についてである。さて，ここでは，(2)の一般の場合である環 $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ について，それが

normal，seminormal あるいは quasinormal になる判定条件が m，n の言葉で，しかも計算しやすい形で得られたので，それについて述べる。ただし，多項式 X^n-m $(m\in\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}$ 上既約の時，$X^n-m=0$ の $\mathbb{C}$ における根のうちの一つを $\sqrt[n]{m}$ と書くことにする。また，n を $n=p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$ と因数分解しておく。なお，詳しくは，[4] を参照して下さい。

定理1. $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$: normal $\Leftrightarrow$ m : square-free かつ

$$m^{p_i}\not\equiv m \pmod{p_i^2} \text{ for all } i$$

証明. $\theta=\sqrt[n]{m}$ とおく。

Step 1. $\mathbb{Z}[\theta]$: normal $\Longrightarrow$ m : square-free

(証明) $\mathbb{Z}[\theta]\cong\mathbb{Z}[X]/(X^n-m)$ ゆえに，もし，ある素数 p について $p^2|m$ とすると，$(X,p)\in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])$ かつ $X^n-m\in(X,p)^2$ であるから，$\mathbb{Z}[\theta]_{(\theta,p)}$ は normal ではない。∎

よって，以下 m : square-free としてよい。$\theta_i=\sqrt[p_i^{e_i}]{m}$ とおく。

Step 2. $\mathbb{Z}[\theta]$: normal $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[\theta_i]$: normal for all i.

(証明) ($\Rightarrow$)は，$\mathbb{Z}[\theta]$ は $\mathbb{Z}[\theta_i]$ 上 free ゆえ明らか。($\Leftarrow$)については，$\mathbb{Z}[\theta]\cong\mathbb{Z}[X]/(X^n-m)$ と書け，$\frac{d}{dX}(X^n-m)=nX^{n-1}$ である。そこで，X^n-m を含む $P\in\mathrm{Max}(\mathbb{Z}[X])$ について，$\mathfrak{P}=P/(X^n-m)$ とおけば，

(i) $P \not\ni nX^{n-1}$ のとき，$\mathbb{Z}[\theta]_{\mathfrak{P}}$ は $\mathbb{Z}$ 上 smooth ゆえ $\mathbb{Z}[\theta]_{\mathfrak{P}}$ は normal.

(ii) $P \ni X$ のとき，$P \ni m$. よって，ある m の素因数 p について，$P = (X, p)$. m は square-free ゆえに $X^n - m \notin P^2$ だから，$\mathbb{Z}[\theta]_{\mathfrak{P}}$ は regular である。

(iii) $P \not\ni X$, $P \ni n$ のとき，$P \ni p_i$ for some i. $\ell = n/p_i^{e_i}$ とおけば，仮定より $\mathbb{Z}[\theta_i]$ は normal ゆえに，$\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta] \cong \mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta_i][Y]/(Y^\ell - \theta_i)$ と書ける。すると，$\frac{d}{dY}(Y^\ell - \theta_i) = \ell Y^{\ell-1}$ であり，$\mathfrak{P} \not\ni \ell, \theta$ ゆえに，$\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta]$ は $\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta_i]$ 上 smooth. $\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta_i]$ は normal であったから $\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta]$ も normal.

以上により，$\mathbb{Z}[\theta]$ は normal である。∎

Step 3. Step 2 より $n = p^e$ としてよい。さらに，その証明から，$\mathbb{Z}[\theta]$: normal $\Longleftrightarrow (\mathbb{Z}[X]/(X^n - m))_{\mathfrak{P}}$: normal for all $\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{P} \ni p$. このような $\mathfrak{P}$ は，$(p, X-m)/(X^n - m)$ のみであるから，結局，$\mathbb{Z}[\theta]$: normal $\Leftrightarrow \dim (p, X-m)/(p, X-m)^2 + (X^n - m) = 1$. しかも，$X - m \notin (p, X-m)^2 + (X^n - m)$ であるから，$\mathbb{Z}[\theta]$: normal $\Leftrightarrow (p, X-m) = (p, X-m)^2 + (X^n - m) + (X-m)$ $\Leftrightarrow (p, X-m) = (p^2, X-m, m^n - m) \Leftrightarrow m^n \not\equiv m \pmod{p^2}$ $\Leftrightarrow m^p \not\equiv m \pmod{p^2}$. ∎

あとの証明のために，次の２つの命題を証明なしで述べる。ただし，～は normalization を表す。

命題２． $n=p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$ で m : square-free とする。$\widetilde{\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]} = \mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}, \delta_{i1}, \cdots, \delta_{il_i}]$ for each i とすれば，$\widetilde{\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]} = \mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}, \{\delta_{ij}\}_{\substack{1\le i\le t\\ 1\le j\le l_i}}]$.

命題３．素数 p と $e\in\mathbb{N}$ について，$n=p^e$ とする。$\theta = \sqrt[n]{m}$ とおく。p^s ($s\geqq 2$) が $m^{n-1}-1$ を丁度割り切るとき，$\delta = (\sum_{i=0}^{n-1} m^{n-1-i}\theta^i)/p$ は，$\widetilde{\mathbb{Z}[\theta]}\setminus\mathbb{Z}[\theta]$ の元であり，次の性質をみたす。

(a) $e\geq 2$ のとき，$\delta^2, \delta^3\in\mathbb{Z}[\theta]$;

(b) $e=1$, p : odd 又は，$e=1, p=2, s\geq 3$ のとき，$\delta^2-\delta$, $\delta^3-\delta^2\in\mathbb{Z}[\theta]$;

(c) $e=1$, $p=2$, $s=2$ のとき，$\delta^2-\delta$, $\delta^3\in\mathbb{Z}[\theta]$.

定理４．$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$: seminormal $\Longleftrightarrow$

(1) m : square-free のとき，各 i について次のいずれかが成立：

(a) $m^{p_i}\not\equiv m \pmod{p_i^2}$;

(b) $e_i=1$;

(2) m : not square-free のとき，$n=2$, $m=ab^2$ ここに
a, b : square-free, b : odd, $(a, b)=1$.

証明．(2, 3)-closedness を調べればよい。

Case 1. m : square-free のとき．

Claim : $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$: seminormal $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]$: seminormal for all i

実際，seminormality は local な性質ゆえ，[2, 5.8. Theorem] ならびに，定理1の証明から従う。

そこで，$n=p^e$ とする。normal $\Rightarrow$ seminormal ゆえに，定理1より，$m^p \equiv m \pmod{p^2}$ と仮定してよい。$\theta=\sqrt[n]{m}$ とおく。さて，$e \geq 2$ であれば，$m^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ ゆえに，命題3より，$\delta=\left(\sum_{i=0}^{n-1} m^{n-1-i}\theta^i\right)/p$ は，$\delta \in \widetilde{\mathbb{Z}[\theta]} \setminus \mathbb{Z}[\theta]$, $\delta^2, \delta^3 \in \mathbb{Z}[\theta]$ をみたす。よって，$\mathbb{Z}[\theta]$ は not seminormal. そこで，以下，$e=1$ のときに，$\mathbb{Z}[\theta]$ が seminormal になることを示す。そのためには，定理1の証明より，$P=(p, \theta-m) \in \mathrm{Max}(\mathbb{Z}[\theta])$ に対し，$\mathbb{Z}[\theta]_P$ が seminormal になることを言えばよい。$x \in \widetilde{\mathbb{Z}[\theta]_P}$ が $x^2, x^3 \in \mathbb{Z}[\theta]_P$ をみたすとする。

Claim : $\delta=\left(\sum_{i=0}^{n-1} m^{n-1-i}\theta^i\right)/p$ とおけば，$\widetilde{\mathbb{Z}[\theta]}=\mathbb{Z}[\theta, \delta]$.

なぜなら，[3] より，アーベル群として，$[\widetilde{\mathbb{Z}[\theta]} : \mathbb{Z}[\theta]]=p$ であり，$\delta \in \widetilde{\mathbb{Z}[\theta]} \setminus \mathbb{Z}[\theta]$ ゆえ。

$\delta^2-\delta \in \mathbb{Z}[\theta]$ が命題3から分かるから，$x=\alpha+\beta\delta$ (α, $\beta \in \mathbb{Z}[\theta]_P$) と書ける。さらに，$p\delta$, $(\theta-m)\delta \in \mathbb{Z}[\theta]$ ゆえ

に，$\beta = 1$ としてよい。

(i) p：odd のとき，命題3より，$\delta^2 - \delta$，$\delta^3 - \delta^2 \in \mathbb{Z}[\theta]$. よって，$x^2, x^3 \in \mathbb{Z}[\theta]_p$ より，$(2\alpha + 1)\delta$，$(3\alpha^2 + 3\alpha + 1)\delta \in \mathbb{Z}[\theta]_p$．これより $x \in \mathbb{Z}[\theta]_p$．従って，$\mathbb{Z}[\theta]_p$：seminormal.

(ii) $p = 2$ のとき，命題3より，$\delta^2 - \delta \in \mathbb{Z}[\theta]$. ゆえに，$x^2 \in \mathbb{Z}[\theta]_p$ および $2\delta \in \mathbb{Z}[\theta]$ より，$x \in \mathbb{Z}[\theta]_p$．従って，$\mathbb{Z}[\theta]_p$：seminormal.

以上より，$\mathbb{Z}[\theta]$：seminormal．

Case 2. m：not square-free のとき．

Claim：$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：seminormal $\Rightarrow n = 2$．

実際，$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：seminormal かつ $n \geq 3$ とすれば，ある素数 p について，$p^2 | m$ だから，$x = (\sqrt[n]{m})^{n-1}/p$ は，$x \notin \mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ $x^{n-1}, x^n \in \mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ をみたす。(2, 3)-closed $\Rightarrow$ $(n-1, n)$-closed ゆえに，$x \in \mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$．矛盾．

よって，大石氏の結果に帰着される。∎

さて，[4]では，まず，柳原氏が話された Swan の p-seminormality，すなわち，Ker(Pic A[X] $\longrightarrow$ Pic A) が p-torsion を持たない，が成立するための条件を与え，その系として，上の定理を得ている。p-seminormality が成立する条件を次に証明なしで述べる。p が素数のときを考えて十分である。

定理5．素数 p に対し，$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：p-seminormal $\Longleftrightarrow$ 次の条件のいずれかが成立：

(a) $p \parallel m$；

(b) $n=2$，$p \neq 2$ かつ $p^2 \parallel m$；

(c) $n \geq 3$ かつ $(p, mn)=1$；

(d) $n \geq 3$，$(p, m)=1$，$p \mid n$ かつ $m^p \not\equiv m \pmod{p^2}$；

(e) $n \geq 3$，$(p, m)=1$ かつ $p \parallel n$；

(f) $n=2$ かつ $(p, m)=1$.

ただし，$p \parallel m$ は，m がきっかり p で割れることを表す。

定理6．$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：quasinormal $\Longleftrightarrow$

(1) m：square-free のとき，各 i について次のいずれかが成立：

(a) $m^{p_i} \not\equiv m \pmod{p_i^2}$；

(b) $p_i=2$，$e_i=1$，$m \equiv 5 \pmod 8$，$\mathrm{ord}_{n/2}(2)$：odd

（ただし，$\mathrm{ord}_{n/2}(2)$ は，$(\mathbb{Z}/(n/2))^\times$ における 2 の order を表す。便宜上，$\mathrm{ord}_1(2)=1$ とする。）

(2) m：not square-free のとき，$n=2$，$m=ab^2$ ここに a, b：square-free，$a \not\equiv 1 \pmod 8$，b：odd，$(a,b)=1$，$\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ for all $p \mid b$：prime．（$\left(\frac{a}{p}\right)$ は Legendre の記号）

証明. $\dim \mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]=1$ ゆえに, 浅沼氏の定理から, u-closedness, すなわち, $x\in\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ が $x^2-x, x^3-x^2\in\mathbb{Z}[\theta]$ をみたせば $x\in\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$, かどうかを調べればよい。ただし, quasinormality については, $n=p^e$ のときに帰着することはできない。$\theta=\sqrt[n]{m}$ とおく。

Case 1. m : square-free のとき。$\mathbb{Z}[\theta]$ は $\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]$ 上 free ゆえに, $\mathbb{Z}[\theta]$: quasinormal $\Longrightarrow$ $\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]$: quasinormal for all i. normal $\Rightarrow$ quasinormal $\Longrightarrow$ seminormal ゆえに, 定理1, 定理4より, ある i について, $e_i=1$ かつ $m^{p_i}\equiv m \pmod{p_i^2}$ とする。今, p_i : odd 又は, $p_i=2$, $m\equiv 1 \pmod 8$ とすれば, 命題3より, $\delta^2-\delta, \delta^3-\delta^2\in\mathbb{Z}[\sqrt[p_i]{m}]$, $\delta\in\overline{\mathbb{Z}[\sqrt[p_i]{m}]}\setminus\mathbb{Z}[\sqrt[p_i]{m}]$ であるような元 δ が存在するから, $\mathbb{Z}[\sqrt[p_i]{m}]$ は not quasinormal. 従って, $n=2p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$, 各 p_i は odd, $m\equiv 5 \pmod 8$ かつ $m^{p_i}\not\equiv m \pmod{p_i^2}$ for all i の条件のもとで, $\mathbb{Z}[\theta]$ が quasinormal になる条件を求めればよい。

さて, 命題2より, $\delta=(m+\sqrt{m})/2$ とおけば, $\overline{\mathbb{Z}[\theta]}=\mathbb{Z}[\theta,\delta]$. 更に, 命題3より, $\delta^2-\delta\in\mathbb{Z}[\theta]$ ゆえに, $\overline{\mathbb{Z}[\theta]}$ の任意の元 x は, $x=\alpha+\beta\delta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[\theta])$ と書ける。以下, $x^2-x, x^3-x^2\in\mathbb{Z}[\theta]$ となる条件を求める。$2\delta\in\mathbb{Z}[\theta]$, さらに, 命題3より, $\delta^3, \delta^2-\delta\in\mathbb{Z}[\theta]$ ゆえに,

$$x^2-x, x^3-x^2\in\mathbb{Z}[\theta] \Leftrightarrow (\beta^2-\beta)\delta, (3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^2)\delta\in\mathbb{Z}[\theta]$$

$\Longleftrightarrow\ (\beta^2+\beta)\delta,\ \beta(\alpha^2+\alpha+1)\delta\in\mathbb{Z}[\theta]$. さて,

Claim: $a\in\mathbb{Z}[\theta]$ について, $a\delta\in\mathbb{Z}[\theta]\Longleftrightarrow a\equiv 0 \mod (2,\ \theta^r-1)$, ここに, $r=n/2$.

従って, $\mathbb{Z}[\theta]$: not quasinormal $\Longleftrightarrow \exists f, g\in\mathbb{F}_2[X]$ について, $f^2+f,\ f(g^2+g+1)\in(X^r-1)\mathbb{F}_2[X]$, $f\notin(X^r-1)\mathbb{F}_2[X]$.

さて, $\mathbb{F}_2$ 上有限次代数拡大体Kに対し,

Claim: K 内で方程式 $Y^2+Y+1=0$ が解ける $\Longleftrightarrow$ $[K:\mathbb{F}_2]$: even.

そこで, $X^r-1=F_1(X)\cdots F_\ell(X)$ (各 $F_i(X)\in\mathbb{F}_2[X]$ は, 既約) とすれば, $F_1,\cdots,F_\ell$ は互いに素であり, $K_i=\mathbb{F}_2[X]/(F_i)$ とすれば, $\mathbb{F}_2[X]/(X^r-1)\cong\prod_{i=1}^{\ell}K_i$ であるから,

$\mathbb{Z}[\theta]$: not quasinormal $\Leftrightarrow$ $X^r-1=0$ の $\mathbb{F}_2$ 上最小分解体 Kに対し, $[K:\mathbb{F}_2]$: even $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ord}_r(2)$: even.

よって, m: square-free のときは示された。

Case 2. m: not square-free のとき. 定理4より, $n=2$, $m=ab^2$, a, b: square-free, $(a,b)=1$, b: odd としてよい。さて,

Claim: $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$: quasinormal $\Rightarrow a\not\equiv 1 \pmod 8$.

実際, $a\equiv 1 \pmod 8$ とすれば, $x=(m+\sqrt{m})/2$ は, $x\in\widetilde{\mathbb{Z}[\sqrt{m}]}\setminus\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, $x^2-x,\ x^3-x^2\in\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ をみたすから, $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ は, not quasinormal.

従って，$a \not\equiv 1 \pmod 8$ としてよい。このとき，Case 1 より $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ は quasinormal．そこで，$x \in \widetilde{\mathbb{Z}[\sqrt{m}]}$ が x^2-x，$x^3-x^2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ をみたせば，$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{a}] \subseteq \widetilde{\mathbb{Z}[\sqrt{m}]}$ ゆえに $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$．よって，$x = \alpha + \beta\sqrt{a}$（$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$）と書ける。$x^2-x$，$x^3-x^2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ より，$2\alpha\beta-\beta$，$3\alpha^2\beta+\beta^3a-2\alpha\beta \in b\mathbb{Z}$．従って，

$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$: not quasinormal

$\Leftrightarrow\ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ s.t. $b \nmid \beta$，$\beta(2\alpha-1)$，$\beta(3\alpha^2+\beta^2a-2\alpha) \in b\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, \alpha,\ \beta' \in \mathbb{Z},\ \exists\, b' \mid b \text{ s.t. } b' \neq 1,\ (b', y') = 1, \\ 2\alpha-1,\ 3\alpha^2+\beta'^2(b/b')^2a-2\alpha \in b'\mathbb{Z}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ \exists\, \beta' \in \mathbb{Z}$，$\exists\, b' \mid b$ s.t. $b' \neq 1$，$(2\beta' b/b')^2 a \equiv 1 \pmod{b'}$.

よって，$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$: quasinormal $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{p}\right) = -1$ for $\forall p \mid b$: prime. ∎

さて，[1] に，Ferrand の例として，quasinormality が etale extension によって保たれないものが構成されている。これは，標数 0 の体を含む 1 次元局所環である。しかし，定理 6 を使えば，体を含まない場合ではあるが，このような例は，容易に，いくつでも作れる。例えば，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt{13}]$ は quasinormal で，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt[6]{13}]$ は $\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt{13}]$ 上 etale であるが，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt[6]{13}]$ は，not quasinormal．さらに，この例は，$\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$，$\mathbb{Z}[\sqrt[3]{13}]$: quasinormal であるが，$\mathbb{Z}[\sqrt[6]{13}]$ は，quasinormal

にはならない例でもある。

参考文献

[1] S. Greco, Seminormality and quasinormality of group rings, J. Pure Appl. Algebra 18 (1980) 129-142.

[2] S. Greco and C. Traverso, On seminormal schemes, Compositio Mathematica 40 (1980) 325-365.

[3] 小林新樹, $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})$ の整数底について, 数学, 24巻1号 (1972) 54-55.

[4] H. Tanimoto, Normality, seminormality and quasinormality of $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$, in preparation.

On a Conjecture of Nakai

広大・学校教育　　石橋康徳

kを標数0の体とし，Rをk-algebraとする。R/kのdifferential operator D of order $\leqq q$は次のように帰納的に定義される。

DはRからR自身へのk-linear mapで，$\forall a \in R$に対して，$[D, a] = Da - aD$はdifferential operator of order $\leqq q-1$である。ただし，differential operator of order 0はRの元によるhomothetyである。

R/kのdifferential operators of order $\leqq q$の集合を$\mathrm{Diff}_k^q(R)$と表し，$\mathrm{Diff}_k(R) = \bigcup_{q=0}^{\infty} \mathrm{Diff}_k^q(R)$とおく。$\mathrm{Diff}_k^q(R)$は$R$-moduleで，$\mathrm{Diff}_k(R)$は$R$-algebraである。$R/k$のderivationsのなす$R$-moduleを$\mathrm{Der}_k(R)$と表し，$\mathrm{Der}_k(R)$によって生成される$\mathrm{Diff}_k(R)$のsub-algebraを$\mathrm{diff}_k(R)$と表す。$R$が正則局所環ならば，$\mathrm{Diff}_k(R) = \mathrm{diff}_k(R)$が成り立つ([1], (16.11.2))。中井の予想はこの逆を問題にする。

局所環Rが$\mathrm{Diff}_k(R)=\mathrm{diff}_k(R)$をみたすならば，$R$は正則である？

この問題については殆んど何も分っていないのが現状で，僅かに[3]，[7]において部分的な結果が得られているのみである。この小論の目的は，多項式環および正則局所環の有限群による不変部分環については予想が正しいことを証明することである。

§1. 準備

この節では，体kの標数は任意とする。k-algebra Rに有限群Gが作用しているとし，その不変部分環をR^Gと表す。Gのkへの作用は自明とする。このとき，Gは次のように$\mathrm{Diff}_k^q(R)$に作用する。

$$D^\sigma=\sigma^{-1}D\sigma,\ D\in\mathrm{Diff}_k^q(R),\ \sigma\in G.$$

$\mathrm{Diff}_k^q(R)^G$によって，R/kの invariant differential operators of order $\leqq q$ のなす R^G-module を表す。

補題1.1. k'をkの拡大体とすると，Gの作用は自然に$R'=R\otimes_k k'$および$\mathrm{Diff}_{k'}^q(R')$に拡張され，次が成り立つ。

$R'^G=R^G\otimes_k k'$，$\mathrm{Diff}_{k'}^q(R'^G)=\mathrm{Diff}_k^q(R^G)\otimes_k k'$，$\mathrm{Diff}_{k'}^q(R')^G=\mathrm{Diff}_k^q(R)^G\otimes_k k'$。

制限写像は R^G-module の準同型：$\mathrm{Diff}_k^q(R)^G \to \mathrm{Diff}_k^q(R^G)$ を与える。

定理 1.2. 有限群 G が k-algebra R に作用しているとし，G の k への作用は自明とする。$X = \mathrm{Spec}(R)$ の閉集合 Z で，次の 2 条件をみたすものが存在すると仮定する。

(1) $\mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} \geq 2$，$\forall \mathfrak{p} \in Z$

(2) 自然な射 $f : X \to Y = \mathrm{Spec}(R^G)$ は Z の外側では etale である。

このとき，$\mathrm{Diff}_k^q(R)^G \cong \mathrm{Diff}_k^q(R^G)$.

証明. 層の自然な準同型：$f^*\Omega^q_{Y/k} \to \Omega^q_{X/k}$ を考える (cf. [8], Chap. II, §3)。ここに，$\Omega^q_{X/k}$ は X/k 上の q-th order differentials の層を表す。dual をとって，準同型：$(\Omega^q_{X/k})^\vee \to (f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee$ を得る。条件 (1) によって，$\mathrm{depth}_Z(\Omega^q_{X/k})^\vee$，$\mathrm{depth}_Z(f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee \geq 2$ となる ([13], Lemma 1)。したがって，

$$H^0(X-Z, (\Omega^q_{X/k})^\vee) \cong H^0(X, (\Omega^q_{X/k})^\vee),$$

$$H^0(X-Z, (f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee) \cong H^0(X, (f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee)$$

([2], Theorem 3.8)。一方，条件 (2) と [9] により

$$(\Omega^q_{X/k})^\vee | X-Z \cong (f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee | X-Z.$$

したがって，

$$H^0(X, (\Omega^q_{X/k})^\vee) \cong H^0(X, (f^*\Omega^q_{Y/k})^\vee).$$

これから容易に，$\mathrm{Diff}^q_k(R)^G \cong \mathrm{Diff}^q_k(R^G)$。 Q.E.D.

系 1.3. k，R，G は定理 1.2 におけるものとする。$X = \mathrm{Spec}(R)$ の閉集合 Z で，次の 2 条件をみたすものが存在すると仮定する。

(1) $\mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} \geqq 2$，$\forall \mathfrak{p} \in Z$

(2) $\forall \mathfrak{p} \in X - Z$ に対して，$\mathfrak{p}$ の慣性群は単位群である。

このとき，$\mathrm{Diff}^q_k(R)^G \cong \mathrm{Diff}^q_k(R^G)$。

証明. 条件 (2) により，射 $f: X \to Y = \mathrm{Spec}(R^G)$ は Z の外側で etale である（[11]，Chap. X，Théorème 1）。定理 1.2 を適用すればよい。 Q.E.D.

§2. 多項式環の不変部分環

今後，体 k の標数は 0 とする。$R = k[x_1, \cdots, x_n]$ を k 上の多項式環とし，G を $GL(n, k)$ の有限部分群とする。G は R の linear forms に作用し，したがって，R の自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ の部分群と考えられる。$\sigma \in GL(n, k)$ が pseudo-reflection であるとは，σ が位数有限で，$\mathrm{rank}(\sigma - I) \leqq 1$

をみたすときをいう。ここに，Iは単位行列を表す。Gが単位元以外に pseudo-reflection を含まないとき，Gは pseudo-reflections を含まないという。

補題2.1. 有限群 $G \subset GL(n, k)$ が $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ に自然に作用しているとする。Gが pseudo-reflections を含まないならば，$\mathrm{Diff}_k^g(R)^G \cong \mathrm{Diff}_k^g(R^G)$。

証明. $n=1$ あるいは $G=\{I\}$のときには明らかに成り立つ。$n \geqq 2$, $G \neq \{I\}$ とする。$\sigma (\neq I) \in G$ とする。補題1.1.によって，kは代数閉体としてよい。変数の適当な正則線形変換によって，σ は対角行列 $\mathrm{diag}\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$ と仮定できる。Gは pseudo-reflections を含まないので，ζ_1, $\zeta_2 \neq 1$ としてよい。$X = \mathrm{Spec}(R)$, $X_\sigma = \{\mathfrak{p} \in X \mid \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\}$ とおく。$\zeta_1, \zeta_2 \neq 1$であるから，

$$(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) \in X_\sigma \iff a_1 = a_2 = 0.$$

したがって，$\mathrm{codim}_X \overline{X}_\sigma \geqq 2$。ここに，$X$の閉集合$Y$に対して，$\overline{Y}$で$Y$に含まれる極大イデアルの集合を表す。$k$は代数閉体であるから，$\overline{Y}$は$Y$で稠密である。したがって，$\mathrm{codim}_X X_\sigma \geqq 2$。このことから，$Z = \bigcup_{\sigma(\neq I) \in G} X_\sigma$は$X$の閉集合で，$\mathrm{codim}_X Z \geqq 2$となる。$Z$の定義により，$\forall \mathfrak{p} \in$

$X-Z$ に対して $\mathfrak{p}$ の分解群は単位群となる。したがって，$\mathfrak{p}$ の慣性群は単位群である。一方，$\operatorname{codim}_X Z \geqq 2$ であるから，$\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geqq 2$，$\forall \mathfrak{p} \in Z$．系 1.3 を適用すればよい。Q.E.D.

補題 2.2. G は $GL(n, k)$ の位数 g の有限部分群とする。G が $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ に自然に作用するならば，$\Delta \in \operatorname{Diff}_k^g(R)^G$ で $\Delta(x_1^g) = 1$ となるものが存在する。

証明. $\sigma = (a_{ij}(\sigma)) \in G$，$G = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_g\}$ とする。各 σ_j は正則行列であるから，$\forall j\ (1 \leqq j \leqq g)$ に対して，$a_{i_j 1}(\sigma_j) \neq 0$ となるような i_j が存在する。したがって，

$$\left(\sum_{i_1=1}^n c_{i_1} a_{i_1 1}(\sigma_1)\right) \cdots \left(\sum_{i_g=1}^n c_{i_g} a_{i_g 1}(\sigma_g)\right) \neq 0$$

となるような $c_1, \cdots, c_n \in k$ が存在する。R 上の derivation $D = \sum_{i=1}^n c_i \partial/\partial x_i$ を考える。$\Delta = \prod_{\sigma \in G} D^\sigma$ とおくと，$\Delta \in \operatorname{Diff}_k^g(R)^G$ である。ところで，

$$D^\sigma = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_i a_{ij}(\sigma)\right) \partial/\partial x_j$$

であるから，Δ における $\partial^g/\partial x_1^g$ の係数は

$$c = \left(\sum_{i_1=1}^n c_{i_1} a_{i_1 1}(\sigma_1)\right) \cdots \left(\sum_{i_g=1}^n c_{i_g} a_{i_g 1}(\sigma_g)\right) \neq 0$$

となる。$c^{-1}\Delta$ が求めるものである。 Q.E.D.

有限群 $G \subset GL(n, k)$ が $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ に作用してい

るとし，$\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_n)\cap R^G$とおく。$\mathrm{Diff}_k((R^G)_\mathfrak{m})=\mathrm{diff}_k((R^G)_\mathfrak{m})$ は $\mathrm{Diff}_k(R^G)=\mathrm{diff}_k(R^G)$ と同値であるから (cf. [3])，$(R^G)_\mathfrak{m}$ に対する中井の予想は次の命題と同値になる。

$\mathrm{Diff}_k(R^G)=\mathrm{diff}_k(R^G)$ ならば，R^G は多項式環である。

定理 2.3. 有限群 $G\subset GL(n,k)$ が $R=k[x_1,\cdots,x_n]$ に自然に作用しているとする。このとき，$\mathrm{Diff}_k(R^G)=\mathrm{diff}_k(R^G)$ ならば，R^G は多項式環である。

証明. 補題 1.1. によって，kは代数閉体と仮定してよい。Hを Gに含まれるすべての pseudo-reflections によって生成される部分群とする。HはGで正規で，R^H は多項式環である ([14], Théorème 1)。$R^G=(R^H)^{G/H}$ であるから，G は pseudo-reflectionsを含まないと仮定してよい。$G\neq\{I\}$ で，Gの位数を g とする。$\sigma(\neq I)\in G$とする。変数の適当な正則線形変換によって，σ は対角行列 $\mathrm{diag}\{\zeta_1,\cdots,\zeta_n\}$，$\zeta_1\neq 1$，と仮定できる。$D=\sum_{i=1}^n c_i\partial/\partial x_i\ (c_i\in R)$ をR上の derivation とする。$D^\sigma=\sum_{i=1}^n \sigma^{-1}(c_i)\zeta_i\partial/\partial x_i$ で $\zeta_1\neq 1$ であるから，$D^\sigma=D$より c_1 は定数項を含まない多項式であることが分る。ところで，Gは pseudo-reflections を

含まないので，補題2.1により R^G の derivation はすべて次の形の R の derivation：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,\partial/\partial x_i,\quad c_1 \text{ は定数項を含まない}$$

の制限として得られる。したがって，$\mathrm{diff}_k(R^G)$ に属する R^G の differential operator of order $\leqq g$ はすべて次の形の R の G－invariant differential operator of order $\leqq g$：

$$c\,\partial^g/\partial x_1^g + \cdots,\quad c \text{ は定数項を含まない}$$

の制限として得られる。一方，補題2.2によって，$\Delta \in \mathrm{Diff}_k^g(R)^G$ で $\Delta(x_1^g)=1$ となるものが存在する。$\mathrm{Diff}_k^g(R)^G \cong \mathrm{Diff}_k^g(R^G)$ であるから，$\Delta \mid R^G \notin \mathrm{diff}_k(R^G)$。 これは仮定に反する。∴ $G=\{I\}$ となり，結論を得る。Q.E.D.

§3．正則局所環の不変部分環

この節の目的は正則局所環の不変部分環については中井の予想が正しいことを示すことである。ここでは結果のみを述べることにする。証明の idea は多項式環の不変部分環の場合と本質的に同じである。詳細については [4] を参照して頂きたい。

この節では R は標数 0 の体 k を含む局所環とする。R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ で表す。R は必ずしも幾何学的局所環ではない。G は Aut(R) の有限部分群で，次の条件 (C) をみたすも

のとする。

(C)　G の元によって引き起こされる $R/\mathfrak{m}$ の自己同型はすべて恒等変換である。

このときには，自然な群準同型 $\lambda: G \to GL(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ が存在する。$\sigma \in G$ は $\mathrm{rank}(\lambda(\sigma)-I) \leqq 1$ をみたすとき，pseudo-reflection といわれる。I は $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の恒等変換である。単位元以外に pseudo-reflection を含まないとき，G は pseudo-reflections を含まないという。

補題 3.1.　$(R, \mathfrak{m})$ は体 k を含む正則局所環で，G は条件(C)をみたす $\mathrm{Aut}(R)$ の有限部分群とする。このとき，G が pseudo-reflections を含まないならば，$\mathrm{Diff}_k^q(R)^G \cong \mathrm{Diff}_k^q(R^G)$。

$(R, \mathfrak{m})$ は体を含む n 次元の正則局所環とする。$\hat{R}$ を R の完備化とし，R の準係数体 k_0 を含む $\hat{R}$ の係数体を K とする(cf. [6])。$t_1, \cdots, t_n$ を R の正則巴系とすると，$\hat{R} = K[[t_1, \cdots, t_n]]$ で，$\mathrm{Der}_K(\hat{R})$ は $\partial/\partial t_1, \cdots, \partial/\partial t_n$ を base とする free $\hat{R}$-module である。このとき，次の条件は同値である。

(1)　$\partial/\partial t_i \in \mathrm{Der}_{k_0}(R)$，$1 \leq i \leq n$

(2)　$\mathrm{Der}_{k_0}(R)$ は free R-module of rank n である（[6], Theorem 99）。正則局所環 $(R, \mathfrak{m})$ がこれらの同値な条件をみたすとき，$\mathfrak{m}$ で (WJ) が成り立つという (cf. [6])。

補題 3.2.（$R, \mathfrak{m}$）は体 k を含む正則局所環で，$\mathfrak{m}$ で (WJ) が成り立つとする。G を $\mathrm{Aut}(R)$ の有限部分群で，条件 (C) をみたすものとする。このとき，$\forall t \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ に対して $\Delta \in \mathrm{Diff}_k^g(R)^G$ で $\Delta(t^g)$ が R の単元になるものが存在する。g は G の位数である。

定理 3.3.　$R, \mathfrak{m}, G$ は補題 3.2 におけるものとする。このとき，$\mathrm{Diff}_k(R^G) = \mathrm{diff}_k(R^G)$ ならば，R^G は正則である。

系 3.4 (cf. [10]).（$R, \mathfrak{m}$）は体 k 上の正則な幾何学的局所環で，G は条件 (C) をみたす $\mathrm{Aut}(R)$ の有限部分群とする。このとき，$\mathrm{Der}_k(R^G)$ が free R^G-module ならば，R^G は正則である。

参考文献

[1] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique IV, Publ. Math. I.H.E.S. 32 (1967).

[2] A. Grothendieck, Local Cohomology, Lecture Notes in Math. No. 41, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.

[3] Y. Ishibashi, Remarks on a conjecture of Nakai, J. Algebra, in press.

[4] Y. Ishibashi, Nakai's conjecture for invariant subrings, submitted.

[5] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math. 87 (1965), 874-898.

[6] H. Matsumura, Commutative Algebra, 2nd Ed. Benjamin, 1980.

[7] K. R. Mount and O. E. Villamayor, On a conjecture of Y. Nakai, Osaka J. Math. 10 (1973), 325-327.

[8] Y. Nakai, High order derivations I, Osaka J. Math. 7 (1970), 1-27.

[9] Y. Nakai and Y. Ishibashi, Extensions of high order derivations, in preparation.

[10] E. Platte, Differentielle Eigenschaften der

Invarianten regulärer Algebren, J. Algebra 62 (1980), 1 - 12.

[11] M. Raynaud, Anneaux Locaux Henséliens, Lecture Notes in Math. No. 169, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1970.

[12] C. J. Rego, Remarks on differential operators on algebraic varieties, Osaka J. Math. 14 (1977), 481 - 486.

[13] M. Schlessinger, Rigidty of quotient singularities, Invent. Math. 14 (1971), 17 - 26.

[14] J. P. Serre, Groupes finis d'automophismes d'anneaux locaux régulieres, Colloq. d'Alg. E.N.S. (1967).

Weakly normal ring の内在的定義について

兵庫教育大学　　柳 原 弘 志

よく知られているように、通常可換環Aがseminormalであるというのは、Aがその整閉被$\overline{A}$において、seminormalであるということにより定義される。これに対し、R．Swan は "On seminormality"(J．Alg. Vol. 67) において、次のようなseminormalityの内在的定義を与えている。

定義　可換環Aが次の条件を満たすとき、Aはseminormalであるという。
(1) Aはreduced.
(2) Aの任意の2元 b,c で $b^3=c^2$ を満たすものがあれば、Aの元で a
$a^2=b$, $a^3=c$ となるものが存在する。

この定義は、明らかに seminormaityに関する Hamann criterion に由来している。一方、S．Itoh により Weak normality に関するHamann criterion に類似の結果が与えられている。従って極く自然に、このSwanの定義に対応する Weak normality の内在的定義を与え得るかどうかということが問題になるであろう。

この小文ではSwanによるseminormalityに関する結果が、weak normality についても殆ど同様に得られることの概要を示す。以下、A,B etc. は 1 を含む可換環で、$A\subset B$ は環の拡大を意味するものとする。

定義1．$A\subset B$ が次の条件を満たすとき、BはA上 weakly sub-integral であるという。
(1) $B\supset A$；整拡大。
(2) Spec(B) → Spec(A)；全単射。
(3) Spec(B)の任意の元Qに対し、$k(A\cap Q)\subset k(Q)$ は純非分離拡大である。ただし、環Aの素イデアルPに対し、AのPによる局所化の極大イデアルによる剰余類体をk(P)であらわす。

定義2．　$B \supset A$ が次の条件を満たすとき、AはBでweakly normal であるという。また、$B \supset A$ は weakly normal であるともいう。

AとBの中間環Cで、$C \supset A$ が weakly subintegral となるものはA以外に存在しない。

補題3．　任意の拡大 $A \subset B$ に対し A上 weakly normal となる最大のAとBの中間環Cが存在する。

定義4．　補題3のCを $^{*}_{B}A$ とかき、AのBにおける weak normalization という。

補題5．　$A \subset B$ とし、ある素数 p と B の元 b が存在して、b^p, pb が共にAに含まれるなら、$A[b]$ は A 上 weakly subintegral である。

定義6．　補題5の形の拡大を elementary weakly subintegral な拡大という。

補題7．　$A \subsetneq B$ が weakly subintegral な拡大で、かつAがBで seminormal ならば、ある素数 p と B の元 b 存在して、$b^p, pb \in A$ で $b \notin A$ となるものが存在する。

補題5と補題7を用いることにより、次のS．Itohによる weakly normal extension に関する Hamann criterion の類似の一つの証明が得られる。

定理8．　$A \subset B$ に対して、次は同値である。

(1)　A は B で weakly normal である。

(2)　(イ)　Bの元bが b^2, b^3 A を満たすなら $b \in A$。

　　(ロ)　Bの元bがある素数pにたいし、$b^p, pb \in A$ を満たすなら $b \in A$。

定理９． $A \subset B$ に対し、ＡのＢにおける weak normalization ${}^{*}_{B}A$ はＡから有限回の elementary subintegral extension または elementary weakly subintegral extension で得られるＢの部分環の filtered union である。

命題１０． weakly normalization ${}^{*}_{B}A$ の構成とＡの積閉集合による局所化とは交換可能である。

系１１． $A \subset B$ に対し、次の（１），（２）が成り立つ。

（１） $A \subset B$ は weakly normal （または、weakly subintegral） ならば、Ａの任意の積閉集合Ｓに対し、$A_S \subset B_S$ は weakly normal （または、weakly subintegral）。

（２） Ａが weakly normal （または、weakly subintegral） であるための必要十分条件は、Ａの任意の極大イデアルmに対し $A_m \subset B_m$ が weakly normal （または、weakly subintegral） となることである。

定義１２． Ａが次の条件を満たすとき weakly normal であるという。

（１） Ａ は reduced。

（２） $b^3 = c^2$ を満たすＡの元 b,c に対し、$a^2 = b$, $a^3 = c$ となるＡの元 a が存在する。

（３） ある素数 p と Ａ の非零因子 d に対し、$c^p = bd^p$, $pc = de$ を満たす Ａ の元 b,c,e があれば、$b = a^p$, $e = pa$ となる Ａ の元 a が存在する。

補題１３． Ａ において、ある素数 p に対し $x^p = y^p$, $px = py$ ならば、$(x-y)^p = 0$。

系１４． Ａ が weakly normal であるための必要十分条件は次の（１），（２）を満たすことである。

（１） $b^3 = c^2$ となる Ａ の元 b,c に対し、$a^2 = b, a^3 = c$ となる Ａ の元 a が唯一つ存在する。

（２） ある素数 p と Ａ の非零因子 d に対し、$c^p = bd^p$, $pc = de$ を

満たす　A　の元　b,c,e　に対し、$b=a^p$, $e=ap$　となる　A　の元　a　が唯一つ存在する。

系１５．　$A=\varprojlim A_\alpha$　とし、各　$f_\alpha:A\to A_\alpha$ により、Aの非零因子はA_α の非零因子に対応するものとする。このとき、すべてのA_α が weakly　normal　なら、Aも　weakly　normal　である。

系１６．　$A=\Pi A_\alpha$ で、各A_α が　weakly　normal　なら　A　も weakly　normal　である。

系１７．　B　は　A　と　A　の全商環　Q(A)　の中間環で、かつ weakly　normal　なものとする。このとき、A　が　weakly　normal　となるための必要十分条件は　A　が　B　で　weakly　normal　となることである。

注意１８．　(1)　系１７で　$B\subset Q(A)$　なる条件は省けない。
(2)　A　は　reduced　で、Q(A)　が体の直和とする。このとき、A　が weakly　normal　であるための必要十分条件は　A　が　Q(A)　で　weakly normal　となることである。
(3)　F_α が体のとき、$A=\Pi F_\alpha$ は　weakly　normal　である。従って　A が　reduced　で、Q(A)　が体の直和のとき、A　が　weakly　normal　となるための必要十分条件は　A　が　Q(A)　で　weakly　normal　となることである。

命題１９．　(1)　A　weakly　normal　で、S　が零因子を含まぬ　A　の積閉集合なら、A_S は　weakly　normal　である。
(2)　A　の任意の極大イデアル　m　に対し、A_m が　weakly　normal　なら、A　も　weakly　normal　である。

この命題１９を証明するためには、次の補題が必要である。

補題２０．　A　が　reduced　であれば、A　は　ΠA_m (m　は　A　の極大イデアルすべてを動く)で　weakly　normal　である。

2次元局所環について

広島大・理　伊藤 史朗

Aを解析的不分岐な局所整域でdをその次元とする。Aの任意のイデアルIに対し自然数lを適当にとれば$(I^m)^{\sim} \subseteq I^{m-l}$, $\forall m \geq l$, となることが知られている(Rees)。ところで Lipman-Teissier によると, Aが pseudo-rational であればこのlはイデアルIによらず$d-1$にとれる。そこで次のような量を考えてみる。ただし以後Aの剰余体は無限体, 又, Aの weighted sop とはAの sop $x_1, \cdots, x_d$と自然数$n_1, \cdots, n_d$の組$\mathbb{F} = (x_1, \cdots, x_d; n_1, \cdots, n_d)$のことであって$\mathcal{R}(\mathbb{F}) = A[x_1 t^{n_1}, \cdots, x_d t^{n_d}, t^{-1}]$, $\mathcal{R}(\mathbb{F})^{\sim} = \mathcal{R}(\mathbb{F})$の$A[t, t^{-1}]$での整閉包, $\rho(\mathbb{F}) = \min\{j \mid t^{-j}\mathcal{R}(\mathbb{F})^{\sim} \subseteq \mathcal{R}(\mathbb{F})\}$, $w(\mathbb{F}) = \sum n_i$, $(\mathbb{F}) = (x_1, \cdots, x_d)A$, $GCD(\mathbb{F}) = GCD(n_1, \cdots, n_d)$である。

さてAの maximal ideal $\mathfrak{m}$の minimal reduction $\mathfrak{q}$に対し

$$\rho(\mathfrak{q}) = \sup\left\{ \rho(\mathbb{F}) - w(\mathbb{F}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{F} \text{ は weighted sop で} \\ (\mathbb{F}) = \mathfrak{q},\ GCD(\mathbb{F}) = 1 \end{array} \right\}$$

とおく。　この $\rho(\mathfrak{q})$ を考察の対象とする。　[1]の証明の weighted version を実行することにより A が pseudo-rational であれば $\rho(\mathfrak{q})<0$ となる。　そこで $\rho(\mathfrak{q})<0$（又は $\rho(\mathfrak{q})=0$）となる minimal reduction $\mathfrak{q}$ が存在するような局所環 A について調べてみたい。　ここでは、次元2，重複度2の局所環で上の条件を満たすものを分類する。

以後 k は閉体で $\mathrm{char}(k)\neq 2, 3, 5$，$A$ は k 上の巾級数環の剰余環で $\dim A=2$，重複度 2，Cohen-Macaulay と仮定しておく。

命題　(1) $\rho(\mathfrak{q})<0$ なる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ の存在する必要十分条件は　A が regular　であるか　$A\cong k[[x,y,z]]/(f)$，　ここで f は次のいずれか：

A_n　　$f=z^2+y^2+x^{n+1}$　　$1\leqslant n\leqslant\infty$

D_n　　$f=z^2+x(y^2+x^{n-2})$　　$4\leqslant n\leqslant\infty$

E_6　　$f=z^2+y^3+x^4$

E_7　　$f=z^2+y^3+yx^3$

E_8　　$f=z^2+y^3+x^5$

(2) $\rho(\mathfrak{q})=0$　となる $\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{q}$ の存在する必要十分条件は　$A\cong k[[x,y,z]]/(f)$，　ここで f

は次のいづれか：

(a) $f=z^2+(y+a_1x^2)(y+a_2x^2)(y+a_3x^2)+$ terms in x, y of weight >6，ここで weight$(x)=1$, weight$(y)=2$，$a_i\in k$，a_iのうち少くとも2つは異なる。

(b) $f=z^2+f_4+$ terms in x, y of degree >4，ここで f_4 は x, y の4次の斉次式で3重根をもたない。

以下証明の概略を述べる。必要性については：

まず、$A\cong k[[x,y,z]]/z^2+f(x,y)$，$\mathfrak{q}=(x,y)A$，$f\in(x,y)^2k[[x,y]]$ と表わせることが簡単に分かる。このとき weighted sop $\mathbb{F}=(x,y;n_1,n_2)$ に対し，

$$f=\tilde{f}t^{-n}\ ,\ \tilde{f}\in S-t^{-1}S$$

$$\text{ただし}\quad S=k[[x,y]][xt^{n_1}, yt^{n_2}, t^{-1}]$$

とおくと，

補題 $\rho(\mathbb{F})=[n/2]$

となる。従って (1) であれば $[n/2]<n_1+n_2$，(2) であれば $[n/2]\leqslant n_1+n_2$ でなければいけない。この事実

を何度かくり返し使用することによって，$\rho(\mathfrak{q})<0$ ならば $k[[x,y]]$ の適当な変数変換で f は (1) にあげた式のいづれかに変換される。 たとえば、$\mathrm{ord}(f)\geqq 4$ であれば $\rho((x,y;1,1))\geqq[4/2]=2\geqq 1+1$ で矛盾となるので $\mathrm{ord}(f)=2$ 又は 3。 $\mathrm{ord}(f)=3$ で f の initial form f_3 が3重根をもつときは $f_3=y^3$ であるとしてよい。 このときは f に x^4, yx^3, x^5 のいづれかが現われる。 もしそうでなければ $\rho((x,y;1,2))\geqq[6/2]=3\geqq 1+2$ で矛盾となる。等々 ---。 同様に（(1) の十分性を仮定しておくと）$\rho(\mathfrak{q})=0$ ならば $k[[x,y]]$ の適当な変数変換で f は (2) にあげた式のいづれかに変換される。

十分性について：

$\mathfrak{q}=(x,y)A$ とおいて $\rho(\mathfrak{q})<0$ 又は $\rho(\mathfrak{q})\leqq 0$ を証明する。 ところで今考えている状況においては次の補題が成立する。

補題 $\rho(\mathfrak{q})=\sup\{\rho(\mathbb{F})-w(\mathbb{F}) \mid \mathbb{F}=(\tilde{x},\tilde{y};n_1,n_2),$
$\tilde{x},\tilde{y}\in k[[x,y]],\ (\mathbb{F})=\mathfrak{q},\ GCD(\mathbb{F})=1\}.$

この補題と前の補題とを用いて命題に現われる各々の場合について $\rho(\mathfrak{q})$ の計算を実行することにより十分性が示される。

たとえば (2)-(3) については次のようにする： まず f を $f=y^3+\beta yx^4+\gamma x^6+(\mathrm{weight}>6)$ ($\beta\neq 0$ 又は $\gamma\neq 0$) と変形しておく。 $x=a\tilde{x}+b\tilde{y}$, $y=c\tilde{x}+d\tilde{y}$, $a,b,c,d\in k[[\tilde{x},\tilde{y}]]$, $ad-bc$ は invertible とし $\tilde{x},\tilde{y}$ に weight $n_1\leqq n_2$ を与える。 $f=\tilde{f}t^{-n}$, $\tilde{f}\in k[[\tilde{x},\tilde{y}]][\tilde{x}t^{n_1},\tilde{y}t^{n_2},t^{-1}]-(t^{-1})$ と表わしたとき $[n/2]\leqq n_1+n_2$ を示せばよい。 $f=(c\tilde{x}t^{n_1}\cdot t^{-n_1}+d\tilde{y}t^{n_2}\cdot t^{-n_2})^3+\beta(c\tilde{x}t^{n_1}\cdot t^{-n_1}+d\tilde{y}t^{n_2}\cdot t^{-n_2})(a\tilde{x}t^{n_1}\cdot t^{-n_1}+b\tilde{y}t^{n_2}\cdot t^{-n_2})^4+\gamma(a\tilde{x}t^{n_1}\cdot t^{-n_1}+b\tilde{y}t^{n_2}\cdot t^{-n_2})^6+\cdots$ であるから $c\not\equiv 0$ であれば $n=3n_1$ となり $[n/2]<n_1+n_2$。 $c\equiv 0$ のときは $ad\not\equiv 0$ であって $\beta\neq 0$ のとき $n\leqq\min(3n_2,4n_1+n_2)$, $\gamma\neq 0$ のとき $n\leqq\min(3n_2,6n_1)$ となり，いづれの場合も $[n/2]\leqq n_1+n_2$ となる。 もちろん，(1) の場合，一般論 (rational $\Rightarrow$ pseudo-rational $\Rightarrow$ $p(\varphi)<0$) を用いてもよい。

参考文献

[1] J. Lipman and B. Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda ···, Michigan Math. J. 28 (1981)

[2] J. Shah, Stability of two dimensional local rings. I, Inv. Math. 64 (1981)

シンボリックRees環のネーター性について

広大理　大石　彰

Hilbertの14問題(1900年)を一般化したZariskiの問題(1954年)「Aが体k上のアフィン整閉整域，LがAの商体のとき，L/kの中間体Kに対して$A \cap K$はk上有限生成か？」に対してD. Reesが1958年に反例を与えた(因みに本来のHilbertの問題，即ち$A = k[X_1, \cdots, X_n]$の場合に対する永田の反例は1959年)．その論文で鍵になったのが次の命題である：$\mathfrak{p}$が2次元ネーター局所整閉整域の高さ1の素イデアルのとき，次数付環$\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$がネーター環ならば，ある$\mathfrak{p}^{(d)}$は単項イデアルである．この論文の目的はこの命題を一般化した次の定理を示すことである：

<u>定理</u>．RがNagata局所整閉整域，$\mathfrak{p}$がRの素イデアルで，$\dim R/\mathfrak{p} = 1$かつ$R_{\mathfrak{p}}$が正則とする．このとき次数付環$\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$がネーター環であるためには，ある自然数$d$に対して$\ell(\mathfrak{p}^{(d)}) = \dim R - 1$が成り立つことが必要十

分である．　但し，ここで $\ell(I)$ はイデアル I の *analytic spread* を表わす．（命題は以下でもう少し一般な形で述べられている．　詳しい証明については [1] を見て下さい．）

以下，R は可換環，I は R のイデアルとする．自然数 n に対して $I^{(n)}=\{x\in R \mid tx\in I^{n}$ for some R/I - *regular element* $t\in R\}$ を I の n 次<u>符号巾</u>（*n-th symbolic power*）と言う．　自然数 m, n に対して $I^{(m)}I^{(n)}\subset I^{(m+n)}$ が成り立つので $\bigoplus_{n\geq 0} I^{(n)}$ は次数付環になる．　これを $R^{s}(I)$ で表わし，イデアル I の <u>シンボリック Rees 環</u> と言う．我々の主定理はこれがネーター環になるための一つの条件を与える：

<u>主定理</u>．　R が局所的に *quasi-unmixed* なネーター整閉整域，I が非混合（*unmixed*）なイデアルで $R^{s}(I)$ が整閉とする．もし $R^{s}(I)$ がネーター環ならば，ある自然数 d に対して $\ell(I^{(d)}R_{\mathfrak{p}}) < ht(\mathfrak{p})$ が $\mathfrak{p}\supset I$, $ht(\mathfrak{p}/I) > 0$ なる任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成り立つ．　更に，もし R が Nagata 整域であれば逆も成立つ．

これから最初に述べた定理が得られる．（R が整閉で $R_{\mathfrak{p}}$ が正則なので $R^{s}(\mathfrak{p})$ も整閉になる．R が局所環で $\dim R/I = 1$ のとき，主定理の条件は $\ell(I^{(d)}) = \dim R - 1$ と同値であることに注意．）証明の前に主定理の系を述べる．$Q = Q(R)$ を R の全商環として $\widetilde{I} = R :_Q (R :_Q I)$ とおく．次数付環 $\widetilde{R}(I) = \bigoplus_{n \geqq 0} \widetilde{I^n}$ をイデアル I の <u>因子的(divisorial)</u> <u>Rees 環</u> と言う．R がネーター整閉整域であれば，$\widetilde{R}(I)$ も整閉でかつ $\widetilde{R}(I) = R^{s}(\widetilde{I})$ となる．

<u>系1</u>．R が局所的に *quasi-unmixed* なネーター整閉整域とする．$\widetilde{R}(I)$ がネーター環ならば，ある自然数 d に対して $\ell(\widetilde{I^d} R_{\mathfrak{p}}) < ht(\mathfrak{p})$ が $\mathfrak{p} \supset I$，$ht(\mathfrak{p}) \geqq 2$ なる任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成り立つ．R が Nagata 整域ならば逆も正しい．更に，R が2次元のとき，上の条件はある $\widetilde{I^d}$ が可逆なイデアルであるという条件と同値である．

<u>系2</u>．2次元 Nagata 局所整閉整域 R について次は同値：

(1) $\widetilde{R}(I)$ が任意のイデアル I に対してネーター環．

(2) $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$ が任意の高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対してネーター環.

(3) R の因子類群 $Cl(R)$ が torsion 群，即ち R が Storch の意味で almost factorial.

(R が局所環でないときは (3) の条件を $Cl(R)/Pic(R)$ が torsion 群という条件にすれば良い.)

なお,「$\mathfrak{p}$ が正則局所環 R の素イデアルならば $\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$ がネーター環になる」という(余り根拠のない)予想(Cowsik)があることを付記しておきます. (勿論, $\dim R \leqslant 2$ ならば正しい.)

<u>主定理の証明</u>: もし $A = R^s(I)$ がネーター環とすると, ある自然数 d に対して A の d 次 Veronese 部分環 $A^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0} A_{dn}$ が斉次 R-代数になる. 更に, R が Nagata 整域とすると次の補題により逆が成り立つ:

<u>補題3.</u> $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ が被約な次数付環, $A_0 = R$ が Nagata 整域として, ある自然数 d に対して $A^{(d)}$ がネーター環ならば, A 自身ネーター環である.

次に，「R がネーター環で I が非混合ならば任意の自然数 m, n に対して，$I^{(m)(n)} = I^{(mn)}$」なので $R^s(I)^{(d)} = R^s(I^{(d)})$ となる．従って $R^s(I)^{(d)}$ が斉次 R-代数 $\Longleftrightarrow$ $R^s(I^{(d)}) = R(I^{(d)})$．$J = I^{(d)}$ とおく．

<u>命題4</u>．次の条件は同値である：

(1) $R^s(J) = R(J)$．

(2) $G(J) = \bigoplus_{n \geqq 0} J^n/J^{n+1}$ が torsion-free R/J-加群．

更に R, R/J が Cohen-Macaulay 局所環で $\dim R/J = 1$，J が generic に完全交叉なら，これらは次のいずれの条件とも同値：

(3) $\ell(J) = ht(J)$，即ち R が J に沿って法擬平担．

(4) $G(J)$ が自由 R/J-加群，即ち R が J に沿って法平担．

(5) J が完全交叉．

<u>系5</u>．R が局所環，$\operatorname{depth} R/I > 0$ として $R^s(I)$ がネーター環ならば，$\operatorname{rad}(I) = \operatorname{rad}(a_1, \cdots, a_r)$，$r = \dim R - 1$ となる $a_1, \cdots, a_r \in I$ が存在する．

特に，R が quasi-unmixed，R/I が1次元

Cohen-Macaulay 環のとき $R^s(\mathrm{I})$ がネーター環ならば, I は集合論的完全交叉である(Cowsik).
(証明には不等式

$$\mathrm{ara}(\mathrm{I}) \leqslant \ell(\mathrm{I}) \leqslant \dim R - \mathrm{depth}\, R/\mathrm{I}^n \text{ for all } n \gg 0$$

を使う. 但し, $\mathrm{ara}(\mathrm{I}) = \min\{n \mid \exists a_1, \cdots, a_n \in \mathrm{I} \text{ s.t. } \mathrm{rad}(\mathrm{I}) = \mathrm{rad}(a_1, \cdots, a_n)\}$.)

<u>命題6</u> (Ratliff, McAdam). (1) R がネーター環のとき, 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Ass}_R(R/\overline{\mathrm{I}^n}) \subset \mathrm{Ass}_R(R/\overline{\mathrm{I}^{n+1}})$ かつ $\overline{\mathrm{A}}^*(\mathrm{I}) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{Ass}_R(R/\overline{\mathrm{I}^n})$ は有限集合である. 但し, $\overline{\mathrm{J}}$ はイデアル J の整閉包を表わす.

(2) R が局所的に quasi-unmixed であるためには, 任意のイデアル I に対して $\overline{\mathrm{A}}^*(\mathrm{I}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supset \mathrm{I},\ \ell(\mathrm{I}R_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})\}$ が成り立つことが必要十分である.

我々の場合, 仮定より $R(\mathrm{J})$ が整閉なので,

$R^s(\mathrm{I})$ がネーター $\Longrightarrow$ $R^s(\mathrm{J}) = R(\mathrm{J})$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ass}_R(R/\mathrm{J}^n) = \mathrm{Min}_R(R/\mathrm{J})$ for all $n \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathrm{A}}^*(\mathrm{J}) = \mathrm{Min}_R(R/\mathrm{I})$

$\Longleftrightarrow$ $\ell(\mathrm{J}R_\mathfrak{p}) < \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ such that

$\mathfrak{P} \supset I$, $ht(\mathfrak{P}/I) > 0$. 主定理の証明終わり.

なお系1の後半では次の事実を使う:

<u>補題7</u>(Cowsik and Nori). R がネーター局所環で Serre の条件 (S_{n+1}) をみたすとする. もし $\ell(I) = ht(I) = n$ で I が generic に完全交叉ならば I は完全交叉である. 特に, R がネーター局所整閉整域で $\ell(I) = 1$ ならば I は単項イデアルである.

[1] 大石, Noetherian property of symbolic Rees algebras, to appear in Hiroshima Math. J.

[2] D. Rees, On a problem of Zariski, Ill. J. Math. 2 (1958), 145-149.

[3] S. McAdam, Asymptotic prime divisors, Springer Lecture Notes in Math. vol. 1023, 1983.

(1985年, 1月)

Module of generalized fractions について

神戸大学・教養部　竹内康滋

module of generalized fractions の概念は Sharp と Zakeri によって導入された。ここでは別の定義を与えよう。まず，notation を固定しておく。

Notation

A : noetherian commutative ring with identity 1.

$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$

$\mathbb{N}$: positive integer の集合

$\mathbb{N}^n := \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n}$

$D_n(A)$: n次 lower triangular matrix の集合

A^nの部分集合$\mho$がつぎの (i)～(iii) をみたすとき，$\mho$は triangular であるという。

(i) $\mho \neq \phi$

(ii) $\forall (u_1, \cdots, u_n) \in \mho$, $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\Longrightarrow (u_1^{\alpha_1}, \cdots, u_n^{\alpha_n}) \in U$$

(iii) $\forall (u_1, \cdots, u_n), \forall (v_1, \cdots, v_n) \in U$ に対して

$(w_1, \cdots, w_n) \in U$ および $H, K \in D_n(A)$ が存在して

$$H\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

例. Aの部分集合$U(\neq \phi)$が積閉ならば，Uはtriangularである。

A－加群Mとtriangular subset U of A^nに対して，SharpとZakeriによって，module of generalized fractions $U^{-n}M$が定義されたが，それはAの積閉集合Sによる商加群$S^{-1}M$の定義のmodificationである．

定義の概略を述べておく．

$M \times U$に関係"$\sim$"をつぎのように定義する．

$(m, (u_1, \cdots, u_n)), (m', (v_1, \cdots, v_n)) \in M \times U$に対して

$(m, (u_1, \cdots, u_n)) \sim (m', (v_1, \cdots, v_n))$

$\Longleftrightarrow$ $(w_1, \cdots, w_n) \in U$ および $H, K \in D_n(A)$ が存在して，

$$H\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ かつ } |H|m - |K|m' \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} Aw_i\right) M$$

関係"$\sim$"は勿論同値関係で，$(M\times \mathfrak{V})/\sim$ を $\mathfrak{V}^{-n}M$ で表し $(m,(u_1,\cdots,u_n))$ を含む類を $\dfrac{m}{(u_1,\cdots,u_n)}$ と書く．

$\mathfrak{V}^{-n}M$ に A-加群としての構造はつぎのように入れる．

$$\frac{m}{(u_1,\cdots,u_n)}+\frac{m'}{(v_1,\cdots,v_n)}=\frac{|H|m+|K|m'}{(w_1,\cdots,w_n)}$$

ただし，$(w_1,\cdots,w_n)\in\mathfrak{V}$ で，$H,K\in D_n(A)$ が存在して，

$$H\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$$

$$a\cdot\frac{m}{(u_1,\cdots,u_n)}=\frac{am}{(u_1,\cdots,u_n)}\qquad(a\in A)$$

集合族 $\mathfrak{U}=(\mathfrak{V}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ はつぎの条件はみたしているとする。

(i) $\mathfrak{V}_i$: triangular subset of A^i $(\forall i\in\mathbb{N})$

(ii) $(u_1,\cdots,u_i)\in\mathfrak{V}_i\ (i>1)\Rightarrow(u_1,\cdots,u_{i-1})\in\mathfrak{V}_{i-1}$

(iii) $(u_1,\cdots,u_i)\in\mathfrak{V}_i\Rightarrow(u_1,\cdots,u_i,1)\in\mathfrak{V}_{i+1}$

(iv) $(1)\in\mathfrak{V}_1$

A-加群 M に対して，写像 : $\mathfrak{V}_{i-1}^{-(i-1)}M\to\mathfrak{V}_i^{-i}M$ として．

$\dfrac{m}{(u_1,\cdots,u_{i-1})}\longmapsto\dfrac{m}{(u_1,\cdots,u_{i-1},1)}$ なるものを考えると

$$0 \to M \to \mathfrak{V}_i^{-1} M \to \cdots \to \mathfrak{V}_i^{-i} M \to \cdots$$

は complex をなす（Sharp & Zakeri）

集合族 $\mathfrak{U}$ にさらにつぎの条件 (V) を付け加えると別の方法で上の complex の定義ができる。

(V) $\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して，$(u_1, \cdots, u_{i-1}) \in \mathfrak{V}_{i-1}$ が存在して，$\{u_1, \cdots, u_{i-1}\} \subseteq \mathfrak{z}$ かつ $\mathrm{ht}(\mathfrak{z}) \geq i$ となるならば $u_i \in \mathfrak{z} - \underset{\mathfrak{q} \in P(u_1, \cdots, u_{i-1})}{\bigcup} \mathfrak{q}$ が存在して，$(u_1, \cdots, u_i) \in \mathfrak{V}_i$．

ただし，$P(u_1, \cdots, u_k) := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \{u_1, \cdots, u_k\} \subseteq \mathfrak{q},\ \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = k\}$．

例1．$\mathfrak{V}_i$ を長さ i の poor A-sequence の集合とすれば，集合族 $\mathfrak{U} = (\mathfrak{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は条件 (i)～(V) をみたす。

定義　集合族 $\mathfrak{U} = (\mathfrak{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は条件 (i)～(V) をみたすとする．A-加群 M に対して complex

$$0 \to M^0 \to M^1 \to \cdots \to M^i \to \cdots$$

および M^i の元 $m / (u_1, \cdots, u_i)$　$(m \in M,\ (u_1, \cdots, u_i) \in \mathfrak{V}_i)$ を，つぎのように帰納的に定義する．

(1)　$M^0 := M$.

(2)　M^{i-1} およびその元 $m|(u_1,\cdots,u_{i-1})$ は定義できているとする.$(i\geqq 1)$

つぎの条件をみたす M^{i-1} の元 $m|(u_1,\cdots,u_{i-1})$ の集合を M_0^{i-1} で表す.

条件：$H\in D_i(A)$ が存在して,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix}$$

とおくとき,$(w_1,\cdots,w_i)\in \mathcal{U}_i$ かつ $|H|m \in (\sum_{k=1}^{i-1} Aw_k)M$.

このとき,つぎの条件をみたす $E_A(M^{i-1}/M_0^{i-1})$ の元 x の集合を M^i で表し,x を $m|(u_1,\cdots,u_i)$ で表す.

条件：$(u_1,\cdots,u_i)\in\mathcal{U}_i$ および $m\in M$ が存在して

$$x\in\bigoplus\{E(A/\mathfrak{z})\mid (u_1,\cdots,u_{i-1})\subseteq\mathfrak{z},\ \mathfrak{z}\in Ass(E)\}$$

かつ $u_i x = \overline{m|(u_1,\cdots,u_{i-1})}$ in E

ただし,$E = E_A(M^{i-1}/M_0^{i-1})$.

定理　写像：$\mathcal{U}_i^{-i}M\longrightarrow M^i$ を $\dfrac{m}{(u_1,\cdots,u_i)}\longmapsto m|(u_1,\cdots,u_i)$ $(i\geqq 1)$ で定義すると,2つの complex $(\mathcal{U}_i^{-i}M)_i$ と (M^i) の間の同型を与える.

証明は省略する.

Sharp と Zakeri はつぎの結果を導いている.

$\mathfrak{V}_i$ を poor A-sequence of length i の集合とすれば

A が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $0 \to A \to \mathfrak{V}_1^{-1}A \to \cdots \to \mathfrak{V}_i^{-i}A \to \cdots$ が minimal injective resolution of A

この場合 A は局所環であるという仮定はしている.

ところで, つぎの問題は自然であり, 問題を考えていく上で上の定理が役に立つかも知れない.

問題 集合族 $\mathfrak{V} = (\mathfrak{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を適当にとって

A-加群 M が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $0 \to M^0 \to M^1 \to \cdots \to M^i \to \cdots$ は minimal injective resolution of M

が成り立つようにせよ.

参考文献

R. Y. Sharp and H. Zakeri : Modules of generalized fractions, Mathematika 29 (1982).

R. Y. Sharp and H. Zakeri : Local cohomology and modules of generalized fractions, Mathematika 29 (1982)

R. Y. Sharp and H. Zakeri : Modules of generalized fractions and balanced big Cohen-Macaulay modules, London Math. Soc. Lecture Note Series 72.

Some Properties of Semigroup Rings

Ryûki Matsuda (Faculty of Science, Ibaraki University)

Let A be a commutative ring $\ni 1$, S a torsion-free cancellative commutative additive semigroup $\supsetneqq \{0\}$. The semigroup ring $A[X;S]$ of S over A is the ring $\{\sum_{\text{finite}} a_\alpha X^\alpha;\ a_\alpha \in A,\ \alpha \in S\}$. [6] is a general reference on semigroup rings. In section 1 we concern with the n-generator property, and in section 2 with the Krull properties of semigroup rings. In section 3 we note a remark on Pirtle domains.

1. The n-generator property for semigroup rings.

If each finitely generated ideal of a ring A is generated by n elements, A is said to have n-generator property. Q_0 denotes the semigroup of nonnegative rational numbers. If S is a finitely generated subsemigroup of Q_0 and $q(S) = Zr$ for $r \in Q_0$, we define the order $o(S)$ of S to be the least positive integer in $(1/r)S$, where $q(S)$ denotes the smallest group containing S in general. If S is a subsemigroup of Q_0 which is not finitely generated, then the order of S is the least positive integer n such that for each finitely generated subsemigroup T of S there exists a finitely generated subsemigroup T' of S with $T \subset T'$ and $o(T') \leq n$. For a finitely generated A-module M,

$d(M)$ denotes the least number of elements in the generating sets for M. ($d(M) = 0$ if $M = 0$.) If I is a finitely generated nil ideal of A and $I^{k+1} = 0$, then we set $\nu(I) = d(I/I^2) + \ldots + d(I^{k-1}/I^k) + d(I^k)$.

Theorem 1([3, Section 3]). Let N be the nil radical of A, and assume that S is not a group. Then the following conditions are equivalent.

(1) $A[X;S]$ has n-generator property.

(2) S is isomorphic with a subsemigroup of Q_0 of finite order k. We have $\dim A = 0$, and if $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset N$, where $(m+1)k > n$, then there is a decomposition $A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_h$ such that for each j either $a_1 e_j = 0$ or $a_i e_j \in (a_1, \ldots, a_{i-1})Ae_j$ for some $i \geq 2$.

(3) S is isomorphic with a subsemigroup of Q_0 of finite order k. We have $\dim A = 0$, and for each finitely generated nil ideal I of A there is a decomposition $A =$ $Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_h$ such that $(\nu(Ie_j) + 1)k \leq n$ for each j.

Theorem 2([3, Section 4]). Assume that $S = G$ is a group. Then the following conditions are equivalent.

(1) $A[X;G]$ has n-generator property.

(2) G is isomorphic with a subgroup of Q. We have $\dim A = 0$, and for each subset $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset N$ there is a decomposition $A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_h$ such that for each j, either $a_1 e_j = 0$ or $a_i e_j \in (a_1, \ldots, a_{i-1})Ae_j$ for some $i \geq 2$.

(3) G is isomorphic with a subgroup of Q. We have $\dim A = 0$, and for each finitely generated nil ideal I there is a decomposition $A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_h$ such that $\nu(Ie_j) < n$

for each j.

2. Krull properties for semigroup rings.

Let D be an integral domain with $q(D) = K$ ($q(D)$ denotes the quotient field of D). Let $F = \{ v_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ be a set of valuations on K. We concern with the following properties.

(i) Each v_λ is discrete of rank 1.

(i)' Each v_λ has rank 1.

(ii) $D = \bigcap_\lambda V_\lambda$, where V_λ is the valuation ring associated with v_λ.

(iii) F has finite character(i.e. for each $0 \neq x \in K$ we have $v_\lambda(x) = 0$ for almost all λ).

(iv) Each v_λ is essential for D (i.e. $V_\lambda = D_{P_\lambda}$ for a prime ideal P_λ of D).

(v) Each P_λ is divisorial in D.

If there exists F which satisfies (ii), (iii), (iv), then D is said to be of Krull type. If (i)', (ii), (iii), (iv), then generalized Krull domain. If (i), (ii), (iii), then Krull domain. If (i)', (ii), (iv), (v), then K domain([14]). If D_P is a Krull domain for each prime ideal P of D, then D is called an almost Krull domain. If D is an almost Krull domain with the divisorial height one primes, then D is called a Pirtle domain[[10]).

Theorem 3. (1)([1], [2], [5]) $D[X;S]$ is a Krull domain if and only if D is a Krull domain, S is a Krull semigroup and $q(S)$ is of type $(0,0,0,\ldots)$.

(2)([10]) $D[X;S]$ is a generalized Krull domain(resp. of

Krull type) if and only if D is a generalized Krull domain (resp. of Krull type), S is a generalized Krull semigroup (resp. of Krull type), and either ch. $D = 0$ and $q(S)$ is of type $(0,0,0,\ldots)$ or ch. $D = p > 0$ and $q(S)$ is of type $(0,0,0,\ldots)$ except p.

(3)([11]) $D[X;S]$ is a Pirtle domain if and only if D is a Pirtle domain and $S \cong H \oplus S_1$; where H is a group of type $(0,0,0,\ldots)$ and S_1 is a subsemigroup of a free group $F = \bigoplus_{i \in I} Zx_i$ such that $S_1 = q(S_1) \cap F_+$, where F_+ denotes the subsemigroup $\{ \sum n_i x_i \ ; \ n_i \geq 0 \}$ of F.

(4)([12, Theorem 1]) $D[X;S]$ is a K domain if and only if D is a K domain, S is a K semigroup and $q(S)$ is of type $(0,0,0,\ldots)$.

(5)([12, Theorem 2,(1)]) Let k be a field of characteristic 0. Then $k[X;S]$ is an almost Krull domain if and only if S is a Krull semigroup.

(5)'([12, Theorem 2, (2)]) Let k be a field of characteristic $p > 0$. Let H be the maximal subgroup of S, F a free subgroup of H such that H/F is torsion and H_0 the subgroup of H such that H_0/F is the p-primary component of H/F. Then $k[X;S]$ is an almost Krull domain if and only if S is a Krull semigroup and H_0 is of type $(0,0,0,\ldots)$.

3. A remark on Pirtle domains.

We have the following conjecture,

(α) Conjecture[13]. A Pirtle domain is a Krull domain.

We set $U = \{ f \in D[X]; \ c(f)^{-1} = D \}$, where $c(f)$ is the content of f. Let $\mathcal{P}(D)$ denote the set of prime ideals of

D which are minimal over some ideal $(a):(b)$ for $a, b \in D$, where $(a):(b) = \{ d \in D; \ db \in aD \}$. We have the following three related questions/conjectures.

(β) Question[8]. If D_P is a valuation ring for each $P \in \mathcal{P}(D)$, is $D[X]_U$ a Prüfer ring?

(γ) Conjecture[7]. There exists an essential ring which is not a Prüfer v-multiplication ring.

(δ) Question[9]. Is every almost Krull domain a Prüfer v-multiplication ring?

Let $\{ X, Y \}$ be indeterminates over Z and $\{ p_1, p_2, \ldots \}$ the set of positive prime numbers. Then the ring $D = Z[X/p_1, X/p_2, \ldots, Y/p_1, Y/p_2, \ldots]$ is an example that resolves all the above four questions/conjectures([4]).

Finally we note the following recent result.

Theorem 4. $D[X;S]$ is a pseudo-principal domain if and only if D is a pseudo-principal dpmain, S is a pseudo-principal semigroup and $q(S)$ is of type $(0,0,0,\ldots)$.

References

[1] D. F. Anderson, Graded Krull domains, Comm. in Alg. 7(1979).

[2] D. F. Anderson, The divisor class group of a semigroup ring, Comm.,in Alg. 8(1980).

[3] J. Arnold and R. Matsuda, The n-generator property for semigroup rings, Houston J. Math., to appear.

[4] J. Arnold and R. Matsuda, An almost Krull domain with divisorial height one primes, Canad. Math. Bull.,to appear.

[5] L. Chouinard, Krull semigroups and divisor class groups,

Canad. J. Math. 33(1981).

[6] R. Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984.

[7] M. Griffin, Some results on v-multiplication rings, Canad. J. Math. 19(1967).

[8] J. Huckaba and I. Papick, A localization of R[X], Canad. J. Math. 33(1981).

[9] H. Hutchins, Examples of Commutative Rings, Polygonal Publishing House, New Jersey, 1981.

[10] R. Matsuda, Krull properties of semigroup rings, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. 14(1982).

[11] R. Matsuda, On the Pirtle property of semigroup rings, Comment. Math. Univ.Sancti Pauli 32(1983).

[12] R. Matsuda, K semigroup rings and almost Krull semigroup rings, submitted to Math. Japon.

[13] E. Pirtle, Families of valuations and semigroups of fractionary ideal classes, Trans. Amer. Math. Soc. 144(1969).

[14] E. Pirtle, On a generalization of Krull domains, J. Alg. 14(1970).

ON A SPECIAL CLASS OF DIVIDED DOMAINS

群馬高専　岡部 章

以下，Rは可換で単位元1をもつ整域，Kはその商体を表わすものとする。[15]で，divided domainの特徴付けの1つとして，次のものが与えられている。

Rがdivided domain

$\Longleftrightarrow$

各$P \in \mathrm{Spec}(R)$に対し，$R_P \subseteq P :_K P$.

そこで，この小論では，次の条件(PCQ)を満す整域について調べるのを目的とする。

(PCQ)：各$P \in \mathrm{Spec}(R)$に対し，$R_P = P :_K P$

ここで，(PCQ)は<u>prime</u> <u>conductor</u>-overring $P :_K P$が<u>quotient</u> ringであることを意味する。

条件(PCQ)を満す整域をPCQ-domainと呼ぶことにする。

補題1。Rを divided domainとし，$P\in \mathrm{Spec}(R)$とする。このとき，

$$R_P = P:_K P$$

$$\Longleftrightarrow$$

$P:_K P$ は R上 flat

証明。($\Longrightarrow$) これは trivial。

($\Longleftarrow$) $P:_K P$ が R上 flat であるとする．[16]，定理2より

$$P:_K P = \cap\{R_{(M\cap R)} \mid M\in \mathrm{Max}(P:_K P)\}。$$

ところで，[15]，定理2.2 (6) により

各 $M\in \mathrm{Max}(P:_K P)$ に対し，$M\cap R = P$。

従って $P:_K P = R_P$ となる。

定理2。整域Rに対し，次の条件は同値である。

(1) R は PCQ-domain である。

(2) R は divided domain，かつ各 $P\in \mathrm{Spec}(R)$ に対し，$P:_K P$ は R上 flat。

(3) R は divided domain，かつ各 $P\in \mathrm{Spec}(R)$ に対し，$P:_K P$ は R の商環。

証明。(1) ⇒ (3) ⇒ (2) は自明。(2) ⇒ (1) は補題1による。

命題3。(R, M) を1次元の局所整域とする。このとき，次の条件は同値である。

(1) R は PCQ-domain

(2) $M :_K M = R$

(3) $M :_K M$ は R 上 flat

(4) M は単項イデアルまたは non-divisorial イデアルである。

証明。(1) ⇒ (2) ⇒ (3) は自明。(3) ⇒ (1) は定理2による。(2) ⇔ (4) は [3]，命題3.23 による。

系4。R は M を極大イデアルにもつネーター divided domain とする。このとき，

R は PCQ-domain $\Longleftrightarrow$ $M :_K M = R$。

証明。[1]，命題2 により，$\dim R \leqq 1$。よって，我々の主張は命題3から出る。

系5。R は1次元の局所整域とする。このとき，

Rが完整閉であれば，RはPCQ-domainである。

命題6. RはPCQ-domainであるとする。このとき，各$P \in \mathrm{Spec}(R)$に対し，R_PもPCQ-domainである。

証明。$Q \subset P$なる各素イデアルQに対し，[1]，命題3より$Q = QR_P$である。よって，$QR_P :_K QR_P = Q :_K Q = R_Q = (R_P)_{QR_P}$。

次に，divided domainについて1つの基本的な結果を示す。

定理7. Rをdivided domainとする。このとき，素イデアル$P \subset Q$に対し，

$$(Q/P) :_L (Q/P) = Q :_K Q \,/\, P :_K Q$$

となる。ここでLはR/Pの商体である。

証明。[12]，定理2.2における写像Φが同型写像であることを示す。

補題8. $P \subset Q$をRの素イデアルとする。このとき，$Q :_K Q = R_Q$であれば，$P :_K Q = PR_Q$となる。

証明。[12], 命題1.3より, $P :_K Q$ は $Q :_K Q$ の素イデアルで, かつ $(P :_K Q) \cap R = P$ が成立。よって, $Q :_K Q = R_Q$ であれば, 我々の主張は正しい。

定理7と補題8とにより, 次の定理が得られる。

定理9。R を PCQ-domain とする。このとき, 各 $P \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, R/P も PCQ-domain となる。

命題10。$R \subseteq T$ を整域とし, $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(T)$ とする。このとき, R が PCQ-domain であれば, $R = T$ となる。

証明。はじめに, [3], 補題3.1により, R と T は同じ商体をもつ。更に R, T は共に局所整域となる。今, M を T (従って R) の極大イデアルとする。このとき,

$$R \subseteq T \subseteq M :_K M = R_M = R$$

となり, $T = R$ を得る。

（注意）$R \subset T$ は整域で $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(T)$ であるとする。このとき，T が PCQ-domain であっても，R は PCQ-domain とは限らない。その例としては，R を non-valuation PVD にとり，M を R の極大イデアルとして，T として $M :_K M$ をとればよい。

次に，PCQ-domain を構成する有力な手段となる $(D+M)$-構成について，1つの結果を述べる。

定理11。V は K を商体とする valuation domain とし，$V = k + M$（ここで k は体，M は V の極大イデアル）であるとする。D を k の proper な部分整域とし，$R = D + M$ とおく。このとき，

D が PCQ-domain
$\Longleftrightarrow$ R が PCQ-domain

が成り立つ。ただし，D は k がその商体となるようにとるものとする。

証明は省略する。

（注意） 定理11において，$\dim R = \dim D + \dim V$ であるから，$\dim D = 1$ から出発すれば，任意次元の PCQ-domain が構成されることがわかる。しかも，[7]，定理Aにより，D が non-valuation な PCQ-domain であれば，R も non-valuation となることもわかる。

例。

1） 付値環はすべて PCQ-domain である（cf. [13]，定理1）。

2） 完整閉な1次元の局所整域は，すべて PCQ-domain である。

3） [17]に完整閉な1次元の局所整域だが，付値環でない例がある。これは non-valuation PCQ-domain の例である。

4） 3）と上の注意により，任意の整数 $n>0$ に対し，n 次元の non-valuation PCQ-domain が作れる。

参考文献

1. T. Akiba, A note on AV-domains, Bulletin of Kyoto Univ. of Education, Ser.B, 31(1967), 1-3.

2. D.F. Anderson, Comparability of ideals and valuation overrings, Houston J. Math., 5(1979), 451-463.

3. ————, and D.E. Dobbs, Pairs of rings with the same prime ideals, Canad. J. Math., 32(1980), 362-384.

4. E. Bastida and R. Gilmer, Overrings and divisorial ideals of rings of the form D + M, Michigan Math. J., 20(1973), 79-95.

5. D. E. Dobbs, Coherence, ascent of going down, and pseudo-valuation domains, Houston J. Math., 4(1978), 551-567.

6. ————, Divided rings and going-down, Pacific J. Math. 67(1976), 353-363.

7. R. Gilmer, Multiplicative ideal theory, Queen's Paper in Pure and Applied Mathematics, No.12, Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1968.

8. ————, Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker, New York, 1972.

9. J. R. Hedstrom and E.G. Houston, Pseudo-valuation domains, Pacific J. Math., 75(1978), 137-147.

10. ————, ————, Pseudo-valuation domains (II), Houston J. Math., 4(1978), 199-207.

11. I. Kaplansky, Commutative rings (revised ed.), Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1974.

12. A. Okabe, On conductor overrings of an integral domain, Tsukuba J. Math., 8(1984), 69-75.

13. ————, On conductor overrings of a valuation domain,

Tsukuba J. Math., 8(1984), 125-130.

14. A. Okabe, Some results on pseudo-valuation domains, Tsukuba J. Math., 8(1984), 333-338.

15. ———, Some ideal-theoretical characterizations of divided domains, Houston J. Math., to appear.

16. F. Richman, Generalized quotient rings, Proc.Amer.Math. Soc., 16(1965), 794-799.

17. P. Ribenboim, Sur une note de Nagata relative à un problème de Krull, Math. Zeitsch., 64(1956), 159-168.

ON DIVISORIAL AND SEMINORMAL OVERRINGS

Youichi Koyama (Kanazawa Institute of Technology)
Takasi Sugatani (Toyama University)
Ken-ichi Yoshida (Okayama University of Science)

Throughout this note R will denote a Noetherian integral domain with finite integral closure $\bar{R}$ in field of quotients K.

Definition 1. An ideal I in R is called divisorial if $R:_K(R:_K I) = I$, and I is called a conductor ideal if for some integral overring B of R, $I = R:_K B$ $(= R:_R B)$. For an integral overring B of R, if B has the form $B = R:_K I$ for some nonzero ideal I in R, then B is called a divisorial overring of R.

We first recall some basic facts of divisorial ideals and -overrings.

Proposition 2. (1) If I is a divisorial ideal in R, then for a fractional ideal J of R, $I:_R J$ is a divisorial ideal in R.

(2) For a nonzero ideal I in R, I is a conductor ideal if and only if I is divisorial and $R:_K I = I:_K I$.

(3) I is divisorial if and only if I is written in the form $I = \bigcap_1^n (R:_R x_i R)$ for some finite number of elements $x_i \in K$.

(4) Every associated prime divisor of a divisorial ideal is divisorial.

(5) For $p \in \operatorname{Spec} R$, p is divisorial if and only if depth $R_p = 1$.

(6) For a nonzero $p \in \operatorname{Spec} R$, $R:_K p = p:_K p$ if and only if either ht $p = 1$ and R_p is not normal, or ht $p \geqq 2$.

(7) For $p \in \operatorname{Spec} R$, p is a conductor ideal if and only if depth $R_p = 1$ and R_p is not normal.

(8) For $p \in \operatorname{Spec} R$, p is a conductor ideal if and only if p is an associated prime of $\bar{R}/R$.

(9) There is a bijection between the divisorial overrings and the conductor ideals in R: $B = R:_K I$ and $I = R:_K B$.

The following theorems give relations between the divisorial overrings contained in a divisorial overring B and the conductor ideals containing the conductor $c(B/R) = R:_R B$.

Theorem 3. Let B be a divisorial overring of R, and let $I = R:_R B$. For an ideal $\underline{b}$ in B, let $J = I:_R \underline{b}$, and let $A = R:_K J$. Then the following statements hold.

(1) A is a divisorial overring contained in B.

(2) $A:_A B = I:_K J$.

(3) $I:_R(I:_K J) = J$.

(4) For an ideal L in R such that $L \supset I$, $I:_R(I:_K L) = L$ if and only if $L = I:_R \underline{b}$ for some ideal $\underline{b}$ in B.

Theorem 4. Let B be a divisorial overring of R, and let $I = R:_R B$. For any divisorial overring A of R such that $A \subset B$, put $\underline{a} = A:_A B$, $J = I:_R \underline{a}$, and $C = R:_K J$. Then the following statements hold.

(1) C is a divisorial overring contained in A.

(2) $\underline{a} = C:_C B$.

(3) $\underline{a} = I:_K(I:_R \underline{a})$.

(4) For an ideal $\underline{b}$ in B, $\underline{b} = I:_K(I:_R \underline{b})$ if and only if $\underline{b} = D:_D B$ for some divisorial overring D contained in B.

The following example shows that in the case of dimension $\geqq 2$, there is a Noetherian domain R such that R has infinitely many divisorial overrings. However we can not determine whether R has only a finite number of divisorial overrings if R satisfies the condition (S_2), although this case can be reduced, by localizing at an associted prime, to the Artinian case.

Example. Let k be an infinite field. Let $A = k[X,Y]$ be a polynomial ring in two indeterminates. Let $M = (X,Y)A$. Consider the subrings $R = k[X^2,XY,Y^2,X^3,Y^3]$ and $B = k[X-aY] + M^2$, where $a \in k$. Then $c(B/R) = (X^2+aXY+a^2Y^2,X^3,Y^3)R + M^4$, and $B = R:_K c(B/R)$.

Turning to seminormal R, we will show that every divisorial overring of R is seminormal and in particular that R has only a finite number of divisorial rings. To this end, we recall some definitions and notation.

Definition 5. If whenever $x \in \bar{R}$ with $x^2, x^3 \in R$ implies $x \in R$, then R is called seminormal. This is equivalent to $\operatorname{Pic} R \cong \operatorname{Pic} R[X]$. If whenever $x \in \bar{R}$ with $x^2-x, x^3-x^2 \in R$ implies $x \in R$, then R is called u-closed. If whenever $x \in \bar{R}$ with $x^2-rx, x^3-rx^2 \in R$ for some $r \in R$, implies $x \in R$, then R is called t-closed. If $\operatorname{Pic} R \cong \operatorname{Pic} R[X,1/X]$, then R is called quasinormal. If R_p is quasinormal for all $p \in \operatorname{Spec} R$, then R is called locally quasinormal.

It should be noted that (i) if R is one dimensional, then R is quasinormal if and only if R is locally quasinormal if and only if R is seminormal and u-closed if and only if R is seminormal and locally u-closed, and (ii) R is locally quasinormal if and only if R is seminormal and locally u-closed if and only if R is t-closed.

Theorem 6. If R is seminormal (resp. locally quasinormal); then every divisorial overring is seminormal (resp. locally quasinormal). Further there is a bijection between the divisorial overrings B of R and the sets S each of which consists of incomparable elements of $\mathrm{Ass}_R(\bar{R}/R)$ in the following way: $B = R:_K I$ and $I = R:_R B$, where $I = \cap\{p : p \in S\}$. Thus in particular, R has a finite number of divisorial overrings.

Proof. Assume that R is locally quasinormal. Let B be a divisorial overring so that $B = R:_K I$ for some ideal I in R. Let $x \in \bar{R}$ such that $x^2\text{-}bx$, $x^3\text{-}bx \in B$ for some $b \in B$. Then for any $a \in I$, we have $a^2(x^2\text{-}bx) = (ax)^2\text{-}ab(ax)$, $(ax)^3\text{-}ab(ax)^2 \in R$. Since $ab \in R$ and R is t-closed, it follows that $ax \in R$, hence $x \in B$. This proves that B is locally quasinormal.

If p is a prime divisor of a conductor ideal in R, then p is a conductor ideal by (2.2), (2.4) and (2.6). Therefore if R is seminormal, then the conductor $c(\bar{R}/R) = \cap\{p \in \mathrm{Ass}_R(\bar{R}/R)\}$ by (2.8). Thus we see that $R:_R B$ is written in the form described in the statement.

Concerning seminormality and local quasinormality of overrings, we have the following results.

Theorem 7. Let R be seminormal (Noetherian with finite integral closure). The following statements are equivalent.

(1) Every integral overring of R is seminormal.

(2) $R = \bar{R}$ or each element of $\mathrm{Ass}_R(\bar{R}/R)$ is a maximal ideal in R.

Theorem 8. Let R be Noetherian not neccesarily having finite $\bar{R}$. Then each overring of R is seminormal (resp. quasinormal) if and only if both R is seminormal (resp. quasinormal) and $\dim R \leqq 1$.

Proof. In the statements, seminormal part is proved in [1, Cor. 2.7]. Therefore the "only if" is now trivial. To see the converse, let R be Noetherian, quasinormal and of dimension 1, and let A be an overring of R, not being K. Then A is seminormal. Let $\bar{A}$ be integral closure of A. Then $\operatorname{Spec} \bar{A} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ is an injection. In fact, let $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Spec} \bar{A}$ such that $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = q$, say. Put $Q_1 \cap \bar{R} = P_1$ and $Q_2 \cap \bar{R} = P_2$. Thus $P_1 \cap R = P_2 \cap R = q \cap R$, and so $P_1 = P_2$ since R is quasinormal and of dimension 1. Write $P = P_1 = P_2$. Then $\bar{R}_P$ is a DVR, and therefore $\bar{R}_P = \bar{A}_{Q_1} = \bar{A}_{Q_2}$. Thus we have seen that $\operatorname{Spec} \bar{A} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ is injective, and also A is of dimension 1. Then A is u-closed and so A is quasinormal.

[1, Remark 2.6(a)] gives a non-Noetherian example of a seminormal integral domain which has an integral overring not being seminormal. We give an example of a Noetherian domain with the same properties.

Example. Let k be a field of char $k \neq 2$. Let $A = k[X,Y]$ be a polynomial ring in two indeterminates. Let $R = k[Y] + (X^2-1)A$ and $B = k[Y] + (X^2-1, Y^2)A$. Then R is seminormal, while B is not seminormal.

References

1. D.F.Anderson, D.E.Dobbs and J.A.Huckaba, On seminormal overrings, Comm. in Algebra, 10(1982), 1421-1448.
2. Y.Koyama, T.Sugatani and K.Yoshida, Some remarks on divisorial and seminormal overrings, to appear in Comm. in Algebra.

不変部分環のPicard群について

大分大・教育　馬　場　　清

§1. 序

以下，次のように記号を定める。

(1.1)　Gは整域Aに作用する有限部分群とし，Gに関するAの不変部分環を$A' = A^G$とおく。

AがKrull整域の場合，AとA'との因子類群の関係について，いくつかの結果は良く知られているが，本稿の目的は，AとA'とのPicard群の関係についても同様の結果が成立することを報告することである。より具体的に言えば，因子類群に関する命題で「高さ1」,「因子的」なる語を抜き Cl を Pic に変えれば，Picard群に関する命題として，因子類群の命題と並行して成立する場合があることを示したい。

§2. Krull 整域の因子類群についての結果

A, A', Gを(1.1)の通りとし さらに, AをKrull整域と仮定する。$\mathrm{Div}(A)$, $\mathrm{Div}(A')$は それぞれA, A'の因子群とする。すなわち, A, A'の高さ1の素イデアルをそれぞれの基底とする自由アーベル群である。このとき, $\mathrm{Div}(A')$から$\mathrm{Div}(A)$へのアーベル群の準同型写像$i_{A'A}: \mathrm{Div}(A') \longrightarrow \mathrm{Div}(A)$を

$$i_{A'A}(\mathfrak{P}) = \sum e(\mathfrak{p}, \mathfrak{P})\mathfrak{p}$$

で定義する。ただし, $\mathfrak{P}$は高さ1のA'の素イデアル, $\mathfrak{p}$は$\mathfrak{P}$の上にある高さ1のAの素イデアル, $e(\mathfrak{p}, \mathfrak{P})$は$\mathfrak{p}$の$\mathfrak{P}$上の分岐指数, $\sum$は$\mathfrak{P}$の上にある高さ1のAの素イデアル全体を動くものとする。$\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Cl}(A')$をそれぞれA, A'の因子類群とし, $i_{A'A}$から誘導された$\mathrm{Cl}(A')$から$\mathrm{Cl}(A)$へのアーベル群の準同型写像を, $\bar{i}_{A'A}: \mathrm{Cl}(A') \longrightarrow \mathrm{Cl}(A)$とおく。

次に, $\mathrm{Ker}(\bar{i}_{A'A})$から1-コホモロジー群$H^1(G, A^*)$へのアーベル群の準同型写像$\Phi$を定義する: E'を$\mathrm{Div}(A')$の元で$i_{A'A}(E')$が主因子となるものとする。このとき, $i_{A'A}(E') = \mathrm{div}_A(x)$となる$A$の商体の非零元$x$が存在する。ここで, 1-cocycle f_xを$f_x(\sigma) = \sigma(x)/x$ $(\sigma \in G)$で定め,

$$\Phi(E'\text{の因子類}) = f_x \text{ modulo } B^1(G, A^*)$$

とおく。

このとき，次が成立する。（[9] 参照のこと）

命題 2.1. Φ は定義可能で単射である。

定理 2.2. 拡大 A/A' が因子的不分岐であれば，Φ は同型写像となる。

定義 2.3. A の素イデアル $\mathfrak{P}$ について

$$T_{\mathfrak{P}}=\{\sigma\in G \mid \sigma(a)-a\in\mathfrak{P} \text{ for } \forall a\in A\}$$

を $\mathfrak{P}$ の惰性群といい，惰性群の元を準鏡映という。

特に，G の元 σ について $\sigma\in T_{\mathfrak{P}}$ となる高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ が存在するとき，σ を高さ 1 の準鏡映と呼ぶことにする。

このとき，次が知られている（[7]，定理 2.11）。

定理 2.4. 一意分解整域 A が体 k を含み 次の条件をみたすとする。

(a) $A^*=k^*$.

(b) G は k に自明に作用する。

(c) G は高さ 1 の準鏡映で生成されている。

このとき，A' も一意分解整域となる。

定理2.5. 一意分解整域Aが 体kを含み，次の条件をみたすとする。

(a) $A^* = k^*$.

(b) Gはkに自明に作用する。

Gの高さ1の準鏡映全体で生成された部分群を，Hとする。このとき，$Cl(A') \cong \mathrm{Hom}(G/H, k^*)$.

[7]での証明を少し改良すれば，次が得られる。

定理2.6. Krull整域Aが，体kを含み次の条件をみたすとする。

(a) $A^* = k^*$.

(b) Gはkに自明に作用する。

(c) Gは高さ1の準鏡映で生成されている。

このとき，$\bar{i}_{A'A}$は単射となる。

定理2.7. Krull整域Aが，体kを含み次の条件をみたすとする。

(a) $A^* = k^*$

(b) Gはkに自明に作用する。

Gの高さ1の準鏡映全体で生成された部分群を，Hとする。

このとき，$\mathrm{Ker}(\bar{i}_{A'A}) \cong \mathrm{Hom}(G/H, k^*)$ となる。

§3. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}(A') \longrightarrow \mathrm{Pic}(A))$ に関する基本定理

$\mathrm{Inv}(A)$, $\mathrm{Inv}(A')$ をそれぞれ A, A' の可逆イデアル全体のなす群とし，アーベル群の準同型写像 $j_{A'A} : \mathrm{Inv}(A') \to \mathrm{Inv}(A)$ を，A' の可逆イデアル I に対して $j_{A'A}(I) = IA$ と定義する。さらに，$\bar{j}_{A'A} : \mathrm{Pic}(A') \longrightarrow \mathrm{Pic}(A)$ を，$j_{A'A}$ から誘導されたアーベル群の準同型写像とする。

$\bar{j}_{A'A}$ の核 $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ から 1-コホモロジー群 $H^1(G, A^*)$ への準同型写像 χ を Φ と同様にして次のように定める：I を A' の可逆イデアルで $j_{A'A}(I)$ が単項イデアルとなるものとする。このとき，$j_{A'A}(I) = IA = xA$ となる A の商体の非零元 x が存在するので，

$$\chi(\bar{I}) = f_x \quad \text{modulo } B^1(G, A^*)$$

とおく。ただし，$\bar{I}$ は I の $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ での剰余類である。（1-cocycle f_x の定義については §2 参照のこと.）

命題 3.1. χ は定義可能で単射である。

ここで，A が Krull 整域のとき，$\bar{i}_{A'A}$ と $\bar{j}_{A'A}$，Φ と χ の

関係を調べる（[8], p.56, (9.5)). $\mathrm{Pic}(A)$ は $Cl(A)$ の部分群，$\mathrm{Pic}(A')$ は $Cl(A')$ の部分群で，次の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd} Cl(A') \arrow[r, "\bar{i}_{A'A}"] & Cl(A) \\ \mathrm{Pic}(A') \arrow[u] \arrow[r, "\bar{j}_{A'A}"] & \mathrm{Pic}(A) \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

これより，$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ は $\mathrm{Ker}(\bar{i}_{A'A})$ の部分群と考えられる。さらに，$\bar{j}_{A'A}$ は，$\bar{i}_{A'A}$ の $\mathrm{Pic}(A')$ への制限，φ は，Φ の $\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})$ への制限となっている。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\bar{i}_{A'A}) \arrow[dr, "\Phi"] & \\ & H^1(G, A^*) \\ \mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

定理3.2. A, A', G は (1.1) の通りとする。さらに，A が Krull 整域で A' 上不分岐であれば，φ は同型写像となる。

注意3.3. (1) 次の事実が知られている。([2], 系5.5の7項完全列から分る)："A, A', G は (1.1) の通りとする。A が分離 A'-代数であれば，φ は同型写像となる"。

(2) 不分岐や分離的の仮定でなく，A が忠実平坦

A'-加群であるという仮定にすると，φ は同型写像とならない例がある。(例3.4)

(3)　不分岐の仮定でなく，因子的不分岐の仮定でも反例がある（例3.5)。

例3.4.　X, Y は体 k 上の代数的独立元とし，

$$A = k[X^6, Y^6, XY]$$

とおく。体 k は，1の原始3乗根 λ を含むと仮定する。$k[X, Y]$ の k-自己同型写像 $X \mapsto \lambda X$, $Y \mapsto Y$ の A への制限として，A の k-自己同型写像 σ を定め，$G = \langle \sigma \rangle$ とおく。

このとき，

$$A' = A^G = k[X^6, Y^6, X^3Y^3],$$

$$A = A' \oplus A'XY \oplus A'(XY)^2$$

となるから，A は A'-自由加群，従って，忠実平坦となる。

ここで，$\mathrm{Ker}(\bar{i}_{A'A}) = (0)$。(∵) $Cl(A)$, $Cl(A')$ の生成元はそれぞれ，高さ1の素イデアル $\mathfrak{p} = (X^6, XY)$, $\mathfrak{q} = (X^6, X^3Y^3)$ の因子類で，$i_{A'A}(\mathfrak{q}) = 3\mathfrak{p}$。

$$\begin{tikzcd}
Cl(A') \arrow[r, "\bar{i}_{A'A}"] \arrow[d, "\wr"'] & Cl(A) \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
cl(\mathfrak{q}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\wr"] & 3cl(\mathfrak{p}) \arrow[d, "\wr"] \\
\bar{1} \arrow[r, mapsto] & \bar{3}
\end{tikzcd}$$

(cl で因子類を表す)

上の可換図式と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ が単射であることから，$\bar{i}_{A'A}$ も単射である。）ゆえに，$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})=(0)$。ところが，$H^1(G, A^*) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であるから，$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \not\cong H^1(G, A^*)$。

例3.5. $A=k[X, Y]$ とし，A の k-自己同型写像 σ を，$\sigma(X)=-X$，$\sigma(Y)=-Y$ で定め，$G=\langle\sigma\rangle$ とおく。k の標数は 2でないものとする。このとき，$A'=k[X^2, Y^2, XY]$ となる。$\mathrm{Pic}(A')=(0)$ であるから（[6]，補題5.1. または，[1]，定理4.1），$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A})=(0)$。ところが，$H^1(G, A^*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より，$\mathrm{Ker}(\bar{j}_{A'A}) \not\cong H^1(G, A^*)$ となるが，拡大 A/A' は因子的不分岐である。（A/A' は，不分岐ではない。$\mathfrak{p}=(X, Y)$ が，$\mathfrak{q}=(X^2, Y^2, XY)$ 上，分岐している。）

§4. 準鏡映との関係

準鏡映の概念を，(2.3)で定義したように，拡張して使うことにする。このとき，因子類群に関する定理と並行して，次が成立する。

定理4.1. A, A', G を，(1.1)の通りとする。A が体 k を含み，次の条件をみたすとする。

(a) $A^* = k^*$。

(b) Gは，kに自明に作用する。

(c) Gは，準鏡映で生成される。

このとき，準同型写像 $j_{A'A}$: $\mathrm{Pic}(A') \longrightarrow \mathrm{Pic}(A)$は，単射である。特に，$\mathrm{Pic}(A)=(0)$ならば，$\mathrm{Pic}(A')=(0)$ となる。

これを使えば，Picard群の計算のできる場合がある。

例4.2. X, Y, Zを体k上の代数的独立元とするとき，

$$B = k\left[X+Z,\ XZ,\ Y+\frac{XZ}{Y},\ XY+\frac{XZ^2}{Y}\right]$$

の Picard群を求める。$A = k\left[X, Y, Z, \frac{XZ}{Y}\right]$ とおく。Aのk-自己同型写像σを，

$$\sigma(X)=Z,\ \sigma(Y)=\frac{XZ}{Y},\ \sigma(Z)=X$$

で定め，$G=\langle\sigma\rangle$とおく。このとき，$A'=B$となる。$\wp=\left(X, Y, Z, \frac{XZ}{Y}\right)$ とおくと，$\sigma\in T_{\wp}$となり，σは，準鏡映である。Gは，準鏡映σで生成され，$\mathrm{Pic}(A)=(0)$であるから，定理4.1.より，$\mathrm{Pic}(B)=(0)$となる。

注意4.3. 例4.2.の$\mathrm{Pic}(A)$は，直接計算するか，[6]の補題5.1，または，[1]の定理4.1.を使えば，$\mathrm{Pic}(A)=(0)$が，分る。

Gが，準銹映で生成されているとは限らない場合は，次のようになる。

定理4.4.　A, A′, Gは，(1.1)の通りとする。Gの準銹映の全体で生成された部分群をHとする。Aが体kを含み，次の条件をみたすとする。

(a) $A^* = k^*$。

(b) Gは，kに自明に作用する。

このとき，$\mathrm{Ker}(j_{A'/A}) \cong \mathrm{Hom}(G/H, k^*)$である。特に，$\mathrm{Pic}(A) = (0)$であれば，$\mathrm{Pic}(A') \cong \mathrm{Hom}(G/H, k^*)$となる。

補足4.5.　(1) 階数1の射影加群のみについて考えたが階数rの射影加群の，注意3.3.(1)に対応する結果については，[5]参照のこと。

(2) 指数1の p-radical descent での射影加群についても，§3と類似のことが成立する。これについては，[3]，[4]，[10]参照のこと。

参 考 文 献

[1] D. F. Anderson: Projective modules over subrings of $k[X, Y]$ generated by monomials, Pacific J. Math., 79 No. 1, (1978), 5−17.

[2] S. Chase, D. Harrison and A. Rosenberg: Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs of Amer. Math. Soc., No. 52, (1965), 1−19.

[3] S. Gupta: On the Jacobson-Cartier operator, J. London Math. Soc., 18 (2), (1978), 202−208

[4] S. Gupta and R. Sridharan: Projective modules, Grothendieck groups and Jacobson-Cartier operator, J. Math. Kyoto Univ., 13 no. 3, (1973), 537−556.

[5] A. S. Merkurev: Projective modules over rings of invariants, J. soviet Math., 24 no. 4, (1984), 443−446.

[6] M. P. Murthy: Vector bundles over affine surfaces birationally equivalent to a ruled surface, Ann. Math., 89, (1969), 242−253.

[7] H. Nakajima: Relative invariants of finite

groups, J. of Algebra, 79, (1982), 218—234.

[8] 成田正雄: Unique factorization domains, 都立大学数学教室セミナー報告, (1971).

[9] P. Samuel: Classes de diviseurs et dérivées logarithmiques, Topology, 3 Suppl. 1, (1964), 81—96.

[10] S. Yuan: On logarithmic derivatives, Bull. Soc. Math. France, 96, (1968), 41—52.

Derivationの対角化について

岐阜教育大　山内紀夫

$(A, \mathfrak{m})$ を 標数0の体をふくむ complete local ring, Kをその係数体とする．AのK-derivation δ が 対角化可能であるとは 次の条件をみたすことをいう：

Kの元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と $\mathfrak{m}$の生成元 $x_1, \cdots, x_n$で $\delta x_i = \alpha_i x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をみたすものが存在する．

δが対角化可能であれば 任意のνについて，δによって定まるK-linear map $\overline{\delta_\nu} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\nu \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\nu$ は当然対角化可能である．そこでこの逆の問題を考える．すなわち

νを自然数とする．δが $\delta\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ をみたすAのK-derivationであって δの定めるK-linear map $\overline{\delta_\nu} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\nu \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\nu$ が対角化可能であれば δ自身が対角化可能であるか？

Reiffen は[1]で $\overline{\delta_\nu}$の固有値がすべて自然数であって νが“充分”大きければこれが正しいことを示している(cf. 系2)．ここでは $\nu = 2$の場合に $\overline{\delta_2}$の固有値がすべて実数であってさらにある条件をみたせばやはりこの問題が正し

いことを証明する．結果を正確に述べると

定理　$(A, \mathfrak{m})$ を complete local ring で $\mathbb{C}$ を係数体にもつものとし δ を A の $\mathbb{C}$-derivation とする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ と $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{m}$ が次の条件をみたしていると仮定する．

$\delta x_i \equiv \alpha_i x_i \mod. \mathfrak{m}^2 \ (\forall i), \mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_n) A,$

$\forall i$ について，$m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}, \ \sum_j m_j \alpha_j = \alpha_i$

$\Rightarrow \ \alpha_i = 1, \ \alpha_j = 0 \ (j \neq i).$

このとき $\mathfrak{m}$ の生成元 $y_1, \cdots, y_n$ で $\delta y_i = \alpha_i y_i \ (\forall i)$ となるものが存在する．

証明のためにまず Reiffen による次の補題を述べておく．

補題1（[1] Satz 5）　$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ とし $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の生成する semigroup $H = \mathbb{N}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{N}\alpha_n$ の元に小さい方から番号をつけておく，$H = \{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}, r_k < r_{k+1}$．$A = \mathbb{C}[\![X_1, \cdots, X_n]\!]$ の monomial に $\deg X_i = \alpha_i$ として次数を定め，I_k を $\{M \mid$ monomial で $\deg M \geq r_k\}$ で生成される A の ideal とする．A の $\mathbb{C}$-derivation δ が各 i について，$\delta X_i \equiv \alpha_i X_i \mod. I_{k_i}, \ {}^\exists r_{k_i} > \alpha_i$ をみたせば $\mathfrak{m}_A$ の生成元 $Z_1, \cdots, Z_n$ で $\delta Z_i = \alpha_i Z_i \ (\forall i)$ となるものが存在する．

証明　[1] では $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ がすべて自然数と仮定しているが それと同じ方法で証明できる. 概略を述べると filtration: $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$ による topology は m_A-adic topology と同じであることと M が homogeneous element of deg. r_k なら $\delta M \equiv r_k M \bmod . I_{k+1}$ が成立つことに注意する. i を固定し, $k = k_i$, $r = r_k$ とおく. $\delta X_i \equiv \alpha_i X_i + Y_{ik}$ $\bmod . I_{k+1}$, Y_{ik} は homogeneous, $\deg Y_{ik} = r$ とする. 仮定から $r - \alpha_i > 0$ だから $M_{ik} = (\alpha_i - r)^{-1} Y_{ik}$ とおくことができる. このとき $\delta(X_i + M_{ik}) \equiv \alpha_i (X_i + M_{ik}) \bmod . I_{k+1}$. したがって この操作をくりかえしていけば Z_i が得られる.

系2　ν を自然数, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ とし $\nu >$ $\max\{\alpha_i/\alpha_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ が成立つと仮定する. δ が $A = \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$ の $\mathbb{C}$-derivation で, $\delta X_i \equiv \alpha_i X_i \bmod . m^\nu$ $(\forall i)$ をみたしていれば, m_A の生成元 $Z_1, \cdots, Z_n$ で $\delta Z_i = \alpha_i Z_i$ $(\forall i)$ となるものが存在する.

証明 仮定から m^ν は degree $> \max\{\alpha_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ である monomials で生成されているから 補題1より結論が得られる.

定理の証明のために もう一つ補題を証明する.

補題3. kを体, $\mathrm{ch}\, k = 0$とし, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$が次の条件をみたすと仮定する: $\forall i$について, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$,

$\sum_j m_j \alpha_j = \alpha_i \Rightarrow \alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0\ (j \neq i)$.

δを$A = k[\![X_1, \dots, X_n]\!]$の$k$-derivationで$\delta X_i \equiv \alpha_i X_i$ mod. $\mathfrak{m}_A^\nu$ ($\nu \geq 2$, $i = 1, \dots, n$)が成立つとする. このとき $\forall \beta_1, \dots, \beta_n \in k$について Aのk-derivation ∂で次をみたすものが存在する.

$$\partial X_i \equiv \beta_i X_i \ \mathrm{mod.}\ \mathfrak{m}_A^\nu \ (\forall i), \quad \partial\delta = \delta\partial.$$

証明. $j = 1, 2, \cdots$について $\partial_j \in \mathfrak{m}_A^j \mathrm{Der}_k(A)$を, $\partial^{(k)} = \partial_1 + \cdots + \partial_k$が $\partial^{(k)} X_i \equiv \beta_i X_i$ mod. $\mathfrak{m}_A^\nu$ $(\forall i)$,

$(\partial^{(k)}\delta - \delta\partial^{(k)})(x) \equiv 0$ mod $\mathfrak{m}_A^{k+1}$ $(\forall x \in A)$ をみたすようにとれればよい. まず $\delta_1 = \sum_i \beta_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ とする. $\partial_1, \cdots, \partial_k$がとれたとする. ($\partial_2 = \cdots = \partial_{\nu-1} = 0$としてよい).

$$(\partial^{(k)}\delta - \delta\partial^{(k)})(X_i) \equiv \sum_{\substack{e_{i1}+\cdots+e_{in} \\ = k+1}} c_{i, e_{i1} \cdots e_{in}} X^{e_{i1}} \cdots X_n^{e_{in}} \ \mathrm{mod.}\ \mathfrak{m}^{k+2}$$

とすると 仮定から $\alpha_1 e_{i1} + \cdots + \alpha_n e_{in} - \alpha_i \neq 0$ $(\forall i)$であるから

$$\partial_{k+1} = \sum_i \Big(\sum_{e_{i1} \cdots e_{in}} (\alpha_1 e_{i1} + \cdots + \alpha_n e_{in} - \alpha_i)^{-1} c_{i, e_{i1} \cdots e_{in}} \Big) \frac{\partial}{\partial X_i}$$

とおけばよい.

定理の証明. A は formal power series $\mathcal{O}=\mathbb{C}[\![X_1,\cdots,X_n]\!]$ の homomorphic image として表わされる：$A=\mathcal{O}/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^2$, $x_i=X_i \bmod \mathfrak{a}$. δ に対して $\mathcal{O}$ の $\mathbb{C}$-derivation D で $\delta=D \bmod \mathfrak{a}$ となるものが存在する $(D\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a})$. この D は $DX_i\equiv\alpha_i X_i \bmod \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^2$ をみたす. D について $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ の生成元 $Y_1,\dots,Y_n$ で $DY_i=\alpha_i Y_i$ であるものがとれればよい. したがって $A=\mathbb{C}[\![x_1,\cdots,x_n]\!]$ としてよい. $\alpha_1<\cdots<\alpha_n$ とし $\beta_n>0$ を $\beta_n>\alpha_n-\alpha_1$ である様にとる. $\gamma=\alpha_n+\beta_n$, $\beta_i=\gamma-\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$ とおくと $0<\beta_n<\beta_{n-1}<\cdots<\beta_1$, $\beta_1/\beta_n<2$.

この δ, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, $\beta_1,\cdots,\beta_n$ に対して補題3の ∂ をとり $\Delta=\delta+\partial$ とおくと $\Delta x_i\equiv\gamma x_i \bmod \mathfrak{m}^2$, $\partial x_i\equiv\beta_i x_i \bmod \mathfrak{m}^2$ $(\forall i)$ だから系2より Δ, ∂ はともに対角化できる. しかも $\Delta\partial=\partial\Delta$ だから $\mathfrak{m}$ の生成元 $y_1,\cdots,y_n$ で $\Delta y_i=\gamma y_i$, $\partial y_i=\beta_i y_i$ $(\forall i)$ となるものが存在する. したがって $\delta y_i=\alpha_i y_i$.

(注) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ についての条件はたとえば次の場合に成立する： (1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ が $\mathbb{Z}$ 上1次独立 又は (2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n>0$ で semigroup $\mathbb{N}\alpha_1+\cdots+\mathbb{N}\alpha_n$ の minimal generators になっている.

References

[1] H. -J. Reiffen, Kontrhierbare Analytische Algebren. Math. Z. 109(1969)

[2] G. Scheja und H. Wiebe, Über Derivationen von Analytischen Algebren. Symp. Math. XI(1973)

[3] G. Scheja und H. Wiebe, Zur Chevalley Zerlegung von Derivationen. Manuscripta Math. 33(1980)

Fibre product 環における associated prime 及び Cohen Macaulay, Gorenstein 性について

高知大学理学部　小駒哲司

1. 序

Fibre product の概念は古くから知られており、可換環論においても、度々利用はされて来たものの、その基本的である割には、ここでの応用が少ないように思われる。実際、dualizing complex を構成するに当たり、環を fibre product に分解して表わしておくと分析し易かったり[1]、素イデアル鎖に関する問題の例を作るのにこれが有効であることを最近示したが[2]、その過程で、可換環論における fibre product についてまとまった結果はほとんど見出し得なかった。そこで基本的なことをまとめておくのは意味がある、と考えたわけであるが、その一つとしてここでは fibre product 環の associated prime がもとの環との関係でどのように記述できるかを述べる。

associated prime がわかれば、Cohen Macaulay 性は原理的に

はその条件で帰納的に記述できるわけであるが、$\psi_i\ (i=1,2)$ が全射の場合の完全列

$$0 \longrightarrow A_1 \times_{A_0} A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

から出てくるスタンダードなもの以外に、簡単又は印象深い形で書ける Cohen Macaulay 性の特徴付けは得られていないのでここでは省略する。

Gorenstein 性については、少々面白い結果があるので、最後に記しておく。

証明は方針だけを述べるに止めた。§2 の詳しいことは、[3] を参照して下さい。

2. Associated primes.

可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

を考え、A が φ_1 と φ_2 の fibre product になっているとしよう。この稿を通して、記号 A, A_0, A_i, φ_i, ψ_i, $\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_i$ $(i=1,2)$ 及び $\Phi = \varphi_1\circ\psi_1 = \varphi_2\circ\psi_2$ は常にこれらのことを意味するとしておく。

A の associated prime について最初に思いつくのは、次のことであろう。

$$S_i = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid \mathfrak{p} = \psi_i^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ for some } \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{A_i}\mathfrak{a}_i\} \quad (i=1,2)$$

とおいた時．

Lemma 2.1　　$S_1 \cup S_2 \subseteq \mathrm{Ass}_A A$.

証明には、$\mathfrak{p} \in S_i$ について $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\, aA$ となる a の存在を言ってしまうのであるが．次の Lemma によって $\mathfrak{p}$ で localize しておけば取扱い易い。

Lemma 2.2 [2, Corollary 1.5]

F を flat な A-algebra とすれば，F は $\varphi_1 \otimes_A F$ と $\varphi_2 \otimes_A F$ の fibre product である。

さて．Lemma 2.1 における包含関係の差が問題であるが、一般には次のことしか言えない。

Proposition 2.3　　$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A - (S_1 \cup S_2)$ については，$\mathfrak{q}_i \in \mathrm{Ass}_{A_0} A_0$ $(i=1,2)$ で，$\varphi_i^{-1}(\mathfrak{q}_i) \in \mathrm{Ass}_{A_i} A_i$ かつ，$\Phi^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}$ となるものが存在する。

Remark 2.4　　上で $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ と取れないかと考えると思うが．これは次の例によって否定的。

A を整域，x, y を変数として，$A_1 = A[x]$，$A_2 = A[y]$，$A_0 = A[x,y]/(xy)$ とおけば．自然な写像で $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ $S_1 = S_2 = \phi$ となることがわかる。$\mathfrak{p} = 0$ について，$\mathfrak{q}_1$，$\mathfrak{q}_2$ としては，$\mathfrak{q}_1 = yA_0$，$\mathfrak{q}_2 = xA_0$ 以外にない。

Proposition 2.3 の直接の結果として，

Corollary 2.5　　$i = 1$ 又は 2 について，

$\mathfrak{q}\in \mathrm{Ass}_{A_0}A_0$ に対し $\varphi_i^{-1}(\mathfrak{q})\notin \mathrm{Ass}_{A_i}A_i$ である

とする。このとき，$\mathrm{Ass}_A A = S_1\cup S_2$ である。

が得られるが，これは Sharp の予想 [4, (4.4)] を associated prime についてスタンダードな場合に帰着するのに有効である。

φ_1 と φ_2 が全射の場合には，Remark 2.4 の問は肯定的となる。すなわち，

Proposition 2.6 φ_1 と φ_2 が全射であれば，

$\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}_A A-(S_1\cup S_2)$ について $\varphi_i^{-1}(\mathfrak{q})\in \mathrm{Ass}_{A_i}A_i$，$\Phi^{-1}(\mathfrak{q})=\mathfrak{P}$ となる $\mathfrak{q}\in \mathrm{Ass}_{A_0}A_0$ が存在する。$(i=1,2)$

ここで，この逆が成立しないかと考えると思うが，これも否定的である。例えば，

k を体，x,y,z を変数として，$A_1=k[x,y,z]/(x^2,xy,xz)$

$A_2=k[x,y,z]/(xz,yz,z^2)$，$A_0=k[x,y,z]/(x^2,xy,xz,yz,z^2)$

を考えれば，$\mathfrak{q}=(x,y,z)A_0\in \mathrm{Ass}_{A_0}A_0$ で

$$\varphi_i^{-1}(\mathfrak{q})=(x,y,z)A_i\in \mathrm{Ass}_{A_i}A_i \quad (i=1,2)$$

であるが，$\Phi^{-1}(\mathfrak{q})\notin \mathrm{Ass}_A A$ であることがわかる。

φ_1 と φ_2 が全射の場合に associated prime をとに角書き表わしてみれば，

$$T=\left\{\mathfrak{P}\in \mathrm{Spec}A \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\exists}a_i\in A_i\ (i=1,2)\ {}^{\exists}\mathfrak{q}\in \mathrm{Spec}A_0 \text{ s.t. } \varphi_1(a_1)=\varphi_2(a_2)=a_0 \\ \varphi_i^{-1}(\mathfrak{q})a_i=0,\ a_0A_0\mathfrak{q}\neq 0 \text{ で } \mathfrak{P}=\Phi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}\right\}$$

とおいて.

Theorem 2.7　φ_1とφ_2が全射であれば,

$$\mathrm{Ass}_A A = T \cup S_1 \cup S_2 ,$$

を得る。

3. Gorenstein性

Gorenstein性については,少し面白いことが言えるので,結果を書いておく。

Theorem 3.1.　φ_1とφ_2が全射であって,A_1とA_2がGorensteinのとき,$A=A_1 \times_{A_0} A_2$がGorensteinとなる条件は次のどちらかが成立することである。

(1) trivial すなわち,φ_1又はφ_2が同型,

(2) A_iのregular element a_iにより,$\mathrm{Ker}\,\varphi_i = a_i A_i$ $(i=1,2)$と書けている。

このとき,A_0も必然的にGorensteinである。

(2)の場合が問題であるが,必要条件はlocal cohomologyのexact sequenceを考えればよい。充分であることを示すには,regular sequenceで割ってA_0がartin環の場合に帰着させるのは容易である。$\dim A = 1$としてよいわけだが,更にregular elementで割ってsocleの次元を計算するのである。これには,次がkey lemmaとなる。

Lemma 3.2 　$\varphi_1 : A_1 \to A_0$, $\varphi_2 : A_2 \to A_0$ を全射準同型とし，それぞれ A_1, A_2 について regular element となる $a \in \mathfrak{a}_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_1$, $b \in \mathfrak{a}_2 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$ があるとする。今，$x = (a, -b) \in A = A_1 \times_{A_0} A_2$ とおけば，A/xA は，$A_1/a\mathfrak{a}_1 \times_{A_0} A_2/b\mathfrak{a}_2$ の次によって定義される関係で決まる剰余環と同型である。

$$(ay \bmod a\mathfrak{a}_1,\ 0) \sim (0,\ bz \bmod b\mathfrak{a}_2)$$

ここで，$y \in A_1$ と $z \in A_2$ は $\varphi_1(y) = \varphi_2(z)$ となるもの。

Theorem 3.1 は，A_1 と A_2 が Gorenstein とは限らない場合にも（Cohen Macaulay は仮定するが），canonical module を使うことによって一般化できそうである。

References

[1] T. OGOMA, Existence of dualizing complexes, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984) 27–48

[2] T. OGOMA, Fibre product of Noetherian Rings and their applications, to appear.

[3] T. OGOMA, Associated primes of fibre product rings and a conjecture of Sharp in lower dimensional cases, to appear.

[4] R.Y. Sharp, Necessary condition for the existence of dualizing complex in commutative algebra, Lect. Notes. Math. 740 Springer-Verlag 1979.

Unconditioned strong d-sequences in a local ring*)

東京理科大学研究生　山岸規久道 (Kikumichi Yamagishi)

In this note, we will discuss the behaviours of unconditioned strong d-sequences in a local ring and furthermore try to study the Rees modules and the associated graded modules of primary ideals as applications of such discussions.

§1. Let A be a commutative ring and E an A-module. Let $a_1, a_2, \ldots, a_s$ be a sequence of elements in A and denote by q the ideal of A generated by all a_i's. For convenience' sake we will use the next notations:

(i) $q_k = (a_1, \ldots, a_k)$ for $1 \leqq k \leqq s$ and $q_0 = (0)$;

(ii) $q_I = (a_i \mid i \in I)$ for $I \subset \{1, \ldots, s\}$ and $q_\emptyset = (0)$.

Recall that $a_1, a_2, \ldots, a_s$ is called a d-sequence on E if the equality

$$q_{i-1}E : a_i a_j = q_{i-1}E : a_j$$

holds for every $1 \leqq i \leqq j \leqq s$ [5].

Definition (1.1)([8]). We will say that $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form an unconditioned strong d-sequence (henceforth a USD-sequence) on E if $a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \ldots, a_s^{n_s}$ form a d-sequence on E in any order for every $n_1, n_2, \ldots, n_s > 0$.

*) This shall appear in the joint work [2] with Goto.

Let $K^{\cdot}(a_1, \ldots, a_s; E)$ (simply say $K^{\cdot}$) be the complex defined by

$$K^p(a_1, \ldots, a_s; E) = K_{s-p}(a_1, \ldots, a_s; E)$$

for each $p \in \mathbb{Z}$. $H^{\cdot}$ is the homology of $K^{\cdot}$. We put

$$H^p_{a_1,\ldots,a_s}(*) = \varinjlim_m H^p(a_1{}^m, \ldots, a_s{}^m; *)$$

for all $p \in \mathbb{Z}$. We simply denote this cohomology functor by $H^p_{\underline{a}}(*)$. At first, we have the following, see [9]:

Proposition (1.2). Let $a_1, a_2, \ldots , a_s$ form a USD-sequence on E . Then $q\, H^p_{\underline{a}}(E) = (0)$ for all $p \neq s$.

Proposition (1.3). Under the assumption as above (1.2), suppose that A is Noetherian and E is finitely generated over A and that $qE \neq E$. Then either (i) or (ii) has happened:

(i) $ht_E q = s$, where $ht_E q = \inf_{p \in \mathrm{Supp}_A E\ ,\ p \supset q} \dim_{A_p} E_p$;

(ii) qE is contained in some one of primary components of the zero module (0) which belongs a minimal prime ideal of E . Therefore, if $H^0_{\underline{a}}(E) = (0)$, then $ht_E q = s$.

Example (1.4). Let $A = k[a_1, \ldots , a_s, b_1, \ldots , b_t]$ be a polynomial ring over a field k and put $E = A/I$, where $I = (a_1, \ldots , a_s) \cap (b_1, \ldots , b_t)$. Then $a_1, a_2, \ldots , a_s$ form a USD-sequence on E and $H^0_{\underline{a}}(E) = (b_1, \ldots , b_t)E$. Furthermore $a_1, a_2, \ldots , a_s$ form an $\bar{E}$-regular sequence, where $\bar{E} = E/H^0_{\underline{a}}(E)$.

In view of our interests, we wishes to handle the case that

A is a Noetherian local ring and $ht_E q = s$, especially $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form a system of parameters for E, that is $\dim_A E = s$.

§2. To end of this note, let us assume that A is a Noetherian local ring with maximal ideal m, E is a finitely generated A-module and $a_1, a_2, \ldots, a_s$ form a system of parameters for E. $H_m^i(*)$ stands for the i-th local cohomology functor relative to m for each $i \in \mathbb{Z}$.

Let $R_q(E)$ and $G_q(E)$ denote the Rees and the associated graded modules of E with respect to q, respectively. Put $N = mR_q(A) + R_q(A)_+$ and $M = mG_q(A) + G_q(A)_+$, the unique graded maximal ideals.

One of striking properties of a USD-sequence a_i's on E is that each homogeneous pieces of the local cohomology modules of $R_q(E)$ and $G_q(E)$ relative to N and M are completely described by the local cohomology modules $H_m^i(E)$'s of E, see §3. However this feature appears in other sequences, namely pS-sequences [1] and standard s. o. p.'s [6][7]. Now we will clarify the relation between such sequences.

Definition (2.1). We will say that E has finite local cohomology if the local cohomology modules $H_m^i(E)$ are finitely generated (i.e., the length $l_A(H_m^i(E))$ is finite) for all $i \neq s$.

In case E has finite local cohomology, we define that

$$I(E) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} . h^i(E) \quad ,$$

here $h^i(E) = l_A(H^i_m(E))$ for $i \neq s$.

Definition (2.2). We define that

$$I(a_1, \cdots, a_s; E) = l_A(E/qE) - e_0(q; E) \quad ,$$

where $e_0(q; E)$ denotes the multiplicity of E relative to q , that is the rational number $e_0(q; E)/s!$ coincides with the leading coefficient of the Hilbert-Samuel polynomial of E relative to the ideal q .

Definition (2.3)([1]). $a_1, a_2, \cdots, a_s$ is called a pS-sequence on E if $a_j H^i_m(E/q_I E) = (0)$ holds for every $I \subsetneqq \{1, \cdots, s\}$, $j \notin I$ and $0 \leqq i < s - \#I$.

Definition (2.4)([6] and [7]). $a_1, a_2, \cdots, a_s$ is called a standard s. o. p. in the Schezel's sense if E has finite local cohomology and the equality $I(a_1, \cdots, a_s; E) = I(E)$ holds, and is called a standard s. o. p. in the Trung's sense if the equality $I(a_1, \cdots, a_s; E) = I(a_1{}^2, \cdots, a_s{}^2; E)$ holds.

Then we have

Theorem (2.5). The following are equivalent.

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_s$ form a USD-sequence on E .

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_s$ form a pS-sequence on E .

(3) $a_1, a_2, \cdots, a_s$ form a standard s. o. p. in the Schenzel's sense for E .

(4) $a_1, a_2, \cdots, a_s$ form a standard s. o. p. in the Trung's sense for E .

As an immediate consequence of (2.5) we get the following

Corollary (2.6). If E has finite local cohomology, then there exists an integer $t > 0$ such that every s. o. p. for E contained in m^t form a USD-sequence on E.

§3. Let us keep the same notations as preceding section. Then we have

Theorem (3.1)([8]). Let $a_1, a_2, \dots, a_s$ form a USD-sequence on E. Then the following are held.

(1) $[H_M^i(G_q(E))]_n = H_m^i(E)$ $(n = -i)$ and $[H_M^i(G_q(E))]_n = (0)$ $(n \neq -i)$ for all $0 \leqq i < s$.

(2) $[H_M^s(G_q(E))]_n = (0)$ for all $n > -s$.

(3) For any $0 \leqq i \leqq s$, it follows that

$$\begin{aligned}[H_N^i(R_q(E))]_n &= H_m^0(E) \quad (i = 0,\ n = 0)\\ &= H_m^{i-1}(E) \quad (3 \leqq i \leqq s,\ 2 - i \leqq n \leqq -1)\\ &= (0) \quad (\text{else}).\end{aligned}$$

(4) $[H_N^{s+1}(R_q(E))]_n = (0)$ for all $n \geqq 0$.

(5) $(qR_q(A) + R_q(A)_+)H_N^i(R_q(E)) = (0)$ for all $0 \leqq i \leqq s$.

We will say that $a_1, a_2, \dots, a_s$ form a weak E-sequence if $q_{i-1}E : a_i \subset q_{i-1}E : m$ holds for every $1 \leqq i \leqq s$. As applications of above (3.1) we obtain the next corollaries.

Corollary (3.2)([8]). $G(E)_M$ is a Buchsbaum G_M-module if and only if $a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_s^{n_s}$ form a weak E-sequence on E

in any order for all $n_1, n_2, \cdots, n_s > 0$.

Corollary (3.3). $R_q(E)$ is a Cohen-Macaulay R-module if and only if $a_1, a_2, \cdots, a_s$ form a USD-sequence on E and $H^i_m(E) = (0)$ for all $i \neq 1, s$.

Corollary (3.4)([8]). Let E has finite local cohomology and $a_1, a_2, \cdots, a_s$ a USD-sequence on E . Then $R_q(E)_N$ also has finite local cohomology.

Soppose that depth $E > 0$. Then by (3.1) we know that

$$[H^i_N(R_q(E))]_n = (0) \quad (n \geqq 0)$$

for every $i \in \mathbb{Z}$. This shows the Veronese submodule $R_{q^n}(E)$ of $R_q(E)$ of suitable order $n > 0$ becomes a Cohen-Macaulay module. Therefore we have the following

Theorem (3.5)(Goto). The following are equivalent.

(1) E has finite local cohomology and depth $E > 0$.

(2) There exists an m-primary ideal $\mathfrak{a}$ of A such that the Rees module $R_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay.

This fact moves us to study the Rees modules of primary ideals. The next section is devoted to discussing them.

§4. Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of A and assume that $\mathfrak{a} \neq A$ and $l_A(E/\mathfrak{a}E)$ is finite. Notice that, in this case, the ideal $\mathfrak{a}$ + $\mathrm{Ann}_A E$ is an m-primary ideal of A . Let $R_{\mathfrak{a}}(E)$ and $G_{\mathfrak{a}}(E)$ be the Rees module and the associated graded module of E with respect to $\mathfrak{a}$, respectively. $\underline{N}$ (resp. $\underline{M}$) denotes the unique graded maximal ideal of $R_{\mathfrak{a}}(A)$ (resp. $G_{\mathfrak{a}}(A)$).

Proposition (4.1). Proj $R_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) if and only if so is Proj $G_{\mathfrak{a}}(E)$.

Proof. It suffices to show the if part. Let $P \in$ Proj $R_{\mathfrak{a}}(E)$. As $P \not\supset R_{\mathfrak{a}}(A)_+$ we can find a graded prime ideal P' such that $P' \not\supset R_{\mathfrak{a}}(A)_+$ and $P' \supset P + mR_{\mathfrak{a}}(A)$. Put $Q = P'/\mathfrak{a}R_{\mathfrak{a}}(A)$. Then $G_{\mathfrak{a}}(E)_Q$ is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) by our assumption. Notice that as $P' \not\supset R_{\mathfrak{a}}(A)_+$, $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{a}}(A)_{P'} = aR_{\mathfrak{a}}(A)_{P'}$ for some element a such that $aX \notin P'$ (here we consider $R_{\mathfrak{a}}(A)$ as a subring $A[\{aX \mid a \in \mathfrak{a}\}]$ of the polynomial ring $A[X]$). The element a is a non-zero divisor on $R_{\mathfrak{a}}(E)_{P'}$, and this shows $R_{\mathfrak{a}}(E)_{P'}$ is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) as $G_{\mathfrak{a}}(E)_Q = R_{\mathfrak{a}}(E)_{P'}/\mathfrak{a}R_{\mathfrak{a}}(E)_{P'}$. Therefore $R_{\mathfrak{a}}(E)_P$ also is Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) because $P' \supset P$.

We will say that E is equidimensional if $\dim A/p = \dim_A E$ for all $p \in \mathrm{Min}_A E$. Then we have the following

Theorem (4.2). The following are equivalent.

(1) $R_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{N}}$ has finite local cohomology.

(2) E has finite local cohomology and Proj $R_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay.

(3) $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ has finite local cohomology.

(4) $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ is equidimensional and Proj $G_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay.

Proof. Passing to $A/\mathrm{Ann}_A E$ we may assume that $\mathfrak{a}$ is an m-primary ideal of A. Then (3) $\Longleftrightarrow$ (4) is obvious. Put $L = R_{\mathfrak{a}}(E)_+$ and consider the next two exact sequences of graded $R_{\mathfrak{a}}(A)$-modules.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow R_{\mathfrak{a}}(E) \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow L(1) \longrightarrow R_{\mathfrak{a}}(E) \longrightarrow G_{\mathfrak{a}}(E) \longrightarrow 0$$

As $[G]_0$ is Artinian, we get (1) $\Longrightarrow$ (3) from these exact sequences. By (4.1) we have (4) $\Longrightarrow$ (2). Now let us prove (2) $\Longrightarrow$ (1). By (4.1) again we may assume that A is complete. Let $P \in \mathrm{Supp}\, R_{\mathfrak{a}}(E)$ such that $P \neq \underline{N}$. If $P \cap A = m$, then P belongs to Proj $R_{\mathfrak{a}}(E)$, whence $R_{\mathfrak{a}}(R)_P$ is Cohen-Macaulay. So we assume that $P \cap A \neq m$. Then $R_{\mathfrak{a}}(E)_P = (E_p \otimes A_p[X])_{PA_p[X]}$ clearly, where $p = P \cap A$. As E_p is Cohen-Macaulay, we see that $R_{\mathfrak{a}}(E)_P$ is Cohen-Macaulay. Since E is faithful and equidimensional, $R_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{N}}$ also is equidimensional. Thus $R_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{N}}$ has finite local cohomology.

Corollary (4.3). Suppose that $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ is equidimensional. Then the following are equivelent: (i) $R_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{N}}$ has finite local cohomology; (ii) Proj $R_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay; (iii) $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ has finite local cohomology; (iv) Proj $G_{\mathfrak{a}}(E)$ is Cohen-Macaulay.

Proof. These come at once from (4.1) and (4.2).

Example (4.4). Unless the assumption that $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ is equi-dimensional, our theorem is not necessarily true.

For example, let

$$A = k[\![X, Y, Z]\!]/(X) \cap (Y, Z) \quad ,$$

where k is a field. Then $\mathrm{Proj}\ G_m(A)$ is Cohen-Macaulay though A does not have finite local cohomology.

Finally we will describe one more theorem.

Theorem (4.5). Suppose that $G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}$ has finite local co-homology. If $I(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) = I(E)$ holds, then $h^i(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) = h^i(E)$ for every $i \neq s$.

Proof. Use induction on $s = \dim_A E$. We may assume that $\mathfrak{a}$ is an m-primary ideal of A and furthermore that A/m is in-finite. Choose a minimal reduction $q = (a_1, \ldots , a_s)$ of $\mathfrak{a}$. Let h_i be the initial form of a_i in $G_{\mathfrak{a}}(A)$. As $I(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) = I(E)$ by our assumption, we can find an integer $u > 0$ such that

$$I(h_1^{n_1}, \ldots , h_s^{n_s}; G_{\mathfrak{a}}(E)) = I(a_1^{n_1}, \ldots , a_s^{n_s}; E)$$

for every $n_i \geqq u$. Hence we get that

$$(a_1^{n_1}, \ldots , a_s^{n_s})E \cap \mathfrak{a}^n E = \sum_{i=1}^{s} a_i^{n_i} \mathfrak{a}^{n-n_i} E$$

for all $n \in \mathbb{Z}$ and $n_i \geqq u$.

Claim 1. $a_1^{n_1} E \cap \mathfrak{a}^n E = a_1^{n_1} \mathfrak{a}^{n-n_1} E$ for all $n \in \mathbb{Z}$ and $n_i \geqq u$.

Claim 2. $h^0(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) = h^0(E)$.

Now consider the following exact sequences:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{a_1{}^u} E \longrightarrow E/a_1{}^uE \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow G_{\mathfrak{a}}(E)(-u) \xrightarrow{h_1{}^u} G_{\mathfrak{a}}(E) \longrightarrow G_{\mathfrak{a}}(E/a_1{}^uE) \longrightarrow 0$$

As $a_i{}^u$'s and $h_i{}^u$'s form USD-sequences, we get the next exact sequences:

$$0 \longrightarrow H_m^i(E) \longrightarrow H_m^i(E/a_1{}^uE) \longrightarrow H_m^{i+1}(E) \longrightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_{\underline{M}}^i(G_{\mathfrak{a}}(E)) \rightarrow H_{\underline{M}}^i(G_{\mathfrak{a}}(E/a_1{}^uE)) \rightarrow H_{\underline{M}}^{i+1}(G_{\mathfrak{a}}(E))(-u) \rightarrow 0$$

These exact sequences yield that

$$\begin{aligned} h^{i+1}(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) &= h^i(G_{\mathfrak{a}}(E/a_1{}^uE)_{\underline{M}}) - h^i(G_{\mathfrak{a}}(E)_{\underline{M}}) \\ &= h^i(E/a_1{}^uE) - h^i(E) \\ &= h^{i+1}(E) \end{aligned}$$

by the hypothesis of induction on s and applying the induction on i.

References

[1] M. Brodmann, Local cohomology of certain Rees- and form-rings I, J. Algebra, 81 (1983), 29-57.

[2] S. Goto and K. Yamagishi, The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology, in preprint.

[3] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, Approximation complexes of blowing-up rings, J. Algebra, 74 (1982), 466-493.

[4] J. Herzog, A. SImis and W. V. Vasconcelos, Approximation complexes of blowing-up rings, II, J. Algebra, 82 (1983), 53-83.

[5] C. Huneke, The theory of d-sequences and powers of ideals, Ad. in Math., 46 (1982), 249-279.

[6] P. Schenzel, Standard systems of parameters and their blowing-up rings, I. reine und angew. Math., 344 (1983), 201-220.

[7] N. V. Trung, Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules, in preprint.

[8] K. Yamagishi, Unconditioned strong d-sequences, RIMS Kokyu-roku, 484 (1983), 11-21.

[9] K. Yamagishi, Cohomology modules defined by an unconditioned strong d-sequence, RIMS Kokyuroku, to appear.

多項式環上のある derivation について

福井大・教育　　小野田信春

標数 0 の代数閉体 k 上の $(n+1)$ 次元アフィン空間 $\mathbb{A}_k^{n+1}$ に G_a が作用しているとする：

$$\rho : G_a \times \mathbb{A}_k^{n+1} \to \mathbb{A}_k^{n+1}$$

$\mathbb{A}_k^{n+1}$ の座標環を $A := k[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ としてこの作用を座標環の方で表現すれば

$$\tilde{\rho} : A \longrightarrow A[t]$$

となるが、ここで $f \in A$ に対し

$$\tilde{\rho}(f) = D_0(f) + D_1(f)t + \cdots + D_m(f)t^m + \cdots$$

と表わすとき、$\mathbb{D} := \{D_0, D_1, \cdots, D_m, \cdots\}$ は A 上の *locally finite iterative higher derivation* になる。今は標数 0 と仮定しているから、$D := D_1$ とおくとき $D_m = \frac{1}{m!}D^m$ である。従って、$f \in A$ に対し

$$\tilde{\rho}(f) = \sum_m \frac{1}{m!} D^m(f)\, t^m$$

となり、$D_0 = id$ に注意すれば、不変部分環 A^{G_a} は次の A^D と一致することがわかる：

$$A^D := \{ f \in A \mid D(f) = 0 \}$$

$D: A \to A$ は k-derivation であるから、A^D はその constant subring である。

以下では特に、G_a が $GL_{n+1}(k)$ の1次元閉部分群として作用している場合を考える。このとき、derivation D は $(n+1)$ 次正方行列 M で表現される：

$$D\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

十分大きな m に対して $D^m = 0$ ゆえ、M は巾零である。従って M のジョルダン標準形に現れる各ジョルダン細胞は次の形になる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ここでは特別な場合として、M 自身が上の形をしているとき（ジョルダン細胞が1つのとき）を考察する。即ち、D が

(*) $D(x_0) = 0,\ D(x_1) = x_0,\ \cdots\cdots,\ D(x_n) = x_{n-1}$

で定義される場合を考える。これを G_a の作用で示せば

(**) $\lambda(x_i) = x_i + \lambda x_{i-1} + \frac{1}{2}\lambda^2 x_{i-2} + \cdots + \frac{1}{i!}\lambda^i x_0 \quad (\lambda \in G_a,\ 0 \leq i \leq n)$

ということと同値である。ところで、G_a が $GL_{n+1}(k)$ の閉部分群として作用しているときは、$A^{G_a} = A^D$ は k 上有限生成となることが知られている（Weitzenböck の定理）。それでは

$\mathrm{Spec}(A^{G_a})$ はどのような多様体になるであろうか（例えば特異点の様子等）。この問題を考えるひとつの方法として、A^{G_a} の生成元を具体的に求めるということが挙げられる。以下では、G_a の作用が (**)（derivation の形では (*)）で定まる場合、これに対して得られた若干の結果について報告する。

まず、次の事実から始める：

<u>補題 1</u>　n 変数多項式環 $B = k[y_1, \cdots, y_n]$ 上の次で定義される k-derivation Δ を考える：

$$\Delta(y_1) = 1,\ \Delta(y_2) = y_1,\ \cdots,\ \Delta(y_n) = y_{n-1}$$

このとき

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{(-1)^k}{k!} y_1^k y_{j-k} + \frac{(-1)^{j-1}(j-1)}{j!} y_1^j \qquad (2 \leq j \leq n)$$

とおけば、$B^{\Delta} = k[\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \cdots, \tilde{\varphi}_n]$。

<u>証明</u>　$\Delta(\tilde{\varphi}_j) = 0$ $({}^{\forall}j)$ は容易に示せるから $B^{\Delta} \supseteq k[\tilde{\varphi}_2, \cdots \tilde{\varphi}_n]$ はよい。逆の包含関係を n についての帰納法で示す。まず定義より

$$\tilde{\varphi}_n = y_n - f_n \qquad f_n \in k[y_1, \cdots, y_{n-1}]$$

と表せることに注意する。従って、

$$B = k[y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \tilde{\varphi}_n]$$

よって、${}^{\forall}g \in B$ は

$$g = g_0 + g_1\tilde{\varphi}_n + \cdots + g_m\tilde{\varphi}_n^m \qquad ({}^{\forall}g_i \in k[y_1, \cdots, y_{n-1}])$$

とかける。このとき

$$\Delta(g) = \Delta(g_0) + \Delta(g_1)\tilde{\varphi}_n + \cdots + \Delta(g_m)\tilde{\varphi}_n^{\,m},\quad \Delta(g_i) \in k[y_1, \cdots, y_{n-1}]\ (\forall i)$$

ゆえ、$\Delta(g) = 0 \Rightarrow \Delta(g_i) = 0\ (\forall i) \Rightarrow g_i \in k[\tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_{n-1}]$

（∵帰納法の仮定）$\Rightarrow g \in k[\tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n]$ ∎

さて、$f \in A$ に対して

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_N \quad (f_i \text{ は } i \text{ 次同次部分})$$

とするとき

$$D(f) = D(f_0) + D(f_1) + \cdots + D(f_N)$$

かつ各 i に対して、$D(f_i)$ は 0 又は i 次同次多項式であるから $D(f) = 0 \Leftrightarrow D(f_i) = 0\ (\forall i)$ となる。従って、A^D は k 上同次多項式で生成されることがわかる。

<u>補題</u> 2　$\varphi_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{j-2} \frac{(-1)^k}{k!} x_0^{\,j-k-1} x_1^{\,k} x_{j-k} + \frac{(-1)^{j-1}(j-1)}{j!} x_1^{\,j} \quad (2 \leq j \leq n)$

とおくとき、$f \in A$ に対し、

$$f \in A^D \Leftrightarrow x_0^r f \in k[x_0, \varphi_2, \cdots, \varphi_n] \quad (\exists r \geq 0)$$

<u>証明</u>　f は同次多項式としてよい。$y_i = x_i/x_0$ とおく。f の homogeneous degree を N として

$$\tilde{f} := f/x_0^N = f(1, y_1, \cdots, y_n) \in k[y_1, \cdots, y_n]$$

とおけば、補題 1 で定義した Δ により

$$D(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta(\tilde{f}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} \in k[\tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n] \quad (\because \text{補題 } 1)$$

これより、直ちに結論を得る ∎

<u>系</u> 3　$B = k[x_0, \varphi_2, \cdots, \varphi_n]$ とおくと、$B \subseteq A^D$ かつ $B[\frac{1}{x_0}] = A^D[\frac{1}{x_0}]$

この系より次が従う：

<u>補題4</u>　$B \subseteq R \subseteq A^D$ かつ $x_0 A \cap R = x_0 R$ を満たす環 R があれば、$R = A^D$ である。

<u>証明</u>　系3より $R[\frac{1}{x_0}] = A^D[\frac{1}{x_0}]$。よって $\forall f \in A^D$ に対し $x_0^r f \in R$ ($\exists r \geqq 0$)。ところが、$x_0 A \cap R = x_0 R$ ゆえ、これより $f \in R$ を得る ∎

補題4を用いれば、$n \leqq 4$ の場合に次が示せる：

<u>定理5</u>　(1) $n = 1$ のとき　$A^D = k[x_0]$

(2) $n = 2$ のとき　$A^D = k[x_0, \varphi_2] \cong k[X, Y]$

(3) $n = 3$ のとき　$A^D = k[x_0, \varphi_2, \varphi_3, \psi] \cong k[X, Y, Z, U]/(X^2U + Y^3 + Z^2)$

但し、$\psi = \frac{1}{8}x_0^2 x_3^2 + x_0(\frac{1}{9}x_2^3 - \frac{1}{4}x_1x_2x_3) + \frac{1}{12}x_1^2(x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2) = (\frac{1}{9}\varphi_2^3 + \frac{1}{8}\varphi_3^2)/x_0^2$

(4) $n = 4$ のとき　$A^D = k[x_0, \varphi_2, \varphi_3, \xi, \eta]$

$$\cong k[X, Y, Z, U, V]/(X^3V + Y^3 + Z^2 + X^2YU)$$

但し、$\xi = x_0x_4 - x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 = (\varphi_4 + \frac{1}{2}\varphi_2^2)/x_0^2$

$\eta = x_0(\frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{3}x_2x_4) + \frac{1}{6}(x_1^2x_4 - x_1x_2x_3 + \frac{1}{3}x_2^3) = (\frac{1}{18}\varphi_2^3 + \frac{1}{4}\varphi_3^2 - \frac{1}{3}\varphi_2\varphi_4)/x_0^3$

<u>証明</u>　$n = 4$ の場合のみ示す。$R = k[x_0, \varphi_2, \varphi_3, \xi, \eta]$ とおく。$B \subseteq R \subseteq A^D$ は明らかゆえ、補題4より、$x_0 A \cap R = x_0 R$ を示せばよい。$\forall f \in R$ は適当な多項式 $F \in k[X, Y, Z, W]$ と $G \in k[X, Y, Z, W, V]$ により

$$f = F(\varphi_2, \varphi_3, \xi, \eta) + x_0 G(x_0, \varphi_2, \varphi_3, \xi, \eta)$$

と表わせることに注意する。$f \in x_0 A \cap R$ のとき、上式の両

辺に $x_0=0$ を代入すると

$$0 = F\left(-\frac{1}{2}x_1^2,\ \frac{1}{3}x_1^3,\ -x_1x_3+\frac{1}{2}x_2^2,\ \frac{1}{6}\left(x_1^2x_4-x_1x_2x_3+\frac{1}{3}x_2^3\right)\right)$$

ここで、

$$k\left[-\frac{1}{2}x_1^2,\ \frac{1}{3}x_1^3,\ -x_1x_3+\frac{1}{2}x_2^2,\ \frac{1}{6}\left(x_1^2x_4-x_1x_2x_3+\frac{1}{3}x_2^3\right)\right] \cong k[X,Y,Z,W]/\left(\frac{1}{9}X^3+\frac{1}{8}Y^2\right)$$

ゆえ、

$$F(X,Y,Z,W) = \left(\frac{1}{9}X^3+\frac{1}{8}Y^2\right)H(X,Y,Z,W) \qquad (\exists H\in k[X,Y,Z,W])$$

とかける。このとき

$$F(\varphi_2,\varphi_3,\xi,\eta) = \left(\frac{1}{9}\varphi_2^3+\frac{1}{8}\varphi_3^2\right)H(\varphi_2,\varphi_3,\xi,\eta)$$

であるが、

$$\frac{1}{9}\varphi_2^3+\frac{1}{8}\varphi_3^2 = \frac{1}{2}x_0^3\eta+\frac{1}{6}x_0^2\varphi_2\xi \ \in x_0R$$

が容易に示せるから、従って $F(\varphi_2,\varphi_3,\xi,\eta)\in x_0R$ となり、

ゆえに $f\in R$ となる ■

以上

Rees algebraでのd-sequenceの例

城北高　下田保博

1. 序文

Aが Noether 環で, $\underline{a}=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$がAの元の列であるとする。この元の列$\underline{a}$が d-sequenceであるとは,

① $\underline{a}$が ideal $\mathfrak{q}=(a_1, a_2, \cdots, a_r)$の最小生成系である。（すなわち,任意の整数$1 \leq i \leq r$に対して,$a_i \notin (a_1, a_2, \cdots, \check{a}_i, \cdots, a_r)$）

② $(a_1, a_2, \cdots, a_i) : a_{i+1}a_k = (a_1, a_2, \cdots, a_i) : a_k$

が,すべての$0 \leq i < k \leq r$について成り立つ。

という上の2つの性質をみたすものをいう。

'd-sequence'という概念に対する最初の結果は C. Hunekeの「The theory of d-sequences and powers of ideals」であろう。この中にはいくつかの'd-sequence'の具体例が述べられている。ここでいくつかあげてみると,

<u>例1</u>　$X=(x_{ij})$をgenericな$n \times (n+1)$行列とする。このとき,Xの maximal minors $\{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n\}$は d-sequenceをなす。

例2　AをBuchsbaum ringとする。このときはAはlocal ringになるが，その唯一のmaximal idealに対するパラメーター系$\{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$（ただし，$d = \dim A$とする）は'd-sequence'をなす。

例3　AがCohen-Macaulay ringでPをheightがnで生成系の個数が$(n+1)$個のprime idealとする。（Pはalmost complete intersection idealとよばれている）もし，A_Pがregular local ringならばPは$(n+1)$個の'd-sequence'で生成される。

例4　$X = (x_{ij})$がgenericな$r \times s$行列で$I_t(X)$をXの$t \times t$ minorで生成された$k[x_{ij}]$のidealとする。このとき，$k[x_{ij}]/I_t(X)$での$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1s}$のimageは'd-sequence'をなす。

その他の例についてはC. Hunekeの論文[2],[3],[4]を参照されたい。

'd-sequence'の理論や定理に関しては上記のHunekeの一連の論文や，G. Valla [8]やJ. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos [1]によってかなりの興味ある結果が知られている。

ところで，一般の'd-sequence'の存在そのものに関するものは上記[1]におけるapproximation complexによる構成法のみが知られている。しかしながら，このd-sequenceの長さや，これらの元で生成されるidealの高さに関しては

なにもわかっていないようである。そこで次のような問題が提起できよう。

<u>問題</u>　Noether 環 A と任意の自然数 $n \leqq r$ に対して，長さが r で高さが n の 'd-sequence' があるか？

勿論，この r は A の次元をこえることはないし，存在もかなり多くのものがあることが望ましいことである。

さて，上の問いに対して，例えば $n = r$ の場合には

(1) $n = \dim A$ で，A が local ring ならば，A を Buchsbaum で，パラメーター系 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が d-sequence がなすようにできる。

(2) $n < d$ のときは，[1] の proposition 2.7 で存在性が知られている。

他に高さ $n=1$ のときには，Huneke [3] の中で次の形で示されたものがある。

<u>命題</u>　$a_1, a_2, \cdots, a_r$ が d-sequence ならば，$a_1X, a_2X, \cdots, a_rX$ は Rees algebra $R((a_1, a_2, \cdots, a_r))$ の中でも d-sequence をなす。

この報告集では，上記の Huneke の結果をふまえて，Rees algebra の中で上の問いに対する1つの解答を与えることにしたい。結果は次の2つがある。

<u>定理1</u>　$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$をG.C.M.環Aのideal Mに含まれるパラメーター系の一部の元の列とする。$1 \leqq j \leqq r+1$に対して

$$g_j = a_j - a_{j-1}X$$

(ただし$a_0 = a_{r+1} = 0$とする)と定める。このとき$\{g_1, g_2, \cdots, g_r\}$はd-sequenceをなす。

この定理での$\{g_1, g_2, \cdots, g_{r+1}\}$はRees algebraでも，パラメーター系の一部になることを注意しておく。(実際にはRees algebraをirrevantなmaximal idealでlocalizeしたところで考えなくてはいけないが，パラメーター系になることについてはRees algebraのままでもそれ程影響はない)この定理1を用いれば求める次の結果がえられる。

<u>定理2</u>　Aと$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$は定理1と同じものであるとする。$1 \leqq n < r$に対して$\{f_1, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots, f_r\}$を

$$f_j = \begin{cases} a_j - a_{j-1}X & (\text{if } j \leqq n) \\ a_jX & (\text{if } j > n) \end{cases}$$

と定める。このとき，$\{f_1, f_2, \cdots, f_r\}$はd-sequenceとなり，

$$\dim R((a_1, \cdots, a_r))/(f_1, f_2, \cdots, f_r) = \dim A - n$$

をみたす。

(定理1，2にでてくる用語は§2でまとめてのべることにする)

定理2の特別な場合として次の2つがある。

系1　Aが Cohen-Macaulay環で $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ がA-列であるとせよ。このとき $\{f_1, f_2, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots, f_r\}$ は d-sequence をなす。

系2　Aが Buchsbaum環で，$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ が parameter 系の一部とせよ。このとき $\{f_1, f_2, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots, f_r\}$ は d-sequence をなす。

以後，(A, m) はすべて Noether局所環で，$\dim A = d$ とする。

2. 準備

定義 2.1　(i) $0 \leqq i < d$ となる任意の整数 i について $l(H_m^i(A))$ の値が有限である。

(ii) ある ideal M ($A \supsetneqq \sqrt{M} \supseteqq m$) があって，$M$ に含まれる任意のパラメーター系の一部 $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ に対して

$$(a_1, a_2, \cdots, a_j) : a_{j+1} = (a_1, a_2, \cdots, a_j) : M$$

が成り立つ。

上の2つの同値な条件がなり立つ環のことを G.C.M.環とよぶことにする。(くわしいことがらについては[6]を参照されたい。)

さらに $1 \leqq j \leqq r-1$ に対して $U(a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}) = (a_1, \cdots, a_{j-1}) : a_j$

と定義する。このとき，$U(a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}) : a$ となる。ただし$\{a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \cdots, a_r\}$は M に含まれるパラメーター系の一部となるような元 a を考える。

<u>定義 2.2</u>　$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$を A の元の列とし，$\mathfrak{q} = (a_1, \cdots, a_r)$ $\mathfrak{q}_j = (a_1, \cdots, a_j)$ と定める。$R = R(\mathfrak{q})$ を Rees algebra とする。Rは自然な同一視で　$R = A[a_1X, a_2X, \cdots, a_rX] \subset A[X]$ とみることができる。

<u>定義 2.3</u>　A の元 a に対して $A/U(a_1, \cdots, a_j)$ での image を $\bar{a}$ で表わすことにする。同様に Rees algebra R に対しても $R/(U(a_1, \cdots, a_j), a_1X, \cdots, a_jX)$ での R の元 f の image を $\bar{f}$ で表わすことにする。

以下，定理を証明するのに用いる補題をいくつか述べることにする。

<u>補題 2.4</u>　A が G.C.M. 環で，b は M に含まれる元で $\dim A/bA = d - 1$ とする。このとき，A/bA，$A/U(b)$ はともに G.C.M. 環となる。

<u>補題 2.5</u>　$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ を M に含まれるパラメーター系の一部とし $\mathfrak{q} = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ とおく。このとき

$$U(a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}) \cap \mathfrak{q}^k = (a_1, a_2, \cdots, a_{j-1})\mathfrak{q}^{k-1}$$

が $1 \leqq j \leqq r$, $k \geqq 0$ について成り立つ。

<u>補題 2.6</u> $1 \leqq i < r$, $0 \leqq k \leqq r-i$ に対して

$$\{q + U(a_i) + \cdots + U(a_{i+k})\} \cap U(a_1, \cdots, a_{i-1}) = (a_1, \cdots, a_{i-1}) + U(0)$$

が成り立つ。

<u>補題 2.7</u> $1 \leqq n < r$ に対して

$$R/(U(a_1, \cdots, a_n), a_1X, \cdots, a_nX) \cong R(q + U(a_1, \cdots, a_n)/U(a_1, \cdots, a_n))$$

となる環の同型がある。

<u>補題 2.8</u> $2 \leqq j \leqq r$ に対して

$$(qR, U(a_1, \cdots, a_{j-1}), a_1X, \cdots, a_{j-1}X) : a_jX$$
$$= (qR, U(a_1, \cdots, a_{j-1}), a_1X, \cdots, a_{j-1}X)$$

が成り立つ。

最後に[7]の命題の'd-sequence'への拡張した命題を述べることにする。これが定理の主要な点となるものである。

<u>命題 2.9</u> 次のことがらが成り立つ

(α_1) $(a_1, a_2)R : g_2 = qR$

(β_1) $(a_1)R : a_2 = (U(a_1), a_1X)$

(α_2) $(Q_2, a_2) : g_3 = (Q_2, a_2, U(a_1))$

(β_2) $(Q_2) : a_2 = (qR, U(a_1), a_1 X)$

$j \geqq 3$とする。

(α_j) $(Q_j, a_2) : g_{j+1} = (Q_j, U(a_1), a_2, \sum_{k=3}^{j-1} a_k U(a_1, \cdots, a_{j+2-k}))$

(β_j) $(Q_j) : a_2 = (qR, U(a_1), \cdots, U(a_{j-1}), a_1 X, \cdots, a_{j-1} X)$

ただし、$\{g_1, \cdots, g_{r+1}\}$は定理1で定めた元の列であるとし、$Q_j = (g_1, \cdots, g_j)$であるとする。

3. 定理の証明

定理1の証明: $1 \leqq j \leqq k \leqq r+1$に対して

(1.a) $(g_1, \cdots, g_{j-1}) : g_j g_k = (g_1, \cdots, g_{j-1}) : g_k$

を示せばよい。$U(0) = (0)$としてよい。$j=1$のときは明らか。

$(j=2)$ $f \in (a_1)R : g_2 g_k$とすると、$f g_k \in (a_1, a_2)R : g_2$. (2.4)の$(\alpha_1)$より$f g_k \in qR$. $f g_k = \sum C_m X^m$とかく。このとき、(2.5)より$C_m \in U(a_1) \cap q^{m+1} = (a_1) q^m$. 従って$f g_k \in (a_1)R$.

$j \geqq 3$とする。(1.a)をrに関する帰納法で示す。a_1はAで正則であるので、$\bar{R} = R/(a_1, a_1 X) \cong R(q/a_1 A)$ かつ $A/a_1 A$ は G.C.M. 環となる。$A/a_1 A$で帰納法の仮定を用いると、

$$(\bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_{j-1}) : \bar{g}_j \bar{g}_k = (\bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_{j-1}) : \bar{g}_k$$

が$3 \leqq j \leqq k \leqq r+1$について成り立つ。これは次と同じになる。

(1.b) $(g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}, a_2) : g_j g_k = (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}, a_2) : g_k$.

$f \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) : g_j g_k$ とすると，(1.b) より

$$f \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}, a_2) : g_k .$$

(1.c) $\qquad f g_k = h + h' a_2$

と $h \in (g_1, \cdots, g_{j-1})$，$h' \in R$ を用いて表わしたとき，f のとり方から $h' a_2 g_j \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1})$。つまり

$$h' g_j \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) : a_2 .$$

(2.9) の (β_{j-1}) を用いれば

$$h' g_j \in (qR, U(a_1), \cdots, U(a_{j-2}), a_1 X, \cdots, a_{j-2} X),$$

従って

$$h' a_{j-1} X \in (qR, U(a_1), \cdots, U(a_{j-2}), a_1 X, \cdots, a_{j-2} X).$$

(2.8) を用いれば

(1.d) $\qquad h' \in (qR, U(a_1, \cdots, a_{j-2}), a_1 X, \cdots, a_{j-2} X).$

一方，(1.c) によれば $h' \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}, g_k) : a_2$.

よって $h' \in Q_k : a_2$ となる。(2.9) の (β_k) から

(1.e) $\qquad h' \in (qR, U(a_1), \cdots, U(a_{k-1}), a_1 X, \cdots, a_{k-1} X)$

今 c を h' の定数項とすると，(1.d)，(1.e) より

$$c \in q + \{q + U(a_1) + \cdots + U(a_{k-1})\} \cap U(a_1, \cdots, a_{j-2})$$

(2.6) を用いれば

$$c \in q + U(a_1) + \cdots + U(a_{j-2}) + \{q + U(a_{j-1}) + \cdots + U(a_{k-1})\} \cap U(a_1, \cdots, a_{j-2})$$

$$= q + U(a_1) + \cdots + U(a_{j-2}) + (a_1, \cdots, a_{j-2}) = q + U(a_1) + \cdots + U(a_{j-2}).$$

従って $h' \in (\mathfrak{q}R, U(a_1), \cdots, U(a_{j-2}), a_1X, \cdots, a_{j-2}X)$. (2.9) の (β_{j-1}) を用いれば $h' \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) : a_2$, よって

$$f \in (g_1, g_2, \cdots, g_{j-1}) : g_k .$$

定理 2 の証明：

r に関する帰納法で示す。$U(0)=(0)$ としてよい。

$$(f_1, f_2, \cdots, f_j) : f_{j+1} f_k = (f_1, f_2, \cdots, f_j) : f_k$$

がすべての $0 \leqq j < k \leqq r$ に対して成り立つことをいう。

$j=0$ か 1 ならば定理 1 より主張が正しいことがわかる。$2 \leqq j \leqq n-1$ の場合には

$k \leqq n$ のとき $\{a_1, a_2 - a_1X, \cdots, a_n - a_{n-1}X\}$

$k \geqq n+1$ のとき $\{a_1, a_2 - a_1X, \cdots, a_n - a_{n-1}X, a_{n+1} - a_nX, \cdots, a_{k-1} - a_{k-2}X,$

$a_{k+1} - a_{k-1}X, a_{k+2} - a_{k+1}X, \cdots, a_r - a_{r-1}X,$

$a_k - a_rX, a_kX\}$

という列を用いることにより主張は定理 1 からでてくる。

そこで $j \geqq n$ とし $Q_n = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ とおく。

(2. a) $\quad (Q_n, a_{n+1}X, \cdots, a_jX) : a_{j+1}X\, a_kX$

$$= (Q_n, a_{n+1}X, \cdots, a_jX) : a_kX$$

がすべての $n \leqq j < k \leqq r$ について成り立つことを示す。

$U(a_{n+1}, \cdots, a_j)R \subset (Q_n, a_{n+1}X, \cdots, a_jX) : a_kX$ より

(2. a) は $\overline{R} = R/(U(a_{n+1}, \cdots, a_j), a_{n+1}X, \cdots, a_jX) \cong R(\mathfrak{q}+U/U)$ で

考えてよいことがわかる。ただし，$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(a_{n+1},\cdots,a_j)$とする。

従ってAのかわりに$A/\mathfrak{U}$で考えると次のことを示せばよいことになる。

<u>claim</u>: $\mathfrak{Q}_n : a_{j+1}X\cdot a_k X = \mathfrak{Q}_n : a_k X$ がすべての$n\leqq j<k\leqq r$について成り立つ。

(証明) $g\in \mathfrak{Q}_n : a_{j+1}X\cdot a_k X$とすれば，$g\in(\mathfrak{Q}_n, a_2): a_{j+1}X\cdot a_k X$。帰納法の仮定を$\bar{R}=R/(\mathfrak{U}(a_1), a_1X)\cong R(\mathfrak{q}+\mathfrak{U}(a_1)/\mathfrak{U}(a_1))$に適応させると

$$g\in(\mathfrak{Q}_n, a_2): a_k X$$

をうる。

(2.b) $\qquad g a_k X = h + h' a_2$

$h\in\mathfrak{Q}_n$, $h'\in R$となるように表わすことができる。このとき，$h' a_{j+1} X\in(\mathfrak{Q}_n): a_2$．従って(2.9)の$(\beta_n)$より

$$h' a_{j+1} X\in(\mathfrak{q}R, \mathfrak{U}(a_1),\cdots,\mathfrak{U}(a_{n-1}), a_1X,\cdots,a_{n-1}X).$$

$\{a_1, a_2,\cdots,a_{n-1}, a_{j+1}, a_n, a_{j+2},\cdots,a_r\}$はMに含まれるAのパラメーター系の一部より(2.8)から

(2.c) $\qquad h'\in(\mathfrak{q}R, \mathfrak{U}(a_1,\cdots,a_{n-1}), a_1X,\cdots,a_{n-1}X).$

今$h'=h_1+c$，cは定数項，h_1は残りの項と表わすと(2.c)より$h_1\in(\mathfrak{q}R, a_1X,\cdots,a_{n-1}X)$，$c\in\mathfrak{q}+\mathfrak{U}(a_1,\cdots,a_{n-1})$となる。

一方で，$h' a_2\in\mathfrak{Q}_k$であるので(β_k)を用いれば，

$$h' \in (\mathfrak{q}R, U(a_1), \cdots, U(a_n), U(a_{j+1}), \cdots, U(a_{k-1}), U(a_{k+1}),$$
$$\cdots, U(a_r), U(a_k), a_1X, \cdots, a_rX, a_kX).$$

(ただしパラメーター系の列として $\{a_1, \cdots, a_n, a_{j+1}, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_r, a_k\}$ を考えておく。)

よって $\quad C \in \mathfrak{q} + U(a_1) + \cdots + U(a_n) + U(a_{j+1}) + \cdots + U(a_r)$.

前の結果と合わせると

$$\begin{aligned} C &\in \mathfrak{q} + U(a_1) + \cdots + U(a_{n-1}) + \{\mathfrak{q} + U(a_n) + U(a_{j+1}) + \cdots + U(a_r)\} \\ &\quad \cap U(a_1, \cdots, a_{n-1}) \\ &= \mathfrak{q} + U(a_1) + \cdots + U(a_{n-1}) + (a_1, \cdots, a_{n-1}) \\ &= \mathfrak{q} + U(a_1) + \cdots + U(a_{n-1}). \end{aligned}$$

従って $h_1, C \in (\mathfrak{q}R, U(a_1), \cdots, U(a_{n-1}), a_1X, \cdots, a_{n-1}X)$
$$= (Q_n) : a_2.$$

それゆえ $h'a_2 \in Q_n$. つまり $\quad g a_k X \in Q_n$.

最後に $\dim R/(f_1, f_2, \cdots, f_r) = \dim A - n$ を示そう。

今 $J = (f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots, f_r)$, $P = (a_1, \cdots, a_n, a_1X, \cdots, a_nX, \cdots, a_rX)$, $Q = (f_1, f_2, \cdots, f_n, f_r)$ とおく。このとき,

$$\dim A/(a_1, \cdots, a_n) = \dim R/P \leq \dim R/J \leq \dim R/Q$$

$\dim A/(a_1, \cdots, a_n) = \dim A - n$ より $\quad \dim R/J \geq \dim A - n$ をうる。

次に, $\bar{R} = R/Q$ とおき, $\{a_1, a_2 - a_1X, \cdots, a_n - a_{n-1}X, \cdots, a_r - a_{r-1}X, a_rX\}$ を考えて, $Q' = (a_{n+1} - a_nX, \cdots, a_r - a_{r-1}X)$ とおく。

このとき，$\dim \bar{R}/Q' = \dim A/(a_1,\cdots,a_r) = \dim A - r$ となる。

よって [5] の定理154により

$$\dim \bar{R} = \dim R/Q \leqq \dim A - r + (r-n) = \dim A - n.$$

従って $\dim A - n \leqq \dim R/J \leqq \dim A - n$ となり主張は成立する。

4. 終わりに

定理2で与えた列よりも次のような列 $\{a_1, a_2 - a_1X, \cdots, a_n - a_{n-1}X, a_nX, \cdots, a_rX\}$ の方が自然であるが，この列では d-sequence をなすとは限らないことに注意しておく。例えば，$A = k[[Y, Z, W]]$ で $a_1 = Y, a_2 = Z$, $a_3 = W$ とおくと，$\{a_1, a_2 - a_1X, a_2X, a_3X\}$ は d-sequence でない。

実際，$a_3^2 \in (a_1, a_2 - a_1X) : a_2X \cdot a_3X$ だが，

$$a_3^2 \notin (a_1, a_2 - a_1X) : a_3X.$$

(理由) $a_3^2 \cdot (a_2X \cdot a_3X) = a_2a_3^3X^2 = (a_2 - a_1X)a_3^3X^2 + a_1a_3^3X^3$

$$\in (a_1, a_2 - a_1X).$$

もし，$a_3^2 \in (a_1, a_2 - a_1X) : a_3X$ とすると，

$$a_3^3X = fa_1 + g(a_2 - a_1X)$$

と，$f, g \in R$ とかける。今，両辺の1次の係数を比較すれば，

$$a_3^3 \in (a_1, a_2) \text{ つまり } W^3 \in (Y, Z)$$

しかしながら，これは不可能。

References

[1] J. Herzog, A.Simis and W.V.Vasconcelos, Approximation Complexes of Blowing-up Rings, II, preprint.

[2] C. Huneke, The theorey of d-sequences and powers of ideals, to appear, Adv. in Math.

[3] C. Huneke, Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras, to appear, Comm. in Alg.

[4] C. Huneke, On the Symmetric and Rees algebras of an ideal generated by a d-sequence, J. of Alg., 62 (1980) 268-275.

[5] I. Kaplansky, Commutative Rings, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[6] V.p.Schenzel, N.V.Trung and N.T.Cuong, Verallgemeinerte Cohen-Macaulay-Moduln, Math. Nachr., 85 (1978), 57-73.

[7] G. Valla, Certain Graded Algebras are always Cohen-Macaulay, J. of Alg., 42 (1976) 537-548.

[8] G. Valla, On the Symmetric and Rees algebras of an ideal, Manuscripta math., 30 (1980) 239-255.

Rings over a Dedekind domain

by Osamu Kawai (Osaka Univ.)

CHAPTER I. LOCAL THEORY

Throughout this chapter, unless otherwise stated, R denotes a fixed discrete valuataion ring with uniformizant t, quotient field K and residue field k. Let A be an R-algebra and set

$$A_K := A \otimes_R K = A[t^{-1}],$$

$$A_k := A \otimes_R k = A/tA.$$

<u>Lemma</u> 1. Let M be a finite A-module. Assume that

$$M_K(:= M \otimes_R K) = A_K \frac{e_1}{1} + \dots + A_K \frac{e_n}{1}$$

and $$M_k(:= M \otimes_R k) = A_k\bar{f}_1 + \dots + A_k\bar{f}_m$$

for some $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m \in M$, where $\bar{f}_i = f_i \bmod tM$. Then we have

$$M = Ae_1 + \dots + Ae_n + Af_1 + \dots + Af_m.$$

<u>Proof</u>. Clear. Q.E.D.

Proposition 2. Assume that A is R-flat. Let M be an R-flat, finite A-module. Suppose that M_K has an A_K-free basis $\{\frac{e_1}{1}, \ldots, \frac{e_n}{n}\}$ such that all $e_i \in M$ and that $\bar{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ are linearly independent elements of M_k over A_k. Then M is a free A-module with $\{e_1, \ldots, e_n\}$ as a free basis.

Proof. Easy by the above lemma. Q.E.D.

Corollary 3. Assume that A is R-flat. Let M be an R-flat, finite A-module. Assume that A_k is a domain, that M_K is a free A_K-module of rank 1, and that $\bigcap_{n=1}^{\infty} t^n M = (0)$. Then the following are equivalent:

(a) M is A-free;

(b) M_k is A_k-free; and

(c) M_k is A_k-torsion-free.

Moreover if (a) (resp., (b)) holds, M (resp., M_k) is A-(resp., A_k-)free module of rank 1.

Proof. Clear by the above proposition. Q.E.D.

Theorem 4. Assume that A is R-flat and noetherian. Then a t-divisible A-module M is injective over A if and only if $M_0 := \{ x \in M \mid tx = 0 \}$ (resp., M_K) is injective over A_k (resp., A_K).

Proof. The "only if" part is obvious. So, we shall prove the "if" part. Assume that M_0 (resp., M_K) is injective over $A_k = A_0$ (resp., A_K). Then M' is A-injective, since it is also t-divisible. Moreover, M_K is A-injectve. Thus, letting I be the injective envelope of M, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M_K & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I' & \to & I & \to & I_K & \to & 0 \end{array}$$

with exact raws by the following lemma, since M is t-divisible. Here, the left and right vertical arrows are isomorphisms. Hence $M \simeq I$. Therefore M is injective over A. Q.E.D.

Lemma 5. Assume that A is R-flat and noetherian. For any A-module M, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I(M)' & \to & I(M) & \to & I(M)'' & \to & 0, \end{array}$$

where $I(M)$ denotes the injective envelope of M, with exact raws such that all vertical homomorphism are essential, i.e.,

$$I(M)' \simeq I(M') \quad \text{and} \quad I(M)_K = I(M)'' \simeq I(M'').$$

<u>Proof</u>. Easy. Q.E.D.

CHAPTER II. GLOBAL THEORY

In this chapter, unless otherwise stated, D denotes a Dedekind domain with quotient field $K = Q(D)$. Let A be a D-algebra and let f be the canonical morphism $\mathrm{Spec}\, A \to \mathrm{Spec}\, D$. For $p \in \mathrm{Spec}\, D$, let $A(p)$ denote the affine coordinate ring of the fiber $f^{-1}(p)$: $A(p) = A \otimes_D k(p) = A_p/pA_p$, where $k(p) = D_p/pD_p$ and $A_p = (D-p)^{-1}A$; then $\mathrm{Spec}\, A$ is a disjoint union of $\mathrm{Spec}\, A(p)$ ($p \in \mathrm{Spec}\, D$). Put $\underline{S} := \mathrm{Spec}\, D - \{(0)\} = \{$closed (or special) points of $\mathrm{Spec}\, D\}$; then $\mathrm{Spec}\, D$ is a disjoint union of $\underline{S}$ and $\{(0)\}$, where (0) is the generic point of $\mathrm{Spec}\, D$. If $p \in \underline{S}$, D_p is a discrete valuation ring with quotient field K and residue field $k(p)$; and A_p is a D_p-algebra.

For an A-module M, we use similar notations $M(p)$ and M_p ($p \in \mathrm{Spec}\, D$) as above.

Proposition 1. Assume that A is an integral domain and that $A(p)$ is reduced for all $p \in \underline{S}$. Then the domain $A(0)$ is normal (resp., seminormal) if and only if A is normal (resp., seminormal).

Proof. Easy; cf. Traverso[16] and Brewer-Costa[5]. Q.E.D.

Proposition 2. Assume that A and $A(p)$ $(p \in \underline{S})$ are integral domains. Then $A(0)$ is factorial if and only if A is D-locally-factorial, i.e., A_p are factorial for all $p \in \underline{S}$.

Proof. This is clear. Q.E.D.

Proposition 3. Assume that A is a noetherian domain, that $A(p)$ $(p \in \underline{S})$ are domains, and that $A(0)$ is a normal domain. Then A is locally factorial if and only if $A(0)$ is locally factorial and the natural homomorphism $\mathrm{Pic}\ A_p \to \mathrm{Pic}\ A(0)$ is surjective for all $p \in \underline{S}$.

Proof. The assertion is obvious. Q.E.D.

Theorem 4. Assume that A is a noetherian, flat D-algebra. Then a D-flat, finite A-module M is projective over A if and only if $M(p)$ is projective over $A(p)$ for each $p \in \mathrm{Spec}\ D$.

Proof. Since the "only if" part is clear, we shall prove the "if" part. We have only to prove that M_P is A_P-projective, i.e., A_P-flat for each $P \in$ Spec A. Let $p := P \cap D \in$ Spec D. Then A_P is noetherian, flat D_p-algebra; M_P is ideally Hausdorff with respect to pA_P (cf. Boubaki[4; Commutative Algebra, Chap.III, §5.1, Example(1)]). Moreover, M_P is D_p-flat, and $M_P/pM_P = (M(p))_{PA(p)}$ is flat over $A_P/pA_P = (A(p))_{PA(p)}$, since $M(p)$ is projective, i.e., flat over $A(p)$. Hence M_P is flat over A_P by Boubaki[4; Commutative Algebra, Chap.III, §5.4, Proposition 3].

Q.E.D.

Remark. The above theorem holds for an arbitary ring D as is seen from the above proof; this fact and the above proof is communicated by S. Goto (Nihon Univ.).

Proposition 5. Assume that A is D-flat and noetherian. Let I be an indecomposable, injective A-module, which can be written as $I \simeq I(A/P)$ for some $P \in$ Spec A by [11]. Then the following assertions hold:

(1) I is D-flat if and only if $P \in$ Spec A(0);

(2) I is D-torsion if and only if $P \notin$ Spec A(0).

Proof. Noting that A/P is D-flat (resp., D-torsion) if and only if $P \in \operatorname{Spec} A(0)$ (resp., $P \notin \operatorname{Spec} A(0)$), we know that the assertions hold. Q.E.D.

Theorem 6. Assume that A is D-flat and noetherian. Let M be an A-module M such that M_p are D_p-divisible for all $p \in \underline{S}$. Then M is injective over A if and only if $(M_p)_0$ are injective over $A(p)$ for all $p \in \underline{S}$ and $M(0)$ is injective over $A(0)$.

Proof. "Only if" part: M_p are injective for all $p \in \operatorname{Spec} D$; hence the desired condition follows from Theorem I.4.

"If" part: M_p are injective for all $p \in \operatorname{Spec} D$ by Theorem I.4; hence $M_P = (M_p)_{PA_p}$ are injective over $A_P = (A_p)_{PA_p}$, where $p := P \cap D$, for all $P \in \operatorname{Spec} A$. Thus M is A-injective. Q.E.D.

Theorem 7. Let D be any locally factorial domain with quotient field K such that $\operatorname{ch} k(p) = 0$ for all $p \in \operatorname{Spec} D$. Let A be a polynomial ring in two variables x and y over D: $A = D[x,y]$. Let $f \in A$ (hence $f \in A(0) = K[x,y]$) be such that

(a) the affine plane curve $C: f = 0$ is an affine line over K, i.e., $K[x,y]/(f) \simeq K[z]$, where z is transcendental over K, and that

(b) $f(p) :=$ (the image of f by the canonical homomorphism $: A \to A(p)) \in A(p) = k(p)[x,y]$ is geometrically irreducible for all $p \in \operatorname{Spec} D$.

Then (1) the affine plane curve $f(p) = 0$ is an embedded line over $k(p)$ for all $p \in \operatorname{Spec} D$, and

(2) $A = D[x,y] = D[f,h]$ for some h.

Proof. (1) Not so difficult; cf. [1], [13] and [14].

(2) Let $B = D[f]$, which is a subring of $A = D[x,y]$. Then we have a natural morphism $F: X = \operatorname{Spec} A \to Y = \operatorname{Spec} B$. Let P be any point of $Y = \bigsqcup_{p \in \operatorname{Spec} D} \operatorname{Spec} B(p)$. If $P \in \operatorname{Spec} B(p)$, then the residue field $k(P)$ is an algebra over $B(p) = k(p)[f]$. Hence we have

$$A \otimes_B k(P) = A(p) \otimes_{B(p)} k(P) = k(P)[g],$$

since $A(p) = k(p)[x,y] = k(p)[f,g] = B(p)[g]$. Therefore the fiber $F^{-1}(P) = \operatorname{Spec} A \otimes_B k(P)$ is a line over $k(P)$. Thus F is equidimensional. Moreover, F is faithfullly flat by Bourbaki[4; Commutative Algebra, Chap.III, §5.4, Proposition 3]. Therefore A is isomorphic to the symmetric algebra $S_B(L)$ of some projective B-module L

by Kambayashi-Miyanishi[10; Theorem 1] and Bass-Connell-Wright[3]. Thus $Q(B)[g] = A \otimes_B Q(B) \simeq S_B(L) \otimes_B Q(B) = S_{Q(B)}(L_{Q(B)})$, which is a polynomial ring in rank $L = \dim_{Q(B)} L_{Q(B)}$ variables over $Q(B)$. Hence rank $L = 1$. Thus $L \in \mathrm{Pic}\, B = \mathrm{Pic}\, D[f] \simeq \mathrm{Pic}\, D$, since D is normal. Namely, $L \simeq M \otimes_D B$ for some $M \in \mathrm{Pic}\, D$. Hence $D[x,y] = A \simeq S_B(L) \simeq S_D(M) \otimes_D B$; thus $D \oplus D \simeq \Omega_D(D[x,y]) \simeq \Omega_D(S_D(M) \otimes_D B) = \Omega_D(S_D(M)) \oplus \Omega_D(B) = M \oplus D$; thence $M \simeq D$ by the following lemma. Therefore $L \simeq B$; hence $A \simeq S_B(L) \simeq S_B(B)$, which is a polynomial ring in one variable over $B = D[f]$. Hence $A = D[x,y] = D[f,h]$ for some h. Q.E.D.

<u>Lemma</u>. Let D be a domain with quotient field K. Let L_i, $M_j \in \mathrm{Pic}\, D$ be such that

$$L_1 \oplus \dots \oplus L_n \simeq M_1 \oplus \dots \oplus M_m.$$

We may assume that all L_i, M_j are D-submodules of K, since any $L \in \mathrm{Pic}\, D$ is contained in $L_K := L \otimes_D K \simeq K$. Then $n = m$ and $L_1 \cdots L_n \simeq M_1 \cdots M_n$.

<u>Proof</u>. Easy. Q.E.D.

REFERENCES

1. S. Abhyankar and T. Moh, Embedding of the line in the plane, J. Reine Angew. Math., 276(1975), 148-166.

2. T. Asanuma, A report to the 6th Symosium on Commutative Algebra in Japan, Nov. 8-11, 1984.

3. H. Bass, E. H. Connell and D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras, Invent. Math. 38(1976/77), no.3, 279-299.

4. N. Boubaki, Elements of mathematics, Hermann/Addison-Wesley.

5. J. Brewer and D. Costa, Seminormality and projective modules over polynomial rings, J. of Algebra 58(1976), 208-216.

6. H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton(1956).

7. I. V. Dolgachev and B. Ju. Weisferler, Unipotent group schemes over integral rings, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. Tom 38(1974), 759-799.

8. A. Grothendieck, EGA IV, IHES Publ. Math. 28.

9. S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer Verlag(1982).

10. T. Kambayashi and M. Miyanishi, On flat fibrations by the affine line, illinois J. Math., 22(1978), 662-671.

11. E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, Pacific J. Math., 8(1958), 511-528.

12. H. Matsumura, Commutative algebra, 2nd. ed., Benjamin(1980).

13. M. Miyanishi, Lectures on curves on rational and unirational surfaces, Tata Institute of Fundamintal Research (1978).

14. Y. Nakai, On locally finite iterative higher derivations, Osaka J. Math., 15(1978), 655-662.

15. A. Sathaye, Polynomial rings in two variables over a D.V.R.: a Criterion, Invert. Math. 74(1983), 159-168.

16. C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 24(1970), 585-595.

Department of Mathematics
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560
Japan

トーラス埋込みのドラム複体について

東北大学理学部　　石田正典

トーラス埋込みとは正規代数多様体で、それと同じ次元の代数的トーラスの効果的な作用を持つものを言う。ここではトーラス埋込みのトーラスの作用で不変な被約閉部分スキームのドラム複体について述べることを目標とする。一般の$\mathbb{C}$上定義された有限型のスキームに対して du Bois [2] によりドラム複体がある導来圏の元として与えられているが、枚数の関係でそれとの同値性はどこか別の所に書くことにして、ここでは環論的な部分だけ述べるにとどめる。

§1.　有理多角錐分解と複体

N を階数 $r \geq 0$ の自由 $\mathbb{Z}$-加群 M をその双対 $\mathbb{Z}$-加群とする。自然な双一次写像 $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$ は $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$ に対し $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$

と拡張される。但しテンソル積において係数環が略された時は常に$\mathbb{Z}$上のテンソル積とする。

<u>定義1.1.</u>　$N_{\mathbb{R}}$の空でない部分集合σが<u>強凸有理多角錐</u>であるとは，Nの有限個の元$n_1, \cdots, n_s$が存在して，$\sigma = \mathbb{R}_0 n_1 + \cdots + \mathbb{R}_0 n_s$と書け，しかも$\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$となることである。但し$\mathbb{R}_0 = \{c \in \mathbb{R} ; c \geqq 0\}$及び$-\sigma = \{-a ; a \in \sigma\}$である。

$N_{\mathbb{R}}$の強凸多角錐σの部分集合ρで，$M_{\mathbb{R}}$の元xが存在して任意の$a \in \sigma$に対して$\langle x, a \rangle \geqq 0$となっていて，しかも$\rho = \{a \in \sigma ; \langle x, a \rangle = 0\}$となっているとき，$\rho$を$\sigma$の面といい$\rho < \sigma$と書く。強凸多角錐の面はまた強凸多角錐である。

<u>定義1.2.</u>　$N_{\mathbb{R}}$の強凸有理多角錐の集合Σが<u>扇</u>（おうぎ）とは

(1)　$\sigma \in \Sigma,\ \rho < \sigma \Rightarrow \rho \in \Sigma$

(2)　$\sigma, \tau \in \Sigma,\ \rho = \sigma \cap \tau \Rightarrow \rho < \sigma, \tau$

を満たすことをいう。Σが有限で$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$が$N_{\mathbb{R}}$に等しい時$\Sigma$を$N_{\mathbb{R}}$の<u>破れの無い扇</u>という。

π を $N_{\mathbb{R}}$ の強凸有理多角錐とし、$\Gamma(\pi)$ を π の面全体の集合とすると、$\Gamma(\pi)$ は $N_{\mathbb{R}}$ の扇である。

◎ 以下 Σ を $N_{\mathbb{R}}$ の扇とする。

定義 1.3. Σ の部分集合 Φ について

(1) Φ が星状開 $\Longleftrightarrow$ $\sigma \in \Phi, \tau \in \Sigma, \sigma < \tau$ ならば $\tau \in \Phi$.

(2) Φ が星状閉 $\Longleftrightarrow$ $\tau \in \Sigma$, $\sigma < \tau$ ならば $\sigma \in \Phi$.

(3) Φ が局所星状閉 $\Longleftrightarrow$ $\sigma, \rho \in \Phi$, $\sigma < \tau < \rho$ ならば $\tau \in \Phi$.

と定義する。

Φ を Σ の局所星状閉部分集合とした時 $\sigma, \rho \in \Phi$ に対し

$$\Phi(\sigma<) = \{\tau \in \Phi \ ; \ \sigma < \tau\}$$
$$\Phi(<\rho) = \{\tau \in \Phi \ ; \ \tau < \rho\}$$
$$\Phi(\sigma|\rho) = \{\tau \in \Phi \ ; \ \sigma < \tau < \rho\}$$

と書くことにする。定義から明らかなように $\sigma, \rho \in \Sigma$ に対し $\Sigma(\sigma<)$ は星状開, $\Sigma(<\rho)$ は星状閉, $\Sigma(\sigma|\rho)$ は局所星

状閉な Σ の部分集合である。

$N_{\mathbb{R}}$ の強凸有理多角錐 σ に対して $\sigma^{\perp} = \{x \in M_{\mathbb{R}} ;$ $\langle x, a\rangle = 0 \ , \forall a \in \sigma\}$, $N[\sigma] = N/(N \cap (\sigma + (-\sigma)))$ 及び $M[\sigma] = M \cap \sigma^{\perp}$ とおく。$N[\sigma]$ と $M[\sigma]$ は互いに双対な自由$\mathbb{Z}$-加群で階数は $\operatorname{codim} \sigma = r - \dim \sigma$ に等しい。そこで $\mathbb{Z}(\sigma) = \bigwedge^{\operatorname{codim}\sigma} M[\sigma]$ とおくと $\mathbb{Z}(\sigma)$ は階数1の自由$\mathbb{Z}$-加群となる。但し $\operatorname{codim}\sigma = 0$ のときは $\mathbb{Z}(\sigma) = \mathbb{Z}$ と考える。

Σ の局所星状閉部分集合 Φ 及び整数 p に対し $\Phi(p) = \{\sigma \in \Phi ; \operatorname{codim}\sigma = p\}$ とおく。$\sigma \in \Sigma(p)$, $\tau \in \Sigma(p-1)$ かつ $\sigma \prec \tau$ のとき同型

$$q'_{\sigma/\tau} : \mathbb{Z}(\sigma) \to \mathbb{Z}(\tau)$$

が次のように定義される。$n_1 \in N$ を準同型 $\langle \ , n_1\rangle : M \to \mathbb{Z}$ が $M[\tau]$ の上で0で $M[\sigma] \cap \tau^{\vee}$ を $\mathbb{Z}_0 = \{l \in \mathbb{Z} ; l \geqq 0\}$ に全射となるようにうつす元とする。但し $\tau^{\vee} = \{x \in M_{\mathbb{R}} ;$ $\langle x, a\rangle \geqq 0 \ , \forall a \in \tau\}$ である。このとき $m_1 \in M[\sigma]$ 及び $m_2, \cdots, m_p \in M[\tau]$ に対し $q_{\sigma/\tau}(m_1 \wedge \cdots \wedge m_p) = \langle m_1, n_1\rangle m_2 \wedge \cdots \wedge m_p$ と定義する。これは n_1 のとり方に依らない。

<u>補題 1.4([3, Lemma 1.4]).</u> $\sigma \in \Sigma(p)$, $\rho \in \Sigma(p-2)$ で $\sigma \prec \rho$ とすると $\sigma \prec \tau \prec \rho$, $\tau \in \Sigma(p-1)$ となるような τ は丁度2個存在し、それを τ_1, τ_2 とすると

$$g_{\tau_1/\rho} \circ g_{\sigma/\tau_1} + g_{\tau_2/\rho} \circ g_{\sigma/\tau_2} = 0$$

となる。

$\mathcal{C}$ を対象が加群又はある多様体上の加群の層であるようなアーベル圏とする。Σ をその元の間の写像は包含写像のみとして圏と考える。共変関手 $F : \Sigma \to \mathcal{C}$ が与えられた時，局所星状閉部分集合 $\Phi \subset \Sigma$ に対し次のように複体 $C^{\cdot}(\Phi, F)$ が定義できる。整数 p に対し

$$C^p(\Phi, F) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi(-p)} F(\sigma) \otimes \mathbb{Z}(\sigma)$$

とし準同型 $d^p : C^p(\Phi, F) \longrightarrow C^{p+1}(\Phi, F)$ を直和因子 $F(\sigma) \otimes \mathbb{Z}(\sigma)$, $\sigma \in \Phi(-p)$ と $F(\tau) \otimes \mathbb{Z}(\tau)$, $\tau \in \Phi(-p-1)$ に対する成分を $\sigma < \tau$ の時は $F(i_{\sigma/\tau}) \otimes g_{\sigma/\tau}$，但し $i_{\sigma/\tau}$ は包含写像 $\sigma \hookrightarrow \tau$，そうでない時は 0 と定義すれば，補題1.4により任意の p に対して $d^{p+1} \circ d^p = 0$ となり $C^{\cdot}(\Phi, F)$ が複体となっていることがわかる。定義より明らかに $p < -r$ 又は $p > 0$ のとき $C^p(\Phi, F) = 0$ である。また各 $\sigma \in \Sigma$ に対し $\mathbb{Z}(\sigma)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\sigma), \mathbb{Z})$ とおき $\tau \in \Phi(p)$, $\sigma \in \Phi(p+1)$ かつ $\sigma < \tau$ に対し $g^*_{\tau/\sigma} = (-1)^{\mathrm{codim}\,\sigma} (g_{\sigma/\tau})^* : \mathbb{Z}(\tau)^* \to \mathbb{Z}(\sigma)^*$ とおくと反変関手 $F : \Sigma \to \mathcal{C}$ に対しても

$$C^p(\Phi, F) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi(p)} F(\sigma) \otimes \mathbb{Z}(\sigma)^*$$

とし準同型には $g^*_{\tau/\sigma}$ を用いることにより共変関手の場合と

同様に複体 $C^{\cdot}(\Phi, F)$ が定義される。この場合は $p<0$ 及び $p>r$ に対し $C^p(\Phi, F)=0$ となる。

後で用いるもう一つの場合として Φ を $\Sigma^2=\Sigma\times\Sigma$ の部分集合で $(\sigma_1, \rho_2), (\sigma_2, \rho_1)\in\Phi$, $\sigma_1<\tau_1<\rho_1$, $\sigma_2<\tau_2<\rho_2$ のとき $(\tau_1, \tau_2)\in\Phi$ を満たすとする。このとき Φ を Σ^2 の局所(1,1)-閉部分集合ということにする。さてこのとき F : $\Sigma^2\to\mathcal{C}$ を2重関手で1番目の変数について共変，2番目の変数について反変とするとき2重複体 $C^{\cdot\cdot}(\Phi, F)$ を

$$C^{p,q}(\Phi, F)=\bigoplus_{(\tau,\sigma)\in\Phi(p,q)} F(\sigma,\tau)\otimes\mathbb{Z}(\tau/\sigma)$$

により定義する。但し $\Phi(i,j)=\{(\tau,\sigma)\in\Phi\,;\,\operatorname{codim}\tau=i,\ \operatorname{codim}\sigma=j\}$ かつ $\mathbb{Z}(\tau/\sigma)=\mathbb{Z}(\tau)\otimes\mathbb{Z}(\sigma)^*$ である。準同型 $d_1^{p,q}: C^{p,q}(\Phi, F)\to C^{p+1,q}(\Phi, F)$ 及び $d_2^{p,q}: C^{p,q}(\Phi, F)\to C^{p,q+1}(\Phi, F)$ はそれぞれ共変関手と反変関手の場合と同様に定義する。またこの2重複体を簡約して得られる複体を $C^{\cdot}(\Phi, F)$ と書くことにする。つまり

$$C^{\ell}(\Phi, F)=\bigoplus_{p+q=\ell} C^{p,q}(\Phi, F)$$

であり $d^{\ell}: C^{\ell}(\Phi, F)\to C^{\ell+1}(\Phi, F)$ の $C^{p,q}(\Phi, F)$, $p+q=\ell$ と $C^{p',q'}(\Phi, F)$, $p'+q'=\ell+1$ に対する成分は $q=q'$ のとき $d_1^{p,q}$, $p=p'$ のとき $(-1)^p d_2^{p,q}$ であって，それ以外の場合は0である。

非負整数 s, t に対して $\mathbb{Z}_{s,t}$ を Σ^{s+t} から常に $\mathbb{Z}$ を対応させる前の s 変数に対し共変で後の t 変数に対し反変な定値関手とする。

$\Phi \subset \Sigma$ を星状閉部分集合とした時 $\Phi^{(2)} = \{(\tau, \sigma) \in \Phi^2;\ \sigma < \tau\}$ と定義すると $\Phi^{(2)}$ は Σ^2 の局所 $(1,1)$-閉 な部分集合となる。そこで2重複体 $C^{\cdot\cdot}(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1})$ を考えると

$$C^{p,q}(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) = \bigoplus_{(\tau,\sigma) \in \Phi^{(2)}(-p,q)} \mathbb{Z}(\tau/\sigma)$$

であるから $(\tau,\sigma) \in \Phi^{(2)} \Rightarrow \operatorname{codim} \tau \leqq \operatorname{codim} \sigma$ に注意すれば $C^{p,q}(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \neq 0$ となるのは $-n \leqq p \leqq 0$, $0 \leqq q \leqq n$ かつ $p+q \geqq 0$ の時に限る。但し $n = \operatorname{cd} \Phi = \max\{i;\ \Phi(i) \neq \phi\}$ である。任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し $\mathbb{Z}(\sigma/\sigma) = \mathbb{Z}$ であることに注意すると $C^0(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\Phi}$ となる。そこで $\lambda: \mathbb{Z} \to C^0(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1})$ をこの $\mathbb{Z}$ の直和への対角写像と定義する。

<u>補題 1.5.</u>　π を強凸有理多角錐とし $\Sigma = F(\pi)$ すなわち π の面全体のなす扇とすると，任意の星状閉部分集合 $\phi \neq \Phi \subset \Sigma$ に対し有限生成自由 $\mathbb{Z}$-加群の列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} C^0(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \xrightarrow{d^0} C^1(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \to \cdots \to C^n(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \to 0$$

は完全列である。但し $n = \operatorname{cd} \Phi$ である。

証明　まずこれが複体となっていることは $(d^0 \circ \lambda)(1) = 0$ を示せば十分である。$C^1(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) = \bigoplus_{p+q=1} \bigoplus_{(\tau,\sigma)\in\Phi^{(2)}(-p,q)} \mathbb{Z}(\tau/\sigma)$ であるから $(d^0\circ\lambda)(1)$ の各 $\mathbb{Z}(\tau/\sigma)$ での成分を調べればよい。a を $\mathbb{Z}(\sigma)$ の一つの生成元とする。そのとき $b = g_{\sigma/\tau}(a)$ は $\mathbb{Z}(\tau)$ の生成元である。$a^* \in \mathbb{Z}(\sigma)^*$ $b^* \in \mathbb{Z}(\tau)^*$ をそれぞれ a, b の双対生成元とすると $\lambda(1)$ の $\mathbb{Z}(\sigma/\sigma)$, $\mathbb{Z}(\tau/\tau)$ での成分はそれぞれ $a\otimes a^*$, $b\otimes b^*$ であるから $(d^0\circ\lambda)(1)$ の $\mathbb{Z}(\tau/\sigma)$ での成分は

$$\begin{aligned} & g_{\sigma/\tau}(a)\otimes a^* + (-1)^p\, b\otimes g^*_{\tau/\sigma}(b^*) \\ = {} & b\otimes a^* + (-1)^{p+q}\, b\otimes a^* = 0 \end{aligned}$$

となり複体であることは証明された。

さてこの複体を $A^\cdot$ と書くことにし，そのコホモロジーが消えることを示す。$d = \operatorname{codim} \pi$ とし $A^\cdot$ への減少的フィルター付けを

$$\begin{aligned} F^p &= A^\cdot \quad , \quad p \leq d \\ F^p &= \bigoplus_{i\geq p} C^{i,j}(\Phi^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \end{aligned}$$

と定義すると $Gr_F^p(A^\cdot)$ は $p<d$ に対しては 0, $p=d$ の時は

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d^{-1}} \mathbb{Z}(\pi/\pi) = \mathbb{Z} \xrightarrow{d^0} 0 \to \cdots$$

となっていて，$p>d$ に対しては容易にわかるように

$$Gr_F^p(A^\cdot) = \bigoplus_{\sigma\in\Phi(p)} C^\cdot(\Sigma(\sigma|\pi), \mathbb{Z}_{1,0}) \otimes \mathbb{Z}(\sigma)^*$$

$$= \bigoplus_{\sigma \in \Phi(p)} C^{\cdot}(\Gamma(\pi[\sigma]), \mathbb{Z}_{1,0})$$

但し Σ の元 σ, π が $\sigma < \pi$ となっている時，$\Sigma(\sigma|\pi) = \{\tau \in \Sigma \, ; \, \sigma < \tau < \pi\}$ であり，また π の $N_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}/(\sigma + (-\sigma))$ への像を $\pi[\sigma]$ と書く $\pi[\sigma]$ は $N[\sigma]_{\mathbb{R}}$ の強凸多角錐である。

$p = \alpha$ の場合の d' は λ から得られるので恒等写像であり，$p > \alpha$ の場合は $\sigma \neq \pi$ であるから [3, Prop. 2.3] より $\Gamma(\pi[\sigma])$ はホモロジー的に自明であるから，このフィルター付けによるスペクトル列の E_2-項はすべて消え，したがって $A^{\cdot}$ のコホモロジーも全部 0 である。

証明終り

S を $N_{\mathbb{R}}$ の部分集合とするとき，Σ の局所星状閉部分集合 Φ に対し

$$\Phi \wedge S = \{\sigma \in \Phi \, ; \, \sigma \cap S \neq \phi\}$$

と定義する。$\Phi \wedge S$ はまた Σ で局所星状閉であり，Φ が星状閉であれば $\Phi \wedge S$ もそうである。

補題 1.6. U を $N_{\mathbb{R}}$ の開凸錐とする。$U \subset |\Sigma|$ かつ $\Sigma \wedge U$ が有限集合であれば，コホモロジー群 $H^i(C^{\cdot}(\Sigma \wedge U, \mathbb{Z}_{1,0}))$ は $i = 0$ のときは $\mathbb{Z}$ で，それ以外 i に対しては 0 となる。

証明　$\sigma\in\Sigma(0)$ に対しては $\mathbb{Z}(\sigma)=\mathbb{Z}$ であるから，$C^0(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0}) = \bigoplus_{\sigma\in(\Sigma\wedge U)(0)}\mathbb{Z}(\sigma)=\mathbb{Z}^{(\Sigma\wedge U)(0)}$ となる。そこで $\varepsilon: C^0(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0})\to\mathbb{Z}$ を和を取る写像としこれにより $C^\cdot(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0})$ に $\mathbb{Z}$ を付加して得られた複体を $\tilde{C}^\cdot(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0})$ と書く。この複体のコホモロジーがすべて消えることを示せばよい。証明は N の階数と $\Sigma\wedge U$ の元の個数に関する帰納法で示す。$\eta=\bigwedge_{\sigma\in\Sigma\wedge U}\sigma$ とおく。(1) $\eta\notin\Sigma\wedge U$ の場合，$\sigma,\tau\in\Sigma\wedge U$ が存在して $\sigma\cap\tau\cap U=\phi$ となる。そこで有理超平面 $H\subset N_\mathbb{R}$ をうまくとれば，H による半空間を H_+, H_- とすると $\sigma\cap U\subset H_+$，$\tau\cap U\subset H_-$ でしかも H が $\Sigma\wedge U$ のどの多角錐も含まないように出来る。$U_+=U\cap H_+$，$U_-=U\cap H_-$，$U_0=U\cap H$ とおくと完全列 $0\to C^\cdot(\Sigma\wedge U_0,\mathbb{Z}_{1,0})\to C^\cdot(\Sigma\wedge U_+,\mathbb{Z}_{1,0})\oplus C^\cdot(\Sigma\wedge U_-,\mathbb{Z}_{1,0})\to C^\cdot(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0})\to 0$ が得られるが $\Sigma\wedge U_+$，$\Sigma\wedge U_-$ は $\Sigma\wedge U$ より元の数が少なく $\Sigma\wedge U_0$ については階数が1少ない場合に帰着でき対応する複体のコホモロジーは帰納法の仮定より消え，したがって $C^\cdot(\Sigma\wedge U,\mathbb{Z}_{1,0})$ のコホモロジーも消える。(2) $\eta\in\Sigma\wedge U$ かつ $\eta\neq\{0\}$ の場合すべてを $N[\eta]_\mathbb{R}=N_\mathbb{R}/(\eta+(-\eta))$ への像でおき換えることにより階数が低い場合に帰着され帰納法の仮定より正しい。(3) $\{0\}\in\Sigma\wedge U$ の場合 $U=N_\mathbb{R}$ かつ $\Sigma\wedge U=\Sigma$ である。$H^{-r}(\tilde{C}^\cdot(\Sigma,\mathbb{Z}_{1,0}))=0$ は明らかであるから $\Sigma_+=\Sigma\setminus\{\{0\}\}$ とおいて $H^i(\tilde{C}^\cdot(\Sigma_+,\mathbb{Z}_{1,0}))=0$，$i>-r$ を示せばよい。これは一般の有理超平面 $H\subset N_\mathbb{R}$ をとれば $\eta\notin\Sigma\wedge U$ の時と同様である。　証明終り

§2. 正規半群環に対する Danilov のドラム複体

この節では強凸有理多角錐 π を一つ固定して $\Sigma = \Gamma(\pi)$ すなわち π の面全体からなる $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ を考える。

k を任意の体とし S を k 上の半群環 $k[M \cap \pi^{\vee}]$ とする。但し $\pi^{\vee} \subset M_{\mathbb{R}}$ は π の双対錐 $\{x \in M_{\mathbb{R}} ; \langle x, a \rangle \geqq 0, \forall a \in \pi\}$ である。$m \in M \cap \pi^{\vee}$ に対応する S の元を $e(m)$ と書けば $S = \bigoplus_{m \in M \cap \pi^{\vee}} k e(m)$ であり $m, m' \in M \cap \pi^{\vee}$ に対し $e(m) e(m') = e(m + m')$ となる。$M \cap \pi^{\vee}$ の部分集合 U に対し $\bigoplus_{m \in U} k e(m)$ を $k[U]$ と書くことにする。σ を π の面, $\sigma^{\perp} = \{x \in M_{\mathbb{R}} ; \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in \sigma\}$ とすると, $P(\sigma) = k[M \cap (\pi^{\vee} \setminus \sigma^{\perp})]$ は S の素イデアルであり, $A(\sigma) = S/P(\sigma)$ は S の部分環 $k[M \cap \pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp}]$ と同型である。

$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_s\}$ を π の1次元の面全体の集合とし, イデアル $J \subset S$ を $P(\gamma_1) \cap \cdots \cap P(\gamma_s)$ とおく。そのとき S 上の加群

$$\Theta_S(-\log J) = \{\alpha \in \mathrm{Der}(S) \; ; \; \alpha(J) \subset J\}$$

を考える。但し $\mathrm{Der}(S)$ は S から S への k-微分全体から成る S-加群である。各 $n \in N$ に対し k 上の微分 $\delta_n : S \to S$ を $\delta_n(e(m)) = \langle m, n \rangle e(m)$, $\forall m \in M \cap \pi^{\vee}$ により定めると $J = k[M \cap (\operatorname{int} \pi^{\vee})]$ は k 上 $\{e(m) ; m \in M \cap (\operatorname{int} \pi^{\vee})\}$ により生成されているので $\delta_n \in \Theta_S(-\log J)$, $\forall n \in N$ となって

いることがわかる。[4, Prop. 1.12] により，この対応 $n \mapsto \delta_n$ はS-加群としての同型 $S \otimes N \xrightarrow{\sim} \Theta_S(-\log J)$ を引き起こす。$\Omega^1_S(\log J)$ を双対加群 $\mathrm{Hom}_S(\Theta_S(-\log J), S)$ とする。上の同型より $S \otimes M \xrightarrow{\sim} \Omega^1_S(\log J)$ を得る。この同型により $1 \otimes m$ に対応する $\Omega^1_S(\log J)$ の元を $de(m)/e(m)$ と書く。$\{m_1, \cdots, m_r\}$ を M の一つの基底とすると $\Omega^1_S(\log J)$ は $\{de(m_1)/e(m_1), \cdots, de(m_r)/e(m_r)\}$ を基底とする自由S-加群である。さらに $0 \leqq p \leqq r$ なる各整数 p に対して $\Omega^p_S(\log J) = \wedge^p \Omega^1_S(\log J)$ とおく。ここで外積はS上行ない，したがって $\Omega^0_S(\log J) = S$ である。S は M に次数を持つ k 上の多元環と考えられるが，任意の $m \in M$ に対し $de(m)/e(m)$ の次数を $0 \in M$ とおくことにより $\Omega^p_S(\log J)$ も M に次数を持つS-加群と考えられる。$\Omega^p_S(\log J)$ は $S \otimes \wedge^p M$ と自然に同型であるから，次数 $m \in M$ の斉次部分 $\Omega^p_S(\log J)(m)$ は $m \in M \cap \pi^\vee$ のとき $k e(m) \otimes \wedge^p M$ そうで無い時 0 となる。

さて Danilov の加群 $\tilde{\Omega}^p_S$ は $\Omega^p_S(\log J)$ の部分S-加群として与えられる。$m \in M \cap \pi^\vee$ に対し $\pi \cap m^\perp$ は π の面となる。これを $\rho(m)$ と書く。容易にわかるように $m, m' \in M \cap \pi^\vee$ に対し $\rho(m+m') = \rho(m) \cap \rho(m')$ となっている。ここで

$$\tilde{\Omega}^p_S = \oplus_{m \in M \cap \pi^\vee} k e(m) \otimes \wedge^p M[\rho(m)] \subset \Omega^p_S(\log J)$$

とおけば $m, m' \in M \cap \pi^\vee$ に対し $M[\rho(m)] \subset M[\rho(m+m')]$ であ

ることから $e(m')(k\,e(m)\otimes \wedge^p M[\rho(m)]) \subset k\,e(m+m')\wedge^p M[\rho(m+m')]$ となり $\tilde{\Omega}_S^p$ は $\Omega_S^p(\log J)$ の部分 S-加群となっていることがわかる。但し Danilov [1] はこの加群を単に Ω_S^p と書いているが，ここでは通常のケーラー微分型式の加群と区別するために，このように書く。

各整数 p に対し外微分

$$d : \Omega_S^p(\log J) \longrightarrow \Omega_S^{p+1}(\log J)$$

を M の元 $m, m_1, \cdots, m_p$ に対し $d(e(m)\otimes(m_1\wedge\cdots\wedge m_p)) = e(m)\otimes(m\wedge m_1\wedge\cdots\wedge m_p)$ かつ k-線型になるよう定義する。これらは M-次数づけを保つ1階の微分作用素となる。$m \in M\cap\pi^\vee$ に対し $m \in M[\rho(m)]$ であることから $d(\tilde{\Omega}_S^p) \subset \tilde{\Omega}_S^{p+1}$，$p=0, \cdots, r-1$ であることがわかり，$d^2=0$ は定義から明らかであるから複体

$$\tilde{\Omega}_S^{\cdot} = (\cdots \to 0 \to S \to \tilde{\Omega}_S^1 \to \cdots \to \tilde{\Omega}_S^r \to 0 \to \cdots)$$

が得られる。Danilov はこの複体について次の "Poincaré の補題" が成立することを示した。

<u>命題 2.1 [1].</u>　π の次元が $r = \dim N_{\mathbb{R}}$ に等しく，かつ k の標数が 0 の場合，同型 $k \cong S(0)$ $(a \mapsto a e(0))$ により列

$$0 \to k \to S \to \tilde{\Omega}_S^1 \to \cdots \to \tilde{\Omega}_S^r \to 0$$

は完全列となる。

π が非特異多面錐であるとき，つまり自由 $\mathbb{Z}$-加群 N のある基底 $\{n_1, \cdots, n_r\}$ とある整数 $0 \leqq t \leqq r$ により $\pi = \mathbb{R}_0 n_1 + \cdots + \mathbb{R}_0 n_t$ と書けているときは S は正則環であり，$\tilde{\Omega}^p_S$ は非特異アフィンスキーム Spec(S) 上の通常の正則 p-型式全体の成す加群 Ω^p_S と同じである。実際 $\{m_1, \cdots, m_r\}$ を M の $\{n_1, \cdots, n_r\}$ に双対な基底とすると，$z_1 = e(m_1), \cdots, z_r = e(m_r)$ に対し $\tilde{\Omega}^1_S$ は $\{dz_1, \cdots, dz_r\}$ を基底とする自由 S-加群となり Ω^1_S に一致する。一般の π の場合 $\tilde{\Omega}^p_S$ は正規アフィンスキーム Spec(S) から特異点を除いた部分の正則 p-型式全体と一致する。[1]参照。

さて Φ を $\Sigma = \Gamma(\pi)$ の星状閉部分集合とする。$I(\Phi) = \bigcap_{\sigma \in \Phi} P(\sigma)$ とおき $B(\Phi) = S/I(\Phi)$ と定義する。$I(\Phi)$ は半素イデアルであるから $B(\Phi)$ は巾零元を持たない。Danilov の複体 $\tilde{\Omega}^{\cdot}_S$ を環 $B(\Phi)$ に対し次のように拡張して定義する。$I(\Phi) = k[M \cap (\pi^\vee \setminus (\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp))]$ かつ $\Omega^p_S(\log J)$ は次数 $0 \in M$ の元から成る基底を持つ自由 S-加群であるから，S-加群 $I(\Phi)\Omega^p_S(\log J)$ の次数 $m \in M$ の斉次部分は $m \notin \pi^\vee \setminus (\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp)$ であれば 0 で，$m \in \pi^\vee \setminus (\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp)$ の時は $\Omega^p_S(\log J)(m) = k\,e(m) \otimes \wedge^p M$ に等しい。そこで，

$$\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)} = (\tilde{\Omega}^p_S + I(\Phi)\Omega^p_S(\log J))/I(\Phi)\Omega^p_S(\log J)$$

とおくと $m \in \pi^\vee \cap (\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp)$ のとき $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}(m) =$

$\tilde{\Omega}^p_S(m) = k\,e(m) \otimes \wedge^p M[\rho(m)]$，それ以外では $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}(m) = 0$ となる。ここで $m \in \pi^\vee \cap (\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp)$ であれば $\rho(m) \in \Phi$ であることに注意しておく。$\sigma \in \Gamma(\pi)$ に対し $\operatorname{rank} M[\sigma] = \operatorname{codim} \sigma$ であるから，$p > h = \text{ht}\,\Phi = \max\{\operatorname{codim} \sigma \,;\, \sigma \in \Phi\}$ の時，任意の $\sigma \in \Phi$ に対し $\wedge^p M[\sigma] = 0$ であり，したがって $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)} = 0$ となる。また定義から明らかに $\tilde{\Omega}^0_{B(\Phi)} = B(\Phi)$ である。

$\eta \in \Sigma$ に対し $\Sigma(\eta\prec) = \{\sigma \in \Sigma \,;\, \eta \prec \sigma\}$ は Σ の星状閉部分集合であり $I(\Sigma(\eta\prec)) = P(\eta)$ であるので $B(\Sigma(\eta\prec)) = A(\eta)$ である。一方 $N[\eta] = N/N \cap (\eta + (-\eta))$ と $M[\eta]$ は互いに双対な $\mathbb{Z}$-加群であったから $k[M[\eta] \cap \pi[\eta]^\vee] = k[M \cap \pi^\vee \cap \eta^\perp]$ となり，$S[\eta] = k[M[\eta] \cap \pi[\eta]]$ とおくと $S[\eta]$ も $A(\eta)$ と自然に同型である。$S[\eta]$ に対して定義された Danilov の $S[\eta]$-加群 $\tilde{\Omega}^p_{S[\eta]}$ は

$$\tilde{\Omega}^p_{S[\eta]} = \bigoplus_{m \in M[\eta] \cap \pi[\eta]^\vee} k\,e(m) \otimes \wedge^p M[\eta][\rho[\eta](m)]$$

となる。ここで $m \in M[\eta] \cap \pi[\eta]^\vee$ に対し $\rho[\eta](m) = \pi[\eta] \cap m^\perp = \{a \in \pi[\eta] \,;\, \langle m, a \rangle = 0\} \in \Gamma(\pi[\eta])$，また $\rho \in \Gamma(\pi[\eta])$ に対し $M[\eta][\rho] = \{m \in M[\eta] \,;\, \langle m, a \rangle = 0,\ {}^\forall a \in \rho\}$ である。容易にわかるように $m \in M[\eta] \cap \pi[\eta]^\vee$ に対し $\eta \prec \rho(m)$ かつ $\rho[\eta](m) = \rho(m)[\eta]$ であってまた $\rho \in \Gamma(\pi)$，$\eta \prec \rho$ に対して $M[\eta][\rho[\eta]] = M[\rho]$ であるから

$$\tilde{\Omega}^p_{S[\eta]} = \bigoplus_{m \in M \cap \pi^\vee \cap \eta^\perp} k\, e(m) \otimes \wedge^p M[P(m)]$$

となり，これにより記号の整合性を示す次の命題を得る。

<u>命題2.2.</u>　任意の $\eta \in \Sigma$ に対し自然な同型

$$\tilde{\Omega}^p_{S[\eta]} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega}^p_{B(\Sigma(\eta<))}$$

が任意の整数 p に対し存在する。

外微分 $d: \tilde{\Omega}^p_S \to \tilde{\Omega}^{p+1}_S$ は M による次数付けを不変にするので，1階の微分作用素 $d: \tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)} \to \tilde{\Omega}^{p+1}_{B(\Phi)}$ が引き起こされ，複体 $\tilde{\Omega}^\cdot_{B(\Phi)}$ が得られる。この複体の次数 $m \in M$ の部分 $\tilde{\Omega}^\cdot_{B(\Phi)}(m)$ は $m \in M \cap (\pi^\vee(\bigcup_{\sigma \in \Phi} \sigma^\perp))$ の時 $\tilde{\Omega}^\cdot_S(m)$ に等しく，それ以外の時は0であるから命題2.1より明らかに $\dim \pi = r$ かつ k の標数が0であれば列

$$0 \to k \to B(\Phi) \to \tilde{\Omega}^1_{B(\Phi)} \to \cdots \to \tilde{\Omega}^r_{B(\Phi)} \to 0$$

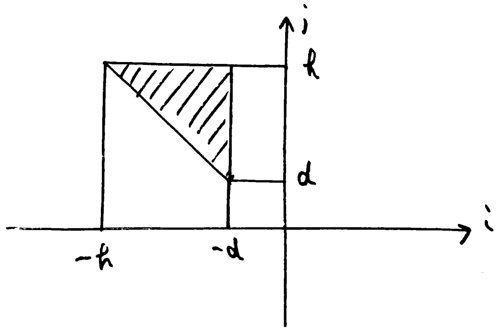
は完全となる。

$B(\Phi)$-加群 $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}$ は2重複体から構成することも出来る。A を Σ から S-加群の圏への共役関手 $\sigma \longmapsto A(\sigma) = S/P(\sigma)$，また各整数 p に対し $\wedge^p$ を Σ から加群の圏への反変関手 $\sigma \longmapsto \wedge^p M[\sigma]$ とする。但し $\sigma < \tau$ に対応する準同型 $A(\sigma) \to A(\tau)$ は自然な全射，$\wedge^p M[\tau] \to \wedge^p M[\sigma]$ は包含

写像 $M[\tau]\hookrightarrow M[\sigma]$ から引き起こされるもの する。このとき テンソル積 $A\otimes\Lambda^p:(\tau,\sigma)\longmapsto A(\tau)\otimes\Lambda^p M[\sigma]$ は Σ^2 から S-加群の圏への (1,1)-型の2重関手となる。さて Σ の星状開部分集合 Φ に対し $\Phi^{(2)}=\{(\tau,\sigma)\in\Phi^2;\ \sigma\prec\tau\}$ は Σ^2 の局所 (1,1)-開な部分集合であったから2重複体 $C^{\cdot\cdot}(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)$ が得られる。

$$C^{i,j}(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)=\bigoplus_{(\tau,\sigma)\in\Phi(-i,j)}A(\tau)\otimes\Lambda^p M[\sigma]\otimes\mathbb{Z}(\tau/\sigma)$$

であるから、$h=\mathrm{ht}\,\Phi$ とすれば、これが0でないのは $-h\leqq i\leqq -d,\ d\leqq j\leqq h$ かつ $i+j\geqq 0$ の範囲である。但し $d=\mathrm{codim}\,\pi$



したがって複体 $C^{\cdot}(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)$ については $C^{l}(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)$ は $0\leqq l\leqq h-d$ 以外では0である。また任意の $\eta\in\Sigma$ に対し $\mathbb{Z}(\eta/\eta)=\mathbb{Z}$ であることに注意すると $C^0(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)=\bigoplus_{\eta\in\Phi}A(\eta)\otimes\Lambda^p M[\eta]$ となる。さてここで $B(\Phi)$-準同型 $\omega^p(\Phi):\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}\to C^0(\Phi^{(2)},A\otimes\Lambda^p)$ を次のように定義する。各 $\eta\in\Phi$ に対し $\Sigma(\eta\prec)=\{\sigma\in\Sigma;\ \eta\prec\sigma\}\subset\Phi$ であるから $I(\Phi)\subset I(\Sigma(\eta\prec))$ であり自然な全射準同型 $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}\to\tilde{\Omega}^p_{B(\Sigma(\eta\prec))}$

が存在する。命題2.2より $\tilde{\Omega}^p_{B(\Sigma(\eta \prec))} \simeq \tilde{\Omega}^p_{S[\eta]}$ で $S[\eta]$ に対して $J \subset S$ と同様に定義されたイデアルを $J[\eta]$ と書くと，$\tilde{\Omega}^p_{S[\eta]} \subset \Omega^p_{S[\eta]}(\log J[\eta]) = S[\eta] \otimes \wedge^p M[\eta]$ であるから，準同型 $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)} \to S[\eta] \otimes \wedge^p M[\eta]$ が得られる。$S[\eta] \simeq A(\eta)$ であるから，この準同型を並べて得られる $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}$ から $C^0(\Phi^{(2)}, A \otimes \wedge^p) = \oplus_{\eta \in \Phi} A(\eta) \otimes \wedge^p M[\eta]$ への準同型を $\omega^p(\Phi)$ と定義する。

<u>命題2.3.</u> 任意の星状閉部分集合 $\Phi \subset \Sigma$ 及び整数 $0 \leqq p \leqq$ rk Σ に対し列

$$0 \to \tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)} \xrightarrow{\omega^p(\Phi)} C^0(\Phi^{(2)}, A \otimes \wedge^p) \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{r-d-1}} C^{r-d}(\Phi^{(2)}, A \otimes \wedge^p) \to 0$$

は完全列である。

証明　すべての準同型は M への次数づけを不変にするので各 $m \in M$ についてその次数の成分の完全性を示せばよい。$m \notin M \cap \pi^\vee$ のときはどの項も 0 であるから正しい。$m \in M \cap \pi^\vee$ と仮定する。$\rho = \rho(m)$ とおくと $\rho \in \Phi$ のとき $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}(m) = k\,e(m) \otimes \wedge^p M[\rho]$ であり $\rho \notin \Phi$ のとき $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}(m) = 0$ である。一方 $C^{i,j}(\Phi^{(2)}, A \otimes \wedge^p) = \oplus_{(\tau,\sigma) \in \Phi(i,j)} A(\tau) \otimes \wedge^p M[\sigma]$ であって $A(\tau)(m)$ は $\tau < \rho$ のとき $k\,e(m)$ でそれ以外は 0

であるから $C^{\cdot\cdot}(\Phi^{(2)}, A\otimes\Lambda^p)(m) = k e(m)\otimes C^{\cdot\cdot}(\Phi(<P)^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,0}\otimes\Lambda^p)$ となる。$P\notin\Phi$ であればこれも 0 となるので $P\in\Phi$ と仮定する。まず m-成分が複体であることを示そう。$\sigma < P$ であれば $\Lambda^p M[P]\subset\Lambda^p M[\sigma]$ であることに注意すれば

$$k e(m)\otimes\Lambda^p M[P]\otimes C^{\cdot}(\Phi(<P)^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,1}) \subset k e(m)\otimes C^{\cdot}(\Phi(<P)^{(2)}, \mathbb{Z}_{1,0}\otimes\Lambda^p)$$

を得る。補題 1.5 より左辺は $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}(m) = k e(m)\otimes\Lambda^p M[P]$ からの完全列を作るので $d^{\circ}\circ\omega^p(\Phi)$ の m 次の成分は 0 であることがわかり命題の列の m 次の成分は複体であることが示された。さてこの複体の m 次の成分を $A^{\cdot}$ とおき $d' = \operatorname{codim} P$ とおいて補題 1.5 の証明と全く同様に減少的フィルター付け $\{F^p\}$ を作ると $Gr^p_F(A^{\cdot})$ は $p < d'$ に対しては 0, $p = d'$ の時は

$$\cdots \to 0 \to k e(m)\otimes\Lambda^p M[P] \to k e(m)\otimes\Lambda^p M[P]\otimes\mathbb{Z}(P/P) \to 0 \to \cdots$$

となっていて, $p > d'$ に対しては

$$Gr^p_F(A^{\cdot}) = \bigoplus_{\sigma\in\Phi(P)} k e(m)\otimes\Lambda^p M[\sigma]\otimes C^{\cdot}(\Sigma(\sigma|P), \mathbb{Z}_{1,0})$$

であって補題 1.5 の場合と同様にこれらの複体のコホモロジーはすべて消え, したがって $A^{\cdot}$ も完全となる

証明終り

この命題により導来圏において $\tilde{\Omega}^p_{B(\Phi)}$ は 2 重複体から得られる複体 $C^{\cdot}(\Phi^{(2)}, A\otimes\Lambda^p)$ と自然に同型となることがわかる。さらに各 $0\leqq p\leqq n-1$ に対して古準同型 $d: A(\tau)\otimes\Lambda^p M[\sigma]$

$\longrightarrow A(\tau)\otimes\Lambda^{p+1}M[\sigma]$ を $d(e(m)\otimes(m_1\wedge\cdots\wedge m_p))=e(m)\otimes(m\wedge m_1\wedge\cdots\wedge m_p)$ と定義しこれをすべての $(\tau,\sigma)\in\Phi^{(2)}$ について直和を取ることにより複体の標準同型 $d: C^{\cdot}(\Phi^{(2)}, A\otimes\Lambda^{p}) \to C^{\cdot}(\Phi^{(2)}, A\otimes\Lambda^{p+1})$ が得られる。これが $\tilde{\Omega}^{\cdot}_{B(\Phi)}$ の外微分及び $\omega^{p}(\Phi)$, $\omega^{p+1}(\Phi)$ と可換であることは容易にわかる。

文献表

[1] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97–154.

[2] P. du Bois, Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière, Bull. Soc. math. France 109 (1981), 41–81.

[3] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. 32 (1980), 111–146.

[4] M.-N. Ishida and T. Oda, Torus embeddings and tangent complexes, Tohaku Math. J. 33 (1981), 337–381.

[5] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[6] 小田忠雄，凸体と代数幾何学，紀伊国屋数学叢書，紀伊国屋書店，

不分岐拡大 と 双有理整拡大

愛知教育大学　　金光三男

環はすべて標数0の可換環で単位元1をもつネーター環とする。Rを標数0の体を含むネーター整域、また、AをRの双有理整拡大で有限R－加群とする。ここでは、$Ass_R(A/R)$がRの極大イデアルばかりからなるときには、Aの部分環でR上不分岐拡大なもので最大のものが存在し、これは、R上カスプ型拡大であるAの部分環の最小のものと一致し、標準的導分の定数環を使って述べることもできることを示す。

<u>定義</u>. SをR－代数とする。$\mathfrak{p} \in Spec(R)$に対し、$P \in Spec(S)$を $P \cap R = \mathfrak{p}$ なるものとする。このとき、S_P が $R_\mathfrak{p}$上不分岐であるとは、1) $PS_P = \mathfrak{p}S_P$ かつ 2) S_P/PS_P が、$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 上有限分離拡大体のときをいう。環の拡大 S/R が不分岐であるとは、1) Rの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して、$\mathfrak{p}$上にあるSの素イデアルは有限個しかない。2) $P \in Spec(S)$が $P \cap R = \mathfrak{p}$なら、$S_P/R_\mathfrak{p}$ が不分岐拡大であるときをいう。

SがR上有限生成の環の商環であるとき、次は同値である。

(1). S/Rが不分岐拡大である。

(2). SのR−微分加群を$\Omega_R(S)$と書くと、$\Omega_R(S)=(0)$。

(3). Sの高次R−微分加群を$\Omega_R^{(n)}(S)$と書くとき、ある自然数nに対して、$\Omega_R^{(n)}(S)=(0)$。(このときは、任意の自然数mに対しても$\Omega_R^{(m)}(S)=(0)$)。

(4) Sは平坦$S\otimes_R S$−加群である。

命題1. R上不分岐なAとRの中間環で最大のものが存在する。(これを$\overset{u}{A}R$と書く)。

証明 $\Gamma=\{B \mid B$はRとAの中間環でB/Rは不分岐拡大$\}$とおくと、Aはネーター R−加群だから、Γには極大元が存在する。もしこのような極大元B, Cが異なるとすると、$B \subsetneqq B[C]$だから、$\mathfrak{a}$を$B\otimes_R C$の適当なイデアルとして

$$\begin{aligned}\Omega_R(B[C]) &= \Omega_R((B\otimes_R C)/\mathfrak{a})\\ &= \{(\Omega_R(B)\otimes_R C)\oplus(\Omega_R(C)\otimes_R B)\}/(\Omega(\mathfrak{a})+\mathfrak{a}\Omega_R(B\otimes_R C))\\ &=(0)\end{aligned}$$

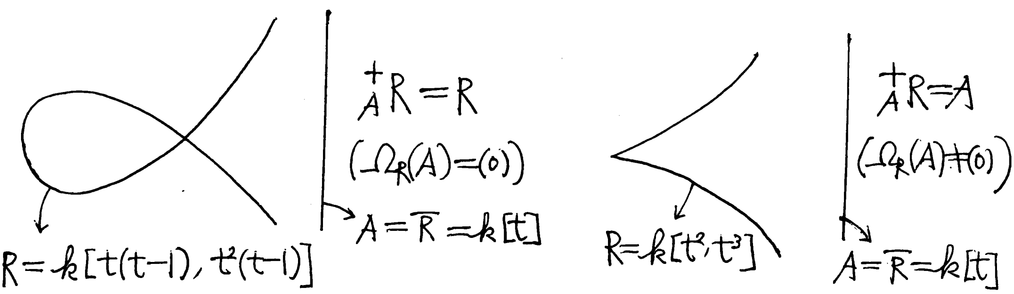
但し、$\Omega(\mathfrak{a})$は標準的R−微分 $d: B\otimes_R C \longrightarrow \Omega_R(B\otimes_R C)$とするとき$\{da \mid a\in\mathfrak{a}\}$で生成される$\Omega_R(B\otimes_R C)$の部分$B\otimes_R C$−加群とする。よって$B[C]\in\Gamma$となり、Bが極大元で

あることに反する。故に、$B=C$ [Q.E.D]

次にカスプ型拡大と不分岐拡大の関係を調べてみよう。

<u>定義</u> A/R がカスプ型拡大とは ${}^+_A R = A$ のときをいう。但し、${}^+_A R$ は R の A における seminormalization とする。これは、$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$ で対応する剰余体が一致することと同値である。

$R \subset {}^+_A R \subset A$ であるが、seminormal拡大とは、${}^+_A R = R$ であったがカスプ型拡大とは ${}^+_A R$ が対極の A に一致即ち ${}^+_A R = A$ のときである。次はこの2つの場合の典型的な例である。



(k は標数0の体で $\bar{R}$ は R の整閉包とする。)

更につけ加えて、

<u>例</u> k を標数0の体とし、$A = k[[X]]$ とする。X の項をもたない巾級数全体のつくる A の部分環は、$R = k[[X^2, X^3]]$

であり、Rの整閉包は $\overline{R}=A=k[[X]]$ だから、A/R はカスプ型拡大で $\Omega_R(A)\neq(0)$ 即ち分岐拡大である（命題3参照）。

さて、今 $C={}^{+}_{A}R$ とおくと、C/R はカスプ型拡大即ち ${}^{+}_{C}R=C$ が知られている。

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\varphi}_C: & C & \longrightarrow & C\otimes_R C & \longrightarrow (C\otimes_R C)/(\text{巾零根基}) \\ & \Psi & & \Psi & \Psi \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha\otimes 1-1\otimes\alpha & \longrightarrow (\alpha\otimes 1-1\otimes\alpha)\text{の類} \end{array}$$

は、R－準同型であり、Manaresi の結果より $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}_C={}^{w}_{C}R={}^{+}_{C}R=C$。但し、${}^{w}_{C}R$ は R の C における weak normalization を表わすものとする。これより、$\overline{\varphi}_C(C)=(0)$ で $\{\alpha\otimes 1-1\otimes\alpha \mid \alpha\in C\}$ で生成されるイデアルを I_C とおくとこのイデアルは巾零イデアルとなる。今、自然数 g に対して $I_C^{g+1}=(0)$ とする。$\Delta^g: C\longrightarrow\Omega_R^{(g)}(C)=I_C/I_C^{g+1}=I_C$ を標準的C－導分とする。$C_1=(\Delta^g)^{-1}(0)$ とおくと、

<u>補題2.</u> 上の記号の下で $C\supsetneqq R$ なら、$C\supsetneqq C_1\supset R$ である。

<u>証明</u> $C=C_1$ として矛盾を導く。$\{c\in C/\ C\otimes_R C$ において $c\otimes 1=1\otimes c\}$ を ${}^{*}_{C}R$ とおくと、${}^{*}_{C}R=C$ が容易にいえる。P. Samuel の結果よりこれは C/R がグロタンディックの意味の

epimorphism である。再び P. Samuel の結果“C/Rが整拡大かつ epimorphismであることは $C=R$と同値”を使えば $C=R$ となり仮定に反する。よって $C \subsetneq C_1$ である。 [Q.E.D.]

命題3. A/Rがカスプ型拡大かつ不分岐であることは $A=R$となることに同値である。

証明 補題2の前で述べたような性質をもつℓをとると、

$$\Delta^{\ell} : A \longrightarrow \Omega_R^{(\ell)}(A) = (0).$$

もし、$A \supsetneq R$ とすると補題2より $A \supsetneq (\Delta^{\ell})^{-1}(0) = A$ となり矛盾。故に $A=R$。逆は明らか。 [Q.E.D.]

次の補題においては、$\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ (ここで、$\mathrm{Max}(R)$ はRの極大スペクトルを表わす) の仮定はなくても成立するが、ここで必要なのはこの仮定のある時のみで証明も簡単になるからこれを仮定する。

補題4. A/Rがカスプ型拡大で $\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ なら、Aの部分環の列:

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots\cdots \supset A_d = R$$

で $A_{i+1} = d_i^{-1}(0)$ なるものが存在する。ここで $d_i : A_i \longrightarrow \Omega_R(A_i)$

は、A_i の標準的 k－導分とする。

<u>証明</u>. R の A における導手を $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(A/R)$ と書くと、$A/\mathfrak{C}$ はアルティン的 $R/\mathfrak{C}$－加群だから、ある自然数 j に対して $A_j/\mathfrak{C}=A_{j+1}/\mathfrak{C}$。よって $A_j=A_{j+1}=\cdots\cdots$。これを ${}^{C}_{A}R$ とおく。$A_{j+1}=d_j^{-1}(0)$ だから、$\Omega_R(A_j)=\sum_{a\in A_j}A_j d_j a=(0)$ 故に A_j/R は不分岐拡大である。一方 A/R がカスプ型拡大なら明らかに A_j/R もそうだから、命題 3 より $A_j=R$. [Q.E.D.]

次に A/B がカスプ型拡大である最小の A と R の中間環 B が存在することを証明するがその前に次の命題を述べよう。

<u>命題 5.</u> $\mathrm{Ass}_R(A/R)\subset \mathrm{Max}(R)$ で $d: A\longrightarrow \Omega_R(A)$ を A の標準的 R－導分とし、$R=d^{-1}(0)$ なるものとする。このとき、A/R はカスプ型拡大である。

<u>証明</u> A/R がカスプ型拡大であることをいうには $\mathrm{Ass}_R(A/R)$ の任意の元 $\mathfrak{m}$ に対して $M\cap R=\mathfrak{m}$ となる A の素イデアル M が唯一つ存在して、剰余体 $k(M)\,(=A_M/MA_M)=k(\mathfrak{m})$ をいえばよい。$\mathrm{Ass}_R(A/R)$ は有限集合だからそれを $\mathfrak{m},\mathfrak{m}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{m}_s$ とすると $\mathfrak{m}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{m}_s\not\subset\mathfrak{m}$ となる。従って、

$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_\ell$ の元で$\mathfrak{m}$に属さない元aが存在する。$R[\frac{1}{a}]$, $A[\frac{1}{a}]$を考えると$\mathrm{Ass}_R(A/R) = \{\mathfrak{m}\}$の場合に帰着できる。$\mathrm{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}$の任意の元$\mathfrak{p}$については、$\mathfrak{p}$上にある$A$の素イデアル$P$が唯一つ存在して$k(\mathfrak{p}) = k(P)$がいえるから、[1, Proposition 3.2] より (i) $\mathfrak{m}$上のAの素イデアルが唯一つ存在する。(ii) $k(M) = k(\mathfrak{m})$ (iii) $(A/M)/(R/\mathfrak{m})$はカスプ型拡大をいえばよい。(iii) は(ii) よりいえる。(i) を証明する。$\mathfrak{m}$上にあるAの素イデアルを$M_1, M_2, \cdots, M_g$とし、$g \geq 2$と仮定して矛盾を導く。$M_1A_\mathfrak{m}, \cdots, M_gA_\mathfrak{m}$が$\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$上にあるすべての$A_\mathfrak{m}$の素イデアルである。今、$d_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \longrightarrow \Omega_{R_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m})$を$A_\mathfrak{m}$の標準的$R_\mathfrak{m}$-導分とすると、$R = d^{-1}(0)$より$R_\mathfrak{m} = d_\mathfrak{m}^{-1}(0)$がいえる。$R_\mathfrak{m}$の$A_\mathfrak{m}$における導手$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(A_\mathfrak{m}/R_\mathfrak{m})$の準素分解を$\mathfrak{C} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$（各$Q_i$は$M_iA_\mathfrak{m}$に属する準素イデアル）とすると

$$A_\mathfrak{m}/\mathfrak{C} \cong A_\mathfrak{m}/Q_1 \oplus \cdots \oplus A_\mathfrak{m}/Q_t$$

この右辺の元$(\bar{1}, \bar{0}, \cdots, \bar{0})$に対応する$A_\mathfrak{m}/\mathfrak{C}$の元を$\bar{\alpha}$とすると$d_\mathfrak{m}^{-1}(0) = R_\mathfrak{m}$だから$\alpha \in R_\mathfrak{m}$がいえて$(\bar{1}, \bar{0}, \cdots, \bar{0})$が対角元$(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \cdots, \bar{\alpha})$となり矛盾。故に$g = 1$となり(i)がいえた。次に(ii)をコーエンの構造定理を使って証明する。(i) より$\mathfrak{m}$上にあるAの素イデアルMは唯一つ存在しA/Rは整拡大だから、$A_M = A_\mathfrak{m}$。$\mathrm{Ass}_R(A/R) = \{\mathfrak{m}\}$だから、$R_\mathfrak{m}$

の A_M における導手 $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}(A_M/R_m)$ は mR_m に属する準素イデアルだから、$A_M/\mathfrak{C}'$ は標数0の体 k を含むアルティン環である。コーエンの構造定理より、$A/M \cong k(M) \subset A_M/\mathfrak{C}'$。もし、$k(m) \subsetneqq k(M)$ とすると $k(m)$ に属さない $k(M)$ の元 $\bar{\xi}$ $(\xi \in A)$ が存在して、標数0の体で考えているから、ξ を根にもつ $R_m[X]$ の多項式 $f(X)$ で $f'(\xi)$ が A_M の単元で $f(\xi) \in \mathfrak{C}' \subset R_m$ なるものが存在する。従って、

$$0 = df(\xi) = f'(\xi)\,d\xi$$

だから $d\xi = 0$. 故に $\xi \in d^{-1}(0) = R$。これは $\bar{\xi} \in k(m)$ を示し矛盾。 [Q.E.D.]

この命題5をくり返して使うと補題4より $A/{}^{c}_{A}R$ はカスプ型拡大がいえる。

<u>定理6.</u> $Ass_R(A/R) \subset Max(R)$ なら、${}^{c}_{A}R$ は A/B がカスプ型拡大なる B のうちで最小のものである。

<u>証明.</u> $A = A'_0$ とおき、A'_{i+1} を A'_i の標準的 B-導分

$$d'_i : A'_i \longrightarrow \Omega_B(A'_i)$$

から $A'_{i+1} = (d'_i)^{-1}(0)$ とおいて構成する。A/B はカスプ型拡大だから補題4よりある自然数 t に対して $A'_t = B$ となる。

$A_i' \supset {}^{C}_{A}R$ をいうため、次の可換図式を考える。ここで d_0 はAの標準的R－導分とする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "d_0'"] \arrow[dr, "d_0"'] & & \Omega_B(A) \\ & \Omega_R(A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

この図式より

$$A_1' = \mathrm{Ker}\, d_0' \supset \mathrm{Ker}\, d_0 = A_1$$

がいえる。A_iについてもA_i'と同様に構成する。今 $A_i' \supset A_i$ とすると、次の可換図式より $A_{i+1}' = \mathrm{Ker}\, d_i' \supset A_{i+1} = \mathrm{Ker}\, d_i$ よって

$$\begin{tikzcd} A_i' \arrow[rr, "d_i'"] & & \Omega_B(A_i') \\ A_i \arrow[u, hook] \arrow[r, "d_i"] & \Omega_R(A_i) \arrow[r] & \Omega_R(A_i') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$A_j' \supset A_j$ がいえ、

$A_t' = B \supset A_t$。

tを十分大きくすると

$B \supset {}^{C}_{A}R$ [Q.E.D.]

<u>定理7</u>. $\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ なら、${}^{u}_{A}R = {}^{C}_{A}R$ となる。

<u>証明</u> 補題4の証明より ${}^{C}_{A}R/R$ は不分岐拡大だから、命題1より ${}^{u}_{A}R \supset {}^{C}_{A}R$。 $A/{}^{C}_{A}R$は定理6よりカスプ型拡大だから ${}^{u}_{A}R/{}^{C}_{A}R$もそうである。命題3より ${}^{u}_{A}R = {}^{C}_{A}R$。 [Q.E.D.]

<u>注意</u>(1). BがRとAの中間環で $\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ なら $\mathrm{Ass}_B(A/B) \subset \mathrm{Max}(B)$がいえる。

(2) $\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ なら $A/{}^{+}_{A}R$は不分岐拡大で

$\bar{A}$R/R はカスプ型拡大である。

(3) $\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ でRがAにおいてseminormalならA/Rは不分岐拡大である。これはRが標数0の体を含むことが本質的に効いている。一般には、seminormal と不分岐拡大は関係ない。

例　kを標数0の体とし、$A = k[x]$ とおく。
$R = k + kx(x-1) + (x(x-1))^2 A$ をAの部分環とすると、
A/Rは不分岐拡大だがRはAにおいてseminormalではない。

最後に応用を述べる。今迄述べた定理より、$\mathrm{Ass}_R(A/R) \subset \mathrm{Max}(R)$ なら、AのR-代数としての生成系 $\{\alpha, t_1, \cdots, t_n\}$ 即ち $A = R[\alpha, t_1, \cdots, t_n]$ で $R[\alpha]/R$ が不分岐拡大で $t_i^2, t_i^3 \in R[\alpha, t_1, \cdots, t_{i-1}]$ がとれる。

参考文献

[1] K. Yoshida, On birational-integral extension of rings and prime ideals of depth one, Japan J. Math. 8, 1982, 49–70.

Euclidean Rings について

岡山理科大 応用数学
吉田憲一

84年秋の日本数学会 代数分科会において，永田先生が午前の部の最後に表題の Euclidean Rings についてお話しになられましたが，残念ながら時間の余裕がなく手短かにお話しになられ，詳細はアブストラクトを見て下さいとの事でありました。しかし，その肝心のアブストラクトには定義の他，あまりヒントとなる事が出ておりません。そこで，時間延長の一因を成した人間として，この Euclidean Rings の正体を見とどけて見ようと考えた次第です。

従って，ここで述べられている結果はすべて，既に知られているものばかりかもしれませんが，この様な教科書レベルの内容であっても，結構面白い事が出てくるものであると感心しております。

なお，プログラムでは，環の可解的拡大について お話しする予定でおりましたが，それは既に学会で報告させてもらいましたので，予定を変えました事をおわびいたします。

1. Euclidean Rings の定義

Definition　R を 1 を含む可換環として（必ずしも整域とは限らない），R が euclidean ring であるとは，M：極小条件を満たす集合 と $\varphi : R \longrightarrow M$ なる写像があって，次の条件を満たす。

$a, b \in R$ に対して，R の元 q, r があって

$$b = aq + r,$$

ここで，$r = a$ 又は $\varphi(r) < \varphi(a)$。

更に　$\varphi(0) > \varphi(a)$　for all $a \in R, a \neq 0$.

2. Euclidean Rings の性質

始めに，euclidean ring の ideals がすべて単項生成である事を示す。

Proposition 1. R が euclidean ring であれば，R の ideals はすべて単項生成である。

Proof. $\mathfrak{a}$ を R の non-zero な ideal とする。$\{\varphi(a) \mid a \in \mathfrak{a}\}$ には極小な元が存在する，それを与える $\mathfrak{a}$ の元の1つを a とする。この時 $\mathfrak{a} = aR$ である。

実際，$b \in \mathfrak{a}$ とすれば，a のとり方から $\varphi(a) \leqq \varphi(b)$
R は euclidean ring なので，$q, r \in R$ で

$$b = aq + r,$$

$r = a$ 又は $\varphi(r) < \varphi(a)$.

$r \in \mathfrak{a}$ 故 a のとり方から $\varphi(r) < \varphi(a)$ はあり得ない。よって，$r = a$ 故 $b \in aR$ $\therefore \mathfrak{a} = aR$.

Corollary 2. R が euclidean ring であれば，R は noetherian ring で，$\dim R \leqq 1$.

通常，我々は euclidean domain の定義として，次の条件をつけ加えるのが普通である。

(*)　$a, b \in R$ に対して，

$$\varphi(ab) \geqq \varphi(a).$$

今 R を euclidean ring で，かつ R は integral domain とする，この時 R は euclidean domain になるが，これは，R を euclidean ring とするための極小条件をみたす全順序集合 M と，写像 $\varphi : R \longrightarrow M$ が条件 (*) を満たすのではない。

例.　$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$n \longmapsto \begin{cases} 2n & \text{if } n > 0 \\ 2n-1 & \text{if } n < 0 \\ \infty & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

この φ によって，$\mathbb{Z}$ は euclidean ring になるが，φ は条件 (*) をみたさない。

ではどうすればよいのかというと，φ をとりかえる事によって，次の結果を得る。

Proposition 3. R を euclidean ring で かつ integral domain とすれば，R は euclidean domain である。

Proof. R の元 a に対して，$R^{\times}$ で R の単元の成す乗法群を表わして $\{\varphi(ua) \mid u \in R^{\times}\}$ には極小元が存在するので，それを $\overline{\varphi}(a)$ と定義する。この $\overline{\varphi}$: $R \longrightarrow M$ によって，R は euclidean domain となる。a, b を R の元とすれば，R の元 q, r で

$$b = aq + r,$$

ここで $r = a$ 又は $\varphi(r) < \varphi(a)$.

$r = a$ であれば問題はないので，$\varphi(r) < \varphi(a)$ とする。今 $\overline{\varphi}(a) = \varphi(ua)$, $u \in R^{\times}$ とする。r と ua について，

$$r = (ua)q' + r'$$

となる R の元 q', r' があって，$r' = ua$ 又は $\varphi(r') < \varphi(ua)$.

$r' = ua$ であれば，$r = ua(q'+1)$ となり，このとき，

$$b = aq + ua(q'+1) = a(q + uq' + u - 1) + a$$

となっているので，この場合も問題なし。

$\varphi(r') < \varphi(ua) = \bar{\varphi}(a)$ のとき，

$$b = aq + r = a(q + uq') + r'$$

で $\bar{\varphi}(a) = \varphi(ua) > \varphi(r') \geq \bar{\varphi}(r')$ 故，R は写像 $\bar{\varphi}: R \longrightarrow M$ によっても euclidean ring となる。

$\bar{\varphi}$ が条件 (*) をみたす事を示す。

$\{\bar{\varphi}(x) \mid x \in (a, ab)R\}$ の最小元を与える $(a, ab)R = aR$ の元を c とする。この時命題1の証明から $\bar{\varphi}(c) \leqq \bar{\varphi}(ab)$ で $aR = cR$ である。R は整域故 a と c は R の単元の差，よって $\bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(c)$

$\therefore\ \bar{\varphi}(a) \leqq \bar{\varphi}(ab)$。

3. Euclidean Rings の構造定理．

R を euclidean ring とすれば，R の ideal (0) には embedded prime divisor が存在しない事を示そう。

Proposition 4. R を euclidean ring とすれば，R には ideal (0) の embedded prime divisor がない。

Proof. ideal (0) の準素イデアル分解を

$$(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \quad とする,$$

ここで, $Q_1, \cap \cdots Q_s$ は embedded components とする。

$s = 0$ を示したい。

$s > 0$ とする。

R のイデアルはすべて単項生成故, R の元 a で

$$\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r = aR.$$

$\sqrt{Q_i} = P_i$ とおく。

lemma $\mathfrak{a} \nsubseteq P_1, \cdots, P_s$ ならば $\mathfrak{a}$ の元 y で

$$y \notin P_1, \cdots, P_s$$

となるものが存在する。

Proof. 省略.

この lemma を利用して, $0 : aR \subseteqq P_i$ for som i

を示す。今 $0 : aR \nsubseteq P_1, \cdots, P_s$ とすれば, lemma

より, $0 : aR$ の元 y で $y \notin P_1, \cdots, P_s$ なるも

のが存在する。この時,

$$ay = 0 \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$$

となり, $y \notin P_1, \cdots, P_s$ なので $a \in Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$.

$\therefore\ aR \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_s = (0)$

$\therefore\ a=0$ で $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r = (0)$.

これは $s>0$ とした事に反する。

従って $^\exists i$ で $0 : aR \subseteq P_i$.

P_i も単項生成イデアルなので $P_i = pR$.

このとき、$p \notin \sqrt{\mathfrak{q}_1}, \cdots, \sqrt{\mathfrak{q}_r}$ は明らか。

Q_i は (0) の embedded component なので、

j $(1 \leq j \leq r)$ があって、

$$\mathfrak{q}_j \subseteq P_i = pR$$

$$\therefore\quad a \in pR$$

$$\therefore\quad a = pa' \quad , a' \in R.$$

ここで $p \notin \sqrt{\mathfrak{q}_1}, \cdots \sqrt{\mathfrak{q}_r}$ なので $a' \in aR$ 故 R の元

x で、$a' = ax$

$$\therefore\ (1-px)a = 0$$

$$\therefore\ 1-px \in 0 : aR \subseteq P_i$$

$p \in P_i$ 故 $1 \in P_i$ となり矛盾.

よって R には ideal (0) の embedded prime divisor は存在しない。

今 commutative ring R が $R = R_1 \times R_2$ と直積分解されている時，R が euclidean ring である必要十分条件は，各 R_1, R_2 が euclidean rings である事は容易にわかる。そこで我々は次の結果を得る。

Corollary 5. R が euclidean ring であれば，

$$R = R' \times A$$

と直積に分解する，ここで R' は各既約成分が1次元，A は Artinian ring で，R', A は共に euclidean ring.

Proof. $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ をイデアル (0) の準素イデアル分解とする。先の命題により embedded component がないので，R の次元は1以下なので，$\sqrt{Q_i}$ は R の極大イデアル，$\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ は R の素イデアルで極大イデアルではないものとする事が出来る。

embedded components がないので

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$$

$$Q = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s \qquad \text{とおけば，}$$

$$\mathfrak{q} + Q = R \quad , \quad \mathfrak{q}Q = (0)$$

よって　$R' = R/\mathfrak{q}$, $A = R/Q$ とおくと、

$$R = R' \times A$$ を得る。

この系の中に表われる R' であるが、実は R' は更に直積に分解されて、R' は有限個の euclidean domain の直積である事が以下で示される。

Proposition 5. R を euclidean ring で、各 irreducible components が一次元 であるとする。この時、

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_t ,$$

R_i は euclidean domain, である。

Proof. 始めに、R が reduced ring である事を示そう。

今 $\mathrm{nil}(R) \neq (0)$ とする。R のイデアルはすべて単項イデアルなので、$\exists a \in R$, $a \neq 0$,

$$\mathrm{nil}(R) = aR .$$

$\mathfrak{a} = 0 : aR$ とおく。$a \neq 0$ なので $\mathfrak{a} \subsetneqq R$.

$\mathfrak{a}$を含む極大イデアルの一つを $\mathfrak{m}=pR$ とする。
$aR=\mathrm{nil}(R)\subseteq pR$ 故 $(a,p)R=pR$ である。
さて, $a\in pR$ 故 $a=pa_1$ で $pR=\mathfrak{m}$ の R の極大イデアル. 仮定により, pR は (0) の irreducible component ではないから, $a_1\in\mathrm{nil}(R)$ でなければならない。

$$\therefore\quad a=pa_1=p^2a_2=\cdots=p^\ell a_\ell \text{ を得る。}$$

従って

$$aR\subsetneqq a_1R\subsetneqq a_2R\subsetneqq\cdots\subsetneqq a_\ell R$$

となるが, R はネーター環なので, $^\exists n>0$ で

$$a_nR=a_{n+1}R$$

よって, $a_{n+1}=a_nx$ なる R の元 x が存在するので,

$$a=pxa$$

を得る。

$$\therefore\quad (1-px)a=0$$

$$\therefore\quad 1-px\in 0:aR=\mathfrak{a}\subseteq pR$$

$$\therefore\quad 1\in pR \text{ となり矛盾.}$$

従って R は reduced である。

R は reduced なので (0) の準素イデアル分解は,

$$(0) = p_1R \cap \cdots\cdots \cap p_tR \quad , p_iR \text{は素イデアル}.$$

と表わせる。

$t=1$ であれば問題ない。

$t \geqq 2$ と仮定して, t に関する帰納法を使う。

便利のために,

$$p = p_1, \quad qR = p_2R \cap \cdots \cap p_tR \quad \text{とおく}.$$

$$\therefore \ (0) = pR \cap qR.$$

今 $pR + qR \subsetneqq R$ であるとする。$\mathfrak{a} = pR + qR$ とおく。 $\mathfrak{a} = aR$, $^{\exists}a \in R, a \neq 0$.

a が R の zero-divisor であれば, $^{\exists}i$, $1 \leq i \leq t$, で $a \in p_iR$ である。今 $a \in p_1R = pR$ とすれば, $\mathfrak{a} \subseteqq pR$ より $q \in pR$ なり, $^{\exists}j$, $2 \leq j \leq t$, $p_j \in pR$. これは矛盾.

$a \in p_iR$, $2 \leq i \leq t$, とすれば, $p \in p_iR$ となり, これも矛盾.

従って, a は R の non-zero divisor である。

$(p, q)R = aR$ だから, R の元 x, y があって, $a = px + qy$, 又 $p = au$, $q = av$ となる R の元 u, v がある。

このとき，$u \in pR$, $v \in qR$ である事は明らか。

さて，$a = (xu + yv)a$ で a は non-zero divisor なので $1 = xu + yv$ を得るが $u \in pR$, $v \in qR$ 故 $1 \in \mathfrak{n}$ となり矛盾.

よって，$pR + qR = R$, $pq = 0$ から

$$R \cong R/pR \times R/qR$$

R/pR は euclidean domain, R/qR の irreducible components の個数は $t-1$ 個。

従って，t に関する帰納法の仮定から，

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_t,$$

R_i は euclidean domain. を得る。

以上をまとめると，次の定理（Euclidean Rings の構造定理）を得る。

Theorem 6. R が euclidean ring である必要十分条件は，

$$R \cong R_1 \times \cdots \times R_t \times A_1 \times \cdots \times A_s,$$

R_i は euclidean domain, A_j は Artin local ring で euclidean ring と分解される事。

Artin local ring で euclidean ring なるものについては詳しい構造定理が得られている(McLean)が，ここでは証明なしで次の結果を与えておこう。

Proposition 7. A を Artin local ring で euclidean ring であるものとする。今 A が体 k を含むとすれば，A は係数体 K をもち，

$$A \cong K[X]/(X^n),$$

X は K 上の変数。

Samuel の論文(又は Cunnea)に次の結果が述べられています。

Proposition 8. R を代数閉体 k 上のアフィン整域とする。

この時 R が P.I.D であるならば，R の genus は 0，又 R が integrally closed であれば，逆も成立。

従って，この結果を使えば，次が得られる。

Proposition 9. kを代数閉体，Rをk上のアフィン整域とする。この時，次は同値

(i) RはPID

(ii) Rはeuclidean domain

(iii) $R \cong k[X][\frac{1}{f(X)}]$.

proofは省略しますが，これらにより，代数閉体k上のアフィン環がeuclidean ringとなるための条件が完全に，構造を含めて解決されたとおもいます。

最後に，euclidean ringのmultiplicatively closed subsetによるquotient ringはまたeuclidean ringとなる事を示しておきましょう。

Proposition 10. Rをeuclidean ring，SをRのmultiplicatively closed subsetとする。この時，$S^{-1}R$はまたeuclidean ringである。

Proof. quotient ring を考える時は，S を saturated なものと仮定してよいので，S は $\{p_\lambda \mid p_\lambda$ は素元$\}$ で生成されているとしてよい。

$$\widetilde{p} : M \longrightarrow M$$

を，$\varphi(p_\lambda)$ をすべて M の最小元に写す写像，

$$\varphi : R \longrightarrow M$$

は条件 (*) を満たすものとする。φ は上への写像とする。

この時

$$R \ni a, \quad \varphi(a) \text{ は } M \text{ の最小元} \Leftrightarrow a \in R^*,$$

は容易に証明出来る。

$$\widetilde{\varphi} : R \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\widetilde{p}} M$$

とおけば，$\widetilde{\varphi}$ は

$$\overline{\varphi} : S^{-1}R \longrightarrow M$$

を導き，この $\overline{\varphi}$ によって $S^{-1}R$ は euclidean ring となる。

References

1. Cunnea W., Unique factorizatión in algebraic functión fields, Ill. J. Math. 8 (1964) 425 - 428

2. Lenstra H. W., Lectures on Euclidean Rings, Bielefold, 1974

3. Markanda R. K, and Pascual J., On a Problem of Samuel, Revista Colombiana de Math. 15 (1981), 1-6.

4. McLean K. R., Proc. London Math. Soc. (3) 26 (1973), 249 - 272.

5. Samuel P., About Euclidean Ring, J. Algebra, 19 (1971), 282 - 301.

On three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains

Takayuki Hibi and Kei-ichi Watanabe

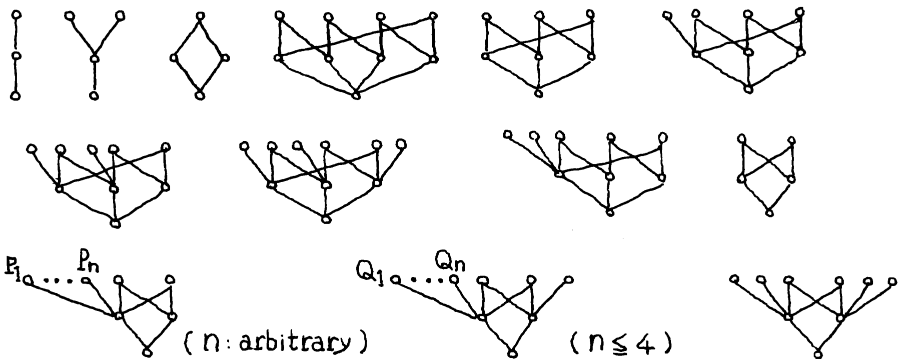
This short note is an abstract of our recent works [3] and [4].

The concept of ASL (algebra with straightening laws) is an axiomatization of the "straightening formula" appearing in invariant theory. This axiomatization, which is lucid and charming, associates commutative algebras with combinatorics through partially ordered sets (poset for short) and moreover, with topology through simplicial complexes.

Our final goal is to classify all the three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domains over a field. Toward this goal, in [3], we determined all the posets on which there exist three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domains. Moreover, in this process we proved every three dimensional homogeneous ASL domain over a field is Cohen-Macaulay. Our fundamental method is quite elementary and its origin is in [6].

The main result in [3] is the following

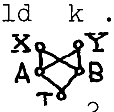
<u>THEOREM 1</u>. Let k be a field. The posets on which there exist three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domains are among the followings:



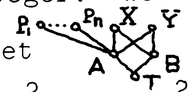
Moreover, if k is infinite, there exist examples of homogeneous ASL domains on every poset listed above and they should be Gorenstein.

By the way, as far as the authors know, all the examples known when we started this work, are normal, rational over the base field and are rational singularities in characteristic zero, and D.Eisenbud has proposed a conjecture in [2] that every ASL domain on a wonderful poset should be normal with rational singularities.

However, in the course of classifying Gorenstein ASL domains of dimension 3, we have discovered examples of non-normal ASL domains on wonderful posets.

<u>Example a)</u> Let x , y and z be indeterminates over a field k . We can construct a non-normal homogeneous ASL domain on 

over k by means of $T=yz$, $A=xy$, $B=zx$, $X=y^2+z^2$ and $Y=x^2$, whose normalization is $k[x,y,z]^{(2)}$.

Example b) Let n be an arbitrary positive integer. We can construct a homogeneous ASL domain R on the poset 

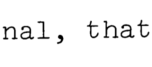
over k by means of $T=xz^2$, $A=xyz$, $B=(x^2+z^2)z$, $X=x^2y$, $Y=yz^2$ and $P_i=xyz^2/(z-(x/p_i))$, where $0 \neq p_i \in k$, $p_i \neq p_j$ if $i \neq j$. Note that this ring R is an example of non-normal Del Pezzo surfaces of degree n and that the normalization of R is $R[TY/A] = R[z^3]$.

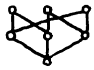
Now, in the second part [4], we analyzed normality and rationality of three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domains, and we obtained the following

THEOREM 2. Let k be an algebraically closed field of arbitrary characteristic.

(i) Any non-normal three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domain over k is, up to isomorphism as ASL, either Example a) or Example b) in the above.

(ii) Every three dimensional homogeneous Gorenstein ASL domain over k is rational, that is, the quotient field of this algebra is a purely transcendental extension of the base field k .

We close this note with some remarks about the classification of ASL domains. In [3], we showed that any homogeneous ASL domain on the poset  is unique up to isomorphism as ASL and isomorphic to the Segre product $k[s^2,st,t^2]\#k[a^2,ab,b^2]$. Moreover, in [4], we classified all the homogeneous

ASL domains on the poset  over an algebraically closed field. This classification is accomplished by means of some expressions of these algebras as subalgebras of the Veronese subring $k[x,y,z]^{(3)}$. We will continue our classification in further work.

References

[1] C.De Concini, D.Eisenbud and C.Procesi, Hodge algebras, Astérisque 91 (1982).

[2] D.Eisenbud, Introduction to algebras with straightening laws, Ring theory and algebra III, Dekker (1980), 243-268.

[3] T.Hibi and K.Watanabe, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, to appear in Hiroshima Math. J.

[4] T.Hibi and K.Watanabe, Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, to appear in Hiroshima Math. J.

[5] K.Watanabe, Study of algebras with straightening laws of dimension 2, in preparation.

[6] T.Hibi, On ASL domains with $\#\mathrm{Ind}(A) \leq 2$, Report on the 4-th Symposium on Commutative Algebra held at Karuizawa, 1982, 33-42.

Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Hiroshima University

Department of Mathematics,
Nagoya Institute of Technology

Kaplansky radical と ordering

広大理　西　三重雄

§1. Kaplansky's radical

F を標数 $\neq 2$ の体，$\dot{F}$ をその乗法群とする。$a \in \dot{F}$ に対し，$D_F\langle 1, a\rangle = \{x^2 + ay^2 \neq 0 ;\ x, y \in F\}$ は $\dot{F}$ の部分群である。$R(F) = \bigcap_{a\in\dot{F}} D_F\langle 1, a\rangle$ とおくと $R(F)$ は $\dot{F}^2$ を含む $\dot{F}$ の部分群である。これを F の Kaplansky's radical とよぶ。容易に示されるように $x \in \dot{F}$ に対し，$x \in R(F) \Longleftrightarrow D_F\langle 1, -x\rangle = \dot{F}$ が成り立つ。

$D_F\langle 1, a\rangle$ を開部分群とみることによって $\dot{F}$ を位相群としてとらえることが出来るが，この立場にたてばある $a \in \dot{F}$ について $R(F) = D_F\langle 1, a\rangle$ であるとき，最も簡単な位相構造をもつといえる。このとき，$R(F) = D_F\langle 1, 1\rangle = \{x^2 + y^2 \neq 0 ;\ x, y \in F\} = \{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0 ;\ x_i \in F,\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ となる。F の Witt 環 WF の言葉でいえば，IF を基本イデアル（偶数次元 2 次形式全体のなすイデアル）として，

$$R(F) = D_F\langle 1, 1\rangle \Longleftrightarrow I^2F \text{ は torsion free}\ (\text{アーベル群として})$$

が特徴づけになっている。このようなFを <u>quasi-pythagorean field</u> とよぶことにしよう。

§2 $R(\mathbb{Q})$

有理数体$\mathbb{Q}$の radical が自明であること，即ち $R(\mathbb{Q})=\dot{\mathbb{Q}}^2$，を示そう。

$\mathfrak{T}=\{x^2+y^2\neq 0\ ;\ x,y\in\mathbb{Z}\}$ とおく。積公式 $(x^2+y^2)(z^2+w^2)=(xz-yw)^2+(xw+yz)^2$ があるから$\mathfrak{T}$が積で閉じていることはよい。

<u>命題 2.1</u>　$n\in\mathfrak{T}$，q を n の素因子で $q\equiv 3\pmod 4$ をみたすとする。このとき，$q^2\mid n$ で $\dfrac{n}{q^2}\in\mathfrak{T}$。

証明は q 元体 $\mathbb{F}_q$ (ただし，$q=p^n$，p : odd prime) において

$$-1=1 \text{ in } \dot{\mathbb{F}}_q/\dot{\mathbb{F}}_q^2 \iff q\equiv 1 \pmod 4$$

なる事実を用いれば容易である。

従って，$\mathfrak{T}$に属する奇素数pはすべて $p\equiv 1\pmod 4$ をみたすが，この逆：$p\equiv 1\pmod 4$ 型の素数pはすべて$\mathfrak{T}$に属する，も成立する（証明略）。これらの事実を用いて

$$mn,\ n\in\mathfrak{T} \implies m\in\mathfrak{T}$$

が示され，次の命題を得る：

命題2.2 $D_{\mathbb{Q}}\langle 1,1\rangle \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{f}$

さて $R(\mathbb{Q}) = \dot{\mathbb{Q}}^2$ の証明にうつる。$R(\mathbb{Q})$ の任意の元 r は，$R(\mathbb{Q}) \subseteq D_{\mathbb{Q}}\langle 1,1\rangle$ であるから，正である：$r>0$。$r = \frac{ac^2}{b^2}$，a : square free，とかけるから

$$R(\mathbb{Q}) \ni a > 0 : \underset{\text{integer}}{\text{square free}} \Rightarrow a = 1$$

を示せばよい。$a>1$ としてみる。$a \in D_{\mathbb{Q}}\langle 1,1\rangle \cap \mathbb{Z} = \mathfrak{f}$ だから $a = p_1 \cdot \cdots \cdot p_r$ を素因数分解とするとき，

$$\begin{cases} a : \text{odd} \text{ なら } p_j \equiv 1 \pmod 4, \ j=1,\cdots,r \\ a : \text{even} \text{ なら } p_1 = 2, \ p_j \equiv 1 \pmod 4, \ j \geqq 2 \end{cases}$$

である。

a : oddとする。c_1 を mod p_1 での平方非剰余，即ち $\left(\frac{c_1}{p_1}\right) = -1$，$c_j$ を mod p_j での平方剰余 即ち $\left(\frac{c_j}{p_j}\right) = +1$ $(j \geqq 2)$ とえらぶ。全射 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}$ による $(c_1, \cdots, c_r)$ の逆像（の1つ）を c とすれば，

$$\left(\frac{c}{p_1}\right) = -1, \quad \left(\frac{c}{p_j}\right) = +1 \ (j \geqq 2)$$

である。初項が c，公差が a の等差数列（$(c,a)=1$ に注意）に対し，Dirichlet の素数定理を適用して，

$$q = c + na \quad (n \geqq 1)$$

をみたす素数qが存在することがわかる。このqに対し，

$$\left(\frac{a}{q}\right) = -1$$

であることは相互法則を用いて容易に示される。

この素数qは群 $D_{\mathbb{Q}}\langle 1,-a\rangle$に属さぬ故（容易！），$a \in R(\mathbb{Q})$に矛盾する。

a : even の場合もほぼ同様の議論で処理される。

以上$R(\mathbb{Q}) = \dot{\mathbb{Q}}^2$を示すために数論的な事実，とくにDirichletの素数定理——ほぼ局所類体論に匹敵する——を用いたが，もっと簡明な方法があるかどうか筆者は知らない。

§3 $R(k(t))$, k: real closed field

実閉体kに対し，k上1次元代数関数体Kのradical $R(K)$を考察するのであるが，準備としてk上1変数有理関数体$k(t)$の順序（orderings）のなす空間$X(k(t))$——空間という言葉を使う以上何がしかの説明が必要であるが，ここでは省く——を考える。

一般に$(F, <)$を順序体とする。順序$<$についてのFのDedekind cut（以下単に<u>cut</u>という）(A, B)は次の2条件：

i) $A < B$（即ち $\forall a \in A, \forall b \in B \quad a < b$）.

ii) $F = A \cup B$ ，ただしA又はBの一方が空集合

の場合も含める。

をみたすものとして定義する。cut (A, B) には次の型がある。

(i) $A = \phi$ 又は $B = \phi$.

(ii) Max A 又は Min B が存在する(このとき $A \neq \phi$, $B \neq \phi$).

(iii) 上記(i), (ii) の何れでもない(このような cut (A, B) を gap とよぶ).

次の命題はよく知られている(cf. R. Gilmer: Extensions of an order to a simple transcendental extension, Contemp. Math. Vol. 8, 1982). 以下 $F(t)$ とかけば t は変数である。

命題 3.1

(1) $F < t$ (即ち $a < t$ $\forall a \in F$) をみたす $<$ の $F(t)$ への延長が存在して、而も唯一つである。(このような $F(t)$ の順序 $<$ を 't が F に関して限りなく大きい' という)

(2) cut (A, B) が gap でなければ、$<$ の $F(t)$ への延長で $A < t < B$ をみたすものが存在して而も唯一つである(注意: (1) は (2) の特殊な場合, $B = \phi$, である)。

(3) (A, B) が gap であるとする。

(i) F: real closed なら $<$ の $F(t)$ への延長で $A < t < B$ をみたすものが存在して、而も唯一つである。

(ii) F の実閉包を $\tilde{F}$ とする。

(イ) $A < \theta < B$ をみたす $\theta \in \tilde{F}$ が存在しないとき

$<$ の $F(t)$ への延長が存在して，而も唯一つである。

(ロ) $A<\theta<B$ をみたす $\theta\in\tilde{F}$ が唯一つなら，$<$ の $F(t)$ への延長は2通りある。

(ハ) $A<\theta<B$ をみたす $\theta\in\tilde{F}$ が2つ以上あれば，実は無限個存在し，$<$ の $F(t)$ への延長は無限通りある。

注意 3.2 一般に F はその real closure $\tilde{F}$ で稠密とは限らない。そのような例を与えよう。記号はいままで通りとして，F の順序 $<$ の $F(t)$ への延長 $<$ で，$F<t$ をみたすもの，即ち t が F に関して限なく大きい順序，を考える。$\widetilde{F(t)}$ は $F(t)$ の実閉包とし，順序は同じ記号 $<$ を用いる。多項式 X^4-t の $\widetilde{F(t)}[X]$ での分解は $(X+t^{\frac{1}{4}})(X-t^{\frac{1}{4}})(X^2+t^{\frac{1}{2}})$，ただし $t^{\frac{1}{4}}>0$（根号の規約）としておく。不等式

$$0<t^{\frac{1}{4}}<t^{\frac{1}{2}},$$ および

$t^{\frac{1}{4}}<r(t)<t^{\frac{1}{2}}$ をみたす $r(t)\in F(t)$ が存在しないことは容易に示される。

注意 3.3 k：実閉体ならば $k(t)$ の orderings のなす空間 $X(k(t))$ は k の cuts のなす集合と bijective に対応する。

予想：$(F,<)$：順序体，$\tilde{F}$：F の実閉包，t：変数

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{F}(t) \\ F(t) & \diagup & \vert \\ \vert & & \tilde{F} \\ F & \diagup & \end{array}$$

F の順序 $<$ の $F(t)$ への延長全体のなす集合を X，$\tilde{F}(t)$ の順序全体のなす空間を $\tilde{X}$ とする。

制限射：$\tilde{X} \longrightarrow X$ は bijective であるか？

F が $\tilde{F}$ で稠密ならば，上の予想は成立する。

さて本題に戻るが若干の準備的命題を述べる。

<u>命題3.4</u> (Tsen-Lang の定理)

k：代数的閉体，K：k の超越次数 1 の拡大体

$$\Longrightarrow \quad R(K) = \dot{K}$$

<u>命題3.5</u> 実体 F の 2 次拡大 $F(\sqrt{a}) = K$ について，次は同値である：

(1) K は non-real quasi-pythagorean field である。

(2) $R(K) \supseteq \dot{F}$

(3) F: quasi-pythagorean, $a \in -R(F)$ かつ SAP をみたす。

上記(3)に現われた SAP (= strong approximation property) について： 一般に F を実体とし，$T = \sum \dot{F}^2$ とおく。T

は加法で閉じた$\dot{F}$の部分群である。Fの順序空間$X(F)$は指標群$\mathcal{X}(\dot{F}/T) = \mathrm{Hom}(\dot{F}/T, \{\pm 1\})$の部分集合とみなすことができ，その意味で$X(F)$の元が1次独立あるいは従属は意味がある。$X(F)$の3つの順序$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$に対し$\sigma_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$が順序になるとき，$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$は4-fanであるという。$X(F)$が1次独立であることは，$X(F)$には4-fanが存在しないことと同値であり，このときFはSAPをみたすという。

さて，実閉体kに対しK/kを超越次数1の実拡大体とする。$K(\sqrt{-1})$は代数的閉体$k(\sqrt{-1})$の拡大で超越次数1であるから，Tsen-Langの定理（命題3.4）によって$R(K(\sqrt{-1}))$は$K(\sqrt{-1})$の乗法群と一致している。命題3.5を2次拡大$K(\sqrt{-1})/K$に対し適用して，KはSAPをみたすquasi-pythagorean fieldであることがわかる。とくに$\mathbb{R}$を実数体とするとき，$\mathbb{R}(t)$のradicalは$\{x^2+y^2 \neq 0 ;\ x, y \in \mathbb{R}(t)\} = \{\sum x_i^2 \neq 0 ;\ x_i \in \mathbb{R}(t)\}$であり，$X(\mathbb{R}(t))$は1次独立な空間である。さらに$\mathbb{R}$上　楕円関数体についても全く同様のことが成り立つ。最後に注意を1つ：F:実体，t:変数として，$F(t)$：SAPをみたす$\Leftrightarrow$ $F(t)$:quasi-pythagorean $\Leftrightarrow$ Fの有限実拡大はつねにF上奇数次，が知られている。　　　　以上

2次元次数環 $\bigoplus_{n\geq 0}\overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ のCohen-Macaulay性について（M. Morales その他の方々の結果より）

京大 数理研　泊 昌孝

この報告は，上の題目での泊の講演に前後して，渡辺敬一先生及び日高文夫氏より教えていただいた事を，上のテーマに関して紹介するものです。§1では，その局所コホモロジー $\underline{H}_M^0$, $\underline{H}_M^1$ の計算を行ない，§2では，それを使って，$\bigoplus_{n\geq 0}\overline{m^n}/\overline{m^{n+1}}$ がCohen-Macaulayでない例を示します。Preprint [4] 及び泊の講演とは，かなり趣きが異なった議論を書きますことを，御容謝願います。

§1. $\underline{H}_M^i(\bigoplus_{k\geq 0}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}})$, $i=0,1$ について.

(1,1). n次元algebraic variety V の1つのnormal closed point p に於ける局所環 $(\mathcal{O}_{V,p}, m)$ を研究対象とし，これを特異点 (V,p) と書く。Q を $\mathcal{O}_{V,p}$ の m-primary ideal とし，$\overline{Q^k}$ を Q^k の integral closure とする，$k\geq 0$。また，$f:\tilde{V}\longrightarrow V$ を blowing-up of V

with center Q followed by normalization とする。

$n=2$ かつ複素数体$\mathbb{C}$上について，M. Morales [4] は次の事を証明している。

<u>定理1</u>　$n=2$ かつ over $\mathbb{C}$ である (1,1) の状況下で，常に，$\operatorname{depth}\left(\bigoplus_{k\geq 0}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}\right)\geqq 1$ である。更に，$R^1f_*(f^{-1}(Q^k))=0$ が，すべての自然数kについて成立するならば，$\bigoplus_{k\geq 0}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}$ は Cohen-Macaulay である。

これは，次の一般的な命題の系である。

<u>定理2（渡辺(敬)）</u>　(1, 1) の状況下で，$M=\bigoplus_{k\geq 1}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}$ と置く時，次が成立する。

$\underline{H}^0_M\left(\bigoplus_{k\geq 0}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}\right)=0$ そして，$\underline{H}^1_M\left(\bigoplus_{k\geq 0}\overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}\right)$

$$=\bigoplus_{k\geq 0}\operatorname{Ker}\left\{R^1f_*(f^{-1}(Q^{k+1}))\longrightarrow R^1f_*(f^{-1}(Q^k))\right\}$$

<u>証明</u>　まず，$\overline{Q^k}=f_*(f^{-1}(Q^k))$　$k\geq 0$ と書けることをおもい起して置く（Appendix 4 [6], [2]）。kを固定するたびに，完全列

$$0\to f^{-1}(Q^{k+1})\longrightarrow f^{-1}(Q^k)\longrightarrow f^{-1}(Q^k)/f^{-1}(Q^{k+1})\to 0$$

に付随して，次の完全列ができる。

$$0 \to \overline{Q^{k+1}} \to \overline{Q^{k}} \to f_*\left(f^{-1}(Q^k)/f^{-1}(Q^{k+1})\right)$$

$$\to R^1f_*(f^{-1}(Q^{k+1})) \xrightarrow{h_k} R^1f_*(f^{-1}(Q^k)) \to$$

これより，次を得る。

$$0 \to \underbrace{\bigoplus_{k\geq 0} \overline{Q^k}/\overline{Q^{k+1}}}_{\substack{\parallel \\ S}} \to \underbrace{\bigoplus_{k\geq 0} f_*\left(f^{-1}(Q^k)/f^{-1}(Q^{k+1})\right)}_{\substack{\parallel \\ T}} \to \underbrace{\bigoplus_{k\geq 0} \operatorname{Ker} h_k}_{\substack{\parallel \\ U}} \to 0$$

そして，記号 S，T，U を上の様に定める。f を $\tilde{V} \xrightarrow{\varphi} V_1 \xrightarrow{\psi} V$ ；ψ は blowing-up with center Q，そして φ は normalization，と分解してみると，ψ は Q-very-ample であり φ は finite map であるから，$R^1f_*(f^{-1}(Q^k))=0$ が，充分大きな k について成立する（e.g.，[3]）。特に U は finite length であり，$\underline{H}^0_M(U)=U$ となる。また，$X=\operatorname{Proj}(S)=\operatorname{Proj}(T)$ と置くと，定義により $T=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(k))$ が成立するから，(5.1.6)[1] により $\underline{H}^0_M(T)=0$，そして $\underline{H}^1_M(T)=0$ である。ゆえに，long exact sequence $\to \underline{H}^i_M(S) \to \underline{H}^i_M(T) \to \underline{H}^i_M(U) \to \cdots$ により，求める等式が従う。

証明終

(1.2) 上の証明で用いた記号で Hilbert function は

$$\ell\left(\overline{Q}^k/\overline{Q}^{k+1}\right) = \ell(\Gamma(X.\ \mathcal{O}_X(k))) - \ell(\operatorname{Ker} h_k)$$ と書かれる。　特に $n=2$ と仮定すれば，消滅 $R^i f_*(\ )=0$ for $i \geqq 2$ により $\operatorname{Coker} h_k = H^1(X, \mathcal{O}_X(k))$ であり，

$$\begin{aligned}\ell\left(\overline{Q}^k/\overline{Q}^{k+1}\right) &= \chi(\mathcal{O}_X(k)) - \ell(\operatorname{Ker} h_k) + \ell(\operatorname{Coker} h_k)\\ &= \chi(\mathcal{O}_X(n)) + \ell(R^1f_*(f^{-1}(Q^k))) - \ell(R^1f_*(f^{-1}(Q^{k+1}))\end{aligned}$$

となる（アブストラクトに書いた式は誤りでした。）。

関数 $n \longmapsto \chi(\mathcal{O}_X(n))$ が $\ell(\overline{Q}^k/\overline{Q}^{k+1})$ に対する Hilbert 多項式であり，定理1の仮定は <u>条件 $\chi(\overline{Q}^n/\overline{Q}^{n+1}) = \chi(\mathcal{O}_X(n))$　$n \geqq 1$</u> という Hilbert function の収束に関する言葉でもあらわすことができる（[4]）。

§2. $\underline{H}^1_M\left(\bigoplus_{k\geq 0} \overline{m^k/m^{k+1}}\right) \cong \mathbb{C}$ となる例

(2.1)　以下で述べる特異点と equi-singular な（定式化できるが，ここでは省略する。）特異点を，日高氏は考察し，特に命題3に相当するものを，彼の situation で証明された。命題3が以下の議論では本質的である。ここでは，大沢健夫氏（京大数理研）よりおそわった証明を紹介する。以下の証は，$\mathbb{C}$ 上の解析空間論的な議論を行なう。

(2.2)　A : non-singular algebraic curve of genus 2

$P \in A$: a hyperelliptic Weierstrass point とする。特に $2P$ は canonical divisor K_A と linear equivalent である。

点 P に付随した negative line bundle $[-P] \longrightarrow A$ の zero-section の近傍を、$H^1(A, \mathcal{O}_A(2P))$ ($\cong \mathbb{C}$) の non-zero 元 ξ によって、次の様に変形する。

A の covering $\{U_1, U_2\} = \mathfrak{U}$ を、$U_1 := \{|z_1| < 1\} \subset \mathbb{C}$, $\{z_1 = 0\} = P$ という P の座標近傍、$U_2 := A - P$ としてひとつ取る。更に、$U_i \times \mathbb{C}$:($(-, x_i)$ 座標) における $U_i \times \{0\}$ の Stein 近傍 $\mathcal{U}_i^*$ を適当に選んで、$i = 1, 2$, $\mathbb{C}$ への $U_i \times \mathbb{C}$ からの座標関数 x_i を使って、

(2.2.1) $\qquad x_2 = z_1 \cdot x_1 + \xi_{21} \cdot x_1^2 \quad$ on $\mathcal{U}_1^* \cap \mathcal{U}_2^*$

という式で、$\mathcal{U}_1^*$ と $\mathcal{U}_2^*$ を張り合わせる。ただし ξ_{21} は $\xi \in H^1(A, \mathcal{O}_A(2P))$ を、A の Leray cover $\{U_1, U_2\}$ を使って $\Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_A(2P))$ の元により、U_1 上の $[2P] \longrightarrow A$ の trivialization を用いてあらわした関数である。

この2次元多様体を $\tilde{V}$ と書く。

特に、A の $\tilde{V}$ に対する normal bundle は $[-P] \longrightarrow A$ である。A は正規解析空間 V の1点 p に blowing-down されるが、それを $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ と書く。

<u>命題3</u> 上の状況で、$R^1\psi_*(I_A^2) \longrightarrow R^1\psi_*(I_A)$ は

単射ではない。

証明　$\{\mathfrak{U}_1^*, \mathfrak{U}_2^*\}$ は，$\tilde{V}$ の Leray covering をなす。ゆえに，$U_1^* \cap U_2^*$ 上の関数 $\xi_{21} \cdot X_1^2$ は $H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_A^2) \cong R^1 \pi_*(\mathcal{O}_A^2)$ の元 Ξ を定める。一方，関係式 (2.2.1) $\xi_{21} \cdot X_1^2 = X_2 - z_i X_1$ は，$\xi_{21} \cdot X_1^2$ が $H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_A)$ の zero 元を定めることを意味している。ゆえに，Ξ が $H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_A^2)$ の non-zero 元であることをしめせば，我々の主張が従う。

今，$\Xi = 0$ in $H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_A^2)$ であると仮定してみよう。すると，$\Gamma(\mathfrak{U}_i^*, \mathcal{O}_A^2)$ の元 F_i，$i = 1, 2$，が存在して，

$$\xi_{21} \cdot X_1^2 = F_2 - F_1 \quad \text{on} \quad U_1^* \cap U_2^*$$

となる。$F_i = \sum_{k \geq 2} \varphi_{ik} X_i^k$，$\varphi_{ik} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_A)$，$k \geq 2$，$i = 1, 2$，というふうに級数展開をして，(2.2.1) を使って，X_1 の級数として上の式を書き直すと，次の様になる。

$$\xi_{21} \cdot X_1^2 = \sum_{k \geq 2} \varphi_{2k} (z_i \cdot X_1 + \xi_{21} \cdot X_1^2)^k - \sum_{j \geq 2} \varphi_{1j} X_1^j \quad \text{on} \quad U_1^* \cap U_2^*.$$

X_1^2 の係数を比較してやると，

$$\xi_{21} = z^2 \cdot \varphi_{22} - \varphi_{12} \quad \text{on} \quad U_1 \cap U_2$$

という関係式を得る。しかし，これは，$\xi \neq 0$ in $H^1(A, \mathcal{O}_A(2p))$ であることに反する。

証明終

(2.3) もう少し詳しく，$R^1\psi_*(I_A^k)$ $k\geq 0$ を調べてみよう。まず，$H^1(A, I_A^k/I_A^{k+1}) = H^1(A, \mathcal{O}_A(kP))$

$$= \begin{cases} 0 & k \geq 3 \\ \mathbb{C} & k = 1.2 \\ \mathbb{C}^2, & k = 0 \end{cases}$$

であることは，P の選び方より確められる。更に，命題3に注意して，標準的な議論により次の事が証明できる。

$$R^1\psi_*(I_A^k) = \begin{cases} 0 & k \geq 3 \\ \mathbb{C} & k = 1.2 \\ \mathbb{C}^3 & k = 0. \end{cases}$$

特に，$R^1\psi_*(I_A^2) \longrightarrow R^1\psi_*(I_A)$ は zero-map である。

<u>命題4</u> $\psi^{-1}(m) = I_A^2$ となる。ただし，m は $\mathcal{O}_{V,p}$ の maximal ideal である。

<u>証明</u> 次の完全列を見よ。

$$0 \longrightarrow \psi_*(I_A^2) \longrightarrow \psi_*(I_A) \longrightarrow \psi_*(I_A/I_A^2) \cong \mathbb{C}$$
$$\xrightarrow{a} \underset{\mathbb{C}}{\underset{\wr\wr}{R^1\psi_*(I_A^2)}} \xrightarrow{b} R^1\psi_*(I_A)$$

ここで，b は zero-map であるから，a は同型となり，関係 $\psi_*(I_A^2) = \psi_*(I_A) = m$ が従う。特に，$\psi^{-1}(m) =$

$\psi^{-1}(\psi_*(I_A^2)) \subseteq I_A^2$ となる。

一方，完全列 $0 \to \psi_*(I_A^3) \to \psi_*(I_A^2) \to \psi_*(I_A^2/I_A^3) \to 0$ が，(2.3) における計算結果によって，成立している。ここで，$I_A^2/I_A^3 = \mathcal{O}_A(K_A)$ であり，かつ K_A は A 上の base point free な linear system を定めている。ゆえに，任意の点 $Q \in A$ に対して，$m = \psi_*(I_A^2)$ の元 x があり，$\psi^*(x)$ が $\tilde{V}$ 上定める divisor は次のようになる：

$\mathrm{div}_{\tilde{V}}(\psi^*(x)) = 2A + D_x$ ；ただし D_x は V 上の divisor $\{x=0\}$ の ψ による strict transform であり，点 Q を通らない。

ゆえに $x \cdot \mathcal{O}_{\tilde{V},Q} = I_{A,Q}^2$，すなわち $\psi^{-1}(m) \supseteq I_A^2$ である。

証明終

<u>系5</u>　$\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ は blowing-up with center m followed by normalization と一致する。

<u>証明</u>　命題4により，$\psi^{-1}(m)$ が invertible $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ ideal sheaf であるから，次の図式が blowing-up と normalization の，それぞれの universality より従う。

$$\begin{tikzcd} V & & \tilde{V} \arrow[ll, "\psi"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & \tilde{V}_1 \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd}$$

; $f : \tilde{V}_1 \longrightarrow V$ は blowing-up with center $\mathfrak{m}$ followed by normalization.

そして，τは 標準的に誘導される morphism である。fは finite map でなく，そして $|\psi^{-1}(p)| = A$ が既約であるから，τは finite map になる。ゆえにτは同型写像である。

証明終.

(2.4) 以上で，$f = \psi$となり，$M = \bigoplus_{k\geq 1} \overline{\mathfrak{m}^k}/\overline{\mathfrak{m}^{k+1}}$ と置いて定理2を使って，次の等式がわかる。

$$\underline{H}^1_M\Big(\bigoplus_{k\geq 0} \overline{\mathfrak{m}^k}/\overline{\mathfrak{m}^{k+1}}\Big) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\ell_A^{2(k+1)}) \longrightarrow R^1\psi_*(\ell_A^{2k})\}$$

$$\cong R^1\psi_*(\ell_A^2) \cong \mathbb{C}.$$

特に，$\bigoplus_{k\geq 0} \overline{\mathfrak{m}^k}/\overline{\mathfrak{m}^{k+1}}$ は Cohen-Macaulay ではない。

§3. [5]に於ける議論を用いた注意。

(3.1) (V, p) を normal two-dimensional singularity/$\mathbb{C}$ そして $\psi : (V', A) \longrightarrow (V, p)$ を，ある特異点解消であるとする。命題(2.5) [5]の証明の中で注意したように，我々は，次の duality を持っている：

$$\{\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{V'} \mid \mathfrak{m}\alpha = 0\} \underset{\mathrm{dual}/\mathbb{C}}{\longleftrightarrow} \Big(\omega_V/\psi_*(\Omega^2_{V'})\Big)\Big/\mathfrak{m}\cdot\Big(\omega_V/\psi_*(\Omega^2_{V'})\Big)$$

(記号など，詳しくは[5, 5′]参)。

特に，　$\dim\{\alpha\in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\mid m\cdot\alpha=0\}\leqq$ Cohen-Macaulay-type of $\mathcal{O}_{V,p}$　という関係が成立している。

これを，§2の $\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$ に適用してみよう。$R^1\psi_*(\psi^{-1}(m))=R^1\psi_*(\mathcal{I}_A^2)\longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ は zero-map であるから $m\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=0$ が容易に確められる。ゆえに，

Cohen-Macaulay type of［§2の特異点］$\geqq\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=3$

である*)。§2の特異点は，resolution多様体の複素構造（すなわち，張り合わせの構造）という観点からは，単純な形をしているが，$\mathcal{O}_{V,p}$ の定義方程式を見る立場からすれば，複雑（hypersurface や complete intersection からほど遠い）な特異点である。次の問は，果して簡単なものかどうかよくわからないが，筆者には興味のある問題である。

<u>問題</u>　Gorenstein で $\underline{H}^1_M\left(\bigoplus_{k\geq0} m^k/m^{k+1}\right)\neq0$ となる例は存在するか？

(3.2)（<u>[5]の問への注意として</u>）§2の特異点は，$p_g=3$，$p_a=2$，$L=1$（上で見たように）であり，定理(2.7)[5]の中の"$\mathbb{C}^*$-action を持つ"という条件が除けないことを

---

*) 日高氏は，彼の特異点が Gorenstein でないことを既に示しておられる。

明らかにしている。

興味ある文献を送って下さったM. Morales氏に、渡辺、日高、大沢、高阪の諸先生方に感謝致します。

文献表

[1] S. Goto., K. Watanabe., On graded rings I, J. Math. Soc. Japan Vol. 30. (1978) 179—213.

[2] Lê Dũng Trang, Algebraic methods in the study of singularities. Lecture Note. Tokyo Univ. (1977).

[3] M. Morales, Calcul de quelques invariants des singularités de surface normale., "Noeuds, Tresses et Singularités." Monographie No31 de L'Enseignement Math. (1982) 191—203.

[4] ________, Fonction d'Hilbert-Samuel et propriété Cohen-Macaulay pour $G_Q A = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ en dimension 2. preprint. Institut Fourier.

[5] M. Tomari., higher conductor module について, 数理研講究録「局所環のコホモロジーについて」

[5′] ________, 上記ノートの本論文 preprint RIMS 501

[6] Zariski-Samuel, Commutative algebra II.

GENERAL ELEMENT IN MONOMIAL RINGS

Junzo Watanabe

INTRODUCTION

THEOREM I' below was proved in [1] in connection with the theory of M-full ideals. Under certain circumstances, it is possible to interpret the number d(A) as the Dilworth number of a poset which is canonically associated with the ring A. The purpose of this note is to show that a basic theorem in combinatorics (Dilwoth's Theorem) falls in our situation and to explain the inequality in the theorem in terms of posets.

All the necessary definitions and theorems in combinatorics are provided in section 2. For proofs and for more details the reader is referred to [2] and [3]. In section 3 we show how the results of ring theory in §1 are related to combinatorics.

REFERENCES

[1] J.Watanabe, M-Full ideals, to appear.

[2] M.Aigner, Combinatorial Theory, Springer.

[3] C.Greene and D.J.Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, in Studies in Combinatorics, M.A.S, 1978, pp.22-79.

§1. Dilworth number and Rees number of Artin rings.

DEFINITION 1. For a local ring (R,M) we define

(1) $P(I) = \mathrm{Max}\ \{ \mu(J) \mid \text{all ideals } J \text{ containing } I \}$.

(2) $F(I)$=length $(R/MI+yR)$, where y is a general element of R for both I and MI.

(Here the term general element is used in the sense of D.Rees. In the case R/M is infinite, one may think that y is general for I if and only if lenght$(R/I+yR)$ = Min length $(R/I+y'R)$, where y' runs over M.)

THEOREM I. For a local ring (A,M) and an M-primary ideal I, it holds that $P(I) \leq F(I)$.

DEFINITION 2. For an Artine ring A,

(1) $d(A) = P(0)$.

(2) $r(A) = F(0)$.

$d(A)$ will be called the Dilworth number and $r(A)$ the Rees number of the ring A.

Let (R,M) be a local ring , and I any M-primary ideal, and let $A=R/MI$. Then it is easy to see that $d(A)=P_R(I)$ and $r(A)=F_R(I)$. Hence Theorem I is essentially contained in the following.

THEOREM I'. For an Artin ring A, $d(A) \leq r(A)$.

§2. Graph theory:Resume.

A (finite) digraph $D=(V,A)$ consists of a set of verteces $V=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ and a set of ordered pairs $A \subset V \times V$ of verteces. The adjacency matrix $M=(m_{ij})$ of D is the $n \times n$ matrix such that $m_{ij}=1$ if $(p_i, p_j) \in A$ and $m_{ij}=0$ otherwise. $(p_i, p_j) \in A$ may be written as $p_i \to p_j$. Since a digraph is determined by its adjacency matrix, any $(0,1)$ square matrix may be thought of as defining a digraph. The reachability matrix $R=(r_{ij})$ of D is defined by $r_{ij}=1$ if there is a directed path, i.e., a sequece $p \to p' \to p'' \to \dots$, beginning with p_i and ending with p_j, and $r_{ij}=0$ otherwise. The reachability matrix R and the adjacency matrix M are related as follows: Let $\tilde{M} = M + M^2 + M^3 + \dots$ ($\tilde{M}$ may contain ∞). Then $r_{ij}=1$ if $\tilde{m}_{ij}>0$ and $r_{ij}=0$ if $\tilde{m}_{ij}=0$. When no confusion is possible we might say that V, the set of verteces, is a digraph. For example a poset (partially ordered set) is a diagraph. If $D=(V,A)$ is a digraph, any subset $A' \subset A$ defines a digraph (V,A'). This is called a spanning subdigraph of D.

Let P be a poset. A subset C of P is a chain if any two elements of C are comparable. A subset of P is an independent set if any two elements are incomparable.

THEOREM A (Dilworth, 1950). For a poset P, the maximum cardinarity of independent sets is equal to the minimum number of disjoint chains into which P is partitioned.

This number is called the Dilworth number of P. Let $Y=(y_{ij})$ be any matrix. A matching of Y is a subset M in $\{ (i,j) \mid y_{ij}\neq 0 \}$ such that if (i,j) and (i',j') are distinct elements in M then this implies that $i\neq i'$ and $j\neq j'$. The (maximum) matching number of Y is the maximum cardinality of all matchings of Y. This will be denoted by $\beta(Y)$. From the proof of Dilworth's theorem one obtains the following.

THEOREM B. Let P be a poset, and A its adjacency matrix. Let $\tilde{A}$ be A-E. (That is if $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$, then $\tilde{a}_{ij}=1$ if $p_i<p_j$, and $\tilde{a}_{ij}=0$ otherwise.) Then the Dilworth number of P is equal to $|P| - \beta(\tilde{A})$.

Let $e_1, e_2,\ldots,e_n$ be positive integers and let $M(e_1,\ldots,e_n)$ be the set $\{(a_1,\ldots a_n) \mid 0 \leq a_i \leq e_i\}$. Define the relation $(a_i) \leq (a'_i)$ by $a_i \leq a'_i$ for all i. Then $M(e_1,\ldots e_n)$ is a poset. This is called a lattice of multisets of a set.

THEOREM C (Sperner, 1928). Let $P=M(1,1,\ldots,1)$ and $m = [\frac{n}{2}]$. Then $d(P)= \binom{n}{m}$.

THEOREM D (DeBruijn, Tengbergen, Kruyswijk, 1952) Let $P=M(e_1\ldots e_n)$ and $m = [\frac{1}{2}(e_1+\ldots+e_n)]$. Then

$$d(P) = \#\{(a_i) \mid a_1+\ldots+ a_n = m\}$$

§3. Application.

LEMMA. Suppose $A=k[X_1,\dots,X_n]/(\text{monomials})$ is an Artin ring. Then $d(A) = \mathrm{Max}\{\mu(J) \mid \text{all } \underline{\text{monomial}} \text{ ideals } J\}$.
PROOF is easy.

Let k be a field of characteristic 0, and suppose $A = k[X_1,\dots,X_n]/(\text{monomials})$ is an artin ring. Let $y=X_1+\dots+X_n$. We note that y is a general element in A. On the monomial basis, the multiplication $y : A \to A$ is represented by a (0,1) matrix. Thus we have obtained a digraph, which we denote by D(A). Let R be the reachability matrix of D(A). Then it is easy to see that R + E defines a poset, which we denote by P(A).
Let $\{p_1,\dots,p_\nu\}$ be a set of monomials of A. Then it is a minimal set of generators of the ideal they generate if and only if it is an inependent set in P(A). In view of the Lemma above we conclusde:

THEOREM II. $d(A)=d(P(A))$.

With the same notation let $Y = y + y^2 + y^3 + \cdots$. Since y is nilpotent, we have $\mathrm{rank}(y) = \mathrm{rank}(Y)$ as matrices. Let R be the matrix which have 1 at the same places as Y has positive elements and 0 otherwise. Then R is the reachability matrix of D(A), and from Theorem B, we have $d(A) = |P(A)| - \beta(R)$. Since $\beta(R) = \beta(Y) \geq \mathrm{rank}(Y)$, and since $r(A) = \dim A - \mathrm{rank}(y)$, we have obtained $d(A) \leq r(A)$, which was Theorem I'.

It has turned out that the inequality in Theorem I' is essentially the inequality $\beta(R) \geq \mathrm{rank}(R)$, which is rather self-evident. What is interesting is that it has a generalization to arbitrary Artin rings (Theorem I'). Here is another such example. Let P be a poset and P^* its dual. Then obviously we have $d(P) = d(P^*)$. This enables us to predict the following, which indeed is true.

THEOREM III. Let (A,M) be an Artin ring. Then it holds that

$$d(A) = \mathrm{Max}\ \{\ \tau(J)\ \mid \text{all ideals } J\ \},$$

where $\tau(I) = \text{length } ((I:M)/I)$.

PROOF is left to the reader.

Theorem D in §2 is translated as follows.

THEOREM IV. Let $A = k[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^{e_1+1}, \ldots, X_n^{e_n+1})$, and let $m = [\frac{1}{2}\sum e_i]$. Then $d(A) = \dim A_m$, where A_m is the homogenious part of A of degree m.

In the theorem above it can be proved ring-theoretically that $r(A) = \dim A_m$, from which it follows that $r(A) = d(A)$. This, in turn, provides a proof for Theorem D in §2. Details will appear elsewhere.