第 7 回
可換環論シンポジウム報告集

昭和60年度科学研究費総合A

(課題番号 59340002.代表 西 三重雄)

1985年10月30〜11月2日

於　京都府青年会館

序

この報告集は、１９８５年１０月３０日から１１月２日までの４日間、京都府青年会館（京都市）で行なった「第７回可換環論シンポジウム」の講演者から提出された原稿を、そのまま印刷・作成したものです。

今回のシンポジウムも、充実した講演、参加者の活発な討論により、大変有意義な集会でした。

なお、この会を開催するにあたり、京都府青年会館・京大理学部数学事務室の方々のあたたかい御協力がありました。また、旅費・会場費等のシンポジウム経費およびこの報告集の出版費は、広島大学 西 三重雄 先生の科研費によるものです。ここにあらためて感謝いたします。

１９８６年1月

西村　純一

参 加 者 （五十音順）

秋葉　知温	京大・教養
浅沼　照雄	富山大・教育
尼崎　睦実	京大・数理研
飯尾　　力	関東学院大・工
池畑　秀一	岡山大・教養
石川　武志	都立大・理
石橋　康徳	広大・学校教育
伊藤　史朗	広大・理
岩上　辰男	広大・総合科学
岩永　恭雄	信州大・教育
宇田　広文	宮崎大・教育
大石　　彰	広大・理
大塚　香代	京大・教養
岡部　　章	群馬高専
奥山　　廣	徳島大・教育
小駒　哲司	高知大・理
小野田信春	福井大・教育
加藤　芳文	名大・工
金光　三男	愛知教育大
河合　秀泰	金沢大・理
川本　琢二	名大・理
菊池　徹平	奈良教育大
蔵野　和彦	京大・理
小林　差治	徳島大・教育
小山　陽一	金沢工大
後藤　四郎	日大・文理
坂口　通則	広島修道大・商
佐久間元敬	広大・総合科学
佐藤　英雄	和歌山大・教育
清水池有治	広島工大
菅谷　　孝	富山大・理
鈴木　　敏	京大・教養
鈴木　直義	静岡薬科大
高林　光明	茨城県立波崎高校
竹内　康滋	神戸大・教養
谷本　　洋	宮崎大・教育
張　　徳祺	阪大・理
泊　　昌孝	京大・数理研
永田　雅宜	京大・理
永原　　賢	岡山大・理
成瀬　　弘	岡山大・教育
西　三重雄	広大・理
西田　康二	千葉大・理
西村　純一	京大・理
西村　利男	岐阜教育大
橋本　光靖	京大・理
馬場　　清	大分大・教育
日高　文夫	専修大北海道短大
日比　孝之	名大・理
広森　勝久	神戸大・教養
藤田　和憲	香川大・教育
松田　隆輝	茨城大・理
松村　英之	名大・理
宮崎　充弘	京大・理
柳原　弘志	兵庫教育大
山内　紀夫	岐阜教育大
吉野　雄二	名大・理
渡辺　敬一	名工大
渡辺　純三	名大・理

目　　次

小野田信春	Remarks on spots	1
渡辺　純三	On the m-full closure of an m-primary ideal	13
川本　琢二	Deviation について	25
松田　隆輝	On Some Open Questions and Related Results in Ideal Theory	34
張　　徳祺	Iitaka Surfaces	42
加藤　芳文	Complete Symmetric Varieties の数値的 Schubert Calculus	70
後藤　四郎	Maximal Buchsbaum modules over regular local rings	82
大石　　彰	次数付環の還元と擬平坦次数付加群	90
日比　孝之	Level rings, doubly Cohen-Macaulay complexes and algebras with straightening laws	101
泊　　昌孝	2次元正規特異点の幾何種数の下限について	126
日高　文夫	Normal surface singularities associated to ruled surfaces	145
金光　三男 吉田　憲一 (岡山理科大)	Conductor イデアルと単項イデアルの非孤立準素成分	160
岡部　　章 吉田　憲一	A NOTE ON VMC-DOMAINS	171
馬場　　清	Picard groups and relative invariants	177
吉野　雄二	ON THE STRUCTURE THEOREM FOR FREE RESOLUTIONS	195
柳原　弘志	Seminormality に関する若干の注意	201
渡辺　敬一	Normal filtration について	205
松村　英之	有限体上の不変式	215

Remarks on spots

小野田信春　福井大・教育

以下、環は全て可換かつ単位元1をもつと仮定する。noether整域RとRを部分環としてもつ局所整域$(S, \mathfrak{n})$に対し、SがR上のspotであるとは、R上有限生成な整域TとTの素イデアルPが存在して、$S = T_P$と表わせることをいう（locality 又は essentially of finite type という言い方をすることも多い）。与えられた局所整域が与えられたnoether整域上のspotであるための条件を求めることは興味ある問題と考えられる。W. Heinzer, C. Huneke, J. D. Sally は参考文献[1]においてこのような条件のいくつかを与えている。本稿の目的は彼らの結果のひとつの拡張を示し、更に関連する話題について述べることにある。

まず、上記3人の結果を紹介することから始めたいと思うが、その前に正確を期す目的から、以下で使われる主な用語の定義を与えておく。当面の間、$(R, \mathfrak{m})$、$(S, \mathfrak{n})$は共に局所整域で、かつ$R \subset S$と仮定する。

Rが解析的不分岐（analytically unramified）であるとは、その$\mathfrak{m}$進完備化$\hat{R}$が巾零元をもたないことをいう。特に$\hat{R}$が整域になるときは、Rは解析的既約（analytically irreducible）であるという。また、$\hat{R}$の任意の極小素イデアル$\hat{\mathfrak{p}}$に対して、$\dim \hat{R}/\hat{\mathfrak{p}} = \dim \hat{R}$が成立するとき、$R$は quasi-unmixed であるという。

RとSの間に、$\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$、かつ$R$の商体$Q(R)$と$S$の商体$Q(S)$が一致するという関係があるとき、$S$は$R$を双有理的に支配（birationally dominate）するという。

SがRに関して次元公式を満たすとは、$\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$、かつ等式 $\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}} S/\mathfrak{n} = \dim R + \mathrm{tr.deg}_R S$ が成立することをいう。なお、これについては、一般に不等式 $\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}} S/\mathfrak{n} \leq \dim R + \mathrm{tr.deg}_R S$ が成り立つことが知られている。更に、Rが次元公式を満たすとは、Rの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$と$R_{\mathfrak{p}}$上の任意のspot Tに対し、Tが$R_{\mathfrak{p}}$に関して次元公式を満たすことをいう。

以上が主な用語の定義であるが、これらの概念に関して後に必要になる次のことを注意しておく。Ratliff [5] により、R が quasi-unmixed であるための必要かつ十分条件は R が次元公式を満たすことであるということが証明されている。従って、R が quasi-unmixed ならば、R の（商体における）整閉包 R' を考えるとき、R' の任意の極大イデアル m' に対し、$\dim R'_{m'} = \dim R'$ が成立する（これは R' が有限 R－加群と限らなくても成立する）なお、今後特に断わらない限り、R' は商体 $Q(R)$ における R の整閉包を表わすものとする。

さて、以上の準備のもとに上記3人の結果を述べれば次のようになる。まず、R に関する次の2つの条件 (L)、(L_k) を考える：

(L)：R を双有理的に支配する任意の d 次元正規 spot は解析的既約である。但し、ここで、$d = \dim R$

(L_k)：R を双有理的に支配する任意の k 次元正規 spot は解析的既約である。

この定義によれば、$d = \dim R$ とすると、(L) と (L_d) は一致する。このとき、次が成り立つ：

<u>定理</u> A　$\dim R = d$ とし、かつ R は解析的不分岐とする。R が条件 (L) を満たすなら、R を双有理的に支配する任意の d 次元 quasi-unmixed 局所整域 (S, n) は全て R 上の spot である。

<u>定理</u> B　$\dim R = d$ とし、かつ R は解析的不分岐とする。R が条件 (L_k) を満たすなら、R を双有理的に支配する k 次元 quasi-unmixed 局所整域 (S, n) に対し、もし S を支配する擬局所整域 $(W, \mathfrak{z})$ で、$tr.deg_R W < \infty$ かつ R に関して次元公式を満たすものが存在するなら、S は R 上の spot である。

ここで、少し注意を述べると、定理 B は定理 A を含んでいる。実際、定理 A の仮定のもとで、R と S の間に上で

示した次元に関する不等式

$$\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/m} S/n \leq \dim R + \mathrm{tr.deg}_R S$$

をながめてみるとき、$\dim S = \dim R\ (= d)$、$\mathrm{tr.deg}_R S = 0$ に気を付ければ、実際には等号が成立する、即ち、S は R に関して次元公式を満たしていることがわかる。従って、定理 B における W として S 自身をとればよく、このことから定理 B が正しければ定理 A もまた正しいことがわかる。

以上の点を考慮した上で、ここで示したい定理を示せば次のようになる：

<u>主定理</u>　(R, m) は擬幾何学局所整域とし、かつ下記の条件 (C) を満たすとする。このとき、R を支配する quasi-unmixed 局所整域 (S, n) に対し、S の商体 $Q(S)$ が R の商体 $Q(R)$ 上有限生成であり、かつ S が R に関して次元公式を満たすなら、S は R 上の spot である。

但し、ここで条件 (C) とは条件 (L), (L_k) に対応する次のものである：

(C)：R 上の任意の正規 spot は解析的既約である。

主定理の証明に入る前に、これと定理 A、定理 B との関連を述べておく。定理 A, B は R を双有理的に支配する局所環 (S, n) が R 上の spot となるための条件を与えているのに対し、我々の定理は一般の（必ずしも双有理的とは限らない）支配関係にある (S, n) が R 上の spot となるための条件を与えている。その意味で主定理は定理 A, B のひとつの拡張形を示していると解釈できる。但し、その分 R に関する条件がきつくなっているのでその点を説明しておきたい。定理 A, B では、R は解析的不分岐局所環であると仮定したのに対し、主定理ではそれが擬幾何学局所環ということに置き代わっている（擬幾何学局所整域は解析的不分岐であることが知られている）。これは次の事情による。Rees [6] において、R が解析的不分岐であるための必要十分条件は、$R \subset T \subset Q(R)$ かつ R 上有限生成であるような任意の整域 T に対し、整閉包 T′ が有

限T－加群になることであるということが証明されている。定理A, BにおけるRの解析的不分岐性はこの形で使われるのであるが、そこでは双有理拡大のみを扱うのでこれで十分である。ところが我々は必ずしも双有理的でない拡大も扱いたいので、上記のことに相当することが必ずしもR上双有理的でないTに対しても成立して欲しい。それを保障するためにRを擬幾何学環にとったわけである。条件(L)、(L_k)が条件(C)に代わっているのも同じような理由による。なお、$Q(S)$が$Q(R)$上有限生成という仮定が必要なのは次の簡単な例をみてもわかる。Rとして有理数体$\mathbb{Q}$をとり、Sとして$\mathbb{Q}$の複素数体$\mathbb{C}$における代数閉包$\overline{\mathbb{Q}}$をとれば、Rは条件(C)を満たす擬幾何学環であり、$\mathrm{tr.deg}_R S = 0$かつSはRに関して次元公式を満たしている。ところが明らかにSはR上のspotではない。最後に次のことも注意しておきたい。主定理におけるSがRに関して次元公式を満たすという仮定を、定理Bと同様に、Sを支配する擬局所環$(W, \mathfrak{z})$で$\mathrm{tr.deg}_R W < \infty$かつRに関して次元公式を満たすものが存在するという仮定に置き代えてもよい。これは次の簡単な補題による。

<u>Lemma</u> 1　$(R, \mathfrak{m})$、$(S, \mathfrak{n})$は局所整域、$(W, \mathfrak{z})$は擬局所整域で$R < S < W$（$R < S$はSはRを支配するという意味）とする。このとき、WがRに関して次元公式を満たすなら、SはRに関して次元公式を満たし、かつWはSに関して次元公式を満たす。但し、$\mathrm{tr.deg}_R W < \infty$とする。

<u>証明</u>　次元不等式より

$$\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}} S/\mathfrak{n} \leq \dim R + \mathrm{tr.deg}_R S \qquad (1)$$

$$\dim W + \mathrm{tr.deg}_{S/\mathfrak{n}} W/\mathfrak{z} \leq \dim S + \mathrm{tr.deg}_S W \qquad (2)$$

これらの辺々を加えることにより

$$\dim W + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}} W/\mathfrak{z} \leq \dim R + \mathrm{tr.deg}_R W \qquad (3)$$

を得るが、ここで仮定より実際には(3)において等号が成立している。従って、(1)、(2)共等号が成立しなければならない。即ち、SはRに関して、またWはSに関して各々次元公式を満たしている∎

それでは主定理の証明に入ることにする。まず、次の補題を準備する。

<u>Lemma</u> 2 noether 整域 R と擬局所整域 $(S, \mathfrak{n})$ 及び準擬局所整域 $(A, \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ の間に、$R \subset S \subset A$ かつ A は S 上整という関係があるとする。今、各 i $(i = 1, \cdots, k)$ に対し、$A_{\mathfrak{n}_i}$ が R 上の spot ならば、S も R 上の spot である。

<u>証明</u> 仮定より、各 i $(i = 1, \cdots, k)$ に対し、R 上有限生成な整域 B_i と B_i の極大イデアル M_i を $B_{iM_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ が成立するようにとることができる。ここで、$B_i \subset A$ と仮定しても一般性は失なわない。するとこのとき、明らかに $\mathfrak{n}_i \cap B_i = M_i$ となる。$B_i = R[c_{i1}, \cdots, c_{im_i}]$ として、$B = R[c_{11}, \cdots, c_{1m_1}, \cdots\cdots, c_{k1}, \cdots, c_{km_k}]$ とおくと、各 i に対し $B_i \subset B \subset A$ かつ $N_i = \mathfrak{n}_i \cap B$ とすれば、$B_{iM_i} < B_{N_i} < A_{\mathfrak{n}_i}$ ゆえ $B_{N_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ を得る。B は R 上有限生成ゆえ改めて、$B = R[b_1, \cdots, b_\ell]$ と表わすとき、$B \subset A$ ゆえ仮定より各 $b_j \in A$ $(j = 1, \cdots, \ell)$ は S 上整である。従って、各 j に対し、S 上の monic 多項式 $f_j(x) \in S[x]$ を $f_j(b_j) = 0$ を満たすように選ぶことができる。R に $f_j(x)$ $(j = 1, \cdots, \ell)$ の係数を全て付け加えてできる R 上有限生成な整域を C とし、$D = C[b_1, \cdots, b_\ell]$ とおく。すると次の包含関係を得る。

$$\begin{array}{ccccc} R & \subset & C & \subset & S \\ \cap & & \cap & & \cap \\ B & \subset & D & \subset & A \end{array}$$

ここで作り方より、D は C 上有限生成かつ整であり、従って D は有限 C-加群である。$\mathfrak{q} = \mathfrak{n} \cap C$ とおく。A は S 上整ゆえ各 i $(i = 1, \cdots, k)$ に対し、$\mathfrak{n}_i \cap S = \mathfrak{n}$ に注意すれば、

$$\begin{array}{ccc} C_{\mathfrak{q}} & < & S \\ \cap & & \cap \\ D_{\mathfrak{q}} & \subset & A \end{array}$$

となることがわかる。但し、ここに $D_{\mathfrak{g}} = D \otimes_C C_{\mathfrak{g}}$ である。D は有限 C－加群ゆえ $D_{\mathfrak{g}}$ は有限 $C_{\mathfrak{g}}$－加群である。従って、$Q_i = \mathfrak{n}_i \cap D_{\mathfrak{g}}$ とおけば、$Q_i \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}_i \cap D_{\mathfrak{g}} \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}_i \cap S \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n} \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} C_{\mathfrak{g}}$ ゆえ、Q_i は $D_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアルになることがわかる。更に、$Q_i \cap B = \mathfrak{n}_i \cap B = N_i$ ゆえ、$B_{N_i} < (D_{\mathfrak{g}})_{Q_i} < A_{\mathfrak{n}_i}$ となるが、$B_{N_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ ゆえ、$(D_{\mathfrak{g}})_{Q_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ が各 $i = 1, \cdots, k$ に対し成立することもわかった。さて、C は R 上有限生成ゆえ、$C_{\mathfrak{g}}$ は R 上の spot となり、特に $C_{\mathfrak{g}}$ は noether 環である。$D_{\mathfrak{g}}$ は有限 $C_{\mathfrak{g}}$－加群ゆえ、従って、$D_{\mathfrak{g}}$ は準局所整域である。上でみた通り、$Q_1, \cdots, Q_k$ は $D_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアルであるが、それ以外の $D_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアルを（もし存在したとして）$Q_{k+1}, \cdots\cdots, Q_r$ とする。各 Q_i に対し、D の素イデアル $\mathfrak{g}_i$ を、$Q_i = \mathfrak{g}_i D_{\mathfrak{g}}$ となるように選べるが、このとき、$t \in D$ を、$t \in (\mathfrak{g}_{k+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{g}_r) \setminus (\mathfrak{g}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{g}_k)$ となるようにとる。すると、t の選び方より、$1 \leqq i \leqq k$ のとき、$t^{-1} \in D_{\mathfrak{g}_i} = (D_{\mathfrak{g}})_{Q_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ となり、従って、$t^{-1} \in A_{\mathfrak{n}_1} \cap \cdots \cap A_{\mathfrak{n}_k} = A$ である。A は S 上整ゆえ、この $t^{-1} \in A$ に対しても、S 上のある monic 多項式 $g(x) \in S[x]$ が存在して、$g(t^{-1}) = 0$ となる。$g(x) = x^h + s_1 x^{h-1} + \cdots + s_h$ $(\forall s_i \in S)$ として、$E = C[s_1, \cdots, s_h]$、$T = D[s_1, \cdots, s_h, t^{-1}]$ とおくと、$E \subset S$、$T \subset A$ であって、D は C 上整かつ有限生成、また t^{-1} は $D[s_1, \cdots, s_h]$ 上整ゆえ、T は E 上整かつ有限生成になることがわかる。$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap E$ とおくと、$\mathfrak{m} \cap C = \mathfrak{n} \cap C = \mathfrak{g}$ ゆえ次の包含関係を得る：

$$
\begin{array}{ccccc}
C_{\mathfrak{g}} & < & E_{\mathfrak{m}} & < & S \\
\cap & & \cap & & \cap \\
D_{\mathfrak{g}} & \subset & T_{\mathfrak{m}} & \subset & A
\end{array}
$$

ここに、$D_{\mathfrak{g}}$ は $C_{\mathfrak{g}}$ 上整かつ有限生成、$T_{\mathfrak{m}}$ は $E_{\mathfrak{m}}$ 上整かつ有限生成である。また作り方より、$E_{\mathfrak{m}}$ は R 上の spot であることに注意する。さて、$T_{\mathfrak{m}}$ の任意の極大イデアル $\mathfrak{M}$ を考えよう。$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap D_{\mathfrak{g}}$ とおくとき、$\mathfrak{N} \cap C_{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{M} \cap D_{\mathfrak{g}}) \cap C_{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{M} \cap E_{\mathfrak{m}}) \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} E_{\mathfrak{m}} \cap C_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} C_{\mathfrak{g}}$ となるが、ここで、$D_{\mathfrak{g}}$ は $C_{\mathfrak{g}}$ 上整ゆえ、従って $\mathfrak{N}$ は $D_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアルである。$D_{\mathfrak{g}}$ は $Q_1, \cdots, Q_r$ を極大イデアルにもつ準局所環であったから、

ある i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ が存在して、$\mathfrak{n} = Q_i$ となるが、ここで、$t^{-1} \in T_m$ ゆえ、$1 \leqslant i \leqslant k$ でなければならない。実際、$i \geqslant k+1$ とすると t のとり方より、$t \in Q_i = \mathfrak{n}$ となるが、t は T_m の単元ゆえこれは矛盾である。従って $1 \leqslant i \leqslant k$ となるが、するとこのとき、上で示したように、$(D_\mathfrak{z})_{Q_i} = A_{\mathfrak{n}_i}$ が成立する。ここで、$(T_m)_\mathfrak{n} > (D_\mathfrak{z})_{Q_i}$ ゆえ、よって $(T_m)_\mathfrak{n} \supseteq A_{\mathfrak{n}_i} \supseteq A$ が示せた。これが T_m の任意の極大イデアル $\mathfrak{n}$ に対して成立することから、$T_m \supseteq A$ となり、従って、$T_m = A$ となることがわかった。さて、T_m は有限 E_m－加群であったから、このことより、A は有限 E_m－加群となる。ここで、E_m は noether 環ゆえ、A の部分加群として、S も有限 E_m－加群となり、特に S は E_m 上有限生成である。そこで、$S = E_m[u_1, \cdots, u_d]$ とする。$U = E[u_1, \cdots, u_d]$ とおくと、$E \subset U \subset S$ である。$P = \mathfrak{n} \cap U$ とすれば $P \cap E = \mathfrak{n} \cap E = \mathfrak{m}$ ゆえ、$E_m[u_1, \cdots, u_d] \subseteq U_P \subseteq S$ となり、よって、$S = U_P$ が成り立つ。ここで、U は E 上、従って R 上有限生成であるから、このことより、S が R 上の spot であることが示せた∎

<u>Lemma</u> 3　$(R, \mathfrak{m})$、$(S, \mathfrak{n})$ は共に局所整域で、$R < S$ かつ $Q(S)$ は $Q(R)$ 上有限生成とする。このとき、S が R に関して次元公式を満たすなら、$R < T < S$ となる R 上の spot $(T, \mathfrak{z})$ で、$Q(T) = Q(S)$、$\dim T = \dim S$、かつ $\mathfrak{z}S = \mathfrak{n}$ となるようなものが存在する。

<u>証明</u>　$K = Q(R)$、$L = Q(S)$ とおくと、仮定より、$L = K(x_1, \cdots, x_n)$ となるような $x_1, \cdots, x_n \in S$ が存在する。S は R に関して次元公式を満たすから、等式

$$\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, S/\mathfrak{n} = \dim R + \mathrm{tr.deg}_R\, S$$

が成立するが、ここで、$\dim S$、$\dim R$、$\mathrm{tr.deg}_R\, S$ は全て有限であるから、従って、$\mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, S/\mathfrak{n}$ も有限となる。そこで、$m = \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, S/\mathfrak{n}$ とすれば、S の元 $y_1, \cdots, y_m$ を $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_m \in S/\mathfrak{n}$ が $R/\mathfrak{m}$ 上代数的独立となるようにとることができる。$\mathfrak{n} = (a_1, \cdots, a_\ell)S$ として、$A = R[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m, a_1, \cdots, a_\ell]$ とおくと、明らかに、$R \subset A \subset S$ かつ $Q(A) = Q(S)$ が成り立つ。$P = \mathfrak{n} \cap A$ として、$T = A_P$、$\mathfrak{z} = PA_P$ とおけば、$(T, \mathfrak{z})$ は R 上の spot であり、$R < T < S$ となる。S が R

上次元公式を満たすから、Lemma 1 より、S は T に関しても次元公式を満たしている。従って等式

$$\dim S + \mathrm{tr.deg}_{T/\mathfrak{z}}\, S/\mathfrak{n} = \dim T + \mathrm{tr.deg}_T\, S$$

が成立するが、ここで、T の作り方より、$\mathrm{tr.deg}_{T/\mathfrak{z}}\, S/\mathfrak{n} = \mathrm{tr.deg}_T\, S = 0$ に注意すれば、この等式より、$\dim T = \dim S$ を得る。また、$a_1, \cdots, a_\ell \in \mathfrak{z}$ ゆえ、$\mathfrak{z}S = \mathfrak{n}$ となることも明らかである∎

以上2つの補題を用いて、主定理を次のようにして証明できる。

<u>主定理の証明</u>　Lemma 3 より、$R < T < S$ を満たす R 上の spot $(T, \mathfrak{z})$ で、$Q(T) = Q(S)$、$\dim T = \dim S$ かつ $\mathfrak{z}S = \mathfrak{n}$ となるものが存在する。T の整閉包を T' として、$\bar{S} = S[T']$ とおく。R は擬幾何学環ゆえ T' は有限 T－加群、従って $\bar{S}$ は有限 S－加群である。S は局所整域ゆえ、よって $\bar{S}$ は準局所整域である。そこで、$\bar{S}$ の極大イデアルを $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k$ とする。このとき、S は quasi-unmixed ゆえ最初に注意した Ratliff の定理より、$\dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} = \dim S$ $(i = 1, \cdots, k)$ が成り立つことに注意する。$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{n}_i \cap T'$ $(i = 1, \cdots, k)$ とおくと、$\mathfrak{z}_i \cap T = \mathfrak{n}_i \cap T = \mathfrak{n}_i \cap S \cap T = \mathfrak{n} \cap T = \mathfrak{z}$ ゆえ、$\mathfrak{z}S = \mathfrak{n}$ より、$\mathfrak{z}_i \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} \supseteq \mathfrak{z}\bar{S}_{\mathfrak{n}_i} = \mathfrak{n}\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ を得る。従って、$\mathfrak{n}\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ が $\mathfrak{n}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$－準素イデアルであることより、$\mathfrak{z}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ も $\mathfrak{n}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$－準素イデアルになる。次に、仮定より、$S$ は R に関して次元公式を満たすから

$$\dim S + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, S/\mathfrak{n} = \dim R + \mathrm{tr.deg}_R\, S$$

が成立するが、ここで、$\dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} = \dim S$ かつ $\mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, S/\mathfrak{n} = \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}/\mathfrak{n}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$、$\mathrm{tr.deg}_R\, S = \mathrm{tr.deg}_R\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ ゆえ

$$\dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} + \mathrm{tr.deg}_{R/\mathfrak{m}}\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}/\mathfrak{n}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i} = \dim R + \mathrm{tr.deg}_R\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$$

を得る。即ち、$\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ は R に関して次元公式を満たす。従って、$R < T'_{\mathfrak{z}_i} < \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ に Lemma 1 を適用して、$\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ は $T'_{\mathfrak{z}_i}$ に関しても次元公式を満たすことがわかる。よって

$$\dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} + \mathrm{tr.deg}_{T'_{\mathfrak{z}_i}/\mathfrak{z}_iT'_{\mathfrak{z}_i}}\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}/\mathfrak{n}_i\bar{S}_{\mathfrak{n}_i} = \dim T'_{\mathfrak{z}_i} + \mathrm{tr.deg}_{T'_{\mathfrak{z}_i}}\, \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$$

が成立するが、$T < T'_{\mathfrak{z}_i} < \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ かつ $Q(T) = Q(S)$ より $Q(T'_{\mathfrak{z}_i}) = Q(\bar{S}_{\mathfrak{n}_i})$ に注意すれば、$\dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i} \leqq \dim T'_{\mathfrak{z}_i}$ となる。一方、T' は T 上整ゆえ、$\dim T'_{\mathfrak{z}_i} \leqq \dim T$ であるが、ここで、$\dim T = \dim S = \dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ ゆえ $\dim T'_{\mathfrak{z}_i} \leqq \dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ となり、上の不等式

と合わせて、$\dim T'_{\mathfrak{q}_i} = \dim \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$ となることがわかった。最後に、T'は有限T－加群かつTはR上のspotであることから、$T'_{\mathfrak{q}_i}$がR上の正規spotであることに注意すれば、Rが条件(C)を満たすことより、$T'_{\mathfrak{q}_i}$は解析的既約になることが出る。以上わかったことを整理すると、$T'_{\mathfrak{q}_i} < \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$において、(i) $\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$と$T'_{\mathfrak{q}_i}$の商体は一致する、(ii)両者の次元は等しい、(iii) $\mathfrak{q}_i \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$は$\mathfrak{n}_i \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$－準素イデアルである、(iv) $T'_{\mathfrak{q}_i}$は正規かつ解析的既約である。従って、Zariskiの主定理[2,(37.4)]より、$T'_{\mathfrak{q}_i} = \bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$となることがわかる。よって、任意の$i = 1, \cdots, k$に対して、$\bar{S}_{\mathfrak{n}_i}$がR上のspotであることが示せた。$\bar{S}$はS上整ゆえ、従って、Lemma 2より、S自身R上のspotである∎

以上で主定理の証明が完了したが、ここで、これと関連のある次のことを注意しておく。

<u>定理</u> 4　$(R, \mathfrak{m})$は条件(C)を満たす擬幾何学局所整域、$(S, \mathfrak{n})$はRを支配する正規局所整域とする。このとき、SがRに関して次元公式を満たし、かつ、$Q(S)$が$Q(R)$上有限生成であるならば、SはR上のspotである。

<u>証明</u>　仮定より、$R < T < S$を満たすR上のspot $(T, \mathfrak{q})$で、$Q(T) = Q(S)$、$\dim T = \dim S$かつ$\mathfrak{q}S = \mathfrak{n}$となるものが存在する。Rは擬幾何学環かつSは正規ゆえTも正規としてよい。すると、主定理の証明と同様にして$T = S$が示せるから、従ってSはR上のspotである∎

<u>系</u> 5　$(R, \mathfrak{m})$は条件(C)を満たす正規擬幾何学局所整域、$(S, \mathfrak{n})$はRを支配する局所整域で$Q(S)$が$Q(R)$上有限生成であるようなものとする。このとき、Sが正規又はquasi-unmixedならば、SがR上のspotであるための必要十分条件は、SがRに関して次元公式を満たすことである。

<u>証明</u>　十分性は主定理および定理4で証明されているので必要性のみ示せばよい。そこで、SはR上のspotであると仮定する。Rは条件(C)を満たし、かつRは正規ゆえ、R自身解析的既約であり、特にRはquasi-unmixedで

もある。よって Rees の定理より R は次元公式を満たす。S は R 上の spot ゆえ、従って S は R に関して次元公式を満たす ∎

<u>系 6</u>　k は体とし、$(S, \mathfrak{n})$ は k を含む局所整域で正規又は quasi-unmixed であるとする。このとき、S が k 上の spot であるための必要十分条件は、$Q(S)$ が k 上有限生成かつ $\dim S = \mathrm{tr.deg}_k S - \mathrm{tr.deg}_k S/\mathfrak{n}$ が成立することである。

<u>証明</u>　体は条件 (C) を満たす擬幾何学環である。また k は体ゆえ、S が k に関して次元公式を満たすとは、等式、$\dim S = \mathrm{tr.deg}_k S - \mathrm{tr.deg}_k S/\mathfrak{n}$ が成立することに他ならない。よって系 5 より主張は明らかである ∎

さて、本稿を終えるに当たって、主定理の応用を述べておくことにする。そのために次の概念を導入しておく。一般に、noether 整域の拡大 $A \subset B$ に対し、B が A に関して次元公式を満たすとは、B の任意の素イデアル P をとるとき、B_P が $A_\mathfrak{p}$ に関して次元公式を満たすことと定義する。但し、ここに $\mathfrak{p} = P \cap A$ である。また、B が locally quasi-unmixed であるとは、B の任意の素イデアル P に対し、B_P が quasi-unmixed であることと定義する。以上のように定義すれば、主定理より直ちに次を得る：

<u>定理 7</u>　R は条件 (C) を満たす擬幾何学整域、S は R を含む noether 整域で locally quasi-unmixed かつ $Q(S)$ は $Q(R)$ 上有限生成と仮定する。このとき、S が R に関して次元公式を満たせば、任意の S の素イデアル P に対し、B_P は R 上の spot である。

<u>証明</u>　R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し、$R_\mathfrak{p}$ 上の spot は R 上の spot でもあることに注意すれば、主定理よりこの定理の主張が正しいことは明らかである ∎

定理 7 を用いて次の定理を示すことができるが、その前に補題をひとつ準備しておく（補題の証明は ［3］参照）

Lemma　整域の拡大、$R \subset S \subset A$ において、R は noether 環で、A は R 上有限生成とする。このとき、S が R 上有限生成であるための必要十分条件は、S の任意の極大イデアル M に対し、S_M が R 上の spot となることである。

定理 8　R は条件 (C) を満たす擬幾何学整域、A は R 上有限生成な整域とする。このとき、R と A の中間環 S に対し、S が locally quasi-unmixed かつ R に関して次元公式を満たす noether 環であるとすれば、S は R 上有限生成である。

証明　仮定より明らかに $Q(S)$ は $Q(R)$ 上有限生成である。従って定理 7 より、S の任意の極大イデアル M に対し、S_M は R 上の spot となる。よって上の Lemma より、S が R 上有限生成となることがわかる∎

系 9　$k \subset S \subset A$ において、k は体、A は k 上有限生成な整域。S は noether 環かつ locally quasi-unmixed と仮定する。このとき、S が k 上有限生成であるための必要十分条件は、S の任意の極大イデアル M に対し、$\dim S_M = \dim S$ が成り立つことである。

証明　S が k 上有限生成ならば、$\dim S_M = \dim S$ が任意の極大イデアル M に対し成立することはよく知られている。逆に、S の任意の極大イデアル M に対し、$\dim S_M = \dim S$ と仮定する。S は体 k 上有限生成な整域の部分環ゆえ、$\dim S = \mathrm{tr.deg}_k S$ が成立することに注意する（[4] 参照）。従って、$\dim S_M = \mathrm{tr.deg}_k S_M$ が S のかってな極大イデアル M に対して成り立つことになる。一方、次元不等式より、$\dim S_M \leqq \mathrm{tr.deg}_k S_M - \mathrm{tr.deg}_k S_M/MS_M$ であるから、従って、$\mathrm{tr.deg}_k S_M/MS_M = 0$ でなければならない。又、同時に、S_M は k に関して次元公式を満たすこともわかる。よって定理 7 より S_M は k 上の spot となり、再び上の Lemma より、S は k 上有限生成である∎

参考文献

[1] W. Heinzer, C. Huneke and J. D. Sally, A criterion for spots, to appear

[2] M. Nagata, Local rings, J. Wiley & Sons, New York 1962.

[3] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, Japanese J. Math. 10 (1984), 29 – 53.

[4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 377 - 384.

[5] L. J. Ratliff, Jr., On quasi-unmixed local domains, the altitude formula, and the chain condition for prime ideals, (I), Amer. J. Math. 91 (1969), 508 – 528.

[6] D. Rees, A note on analytically unramified local rings, J. London Math. Soc. 36 (1961), 24 – 28.

On the $\mathfrak{m}$-full closure of an $\mathfrak{m}$-primary ideal

渡辺 純三　名大・理

序文

Dilworthの定理に代表される，組合せ理論の一連の結果（Transversal theoryと呼ばれる）は，全く直接的にArtin環のイデアル論に応用出来る。この事は前回の可換環論シンポジウム（於広島，1984）で紹介した通りである。実際，Artin環のイデアル論とposetのイデアル論との間には，緊密な類似性が存在して，一方の概念から他方を類推して翻訳する事が多くの場合に可能である。そもそも，posetの「イデアル」は，本来の意味のイデアルのanalogyであろう。以下に，この様な例をいくつか挙げてみよう。（Example 1, 2, 3に出て来るすべての定義を述べる余裕は無い。興味を持たれる読者は末尾の参考文献を参照されたい。使用する主な記号は，ℓで長さを表わし，$\mu(\mathfrak{a})=\ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m})$，$\tau(\mathfrak{a})=\ell(\mathfrak{a}:\mathfrak{m}/\mathfrak{a})$

とする。)

Example 1. Artin環 $(A, \mathfrak{m})$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ と、任意の $y \in \mathfrak{m}$ について、

$$(1) \qquad \mu(\mathfrak{a}) \leq l(A/yA).$$

しかも一般型の Gorenstein 環については、

$$(2) \qquad \operatorname*{Max}_{\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{a}) = \operatorname*{Min}_{y \in \mathfrak{m}} l(A/yA).$$

これは、組合せ理論で、最大最小定理と呼ばれるものと同様の型式を持つ。即ち、2つの量 F と G が在り、一般的には、$F(\xi) \leq G(\eta)$ であり、しかも、$\operatorname*{Max}_{\xi} F(\xi) = \operatorname*{Min}_{\eta} G(\eta)$ となる。(Dilworthの定理, Mengerの定理, 最大流最小切断定理等この型の定理の代表である。)

Example 2. 一般型の Gorenstein 環 $(A, \mathfrak{m})$ について、

$$d(A) \overset{def}{=} \operatorname*{Max}_{\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{a}) = \operatorname*{Max}_{i} \mu(\mathfrak{m}^i) \quad \text{である。}$$

これが Sperner 性を有する Symmetric poset の翻訳である事は直ちに了解されるだろう。

Example 3. 任意の Artin 環 A について、

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{a}) = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{a}} \tau(\mathfrak{a})$$ である。

これは，poset P に関しての等号 $d(P)=d(P^*)$ に対応する。ここに d は P の Dilworth 数を表わし，P^* は P の双対，即ち，P の順序をすべて逆にして得られる poset である。poset の双対が環の標準加群に当ると考えるのは自然である。この事から上の等号を類推し，それが証明できたのである。

前置きが随分長くなったが，本稿の目的は，Artin 環のイデアルと poset のイデアルの類似性を更に強調する事にある。第1章では，純粋に環論的な概念である "m-full closure" を定義し，第2章で，それが如何に poset の言葉に翻訳出来るかを示す。

なお，イデアルの m-full closure は，それ自身興味ある研究対象であるが，現在の所，論文[4]にいくつかの潜在的な結果が存在するのみである。

第1章

$\mathfrak{m}$-fullイデアルは一般の局所環上で定義されるのだが，ここでは簡単の為，$|R/\mathfrak{m}|=\infty$ なる局所環 $(R,\mathfrak{m})$ だけを考える。R のイデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$-full とは，$\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y=\mathfrak{a}$ とする R の元 y の存在する事である。この時，y は $\mathfrak{a}$ に対する一般元だから，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{m}$-full 性は，十分一般的な y について $\mathfrak{a}\mathfrak{m}:y=\mathfrak{a}$ なる事と言い直しても良い。次の定理は Rees による観察である。

<u>定理1。</u> $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を R の $\mathfrak{m}$-fullイデアルとすると，$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ も $\mathfrak{m}$-full となる。

<u>証明</u>。 任意の $y\in\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}):y\subset(\mathfrak{m}\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}\mathfrak{b}):y\subset(\mathfrak{m}\mathfrak{a}:y)\cap(\mathfrak{m}\mathfrak{b}:y)$ である。今，y を十分一般的に取れば，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{m}$-full だから，この右辺は $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ になる。即ち，$\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}):y\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$。逆向きの inclusion は明らかだから $\mathfrak{m}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}):y=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ が示された。証明終。

この定理により，$\mathfrak{m}$-primary イデアルの $\mathfrak{m}$-full closure

が定義できる。即ち，

定義。 $\mathfrak{m}$-primary イデアル $\mathfrak{a}$ について，

$$\mathfrak{a}^* = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}' : \mathfrak{m}\text{-full}}} \mathfrak{a}'$$

［$\mathfrak{m}$ 自身は常に $\mathfrak{m}$-full である事に注意する。］

を $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{m}$-full closure と言う。

注意。 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$-primary だから，この定義の $\bigcap$ は，本質的に有限コのイデアルの $\bigcap$ である。よって，定理 1 により，$\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{m}$-full である。 $\mathfrak{a}$ から出発して，

$\mathfrak{m}\mathfrak{a} : y = \mathfrak{a}'$， $\mathfrak{m}\mathfrak{a}' : y' = \mathfrak{a}''$， $\mathfrak{m}\mathfrak{a}'' : y'' = \mathfrak{a}'''$ として，

イデアル列 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}'' \subset \mathfrak{a}''' \subset \cdots\cdot$ を求めて行けば，いずれは $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{m}$-full closure に到達する。ただし，$y, y', y'' \cdots\cdot$ はすべての段階で十分一般的に取るのである。 これによっても $\mathfrak{m}$-full closure の存在が言える。また，原理的にはこの方法で与えられたイデアルの $\mathfrak{m}$-full closure を求める事ができる。

論文［3］，Theorem 1 で証明した通り，$\mathfrak{m}$-primary $\mathfrak{m}$-full イデアルは，「Rees Property」を持つ。即ち，

定理 2。 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{m}$-full なら，任意のイデアル $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ について，$\mu(\mathfrak{b}) \leqq \mu(\mathfrak{a})$ である。

Artin 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ については 0 の $\mathfrak{m}$-full closure 0^* が考えられる。更に，$d(A)$ と $r(A)$ を次の様に定義する。

$$d(A) := \operatorname*{Max}_{\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{a}),$$

$$r(A) := \operatorname*{Min}_{y} \ell(A/yA).$$

$\mu(0^*)$ と $d(A)$ の関係については，次の定理が成り立つ。

定理 3。 $d(A) = r(A)$ のとき，$\mu(0^*) = d(A)$ である。

証明。 $\mu(0^*) \leqq d(A)$ は自明である。一方，仮定より $d(A) = \mu(\mathfrak{a}) = \ell(A/yA) = r(A)$ を満たす $\mathfrak{a}$ と y が存在する。ところが，一般的に $\mu(\mathfrak{a}) \leqq \ell(A/\mathfrak{a}+yA) \leqq \ell(A/yA)$。従って $\mu(\mathfrak{a}) = \ell(A/\mathfrak{a}+yA)$ となり，これは $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{m}$-full 性と同値である。よって $\mathfrak{a} \supset 0^*$。0^* は Rees Property を持つのだから $d(A) = \mu(\mathfrak{a}) \leqq \mu(0^*)$。

以上より，$\mu(O^*) = d(A)$ が示された。

この定理からも，また序文の Example 1 の直後の註からも，不等号 $d(A) \leqq r(A)$ がいつ等号となるかと言う問題は極めて興味深いものである。これは，今後の課題の1つである。$d(A) = r(A)$ なる A を Dilworth の定理の成り立つ環と名付けたらどうだろう。それは兎に角，定理3により，$d(A) = r(A)$ なる条件の下では，O^* は，最大の μ をもつイデアルのうちの最小のものとして特徴付けられるのである。

第2章

以下 P で finite poset を表わす。P の順序は $\leq$ と書く事にする。P の subset I がイデアルであるとは，

$x \in I,\ y \geq x \Longrightarrow y \in I$ となる事である。P の subset U の生成するイデアルを (U) で表わす。可換環論の場合と同様，イデアルの minimal generating set が

存在し，その元数としてμが定義される訳けだが，poset の場合は特に antichain（または independent set）と言う言葉が使われる。従って，次の3つの条件は同値である。

(1) $I \subset P$ が antichain。

(2) I の任意の2元は比較不能。

(3) I は I の生成するイデアルの minimal generating set。

（注意。(3)の表現は，poset の理論ではあまり使われない。ここでは環論との比較があるのでこの様な表現をしたのである。）

P の subset が chain であるとは，その中の任意の2元が比較可能なる事である。 P の Dilworth 数 $d(P)$ は，

$$d(P) := \mathrm{Max}\left\{ \#I \;\middle|\; I \text{ は } P \text{ の antichain} \right\}$$

として定義される。 有名な Dilworth の定理は，$d = d(P)$ とするとき，P が d 本の chain に分解される事を主張するものである。

さて，P のイデアルの族

$$\mathcal{S} = \left\{ (I) \;\middle|\; I : \text{antichain of } P \text{ with } \#I = d(P) \right\}$$

を考えよう。前章定理3から，$\mathscr{S}$には最小メンバーが存在する事が予想される。実際この事は正しい。

定理4。 $\mathscr{S}$は最小メンバーを持つ。

証明。 $d=d(P)$とおき，$P=C_1\sqcup C_2\sqcup\cdots\sqcup C_d$を，Dilworthの定理が保証するchain分解としよう。元数dの2つのantichainをIとJとするとき，$(I)\cap(J)$も元数dのantichainによって生成される事を言えば証明が終る。任意のantichainは各C_iと高々1点で交わる。よって，適当に番号を付ければ，$I=\{a_1,a_2,\ldots,a_d\}$，$J=\{b_1,b_2,\ldots,b_d\}$，$a_i, b_i\in C_i$，$i=1,2,\ldots,d$と考えてよい。$(I)\cap(J)$は$e_i:=\mathrm{Min}\{a_i,b_i\}$，$i=1,2,\ldots,d$で生成される。よって$d$コの$e_i$はすべて比較不能である事を言えばよい。$e_1\geq e_2$と仮定して矛盾を導く。次の4つの場合のうち，

	1	2	3	4
e_1	a_1	a_1	b_1	b_1
e_2	a_2	b_2	a_2	b_2

1と4の場合は，a_1とa_2，(またb_1とb_2)が比較可能となって矛盾を生じる。2の場合は，$b_1\geq a_1\geq b_2$，3の場合は，$a_1\geq b_1\geq a_2$となり，b_1とb_2(またはa_1とa_2)が比較可

能となり矛盾である。　証明終。

$\mathcal{S}$ の最小メンバーは定理3で考えた $\mathcal{O}^*$ と同様「最大の μ をもつイデアルのうちの最小のもの」である。その存在が Dilworth の定理を使って証明できたのである。この意味においても定理3の条件 $d(A)=r(A)$ は Dilworth の定理の analogy と考えられる。この点をもう少し説明してみよう。

P を poset とし，$a, b \in P$ とする。b が a を cover する（$a \lessdot b$ と書く）とは，$a < b$ でありしかも，a と b の間にはどの元も存在しない事である。$P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ とするとき，P の Zeta 行列 $Z=(z_{ij})$ は

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } p_i \leq p_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義され，P の cover 行列 $C=(c_{ij})$ は

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } p_i \lessdot p_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義される。

「cover する・される」という関係が P の順序関係を生成

するのだから，行列 $C^0+C^1+C^2+\cdots$ の $(0,1)$-化が Z である。例えば $P=\{0\lessdot 1\lessdot 2\lessdot\cdots\lessdot n\}$ を長さ n の chain とすれば，

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & \text{\Large 0} & & & \cdot & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \text{\Large 0} & & & \cdot & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

である。この意味で

$$\begin{pmatrix}\text{nilpotent 行列の} \\ \text{Jordan 標準形}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \text{poset の chain 分解}$$

$$\text{1つの Jordan 細胞} \longleftrightarrow \text{1つの chain}$$

と対応する。

さて，Artin 環 $(A,\mathfrak{m},k)$ が $k=A/\mathfrak{m}$ を含む場合を考えよう。任意の $y\in A$ は multiplication $y: A\to A$ により，$y\in \mathrm{End}_k(A)$ と考えられる。特に $y\in\mathfrak{m}$ なら y は nilpotent である。$y\in\mathfrak{m}$ を k 上の行列と見て Jordan 標準形であらわすと，

$$\mathrm{rank}\, y = \dim_k A - [\,y \text{ の Jordan 細胞の数}\,]$$

であり，従って，

$$\ell(A/yA) = \dim_k \mathrm{Coke}[y : A \to A]$$

$$= [y\text{の Jordan 細胞の数}]$$

である。これは上に述べた理由により，poset の chain 分解における chain の数と解釈できる。一方，$\mu(\mathfrak{a})$ を antichain の元数と考えるのは自然であるから，

等号　$d(A) = r(A)$ $\left(\text{i.e., } \mathrm{Max}\,\mu(\mathfrak{a}) = \mathrm{Min}\,\ell(A/yA)\right)$

は確かに，最大独立数＝最小鎖分解数　と考えられる！

参考文献

[1] M.Aigner, Combinatorial theory, Springer.

[2] 岩堀長慶，岩波数学講座「線形不等式とその応用」

[3] J.Watanabe, m-Full ideals.

[4] __________, The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function.

Deviation について

川本琢二　　名古屋大学理学部

local ring A の古典的な deviation ε_n（ここでは Gulliksen Levin の deviation という）と、M. André の定義した deviation δ_n との関係を紹介する。それは

$$\delta_{n+1} = \varepsilon_n \qquad n \geq 0$$

André によると、$n = 0, 1, 2$ について及び residue field の characteristic $= 0$ の場合は正しい。私は A が特別な場合に δ_4 の計算がなんとか出来ることがわかったので、計算例ともう少し詳しい conjecture を示す。

Conjecture 2

$(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring. André の deviation を δ_n とする。$\mathrm{Tor}^A_n(k, k)$ の sub space C_n を $\mathrm{Tor}^A_i(k, k)$ $(0 < i < n)$ たちの multiplication 及び divided power で生成されたものとする。このとき

$$\delta_n = \dim_k \mathrm{Tor}^A_n(k, k)/C_n \qquad n > 0$$

となる。

この conjecture から

$$\delta_{n+1} = \varepsilon_n \qquad n \geq 0$$

は出てくる。

§1 予備知識

。$\mathrm{Tor}^A_n(k, k)$ の multiplication 及び divided power ([5])

k の Tate-resolution における multiplication 及び divided power から induce される $\mathrm{Tor}^A_n(k, k)$ の構造。divided power を $a^{(t)}$ で表わすと

$$a^t = t!\, a^{(t)}$$

の関係がある。

- Gulliksen Levin の deviation ε_n ([4])
  - $(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring とする。k の Tate-resolution を使って deviation ε_n $(n \geq 0)$ は定義されるが、ここでは

$$P_A(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dim_k \operatorname{Tor}^A_n(k, k) \right) Z^n$$

を A の Poincaré series とするとき、

$$P_A(Z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + Z^{2n+1})^{\varepsilon_{2n}}}{(1 - Z^{2n+2})^{\varepsilon_{2n+1}}}$$

で定義。$P_A(Z)$ が与えられれば、ε_n は一意に定まることに注意。

- $\varepsilon_0 = \dim_k \operatorname{Tor}^A_1(k, k) = \dim_k \mathfrak{m} \otimes_A k = \operatorname{embdim} A$
- $\varepsilon_1 = \dim_k \operatorname{Tor}^A_2(k, k) / \operatorname{Tor}^A_1(k, k) \operatorname{Tor}^A_1(k, k)$
- $\varepsilon_2 = \dim_k \operatorname{Tor}^A_3(k, k) / \operatorname{Tor}^A_1(k, k) \operatorname{Tor}^A_2(k, k)$
  (Levin, Sakuma, Okuyama)

- 次の各条件は同値

(i) A : regular
(ii) $\varepsilon_1 = 0$
(iii) $P_A(Z) = (1 + Z)^{\varepsilon_0}$

- 次の各条件は同値

(i) A : C.I.
(ii) $\varepsilon_2 = 0$ (Assmus)
(iii) $\varepsilon_3 = 0$ (Gulliksen)
(iv) $P_A(Z) = \dfrac{(1 + Z)^{\varepsilon_0}}{(1 - Z^2)^{\varepsilon_1}}$

○ André の homology ([1][2])
　一般の rings $A \to B$ 及び B-module M が与えられているものとする。

○ rings $A \to C$ 及び C-module N に対して、次のように書く。

$$\mathrm{Dif}(A, C, N) = \Omega_{C/A} \otimes_C N$$

○ A 上の n 変数多項式環を $A[n]$ と書く。

○ $E_n(A,B)$ を、A-algebras の homomorphisms

$$A[i_n] \xrightarrow{\alpha_n} A[i_{n-1}] \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} A[i_0] \xrightarrow{\alpha_0} B$$

の形全体とする。この元を $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ と書く。

○ $\alpha_0 \circ \cdots \circ \alpha_n : A[i_n] \longrightarrow B$ によって M を $A[i_n]$-module と思い、

$$T(\alpha_0, \cdots, \alpha_n, M) = \mathrm{Dif}(A, A[i_n], M)$$

と書く。これは M^{i_n} に等しく、B-module となる。

○ B-module の complex $\{T_n(A,B,M), d_n\}$ を次のように定義

$$T_n(A,B,M) = \bigoplus_{(\alpha_0,\cdots,\alpha_n)\in E_n(A,B)} T(\alpha_0, \cdots, \alpha_n, M)$$

$$d_n^i : T_n(A,B,M) \to T_{n-1}(A,B,M) \qquad 0 \leq i \leq n \neq 0$$

は各 component の上で次のように定義

(i) $i \neq n$ の場合

$$d_n^i : T(\alpha_0, \cdots, \alpha_n, M) = \mathrm{Dif}(A, A[i_n], M) \to T(\alpha_0, \cdots, \alpha_i \circ \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n, M) = \mathrm{Dif}(A, A[i_n], M)$$

は identity map。

(ii) $i = n$ の場合

$$d_n^n : T(\alpha_0, \cdots, \alpha_n, M) = \mathrm{Dif}(A, A[i_n], M) \to T(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, M) = \mathrm{Dif}(A, A[i_{n-1}], M)$$

は α_n より induce される次の map

$$\mathrm{Dif}(1_A, \alpha_n, 1_M) : \mathrm{Dif}(A, A[i_n], M) \to \mathrm{Dif}(A, A[i_{n-1}], M)$$

そして

$$d_n : T_n(A, B, M) \to T_{n-1}(A, B, M) \qquad n \neq 0$$

を

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i$$

とおくと. $\{ T_n(A,B,M) , d_n \}$ は B-module の complex になるので.

$$H_n(A,B,M) = H_n[T_*(A,B,M)]$$

で André の homology が定義される。

- simplicial A-algebra

A-algebras の family $\{K_n\}_{n \geq 0}$ が simplicial A-algebra であるとは.

$$\varepsilon_n^i : K_n \to K_{n-1} \qquad \text{A-algebra hom} \qquad 0 \leq i \leq n \neq 0$$
$$\sigma_n^i : K_n \to K_{n+1} \qquad \text{A-algebra hom} \qquad 0 \leq i \leq n$$

で次を満たすものが存在することをいう。

(i) $\varepsilon_{n-1}^i \circ \varepsilon_n^j = \varepsilon_{n-1}^{j-1} \circ \varepsilon_n^i \qquad 0 \leq i < j \leq n$

(ii) $\sigma_{n+1}^i \circ \sigma_n^j = \sigma_{n+1}^j \circ \sigma_n^{i-1} \qquad 0 \leq j < i \leq n$

(iii) $\varepsilon_{n+1}^i \circ \sigma_n^j = \sigma_{n-1}^{j-1} \circ \varepsilon_n^i \qquad 0 \leq i < j \leq n$

(iv) $\varepsilon_{n+1}^i \circ \sigma_n^j = \mathrm{Id} \qquad i = j,\ i = j+1$

(v) $\varepsilon_{n+1}^i \circ \sigma_n^j = \sigma_{n-1}^j \circ \varepsilon_n^{i-1} \qquad 0 \leq j < i-1 \leq n$

- simplicial A-resolution

simplicial A-algebra B_* が A-algebra B の simplicial A-resolution であるとは.

(i) B_n $n \geq 0$ は free A-algebra

(ii) augmentation

$$\varepsilon_0^0 : B_0 \to B \qquad \varepsilon_0^0 \circ \varepsilon_1^0 = \varepsilon_0^0 \circ \varepsilon_1^1$$

があって

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_n^i \qquad n \geq 0$$

とおくとき

$$(B_*, \varepsilon_*) \xrightarrow{\varepsilon_0} B$$

は A-module の complex として acyclic。

- simplicial A-resolution の存在(André)

  $A \to B$: ring hom とすると、B の simplicial A-resolution B_* が次を満たすようにとれる。

  (i) $A \to B$ が A-algebra として f.g. なら、B_n $n \geq 0$ もそう。

  (ii) $A \to B$ が surjection なら

  $B_0 = A$

  $\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n : B_n \to B$ は B_n の各変数を 0 に写す。

- simplicial A-resolution と André の homology との関係(André)

  $A \to B$: ring hom　M : B-module そして

  B_* : B の simplicial A-resolution とすると、

$$H_n(A, B, M) \cong H_n[\mathrm{Dif}(A, B_*, M)]$$

- André の deviation

  $(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring とする。André の deviation δ_n を

$$\delta_n = \dim_k H_n(A, k, k)$$

  で定義

  - $\delta_0 = 0$

  - $\delta_1 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_1(k, k) = \dim_k \mathfrak{m} \otimes_A k = \mathrm{embdim}\, A$

  - $\delta_2 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_2(k, k) / \mathrm{Tor}^A_1(k, k)\, \mathrm{Tor}^A_1(k, k)$

  - $\delta_3 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_3(k, k) / \mathrm{Tor}^A_1(k, k)\, \mathrm{Tor}^A_2(k, k)$

  - 次の各条件は同値(André)

  (i) A : regular

  (ii) $\delta_2 = 0$

  (iii) $\delta_n = 0$　$n \geq 2$

  - 次の各条件は同値(André)

  (i) A : C.I.

  (ii) $\delta_3 = 0$

  (iii) $\delta_4 = 0$

  (iv) $\delta_n = 0$　$n \geq 3$

§2　ε_nとδ_nとの関係

$(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring とする。前出のとうり．

$$\delta_0 = 0$$
$$\delta_1 = \varepsilon_0 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_1(k,k)$$
$$\delta_2 = \varepsilon_1 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_2(k,k)/\mathrm{Tor}^A_1(k,k)\mathrm{Tor}^A_1(k,k)$$
$$\delta_3 = \varepsilon_2 = \dim_k \mathrm{Tor}^A_3(k,k)/\mathrm{Tor}^A_1(k,k)\mathrm{Tor}^A_2(k,k)$$

そこで次の conjecture が考えられる。

Conjecture 1

$(A, \mathfrak{m}, k)$: local ring とし．ε_n, δ_n を deviations とすると．

$$\delta_{n+1} = \varepsilon_n \qquad n \geqq 0$$

。δ_nの具体的な計算は非常に困難である。しかしAが特別な場合には．δ_4が計算出来ることがわかったので．いくつか計算例を示す。

特別な場合とは．

k : field　$R = k[[X_1, \cdots, X_t]]$　$\mathfrak{n}$: Rの maximal ideal

そして　I : homogenious ideal とし．local ring

$$(A = R/I,\ \mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I,\ k)$$

である。特にkの characteristic には関係なく計算出来ることを注意する。

Example 1

$A = k[[X,Y]]/(X^m, X^l Y^n)$　$n > l > 0$　$m > 0$ の場合

$$\delta_1 = 2 \quad \delta_2 = 2 \quad \delta_3 = 1 \quad \delta_4 = 1 \ (= \varepsilon_3)$$

Example 2

$A = k[[X, Y]]/(X^2, XY, Y^2)$　の場合

$$\delta_1 = 2 \quad \delta_2 = 3 \quad \delta_3 = 2 \quad \delta_4 = 3 \ (= \varepsilon_3)$$

Example 3

$A = k[[{}^{P}_{X}; {}^{Q}_{Y}; {}^{R}_{Z}]]/(PY - QX, QZ - RY, RX - PZ)$　の場合

$$\delta_1 = 6 \quad \delta_2 = 3 \quad \delta_3 = 2 \quad \delta_4 = 3 \ (= \varepsilon_3)$$

k の simplicial A-resolution B_* として、次を満たすものをとる。

(i) B_n : f.g. free A-algebra

(ii) $B_0 = A$

(iii) $\varepsilon_0 \circ \cdots \circ \varepsilon_n : B_n \longrightarrow k$ は B_n の各変数を 0 に写す。

$B_n = A[X_1, \cdots, X_p]$ に対し、

$$K_n = B_n \otimes_A k = k[X_1, \cdots, X_p]$$

とおき、$\deg X_i = 1$ とした K_n の grade で 1 次以上及び 2 次以上の部分を、K_n^+, K_n^{++} とおく。

$$\mathrm{Dif}(A, B_n, k) = \bigoplus_{i=1}^{p} k\, dX_i$$

であるが、(iii) により、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}(A, B_n, k) & \cong & K_n^+ / K_n^{++} \qquad n \geq 1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ dX_i & \longleftrightarrow & \overline{X}_i \end{array}$$

A-algebra k に対し simplicial A-algebra $\overline{k}_*$ を

$$\overline{k}_* : \quad \cdots \xrightarrow{1-1+1-1} k \xrightarrow{1-1+1} k \xrightarrow{1-1} k$$

で定義すると、次の simplicial A-algebras の exact sequences

$$0 \longrightarrow K_*^+ \longrightarrow K_* \longrightarrow \overline{k}_* \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_*^{++} \longrightarrow K_*^+ \longrightarrow K_*^+/K_*^{++} \longrightarrow 0$$

から、

$$H_n[K_*^+] \cong \mathrm{Tor}^A{}_n(k, k) \qquad n \geq 1$$

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_n[K_*^{++}] \longrightarrow H_n[K_*^+] \longrightarrow H_n(A, k, k) \\ \longrightarrow H_{n-1}[K_*^{++}] \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow H_2(A, k, k) \\ \longrightarrow H_1[K_*^{++}] \longrightarrow H_1[K_*^+] \longrightarrow H_1(A, k, k) \longrightarrow 0 \end{array}$$

(exact)

であるが、$H_1[K_*^{++}] = 0$ であることがわかるので、次の long exact sequence

$$(\star) \quad \begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_n[K_*^{++}] \longrightarrow \mathrm{Tor}^A{}_n(k, k) \longrightarrow H_n(A, k, k) \\ \longrightarrow H_{n-1}[K_*^{++}] \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow H_2(A, k, k) \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$H_1(A, k, k) \cong \mathrm{Tor}^A{}_1(k, k)$$

を得る。

Conjecture 2

(☆) の connecting hom は 0. すなわち

$$0 \longrightarrow H_n[K_*^{++}] \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_n(k,k) \longrightarrow H_n(A,k,k) \longrightarrow 0$$

(exact)

で $H_n[K_*^{++}]$ は、$\mathrm{Tor}^A_i(k,k)$ $0<i<n$ たちの multiplication 及び divided power で生成された subspace C_n に等しい。

Remark

$n=1,2,3$ については Conjecture 2 は正しい。

Theorem (André [2])

k の characteristic $=0$ の場合は Conjecture 2 は正しい。

Implication

Conjecture 2 ⇒ Conjecture 1

可換環論シンポジウムの後、西村先生から御指摘を受け、実は residue field の characteristic が positive の場合も既に解決していたので、そのことを報告します。([3])

k の characteristic $=p>0$ とする。

∘ $n \leq 2p-1$ について Conjecture 1 は正しい。

∘ $n=2p$ の場合は、次の2つの条件のうちどちらかが成り立てば

$$\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p}.$$

i) $\mathfrak{m}^p=0$.

ii) $\mathfrak{m}$ は $2p-1$ 個の元で生成される。

∘ 一般に

$$\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p} \leq \delta_{2p+1} + \delta_3$$

が成り立ち、例えば A が C.I. なら

$$\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p}$$

であるが、$\delta_{2p+1} < \varepsilon_{2p}$ の例がある。

Bibliography

[1] André, M : Méthode simpliciale en Algèbre Homologique et Algèbre Commutative. LN 32, Springer, 1967.

[2] André, M : Homologie des algèbres commutatives. Springer, 1974.

[3] André, M : La (2p+1)-ème déviation d'un anneau local. Extrait de L'Enseignement mathématique, T. XXIII, fasc. 3-4, 1977, 239-248.

[4] Gulliksen, T. H. Levin, G : Homology of local rings. Queen's papers in pure appl. math. no. 20, Queen's Univ., Kingston 1969.

[5] Tate, J : Homology of noetherian rings and local rings. Ill. J. 1, 1957, 246-261.

On Some Open Questions and Related Results in Ideal Theory

Ryûki Matsuda(Faculty of Science, Ibaraki University)

This is a report on some open questions and related results in multiplicative ideal theory.

1. Definitions.

Let R be a commutative ring. We denote the total quotient ring of R by $q(R)$. A non-zerodivisor of R is called a regular element of R. Let I be an ideal of R. We denote the set of regular elements of R contained in I by $\mathrm{Reg}(I)$. If $\mathrm{Reg}(I) \neq \emptyset$, I is called a regular ideal of R. If each regular ideal of R is a principal ideal of R, R is called an r-PIR ring. If each finitely generated regular ideal of R is a principal ideal, R is called a Bezout ring. Let $f \in R[X]$. The ideal of R generated by the coefficients of f is denoted by $c(f)$, and is called the content of f. If $c(f)$ is a regular ideal for each regular element f of $R[X]$, R is said to have property (C)([21]). If each regular ideal I of R is generated by $\mathrm{Reg}(I)$, R is called a Marot ring. The polynomial ring $R[X]$ is a Marot ring with property (C) for each ring R([5, (2.1)] and [11, Lemma 3, (1)]). We say that R has property (FU), if $\mathrm{Reg}(I) \subset \bigcup_1^n I_i$ implies $I \subset \bigcup_1^n I_i$ for each family of a finite number of regular ideals I, $I_1, I_2, \ldots, I_n$ of R. If R has property (FU), then R is a Marot ring. A multiplicative system of R consisting of regular elements is called a regular multiplicative system. A quotient ring of R by a regular multiplicative system of R is called a regular quotient ring of R. Set $S = \{f \in R[X];\ c(f) = R\}$ .Then S is a regular multiplicative system of $R[X]$([19, p. 17]). The quotient ring $R[X]_S$ is denoted by $R(X)$. Let I be an R-submodule of $q(R)$. If $aI \subset R$ for some regular element a of R, I is called a fractional ideal of R. Let $F(R)$ be the set of nonzero fractional ideals of R. If $I \mapsto I^*$ is a mapping of $F(R)$ into itself with the following properties, it is called a *-operation on R: (1) $(a)^* = (a)$ for each regular element a of $q(R)$, where (a) denotes aR; (2) $(aI)^* = aI^*$ for each regular element a of $q(R)$ and each $I \in F(R)$; (3) $I \subset I^*$ for each $I \in F(R)$; (4)

$I \subset J$ implies $I^* \subset J^*$ for each $I, J \in F(R)$; (5) $(I^*)^* = I^*$ for each $I \in F(R)$. Let I be a subset of $q(R)$. The set $\{x \in q(R);$ $xI \subset R\}$ is denoted by I^{-1}. If $II^{-1} = R$ for each finitely generated regular ideal I of R, R is called a Prüfer ring. A Bezout ring is a Prüfer ring. We set $(I^{-1})^{-1} = I^v$ for each $I \in F(R)$. If $I^v = I$, I is called a divisorial ideal of R. The mapping $I \longmapsto I^v$ of $F(R)$ into itself is a *-operation. Let * be a *-operation on R. We denote as follows: $\mathrm{div}^* I = I^*$ for each $I \in F(R)$, $D^*(R) = \{\mathrm{div}^* I;$ I is a regular fractional ideal of $R\}$, $D^*_f(R) = \{\mathrm{div}^* I;$ I is a finitely generated regular fractional ideal of $R\}$. Let I, J be regular fractional ideals of R. We set $\mathrm{div}^* I + \mathrm{div}^* J = \mathrm{div}^*(IJ)$. If $I^* \subset J^*$, we set $\mathrm{div}^* I \geq \mathrm{div}^* J$. $D^*(R)$ and $D^*_f(R)$ are partially ordered additive semigroup. We denote as follows: $C^*(R) = D^*(R)/\{\mathrm{div}^*(a);$ a is a regular element of $q(R)\}$, $C^*_f(R) = D^*_f(R)/\{\mathrm{div}^*(a);$ a is a regular element of $q(R)\}$ and $\mathrm{div}\, I = \mathrm{div}^v I$ for each $I \in F(R)$, $D(R) = D^v(R)$, $D_f(R) = D^v_f(R)$, $C(R) = C^v(R)$, $C_f(R) = C^v_f(R)$. If R is an r-PIR ring (resp. a Bezout ring), then $C^*(R)$ (resp. $C^*_f(R)$) $= 0$ for each *-operation on R. If $C_f(R) = 0$, R is called a pseudo-Bezout ring. A subring of $q(R)$ containing R is called an overring of R. Let P be a prime ideal of R. $\{x \in q(R);$ $ax \in R$ for some element $a \in R - P\}$ is an overring of R, and is denoted by $R_{[P]}$. $R_{[P]}$ is called large quotient ring of R with respect to P. Let Γ be a totally ordered additive group. A mapping v of $q(R)$ onto $\Gamma \cup \{\infty\}$ is called a valuation on $q(R)$, if $v(x + y) \geq \inf(v(x), v(y))$ and $v(xy) = v(x) + v(y)$ for each $x, y \in q(R)$([9]). The ring $\{x \in q(R);$ $v(x) \geq 0\}$ is called a valuation ring of $q(R)$ associated with v. An overring of R which is a valuation ring of $q(R)$ is called a valuation overring of R. Finally, if $R \subsetneqq q(R)$ and if $q(R)$ has a family $\{v_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ of valuations with the following properties, R is called a Krull ring([7] or [8]): (1) $v_\lambda(q(R)) = Z \cup \{\infty\}$ for each $\lambda \in \Lambda$; (2) Let V_λ be the valuation ring of $q(R)$ associated with v_λ for each $\lambda \in \Lambda$. Then $R = \bigcap_\lambda V_\lambda$; (3) Let a be a regular element of R. Then $v_\lambda(a) = 0$ for all but a finite number of $\lambda \in \Lambda$.

2. Marot rings.

We denote a Marot ring with property (C) by A throughout the section. Let * be a *-operation on A. If $(IJ)^* \subset (IK)^*$ implies $J^* \subset K^*$ for each $I, J, K \in F(A)$ with I finitely generated regular, $*$ is said to be arithmetisch brauchbar (abbreviated a. b.). If $(IJ)^* \subset (IK)^*$ implies $J^* \subset K^*$ for each finitely generated $J, K \in F(A)$ and each finitely generated regular $I \in F(A)$, $*$ is said to be endlich arithmetisch brauchbar (abbreviated e.a.b.). If A admits an e.a.b.$*$-operation, then A is an integrally closed ring. Let $K = q(A)$. Let A be an integrally closed ring. Then $A = \bigcap_\lambda V_\lambda$,where $\{ V_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ is the set of valuation overrings of A([5, (2. 4)]). We set $I^b = \bigcap_\lambda IV_\lambda$ for each ideal I of A. Thus we have a $*$-operation, which is called b-operation. b-operation is an a.b. $*$-operation. If v-operation is e.a.b., A is called a v-ring. If A is a v-ring, v-operation on A is a.b.([10, Lemma 4]). A v-ring is also called a regularly integrally closed ring. If A is a completely integrally closed ring, A is a regularly integrally closed ring. We set $U = \{ \text{regular } f \in A[X]; c(f)^{-1} = A \}$. U is a multiplicative system of $A[X]$([18, (15. 1)]). We have $S \subset U$. Let $*$ be an e.a.b. $*$-operation on A. We set $U^* = \{ \text{regular } f \in A[X]; c(f)^* = A \}$. U^* is a multiplicative system of $A[X]$ (cf. [11,Lemma 1]).We have $S \subset U^* \subset U$. Clearly $U^v = U$ for each v-ring A. If A is a Prüfer ring, then $U^* = S$(cf. [11, Theorem 5, (4)]).We set $A_* = \{ f/g; f \in A[X] - \{0\}, g$ is a regular element of $A[X]$ and $c(f)^* \subset c(g)^* \} \cup \{0\}$. If $*$ is e.a.b., then A_* is a subring of $q(A[X])$([11, Theorem 2, (1)]). $A[X]_{U^*} \subset A_*$. A_* is called the Kronecker function ring of A with respect to $*$.We have $A_b \subset A_*$ for each e.a.b.$*$-operation $*$ on A ([11, Theorem 5, (1)]). If A is a regularly integrally closed ring, then $A_* \subset A_v$ for each e.a.b. $*$-operation on A. Let $*$ be a $*$-operation. If $D_f^*(A)$ is a group, A is called a Prüfer $*$-multiplication ring. A Prüfer v-multiplication ring is also called a pseudo-Prüfer ring. A pseudo-Bezout ring is a pseudo-Prüfer ring. If A is a Prüfer ring, then A is a Prüfer $*$-multiplication ring for each $*$-operation on A. Let P be a regular prime ideal of A. Then there exists a valuation overring of A with center P on A. It follows that $U^b = S$ and a Prüfer b-multiplication ring is a Prüfer ring. Finally a pseudo-Prüfer ring is a regularly integrally closed ring([10, Lemma 4]).

3. Questions and results.

Arnold studied conditions for $D(X)$ to be a Prüfer ring for an integral domain D.

Theorem 1([1]). Let D be an integrally closed domain. The following conditions are equivalent: (1) D is a Prüfer ring; (2) $D(X) = D_b$; (3) $D(X)$ is a Prüfer ring; (4) D_b is a quotient ring of $D[X]$; (5) Each prime ideal of $D(X)$ is the contraction of a prime ideal of D_b; (6) Each prime ideal of $D(X)$ is the extension of a prime ideal of D.

Huckaba-Papick studied when $D[X]_U$ is a Prüfer ring for an integral domain D.

Theorem 2([6]). (1) Let D be an integrally closed domain. If each prime ideal of $D[X]_U$ is the extension of a prime ideal of D, $D[X]_U$ is a Bezout ring.

(2) If an integral domain D is either a pseudo-Bezout ring or an integrally closed coherent ring or a Krull ring, then $D[X]_U$ is a Bezout ring.

Q. 1([6]). Let D be an integral domain.

(1) Suppose that $D[X]_U$ is a Prüfer ring(resp. a Bezout ring). Is each prime ideal of $D[X]_U$ the extension of a prime ideal of D?

(2) If $D[X]_U$ is a Prüfer ring, is it a Bezout ring?

Theorem 3([15] and [14]). Let D be an integral domain.

(1) If $D[X]_U$ is a Prüfer ring(resp. a Bezout ring), then each prime ideal of $D[X]_U$ is the extension of a prime ideal of D.

(2) If $D[X]_U$ is a Prüfer ring, then it is a Bezout ring.

[6, Remark 3. 4, (a)] also asks as follows: If D_P is a valuation ring for each $P \in \mathcal{P}(D)$, is $D[X]_U$ a Prüfer ring? Arnold-Matsuda([3]) constructed a counterexample for the question, as was reported on the 6-th Symposium(cf. [17]).

Hinkle-Huckaba generalized a part of Theorem 1.

Theorem 4([5]). Let A be an integrally closed Marot ring with property (C). The following conditions are equivalent: (1) A is a Prüfer ring; (2) $A(X) = A_b$; (3) $A(X)$ is a Prüfer ring; (4) A_b is a regular quotient ring of $A[X]$.

Q. 2([5]). Are the ring theory versions of (5) and (6) of Theorem 1 equivalent to the four conditions of Theorem 4?

Theorem 5([13]). Let A be an integrally closed Marot ring with property (C). Then the four conditions of Theorem 4 are equivalent to each of the followings: (5) Each prime ideal of $A(X)$

is the contraction of a prime ideal of A_b; (5r) Each regular prime ideal of $A(X)$ is the contraction of a prime ideal of A_b; (6r) Each regular prime ideal of $A(X)$ is the extension of a prime ideal of A.

However even if A satisfies all the above conditions, A does not necessarily satisfy the following: (6) Each prime ideal of $A(X)$ is the extension of a prime ideal of A.

We are able to generalize Theorem 2.

Theorem 6([18, (15. 6) and (15. 7)]). Let A be a Marot ring with property (C).

(1) Let A be an integrally closed ring, and let W be a regular multiplicative system of $A[X]$. If each regular prime ideal of $A[X]_W$ is the extension of a prime ideal of A, $A[X]_W$ is a Bezout ring.

(2) If A is either a pseudo-Bezout ring or an integrally closed coherent ring or a Krull ring, then $A[X]_U$ is a Bezout ring.

Moreover if a Marot ring A with property (C) is a Krull ring, $A[X]_U$ is an r-PIR ring. Conversely if $A[X]_U$ is a Krull ring, A is a Krull ring([18, Theorem (15. 8), (2)]).

We are able to generalize and sharpen Theorem 4, Theorem 5 and [2, Theorem 3].

Theorem 7(cf. [11, Theorem 16]). Let A be a Marot ring with property (C). If $*$ is an e.a.b. $*$-operation, the following conditions are equivalent: (1) A is a Prüfer $*$-multiplication ring; (2) $A[X]_U{}^* = A_*$; (3) $A[X]_U{}^*$ is a Prüfer ring; (4) A_* is a regular quotient ring of $A[X]$; (5) Each prime ideal of $A[X]_U{}^*$ is the contraction of a prime ideal of A_*; (5r) Each regular prime ideal of $A[X]_U{}^*$ is the contraction of a prime ideal of A_*; (6r) Each regular prime ideal of $A[X]_U{}^*$ is the extension of a prime ideal of A; (7) Each valuation overring of A_* is of the form $A[X]_{[PA[X]]}$, where P is a prime ideal of A such that $A_{[P]}$ is a valuation ring of $q(A)$; (8) A_* is a flat $A[X]$-module.

Moreover there exists a Prüfer Marot ring A with property (C) which satisfy the following condition: Let $*$ be any e.a.b. $*$-operation on A. Then there exists a prime ideal of $A[X]_U{}^*$ which is not the extension of a prime ideal of A.

Proof. [11, Theorem 16] shows that the conditions (1), (3), (4), (7) and (8) are equivalent. (4)$\Leftrightarrow$(2), (5) $\Rightarrow$ (5r) and (2) $\Rightarrow$ (5) are trivial. (5r) $\Rightarrow$ (6r): Let P be a regular prime ideal of $A[X]_U{}^*$. We set $P \cap A[X] = Q$ and $Q \cap A = Q_0$. There exists a prime ideal P' of A_* such that $P' \cap A[X]_U{}^* = P$. We have $Q = Q_0A[X]$ by [11, Lemma 6, (1)]. It follows that $P = Q_0A[X]_U{}^*$. (6r) $\Rightarrow$ (3): In fact $A[X]_U{}^*$ is a Bezout ring by Theorem 6, (1). We have shown that the conditions (1), (2), (3), (4), (5), (5r), (6r), (7) and (8) are equivalent. Finally we denote the ring A' of the proof of [18, (1. 3)] by A. A is a Prüfer Marot ring with property (C). Moreover there exists a prime ideal P of $A(X)$ which is not the extension of a prime ideal of A. The proof of Theorem 7 is complete.

Among generalizations of ideal theories for an integral domain to a ring with zerodivisors there is a Krull ring theory of Kennedy.

Q. 3([7] and [8]).

(1) Let R be a Krull ring(with zerodivisors) such that $C(R) = 0$. Is R a unique factorization ring?

(2) Suppose $R \subsetneqq q(R)$. If R is a completely integrally closed ring and if R satisfies the maximal condition on regular divisorial ideals, is R a Krull ring?

Here 'a unique factorization ring' is of the definition by Fletcher([4]).

Theorem 8([12]).

(1) There exists a Marot Krull ring R with $C(R) = 0$ which is not a unique factorization ring.

(2) Suppose $R \subsetneqq q(R)$. If R is a completely integrally closed ring and if R satisfies the maximal condition on regular divisorial ideals, then R is a Krull ring.

Portelli-Spangher, independently of Kennedy and the outher ([18, Section 7]), generalized the Krull ring theory for an integral domain to a commutative ring.

Q. 3'([20]). In the above Q. 3, (2), determine the valuations on $q(R)$ concretely under which R is a Krull ring.

The proof of Theorem 8, (2) answers the question Q. 3'.

We are able to generalize the ideal theories for an integral domain by Brewer, Gilmer, Griffin, Heinzer, Mott, Ohm, Pirtle,..... to a Marot ring([18]). Finally,

Q. 4([20]). Does a Marot ring exist which does not have property (FU)?

The answer to the question is 'Yes'([16]).

References

[1] J. Arnold, On the ideal theory of the Kronecker function ring and the domain D(X), Canad. J. 21(1969), 558-563.

[2] J. Arnold and J. Brewer, Kronecker function rings and flat D[X]-modules, Proc. Amer. Math. Soc. 27(1971), 483-485.

[3] J. Arnold and R. Matsuda, An almost Krull domain with divisorial height one primes, Canad. Math. Bull. 28 (1985), to appear.

[4] C. Fletcher, Unique factorization rings, Proc. Cam. Phil. Soc. 65(1969), 579-583.

[5] G. Hinkle and Huckaba, The generalized Kronecker function ring and the ring R(X), J. Reine. Angew. Math. 292(1978), 25-36.

[6] J. Huckaba and I. Papick, A localization of R[X], Canad. J. Math. 33(1981), 103-115.

[7] R. Kennedy, A generalization of Krull domains to rings with zero divisors, Thesis, Univ. Missouri-Kansas(1973).

[8] R. Kennedy, Krull rings, Pacific J. Math. 89(1980), 131-136.

[9] M. Manis, Valuations on a commutative ring, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 193-198.

[10] R. Matsuda, Notes on Prüfer v-multiplication ring, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. 12(1980), 9-15.

[11] R. Matsuda, Kronecker function rings, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. 13(1981), 13-24.

[12] R. Matsuda, On Kennedy's problems, Comment. Math., Univ. Sancti Pauli 31(1982),143-145.

[13] R. Matsuda, On Hinkle- Huckaba question, Math. Japon. 28(1983), 535-539.

[14] R. Matsuda, On a Huckaba-Papick question, Sûgaku 35(1983), 263-264.

[15] R. Matsuda, On a question posed by Huckaba-Papick, Proc. Japan Acad. 59(1983), 21-23.

[16] R. Matsuda, On Marot rings, Proc. Japan Acad. 60(1984), 134-137.

[17] R. Matsuda, Some properties of semigroup rings, Proc. 6-th sympo. on comm. ring theory, 1984, 171-176.

[18] R. Matsuda, Generalizations of multiplicative ideal theory to commutative rings with zerodivisors, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. 17(1985), 49-101.

[19] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York(1962).

[20] D. Portelli and W. Spangher, Krull rings with zero divisors, Communi. Alg. 11(1983), 1817-1851.

[21] Y. Quentel, Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau, Bull. Soc. Math. France 99(1971), 265-272.

Iitaka Surfaces

張 德祺・大阪大学(理)M2

Introduction. Let k be an algebraically closed field of characteristic zero. We consider a pair (V, D) which satisfies the following conditions:

(i). V is a nonsingular, projective and rational surface defined over k and D is a reduced effective divisor on V with simple normal crossings;

(ii). (V, D) is almost minimal;

(iii). $\bar{\kappa}(V-D)=0$ and $\bar{p}_g(V-D) := \dim H^0(V, D+K_V)=1$.

We shall call such a pair (V, D) an Iitaka surface.

A surface of this kind has been studied by Iitaka [2]. Thence comes the naming of Iitaka surface. In Th.3 [ibid.], he gave an explicity way of writing down possible configurations of the divisor D. However, he did not determine which of these configurations are realizable. To begin with, he did not employ our almost minimal model to classify such surfaces.

Since an almost minimal model in the context of non-complete surfaces is thought as a substitute of a minimal surface in the context of complete surfaces, it would be natural to include the almost minimality in the definition of Iitaka surfaces. Thanks to this definition, we can determine (and classify) all Iitaka surfaces. Our method depends heavily on the theory of peeling in [MT 1] the Mori theory [Mori 1] and observations of suitable $\mathbb{P}^1$-fibrations and elliptic fibrations.

Our Main Theorem consists of the following two results:

Reduction Theorem. Let (V, D) be an Iitaka surface. Then the following assertions hold true.

No.

(1). There is a unique decomposition $D = A + N$ with $A \geq 0$ and $N \geq 0$ such that $A + K_V \sim 0$, N is disjoint from A and the connected components of N are (-2) rods or (-2) forks (cf. the following terminology). If $A = 0$, V is a minimal K3-surface.

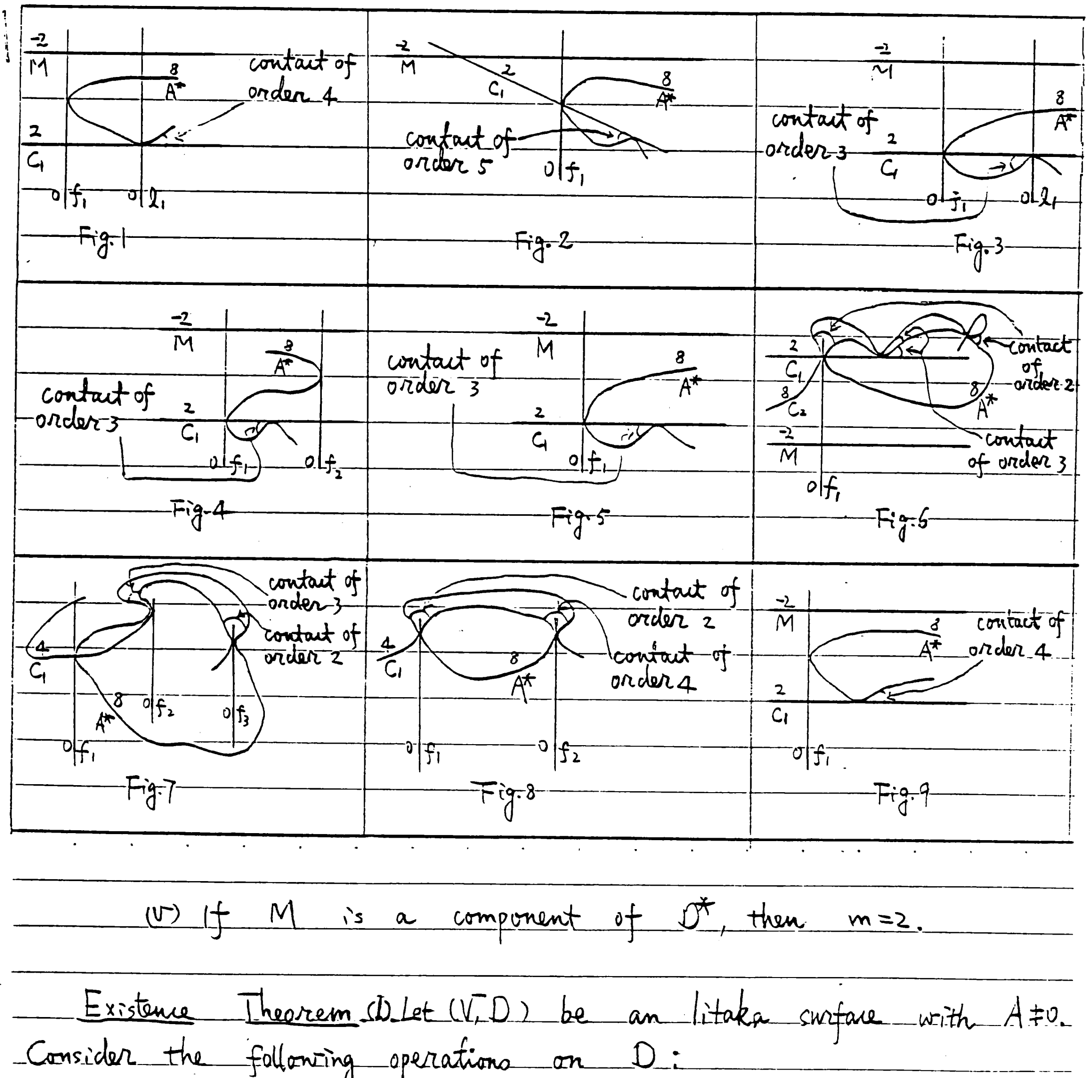
(2). Suppose $A > 0$. Then there exists a birational morphism from V to a minimal rational surface V^*, $u : V \longrightarrow V^*$ satisfying the following conditions:

(i). V is either $\mathbb{P}^2$ or a ruled surface F_m $(m = 0, 1, 2)$ with $\mathbb{P}^1$-fibration $\pi : F_m \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Moreover, $A^* := u_* A$ is a divisor with (at worst) normal crossing singularities and $u_* A + K_{V^*} \sim 0$.

(ii). Suppose $V^* = \mathbb{P}^2$. Then $u_* D = u_* A$.

(iii). Suppose $V^* = F_m$. Let M be a minimal section of V^* and let f_i $(1 \leq i \leq n$; $n \leq 4)$ be all fiber of π such that $f_i \cap A^*$ consists of a smooth point of A^*. There exist a fiber l_1 of π, a nonsingular rational curve C_1 with $(C_1^2) = 2$ or 4 and a nodal rational curve C_2 with $C_2 \in |-K_{V^*}|$, such that $l_1 \neq f_i$ $(\forall i)$, l_1, C_1 and C_2 are not components of A^* and that $D^* := u_* D$ is a part of $A^* + f_1 + \cdots + f_n + M + l_1 + C_1 + C_2$. The curves l_1, C_1 and C_2 are specified in the next condition.

(iv). If l_1, C_1 or C_2 appears in D^*, then A^* is either an elliptic curve or a nodal curve and D^* has one of the following nine configurations, where $m \leq 1$ in Fig.7 and Fig.8 below and $m = 2$ otherwise and, A^* is an elliptic curve in Fig.6, Fig.7 and Fig.8 :



(v) If M is a component of D^*, then $m=2$.

Existence Theorem (I). Let (V, D) be an Iitaka surface with $A \neq 0$. Consider the following operations on D:

(i). Let P be a smooth point of A and let $\sigma: V' \to V$ be a sequence of blowing-ups with center at P and its n $(n \geq 0)$ infintely near points lying consecutively on the proper transformation of A. Let $R = \sigma^{-1}(P) - (\text{the last } (-1) \text{ curve})$ which is a (-2) rod with n components. Let $A' = \sigma' A$ be the proper transformation of A, let $N' = \sigma^* N + R$ and let $D' = A' + N'$.

(ii). Let P be a double point of A and let $\sigma: V' \longrightarrow V$ be the blowing-up with center at P. Let $A' = \sigma^{-1}(A)$, $N' = \sigma^* N$ and $D' = A' + N'$.

(iii). Suppose that there exists a (-1) curve E on V such that the connected component of $E + N$ has either a rod or a fork as its dual graph. Let $P := A \cap E$ and let $\sigma: V' \longrightarrow V$ be the blowing-up of P. Let $A' = \sigma'(A)$, $N' = \sigma'(E) + \sigma^* N$ and $D' = A' + N'$.

Let $(\tilde{V}, \tilde{D})$ be a pair obtained from (V, D) by performing finitely many operations of type (i), (ii) and (iii) on D. Then $(\tilde{V}, \tilde{D})$ is an Iitaka surface.

(2). Let (V^*, D^*) be a pair as in Reduction Theorem. A minimal resolution of (V^*, D^*) is, by definition, the shortest sequence of blowing-ups $\tau: V_0 \longrightarrow V^*$ such that $\tau^{-1}(D^*)$ is a divisor with simple normal crossings. Let D_0 be a reduced effective divisor obtained from $\tau^{-1}(D^*)$ removing all (-1) curves possibly except for the (-1) curve arising from the node of A^*. Then the pair (V_0, D_0) is an Iitaka surface.

(3). Every Iitaka surface (V, D) is obtained from an Iitaka surface (V_0, D_0) as considered in the assertion (2) above by repeating the operations considered in the assertion (1) above.

This paper consists five sections. In §1, we shall consider under which conditions an Iitaka surface becomes a logarithmic K3-surface. At the begining of §2, we apply the theory of peeling and the Mori theory. By the first theory, we pass from an Iitaka surface (V, D) to a pair $(\bar{V}, \bar{D})$ by contracting $Bk(D)$, where $\bar{V}$ is a projective normal surface with rational double points. We apply the Mori theory and show that we have only to consider three cases separately. Then we consider an Iitaka surface $(\bar{V}, D)$ with $\rho(\bar{V}) \geq 2$; this will cover the first two cases. We treat then the third case $\rho(\bar{V}) = 1$ in §§ 3 and 4. Finally in §5, we consider complementary cases to complete the proof of Main Theorem.

Terminology. For the definitions of $\Omega_{\bar{V}}^1(\log D)$ and the logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa}(\bar{V}-D)$, we refer to [Iitaka 1; Chap. 10 & Chap. 11]. For the definition of an almost minimal surface, we refer to [MT 1; Chap. 1, §1.11], as well as the relevant definitions like the bark of D, rods, twigs, forks, admissible twigs, rational rods, etc. By a $(-i)$ curve we shall mean a nonsingular rational curve C with $(C^2) = -i$ $(i \geq 1)$. By a (-2) rod (or (-2) fork, resp.) we mean a rod (or a fork, resp.) whose irreducible components are all (-2) curves. In other words, (-2) rods and (-2) forks have the weighted dual graphs of the minimal resolution of rational double points. A reduced effective divisor with simple normal crossings is abbreviated as an SNC divisor.

Notations. $\kappa(\bar{V})$: the Kodaira dimension of $\bar{V}$.

$\bar{\kappa}(X)$: the logarithmic Kodaira dimension of a nonsingular algebraic surface X defined over k.

$K_{\bar{V}}$: the canonical divisor of $\bar{V}$.

$\bar{p}_g(\bar{V}-D) := \dim H^0(\bar{V}, D+K_{\bar{V}})$.

$\bar{q}(\bar{V}-D) := \dim H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1(\log D))$.

$\rho(\bar{V})$: the Picard number of $\bar{V}$.

F_m: A minimally ruled rational surface on which there is a minimal section M with $(M^2) = -m$.

No. ______

1. logarithmic K3-surfaces.

We shall begin with

Definition 1.1. Let (V, D) be a pair of a nonsingular projective surface V defined over k and a reduced effective divisor D with SNC (= simple normal crossings) on V. We call this pair a log. K3-surface if the following conditions are met:

(i) $\bar{\kappa}(V-D)=0$;

(ii) the log geometric genus $\bar{p}_g(V-D)=1$;

(iii) the log. irregularity $\bar{q}(V-D):=\dim H^0(V, \Omega^1_V(\log D))=0$.

We hope to classify log. K3-surfaces (V, D) by looking into their almost minimal models $(\tilde{V}, \tilde{D})$. But $(\tilde{V}, \tilde{D})$ may not remain being a log. K3-surfaces. Indeed, $(\tilde{V}, \tilde{D})$ is an IITAKA SURFACE (cf. MT[1], Lemma 1.10), while the condition (iii) above may become false for $(\tilde{V}, \tilde{D})$. However, we have the following

Lemma 1.2. Let (V, D) be a pair of a nonsingular projective surface V and a SNC divisor D on V. Let $(\tilde{V}, \tilde{D})$ be an almost minimal model of (V, D). Then we have:

(1) if $\kappa(V)=0$ and (V, D) is a log. K3-surface, $(\tilde{V}, \tilde{D})$ is also a log. K3-surface;

(2) conversely, if $(\tilde{V}, \tilde{D})$ is a log. K3-surfaces, then (V, D) is a log. K3-surface and either $\kappa(V)=-\infty$ or $\kappa(V)=0$.

We omit the proof.

The following result due to Kawamata [1] is crucial.

Lemma 1.3. Let (V, D) be a pair of a nonsingular projective surface V and an SNC divisor D on V. Suppose that $\bar{\kappa}(V-D)=0$ and that (V, D) is almost minimal. Then $n(D^{*}+K_{V}) \sim 0$ for some $n \in N$.

Proof. See M[1; Chap. II, Th. 2.2]

By using Lemma 1.3 and the results in MT[1], we can verify the following lemma.

Lemma 1.4. Suppose that (V, D) is a pair of a nonsingular projective surface V and an SNC divisor D on V. Suppose furthermore that $\kappa(V)=\bar{\kappa}(V-D)=0$ and that (V, D) is almost minimal. Then the following are equivalent:

(1) (V, D) is a log. K3-surface;

(2) V is a minimal K3-surface and D consists of (-2) rods and (-2) forks, where a (-2) rod (or (-2) fork, resp.) is a rod (or fork, resp.) whose irreducible components are (-2) curves, i.e., nonsingular rational curves with self-intersection (-2).

(3) $q(V)=0$, $p_g(V)=1$ and D consists of (-2) rods and (-2) forks.

In the subsequent paragraphs of this section, we always assume that a pair (V, D) is an Iitaka surface. Then, since $h^{0}(V, [D^{*}+K_{V}])=\bar{p}_g(V-D)=1$, just one of the following two cases takes place.

(1) There exists a curve $A \leq [D^*]$ with $p_a(A) \geq 1$.

(2) Every curve $C \leq [D^*]$ is rational and the dual graph of $[D^*]$ contains a rational loop A.

Moreover, we can show

Lemma 1.5. Let (V, D) be an Iitaka surface. Then A is a connected component of D with $A+K_V \sim 0$ and $D^* = [D^*] = A$. Hence every connected component of D other than A is a (-2) rod or a (-2) fork. Furthermore, in case (1), we have $p_a(A)=1$, i.e., A is an elliptic curve.

Proof. Since $|A+K_V| \neq \phi$ both in the cases (1) and (2), we get $D^* = [D^*] = A$ and $A+K_V \sim 0$ by virtue of Lemma 1.3. Hence A is a connected component of D because $D^* = A$ implies that D contains no rational admissible twigs sprouting from A. In the case (1), we have $p_a(A) = 1 + \frac{1}{2}(A+K_V, A) = 1$. Q.E.D.

We know that the almost minimal model of a log K3-surface is an Iitaka surface; see the remark before Lemma 1.2. Conversely, we can verify the following Lemma.

Lemma 1.6. Let (V, D) be an Iitaka surface. Then we have:

(1) (V, D) is a log. K3-surface provided that A is an elliptic curve.

(2) If A is a rational loop, there exists a birational morphism of pairs $f: (V^*, D^*) \longrightarrow (V, D)$ such that (V^*, D^*) is a log K3-surface, (V, D) is an almost minimal model of (V^*, D^*) and f is the the associated morphism.

We end this section with the following two Lemmas.

Lemma 1.7. Let (V, D) be an Iitaka surface. If there exists a (-1) curve E on V, we let $\sigma_1: V \longrightarrow V_1$ be the contraction of E and let $A_1 = \sigma_{1*}A$. Then $A_1 + K_{V_1} \sim 0$ and A_1 is an NC (= normal crossings) divisor. Moreover, A_1 is not a SNC divisor iff A is a loop consisting of two irreducible components, one of which is E.

Proof. Note that $(A, E) = -(K_V, E) = 1$, for $A + K_V \sim 0$. Lemma 1.7 is obvious. Q.E.D.

Lemma 1.8. Suppose that (V, D) is an Iitaka surfaces. Then every nonsingular rational curve C on V has self-intersection more than -3, unless C is a component of A.

Proof. Since $A + K_V \sim 0$, $0 \leq (A, C) = (-K_V, C) = 2 - 2p_a(C) + (C^2) = 2 + (C^2)$, i.e., $(C^2) \geq -2$ for any nonsingular rational curve C with $C \not\subset \operatorname{Supp} A$. Q.E.D.

§2. Iitaka surfaces with $\rho(\bar{V}) \geq 2$.

We fix an Iitaka surface (V, D) in the present section. Let $f : V \longrightarrow \bar{V}$ be the contraction of BkD. Then $\bar{V}$ is a projective normal surface with only rational double points as singularities and there exists an $N \in \mathbb{N}$ such that $N\bar{F}$ is a Cartier divisor for every $\bar{F} \in \operatorname{Div}(\bar{V})$ (cf. MT[1], Lemma 2.4). Hence we have an intersection theory on $\bar{V}$. Furthermore, we have $K_V = f^* K_{\bar{V}}$ (cf. [Artin 1; Th. 2.7]). We shall classify all Iitaka surfaces with $\rho(\bar{V}) \geq 2$, where $\rho(\bar{V})$ is the Picard number of $\bar{V}$.

Definition 2.1. Let $N(\bar{V}) := \{1\text{-cycles}\}_{\mathbb{R}} / \{\text{numerical equivalence}\}$, and let $\overline{NE}(\bar{V}) :=$ the closure of the cone of effective 1-cycles $\{\sum_{\text{finite}} \alpha_i [\bar{C}_i];\ \bar{C}_i :$ curve on $\bar{V}$, $[\bar{C}_i] \in N(\bar{V})$ and $\alpha_i \in \mathbb{R}_+\}$ in $N(\bar{V})$, which is endowed with a usual Euclidean metric.

An extremal rational curve $\bar{l}$ is a rational curve on $\bar{V}$ satisfying:

(i) $R := \mathbb{R}_+[\bar{l}]$ is an extremal ray, i.e., $(K_{\bar{V}}, \bar{l}) < 0$ and $Z_1, Z_2 \in R$ whenever $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(\bar{V})$ with $Z_1 + Z_2 \in R$.

iii) $-3 \le (K_{\bar V}, \bar l) < 0$.

We take an ample Cartier divisor $\bar L$ on $\bar V$. We obtain the following lemma by using Th.1.4 in Mori [1].

Lemma 2.2. Suppose that $K_{\bar V}$ is not nef. Then, for an arbitrary $\varepsilon > 0$, there exist extremal rational curves $\bar l_1, \cdots, \bar l_s$ such that $\overline{NE}(\bar V) = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_+[\bar l_i] + \overline{NE}_\varepsilon(\bar V)$, where $\overline{NE}_\varepsilon(\bar V) := \{ \bar Z \in \overline{NE}(\bar V) \mid (\bar Z, K_{\bar V} + \varepsilon \bar L) \ge 0 \}$.

With the notations of §1, we have $A + K_V \sim 0$. Hence $\bar A + K_{\bar V} \sim 0$, where $\bar A := f_* A$, and $K_{\bar V}$ is not nef. So, there is an extremal rational curve $\bar l$ on $\bar V$ by virtue of Lemma 2.2.

As in Mori [1; Lemma 3.7], there exists a nef divisor $\bar H$ on $\bar V$ such that $\bar H^{\perp} \cap \overline{NE}(\bar V) = \mathbb{R}_+[\bar l]$, where $\bar H^{\perp} := \{ \bar Z \in \overline{NE}(\bar V) \mid (\bar Z, \bar H) = 0 \}$. Concerning $\bar H$, we consider the following three cases:

Case (1). $\bar H \equiv 0$. Then $\rho(\bar V) = 1$ and $-K_{\bar V}$ is ample.

Case (2). $\bar H \not\equiv 0$ and $(\bar H^2) = 0$. Then $\bar H \in \mathbb{R}_+[\bar l]$ and $(\bar l^2) = 0$.

Case (3). $(\bar H^2) > 0$.

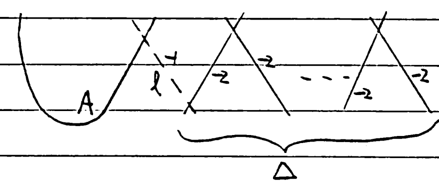
Set $l = f'\bar l$ and $H = f^* \bar H$. First of all, we consider the case (3) above. Namely we have

Lemma 2.3. Let (V, D) be an Iitaka surface. In the case (3) where $(\bar H^2) > 0$, $l + \mathrm{Bk}D$ is negative-definite and l is a (-1) curve on V.

The following remark is useful, though obvious.

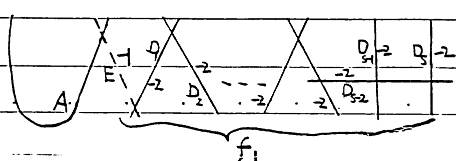
Remark 2.4. In the case (3) where $(\bar H^2) > 0$, it is easy to see that $(l, \sum_{i=1}^{r} D_i) \le 1$ and that if $(D_i, l) = 1$ for some $1 \le i \le r$, then the connected component Δ of $\mathrm{Bk}D$ containing D_i is a rod with D_i as a tip, where $\mathrm{Supp}\,\mathrm{Bk}D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$. This is a straightforward consequence of Lemma 2.3. Let $\sigma : V \longrightarrow V'$

be the contraction of $l+\Delta$, where we set $\Delta=0$ when $(l,\sum_{i=1}^{n}D_i)=0$. Let $A'=\sigma_*A$ and $D'=\sigma_*D$. Then, unless A consists of two irreducible components, one of which is l (in this case $(l,\sum_{i=1}^{n}D_i)=0$ because $A\cap \mathrm{Supp\,Bk}D=\phi$), (V',D') is an Iitaka surface. In the above exceptional case, A' is a rational curve with one node.



Next we consider the case (2). We can verify the following

Lemma 2.5. Let (V,D) be an Iitaka surface. Suppose that $V\not\cong F_m$ and that we are in the case (2) where $H\not\equiv 0$ and $(H^2)=0$. Then there exists a $\mathbb{P}^1$-fibration $\Phi: V\longrightarrow \mathbb{P}^1$ such that $\mathrm{Bk}D$ is contained in the fibers of Φ. Moreover, a singular fiber f_1 of Φ has a configuration of the following type:



where $f_1=2(E+D_1+\cdots+D_{s-2})+D_{s-1}+D_s$ $(s\geq 2)$ and $\bigcup_{i=1}^{s}D_i\subseteq \mathrm{Supp\,Bk}D$. Let μ be the contraction of all (-1) curves in fibers of Φ. Then $\mu(V)=F_m$ for some $m\leq 2$, $\mu_*A+K_{F_m}\sim 0$ and $\mu_*\mathrm{Bk}D$ consists of n fibers $f_1,\cdots,f_n$ of $\pi:=\Phi\circ\mu^{-1}: F_m\longrightarrow \mathbb{P}^1$, where $n:={}^{*}\{\text{Singular fibers of }\Phi\}$.

Case. A is an elliptic curve. Then f_i $(i=1,\cdots,n)$ passes through a ramification point of $\pi|_{\mu_*A}$. Hence $n\leq 4$ and $k:={}^{*}\{\text{connected components of }\mathrm{Bk}D\}\leq 2n\leq 8$.

Case. A is a rational loop. Then $m\leq 1$, A consists of a non-singular fiber l_1 and a 2-section F, and f_i $(i=1,\cdots,n)$ passes through a ramification point of $\pi|_{\mu_*F}$. Hence $n\leq 2$ and $k\leq 2n\leq 4$.

No.

§3. Iitaka surfaces with $\rho(\overline{V})=1$, the part (I).

In this section, we always assume that (V, D) is an Iitaka surface with $\rho(\overline{V})=1$. This case corresponds to the case where $\overline{H}\equiv 0$. We begin with

Lemma 3.1. Let (V, D) be an Iitaka surface with $\rho(\overline{V})=1$. Then we have:

(i) $[A], [D_1], \cdots, [D_r]$ form a basis of $N(\overline{V})$, where $\operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$.

(ii) A is nef and, for any irreducible curve C on $\overline{V}$, $(A, C)=0$ iff $C \subseteq \operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D$. In particular, every (-2) curve is contained in $\operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D$.

(iii) $(A^2) \geq 1$. Hence $r = 9-(A^2) \leq 8$. Furthermore, $(A^2) \geq 6$ if A is a rational loop.

Proof. (i) is clear because $\rho(\overline{V})=1$. The assertion (ii) and the first part of the assertion (iii) are easy to verify. Note that $A+K_V \sim 0$, $\rho(V)+(K_V^2)=10$ and $\rho(V)=r+1$. Hence we obtain $r+(A^2)=9$. Suppose that $A=A_1+\cdots+A_t$ is a rational loop, where A_i is irreducible. We know that A is an SNC divisor, whence $t \geq 2$. Since $A \cap \operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D = \phi$ and since every irreducible curve on $\overline{V}$ is ample, we know that $(A_i^2) \geq 1$ for every i. Hence $(A^2) = \sum_{i=1}^{t}(A_i^2) + 2\sum_{i<j}(A_i, A_j) \geq 2+2\times 2 = 6$. Q.E.D.

Lemma 3.2 Under the same hypothesis as in Lemma 3.1, the following assertions hold:

Every (-1) curve E on V meets $\mathrm{Bk} D$. It is impossible that E meets $\mathrm{Bk} D$ in a single point on a tip D_1 of a rod R, which is a connected component of $\mathrm{Bk} D$.

Proof. Suppose that $E \cap \operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D = \phi$. Let $\mu_1 : V \longrightarrow V_1$ be the contraction of E. Write $\operatorname{Supp} \mathrm{Bk} D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$. By virtue of Lemma 3.1, we have $\rho(\overline{V})=r+1$, whence $\rho(\overline{V}_1)=r$. So, there exists $(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_r) \in \mathbb{R}^{r+1}-(0,\dots,0)$ such that $\alpha u_{1*}A+\sum_{i=1}^{r}\beta_i u_{1*}D_i \equiv 0$. Since $E \cap \mathrm{Supp}\,\mathrm{Bk}D = \phi$, we have $u_{1*}A \cap u_{1*}\mathrm{Supp}\,\mathrm{Bk}D=\phi$ and hence $0=(u_{1*}A, \alpha u_{1*}A+\sum_{i=1}^{r}\beta_i u_{1*}D_i) = \alpha(u_{1*}A^2)=\alpha((A^2)+1)$. Then we obtain $\alpha=0$ because $(A^2)+1 \geq 2$ by virtue of Lemma 3.1. Since $\sum_{i=1}^{r} u_{1*}D_i$ is obviously negative-definite, we must have $\beta_1=\cdots=\beta_r=0$, which is a contradiction. Hence E meets $\mathrm{Bk}D$.

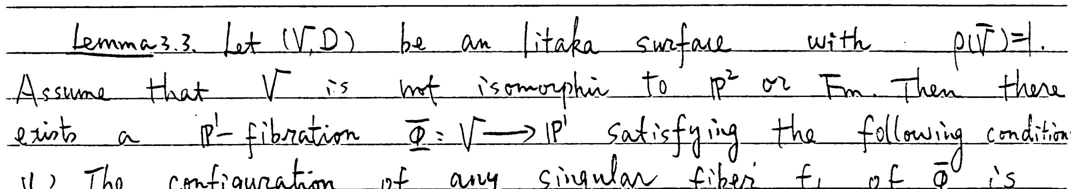
Suppose that $(E, D_1+\cdots+D_r)=(E,R)=(E,D_1)=1$, where D_1 is a tip of a rod R which is a connected component of $\mathrm{Bk}D$. We may write $R=D_1+\cdots+D_s$. Let $\sigma: \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ be the contraction of $E+R$. Since $\sigma_*\mathrm{Bk}D$ is contractible to points, we have $\rho(\overline{W}) \geq \#\{$irreducible components of $\sigma_*\mathrm{Bk}D\}+1=r-s+1$, while $\rho(\overline{W})=\rho(\overline{V})-(s+1)=(r+1)-(s+1)=r-s$. This is a contradiction.

Q.E.D.

The following result guarantees the existence of a suitable $\mathbb{P}^1$-fibration in the present case.

Lemma 3.3. Let $(\overline{V},D)$ be an Iitaka surface with $\rho(\overline{V})=1$. Assume that $\overline{V}$ is not isomorphic to $\mathbb{P}^2$ or F_m. Then there exists a $\mathbb{P}^1$-fibration $\overline{\Phi}: \overline{V} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ satisfying the following conditions:

(1) The configuration of any singular fiber f_1 of $\overline{\Phi}$ is one of the following:



$f_1=E_1+E_2$, $\quad f_1=2(E+D_1+\cdots+D_{s-2})+D_{s-1}+D_s$, $\quad f_1=E_1+E_2+D_1+\cdots+D_s$

where $\overline{\bigcup_{i=1}^{s} D_i} \subseteq \mathrm{Supp}\,\mathrm{Bk}D$;

(2) Let u be the contraction of all exceptional curves of the first kind in the fibers of $\bar{\Phi}$. Then $u(\bar{V})$ is a minimally ruled rational surface F_m with $m \leq 2$, and we have $u_*A + K_{F_m} \sim 0$ and

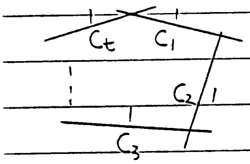
$\#\{$irreducible components of $A\} = \#\{$irreducible components of $u_*A\} \leq 4$.

Lemma 3.4. Let (V, D) be an Iitaka surface with $\rho(\bar{V}) = 1$. Suppose that $\bar{V}$ is not isomorphic to $\mathbb{P}^2$ or F_m and that it satisfies the condition:

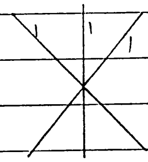
(*) For any irreducible component D_1 of $\mathrm{Bk}D$, there is no pair of an extremal rational curve $\bar{\ell}$ and a nef divisor $\bar{H}$ on $\bar{V}_1$ such that $\bar{H}^{\perp} \cap \overline{NE}(\bar{V}_1) = \mathbb{R}_+[\bar{\ell}]$, $\bar{H} \not\equiv 0$ and $(\bar{H}^2) = 0$, where $g : \bar{V} \longrightarrow \bar{V}_1$ is the contraction of $\mathrm{Bk}(D - D_1)$.

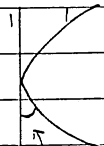
Then $(A^2) = 1, 2$ or 3 and hence A is an elliptic curve. There exists a birational morphism $\sigma : V' \longrightarrow V$ obtained by blowing up (A^2) points on A such that $\Phi_{|\sigma^* A|}$ gives us an elliptic fibration from V' to $\mathbb{P}^1$ such that each of singular fibers is not a multiple fiber and has one of the following configurations.

Case $(A^2) = 1$.

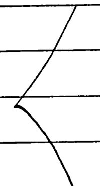


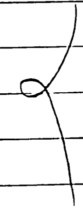
$2 \leq t \leq 9$, $t \neq 4$

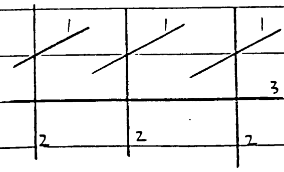




order of contact 2

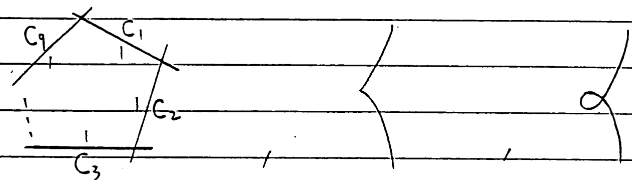






where each nonsingular component is a (-2) curve and the attached number indicates the multiplicity of the corresponding component in the fiber.

Case $(A^2) = 2$ or 3.



Proof. Let (V, D) be an Iitaka surface satisfying the conditions stated in Lemma 3.4. We prove Lemma 3.4 in three steps.

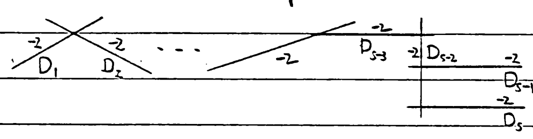
Step 1. We shall verify the following:

Claim 1. Supp Bk D contains no forks of type D_s, $(2,3,4)$ or $(2,3,5)$.

Proof. Suppose, on the contrary, that there is a connected component F of Bk D, which is a fork.

Case (i) F is a fork of type D_s.

Let D_1 be a tip of F as shown below:



where $F = D_1 + \cdots + D_s$. Let $g : V \longrightarrow \overline{V}_1$ be the contraction of $Bk(D-D_1)$. Since $K_{\overline{V}_1} \sim -f_{1*}A$, $K_{\overline{V}_1}$ is not nef. Hence, by applying the Mori theory, we obtain an extremal rational curve $\bar{l}$ and a nef divisor $\overline{H}$ on $\overline{V}_1$ with $\overline{H}^{\perp} \cap \overline{NE}(\overline{V}_1) = \mathbb{R}_+[\bar{l}]$ and $(\overline{H}^2) > 0$, because of the assumption $\rho(\overline{V}_1) = 1$ and the condition $(*)$. Let $l = g'(\bar{l})$. Then l is a (-1) curve which either does not meet $Bk(D-D_1)$ or meets $Bk(D-D_1)$ in a single point on a tip D_i of a connected component of $Bk(D-D_1)$, which is a rod (cf. Remark 2.4). We consider these two cases separately.

Case (i−A). l meets $Bk(D-D_1)$.

Case (i−A−a). $l \cap D_1 = \phi$.

By virtue of Remark 2.4 and lemma 3.2, l must meet $F-D_1$, and $F-D_1$ is a rod, i.e., F is a fork of type D_4. We see easily that $D_i = D_3$ or D_4, say $D_i = D_3$. Then $|2(l+D_3+D_2)+D_1+D_4|$ gives us a $\mathbb{P}^1$-fibration from V to $\mathbb{P}^1$ Note that BkD is contained in the fibers of $\Phi_{|2(l+D_3+D_2)+D_1+D_4|}$. So $\rho(V) \geq 2$, which is a contradiction.

Case (i−A−b). $l \cap D_1 = \phi$. We consider first the following:

Case. D_i is a component of F. We shall verify the next

Claim. $(l, D_1) = (A^2) = 1$ and $A \sim l + D_1 + \cdots + D_i$, where $D_1 + \cdots + D_i \leq F$.

Proof. After a suitable change of indices $\{1, \cdots, s\}$, we may assume that $D_1 + D_2 + \cdots + D_{i-1} + D_i \leq F$ is a rod containing D_1 and D_i. Let $x := (A^2) \geq 1$ and $L_n := xl - A + n(D_1 + \cdots + D_i)$. Since $(L_n, A) = 0$, the Hodge index theorem implies:

$$0 \geq (L_n^2) \geq -x^2 + x - 2in^2 + 2(-x + 2nx + n^2(i-1)).$$

Note that the second inequality is an equality iff $(l, D_1) = 1$, because we know that $(l, D_i) = 1$. So $x^2 - (4n-1)x + 2n^2 \geq 0$ and, $x^2 - (4n-1)x + 2n^2 = 0$ iff $L_n \equiv 0$ and $(l, D_1) = 1$. The last condition is equivalent to $x = n = 1$. Indeed, if $L_n \equiv 0$ and $(l, D_1) = 1$ hold, then $(L_n, l) = (L_n, D_1) = 0$. So we obtain $-x - 1 + 2n = x - 2n + n = 0$, i.e., $x = n = 1$. Conversely, if $x = n = 1$ then $x^2 - (4n-1)x + 2n^2 = 0$, whence $L_n \equiv 0$ and $(l, D_1) = 1$. We show that $x = 1$ always. In fact, if we set $n = 2$, we must have $x^2 - 7x + 8 > 0$, whence $x \neq 2$. If we set $n = 4$, we must have $(x - 8 + \frac{1}{2})^2 - (24 + \frac{1}{4}) > 0$. Hence the only possible value for x is 1 because $1 \leq (A^2) = x \leq 8$ and $x \neq 2$. So, we see $L_1 \equiv 0$. Since V is rational, we have $L_1 \sim 0$, i.e., $A \sim l + D_1 + \cdots + D_i$. Thus the claim is verified.

However, this is impossible because $A \sim l + D_1 + \cdots + D_i$ implies that $D_1 + \cdots + D_i$ is a connected component of $Bk D$ containing D_1, while the connected component of $Bk D$ containing D_1 is a fork F.

Now we consider the next:

Case D_i is not a component of F. Then $(l, D_1) = 1$, cf. the case (i—B—b) below. We shall show that this contradicts the condition (*) where we take D_i as D_1 in the condition (*). Let $h : V \longrightarrow \overline{V}_2$ be the contraction of $Bk(D - D_i)$. We obtain $\rho(\overline{V}_2) = 2$ since $\rho(\overline{V}) = 1$. Let $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_{|2(l + D_1 + \cdots + D_{s-2}) + D_{s-1} + D_s|} : V \longrightarrow \mathbb{P}^1$. There exists clearly a morphism $\psi : \overline{V}_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ such that $\overline{\Phi} = \psi \circ h$. Let $\overline{H} = 2 h_* \overline{l}$, which is a fiber of ψ. Then $N(\overline{V}_2) = \mathbb{R}[h_* D_i] + \mathbb{R}[\overline{H}]$. Since $(h_* l, K_{\overline{V}_2}) = -(h_* l, h_* A) = -1$, $h_* l$ is an extremal rational curve. We easily see that $\overline{H}^{\perp} \cap \overline{NE}(\overline{V}_2) = \mathbb{R}_+[h_* l]$, $\overline{H} \not\equiv 0$ and $\overline{H}^2 = 0$. This contradicts the condition (*).

Case (i—B). l does not meet $\mathrm{Supp}\, Bk(D - D_1)$. Then $(l, D_1) \geq 1$ by virtue of Lemma 3.2.

Case (i—B—a). $(l, D_1) = 1$.

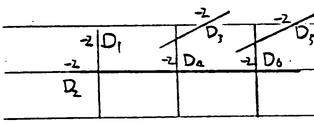
This leads to a contradiction as in the case (i—A—a).

Case (i—B—b). $(l, D_1) \geq 2$.

Let $L_n = (A^2) l - A + n D_1$ as in the case (i—A—b). Then we see that $(A^2) = 1$, $(l, D_1) = 2$ and $A \sim l + D_1$. Hence D_1 is an isolated component of $Bk D$, which is a contradiction. Therefore, we have proven that the case i) does not occur.

Case ii). F is a fork of type $(2, 3, 3)$.

Let D_1 be a component of $F = D_1 + D_2 + \cdots + D_6$ as shown below:



As in the case (i), we apply the Mori theory to the surface V_1 obtained from V by contracting $Bk(D-D_1)$, and obtain a (-1) curve ℓ such that either ℓ does not meet $Bk(D-D_1)$ or ℓ meets $Bk(D-D_1)$ in a single point on a tip D_i of a connected component of $Bk(D-D_1)$, which is a rod.

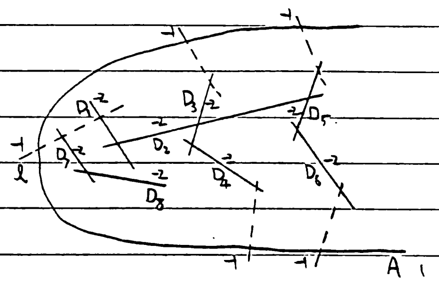
Case (ii−A). ℓ meets $Bk(D-D_1)$.

Case (ii−A−a). $\ell \cap D_1 = \phi$.

Then, by virtue of Remark 2.4 and Lemma 3.2, ℓ meets $F-D_1$ in a single point on a tip D_i of a rod $F-D_1$. Thence $D_i=D_3$ or D_5, say $D_i=D_3$. As in the case (i−A−b), we can show that this contradicts the condition (*), where we take D_5 as D_1 in the condition (*).

Case (ii−A−b). $\ell \cap D_1 \neq \phi$.

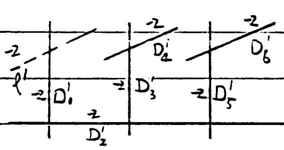
If D_i is a component of F, we would get a contradiction as in the case (i−A−b). So, we assume that D_1 and D_i are contained in distinct connected components of BkD. We may assume $i=7$. Let $R=D_7+\cdots+D_{7+t}$ be a connected component of BkD, which is a rod. If $t=0$, we would obtain a contradiction to the condition (*), where we take D_2 as D_1 in the condition (*). So, we assume that $t \geq 1$. Then we have $\mathrm{Supp}\,BkD=\bigcup_{i=1}^{8} D_i$ by virtue of Lemma 3.1, (iii), and $R=D_7+D_8$. Let $\bar{\Phi}=\Phi_{|2\ell+D_1+D_7|}: V \longrightarrow \mathbb{P}^1$. We see easily that $\bar{\Phi}$ is a $\mathbb{P}^1$-fibration, and that the singular fiber of $\bar{\Phi}$ containing $D_3 \cup D_4$ (or $D_5 \cup D_6$, resp.) is given as follows (cf. Lemma 3.3):



Then we have $\rho(V) \geq 10$, which is a contradiction because $\rho(V) = r+1 = 9$ (cf. Lemma 3.1).

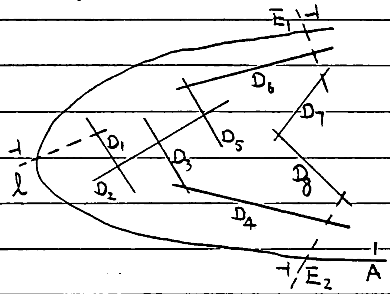
Case (ii–B) ℓ does not meet $Bk(D-D_1)$.

Then $(\ell, D_1) \geq 1$ by Lemma 3.2. It is impossible that $(\ell, D_1) \geq 2$ (cf. the case (i–B–b)). So, $(\ell, D_1) = 1$. Let $\sigma : V' \longrightarrow V$ be the blowing-up of the point $\ell \cap A$. Let $A' = \sigma' A$, $\ell' = \sigma' \ell$, $E = \sigma^{-1}(\ell \cap A)$ and $D_i' = \sigma' D_i$ for $i = 1, \cdots, r$, where $\operatorname{Supp} BkD = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$; see the picture below. Set $\Delta =$



$3D_2' + 2(D_1' + D_3' + D_5') + \ell' + D_4' + D_6'$. It is easy to see that $(\Delta^2) = (A', \Delta) = 0$. We know that $(A'^2) \geq 0$ by Lemma 3.1. Hence $(A'^2) = 0$ by the Hodge index theorem. It is easy to check that $(A' - \Delta, E) = (A' - \Delta, A') = (A' - \Delta, D_i') = 0$. So $A' \equiv \Delta$ because $E, A', D_1', \cdots, D_r'$ form a basis of $N(V')$ (cf. Lemma 3.1), whence $A' \sim \Delta$ because V' is rational. Therefore, we obtain an elliptic fibration $\Phi_{|A'|} : V' \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Since $(E, A') = 1$, E is a cross-section, and any fiber of $\Phi_{|A'|}$ is not a multiple fiber. We also have $(A^2) = 1$. Thence $r = 9 - (A^2) = 8$, and A is an elliptic curve (cf. Lemma 3.1, (iii)). Consider a $\mathbb{P}^1$-fibration on V defined by $|2(\ell + D_1 + D_2) + D_3 + D_5|$.

By counting $\rho(V)$ $(= r+1 = 9)$, we can present the configuration of singular fibers of $\Phi_{|2(\ell+D_1+D_2)+D_3+D_5|}$ as follows:



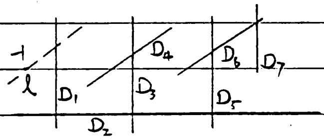
By virtue of Lemma 3.2, D_4 and D_6 are cross-sections meeting the singular fibers of $\Phi_{|2(\ell+D_1+D_2)+D_3+D_5|}$ as shown above.

So, in this case, BkD consists of a fork of type (2,3,3) and a rod with two irreducible components. Note that there is a (−1) curve ℓ' on V meeting BkD only in the components D_7 and D_8. Indeed, consider a possible configuration of the singular fiber of $\Phi_{|A'|}$ containing D_7' and D_8'.

Case (iii) F is a fork of type (2,3,4).

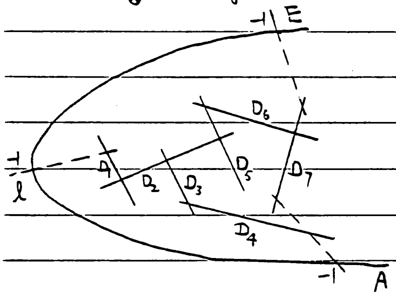
From the proof for the case (ii), we know that it suffices to consider the following case:

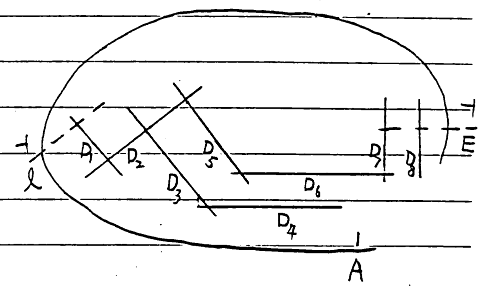
There exists a (−1) curve ℓ such that $(\ell, D_1+\cdots+D_r) = (\ell, D_1) = 1$, where $F = D_1 + \underset{r}{\cdots} + D_7$, D_1 is a tip of F as shown below and $\mathrm{Supp}\,BkD = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$.



Consider a $\mathbb{P}^1$-fibration $\Phi := \Phi_{|2(\ell+D_1+D_2)+D_3+D_5|} : V \longrightarrow \mathbb{P}^1$. By virtue of Lemma 3.3, the configuration of singular fibers of Φ

containing components of BkD is one of the following:





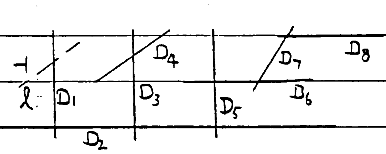
$\mathrm{Supp}\,BkD \supseteq \bigcup_{i=1}^{7} D_i$ $\qquad$ $\mathrm{Supp}\,BkD = \bigcup_{i=1}^{8} D_i$

The second case leads to a contradiction, because $(D_4, 2E+D_7+D_8) = 1$ implies $(D_4, D_7) = 1$ or $(D_4, D_8) = 1$, while D_8 is an isolated component of BkD. In the first case, we obtain a contradiction to the condition $(*)$, where we take D_4 as D_1. Therefore the case (iii) does not occur.

Case (iv). F is a fork of type $(2,3,5)$.

From the discussions in the case (ii), we know that it suffices to consider the case:

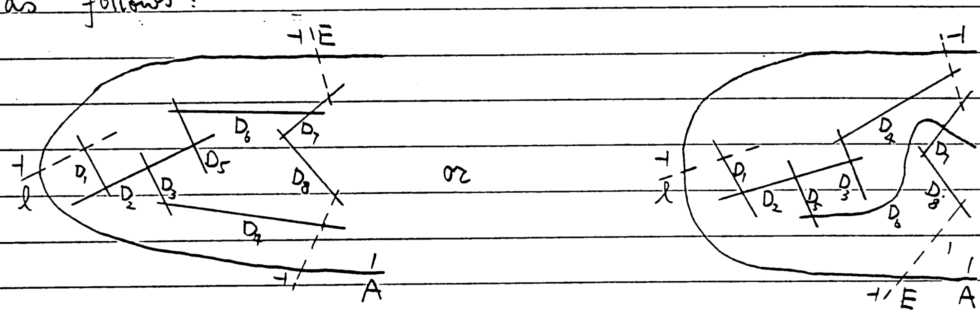
There exists a (-1) curve l such that $(l, D_1+\cdots+D_8) = (l, D_1) = 1$, where $\mathrm{Supp}\,BkD = \mathrm{Supp}\,F = \bigcup_{i=1}^{8} D_i$ and D_1 is a tip of F as shown below:



Consider a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{\Phi} := \bar{\Phi}_{|2(l+D_1+D_2)+D_3+D_5|} : V \longrightarrow \mathbb{P}^1$. By virtue of Lemma 3.3, the configuration of singular fibers is presented

No. ____ , ____

as follows:



If the first case (or the second case, resp.) takes place, we get a contradiction to the condition (*) where we take D_5 (or D_4, resp.) as D_1. So, the case (iv) does not occur.

Therefore we have verified the claim 1. Q.E.D.

Step 2. Our next claim is the following:

Claim 2. $Bk\,D$ contains no connected components consisting of three irreducible components.

Proof. Suppose that $R = D_1 + D_2 + D_3$ is a connected component of $Bk\,D$. We assume that D_2 is the middle component of R. As in the step 1, there is a (-1) curve l such that either l does not meet $Bk(D-D_2)$ or l meets $Bk(D-D_2)$ in a single point on a tip D_i of a rod R_1, which is a connected component of $Bk(D-D_2)$. We consider these two cases separately.

Case (A) l meets $Bk(D-D_2)$.

Case (A-a) $l \cap D_2 = \phi$.

By virtue of Lemma 3.2, R_1 is a part of R, whence $R_1 = D_1$ or D_3. This is a contradiction (cf. Lemma 3.2).

Case (A-b). $\ell \cap D_2 \neq \phi$.

If R_1 is a part of R, D_2 is a tip of R; see the proof for Claim 1, the case (i-A-b). This is a contradiction. So R_1 is not a part of R, whence $R_1 \cap R = \phi$. We also have $(D_2, \ell) = 1$; see the case B below. Thus, we reach to a contradiction to the condition $(*)$ where we take D_i as D_1.

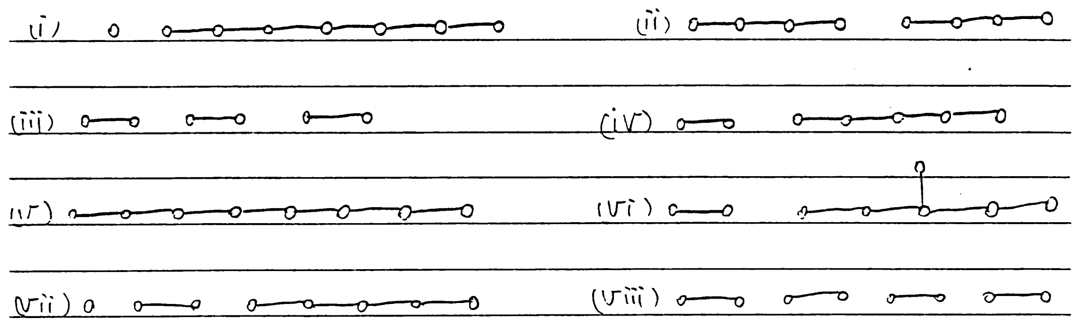
Case (B). ℓ does not meet $Bk(D-D_2)$.

Then $(\ell, D_2) \geq 1$ by virtue of Lemma 3.2. If $(\ell, D_2) = 1$, we reach to a contradiction as in Claim 1, the case (i-A-a). If $(\ell, D_2) \geq 2$, one can show, by the arguments in the case (i-B-b) of Claim 1, that D_2 is an isolated component of BkD, which is a contradiction. Q.E.D.

Step 3. By virtue of the claim 1 and the case (ii), we may assume that BkD contains no forks. We know that $r := {}^{\#}\{\text{irreducible components of } BkD\} = \rho(V) - 1 \geq 2$ by the hypothesis that V is not isomorphic to $\mathbb{P}^2$ or F_m. So, suppose that R is a rod which is a connected component of BkD. Let D_1 be a tip of R. As in the proof of Claim 1, there exists a (-1) curve ℓ on V such that either ℓ does not meet $Bk(D-D_1)$ or ℓ meets $Bk(D-D_1)$ in a single point on a tip D_i of a connected component R_1 of $Bk(D-D_1)$, which is a rod. We consider these two cases separately and conclud Lemma 3.4. We omit the details.

We can specify the configuration of BkD. Namely, we have:

Lemma 3.5. Let the notations and assumptions be the same as in Lemma 3.4. Then all possibilities for BkD are exhausted by the following eight cases, where by "o" we denote an irreducible component of BkD, by o——o we mean that two irreducible components of BkD meet each other transversally in a single point.



There exists a birational morphism $\mu: V \longrightarrow F_2$ such that the configuration of $\mu_* D$ corresponding to the case (i) (the case (ii); the case (v); the case (vii); the cases (iii), (iv) and (vi); or the case (viii); resp.) is given in Fig. 1 (Fig. 2; Fig. 3; Fig. 4; Fig. 5; or Fig. 6; resp.) in the statement of MAIN THEOREM, in which $A^* := \mu_* A$ is an elliptic curve. All these cases are realizable.

Proof. Let $\overline{\Phi}_{|\sigma' A|}: V' \longrightarrow \mathbb{P}^2$ be the same as in Lemma 3.4. By the Noetherian formula we have:

$$12 = 12\chi(\mathcal{O}_{V'}) - (K_{V'}^2) = \chi(V') = \sum_f \chi(f)$$

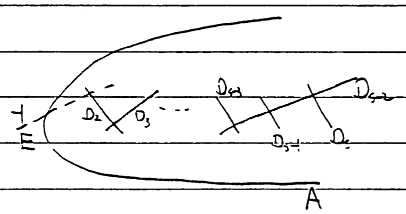
where f ranges over all fibers of $\overline{\Phi}_{|\sigma' A|}$. Then we can verify $\#\{\text{connected components of BkD}\} \leq 4$. By considering a suitable $\mathbb{P}^1$-fibration $\overline{\Phi}: V \longrightarrow \mathbb{P}^1$ and by computing $\rho(V)$ by counting the irreducible components in fibers of $\overline{\Phi}$, we see that all possible cases are (i) $\sim$ (viii) above. We note that an elliptic curve has a group structure and can find the pictures Fig. 1 $\sim$ Fig. 6 on F_2. The details are omitted.

§4. Iitaka surfaces with $\rho(\bar{V})=1$, the part (II).

In the present section, we consider the case where the following conditions are satisfied:

There exist an irreducible component D_1 of $\mathrm{Bk}D$ and an extremal rational curve $\bar{\ell}$ and a nef divisor $\bar{H}$ on the surface $\bar{V}_1$, obtained from V by contracting $\mathrm{Bk}(D-D_1)$, such that $\bar{H}^{\perp}\cap\overline{NE}(\bar{V}_1)=\mathbb{R}_+[\bar{\ell}]$, $\bar{H}\not\equiv 0$ and $(\bar{H}^2)=0$.

By virtue of Lemma 2.5, there exists a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{\Phi}: V\longrightarrow\mathbb{P}^1$ such that every singular fiber has the following configuration, where $D_2+\cdots+D_s$ $(s\geq 3)$ is a partial sum of irreducible components of $\mathrm{Bk}D$:



Furthermore, we assume that $\rho(\bar{V})=1$ and V is not isomorphic to $\mathbb{P}^2$ or F_m. Then we know by Lemma 2.5 that all irreducible components of $\mathrm{Bk}D$, except for D_1, are contained in the fibers of $\bar{\Phi}$.

If D_1 is a cross-section of $\bar{\Phi}$, there exists a birational morphism $\mu: V\longrightarrow F_2$ such that μ_*D_1 is the unique (-2) curve on F_2 and that $\mathrm{Supp}\,\mu_*\mathrm{Bk}D$ is the union of less than four fibers of $\pi:=\bar{\Phi}\circ\mu^{-1}: F_2\longrightarrow\mathbb{P}^1$, each of which passes through a ramification point of $\pi|_{\mu_*A}$. Note that A, so μ_*A is an elliptic curve (cf. Lemma 2.5) and that D_1 cannot meet more than three other components of $\mathrm{Bk}D$.

Lemma 4.1. Let the notations and assumptions be the same as above. Suppose that $(D_1, f) \geq 2$ for a fiber f of $\bar{\Phi}$. Then the following assertions hold true:

(i) $(D_1, f) = 2$.

(ii) $(A^2) = 2$ or 1 according to whether or not D_1 is an isolated component of BkD. Hence A is an elliptic curve by Lemma 3.1.

(iii) The following exhaust all possible configurations of BkD:

Case $(A^2) = 1$.

① $2A_1 + 2A_3$; ② $A_3 + D_5$; ③ D_8 ; ④ $2D_4$; ⑤ $2A_1 + D_6$; ⑥ $4A_1 + D_4$.

Case $(A^2) = 2$.

⑦ $A_1 + D_6$; ⑧ $3A_1 + D_4$; ⑨ $A_1 + 2A_3$; ⑩ $7A_1$.

Lemma 4.2. Let the notations and assumptions be the same as in Lemma 4.1. Then the cases ⑥ and ⑩ do not occur. For the cases ③, ⑤, ⑦ and ⑧, there exists a $\mathbb{P}^1$-fibration $\bar{\Phi}_1 : \bar{V} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ such that all irreducible components of BkD, except for one component, say D_2, are contained in the fibers of $\bar{\Phi}_1$ and that D_2 is a cross-section of $\bar{\Phi}_1$. Moreover, there exists a contraction $u : \bar{V} \longrightarrow F_2$ of (-1) curves contained in the fibers of $\bar{\Phi}_1$ such that $\mathrm{Supp}\, u_* BkD$ is the union of the unique (-2) curve and two or three fibers of $\pi : F_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, each of which passes through a ramification point of $\pi|_{u_*A}$. The cases ①, ②a, ②b, ④ and ⑨ occur.

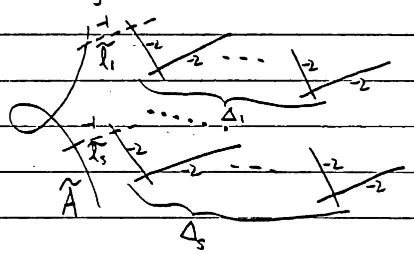
§5. The proof of MAIN THEOREM.

By virtue of Remark 2.4, it remains investigating the following Iitaka surface $(\bar{V}, D)$:

A consists of two irreducible components one of which is a (-1) curve l.

Let $\hat{u} : \bar{V} \longrightarrow \hat{V}$ be the contraction of l. Let $\hat{A} = \hat{u}_* A$, $\hat{D} =$

$\hat{\mu}_* D$ and $\hat{D}_i = \hat{\mu}_* D_i$ for every $D_i \subseteq \mathrm{Supp\,Bk}\,\ddot{D}$. Note that we just used the property $A + K_V \sim 0$ and did not use the property that A is nonsingular from the begining of §2 to the first assertion in Remark 2.4. We also apply the Mori theory to the pair $(\tilde{V}, \hat{D})$ and see that there exists a birational morphism $\sigma : \tilde{V} \longrightarrow W$ obtained by contracting all the following $\tilde{l}_i + \Delta_i$, where Δ_i is a connected component of $\mathrm{Bk}\,\tilde{D}$:



Then, if we let $G = \sigma_* \hat{A}$, $B = \sigma_* \hat{D}$ and let $g : W \longrightarrow \overline{W}$ be the contraction of $B - G$, there exists a pair $(\bar{E}, \bar{H})$ of an extremal rational curve $\bar{E}$ and a nef divisor $\bar{H}$ on $\overline{W}$ with $\bar{H}^{\perp} \cap \overline{NE}(\overline{W}) = \mathbb{R}_+[\bar{E}]$ such that one of the following two cases occurs:

(1) $\bar{H} \equiv 0$ and $\rho(\overline{W}) = 1$.

(2) $\bar{H} \not\equiv 0$ and $(\bar{H}^2) = 0$. Hence $\bar{H} \in \mathbb{R}_+[\bar{E}]$ and $(\bar{E}^2) = 0$.

We consider these two cases separately. Using the arguments in the proof of Lemmas 2.5, 3.4, 3.5, 4.1 and 4.2, we obtain similar results and conclude Main Theorem.

No. ______

References:

M[1]: M. Miyanishi, Non-complete algebraic surfaces, Springer, Lecture Notes 857.

M[2]: M. Miyanishi, Lectures on curves on rational and unirational surfaces, Springer-Verlag 1978.

M[3]: M. Miyanishi, Enriques-Kodaira Theory on Algebraic Surfaces, prepared for lectures at Tata institute of fundamental research, Bombay, India.

M[4]: M. Miyanishi, Logarithmic K3-Surfaces (Revised), preprint.

MT[1]: M. Miyanishi, S. Tsunoda, Non-complete algebraic surfaces with log. Kodaira dim $-\infty$ and with non-connected boundary at infinitivities, Japan J. Math., Vol. 10, No. 2, 1984

Mori [1]: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Annals of Math., 116 (1982), 133-176.

Sh[1]: Shafarevich, I.R., Algebraic Surfaces, Proc. Steklov Inst. Math., 75 (1965) (trans. by A.M.S., 1967).

Artin[1]: Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math., 84 (1962), 485 ~ 496

Artin[2]: On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math., 4 (1968), 129 ~ 136

Iitaka [1]: Algebraic Geometry: An introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties, Springer-Verlag (1982).

Iitaka [2]: On logarithmic K3-surfaces, Osaka J. Math. 16 (1979), 675 ~ 705.

Complete Symmetric Varietiesの数値的 Schubert Calculus

加藤芳文　名大工

§0. Introduction.

今回の話は1982年の軽井沢での可換環論シンポジウムで"G/P上のSchubert Calculusへの一つの試み"と題して話したことの続きである。そこではJ.B. Carrell及びD. Liebermanの一連の研究を適用すると代数的均質空間 $X=G/P$ のコホモロジー環 $H^*(X,\mathbb{C})$ の構造を調べる問題、すなわちSchubert Calculus、が未解決の部分もあるが完全に数値的な問題に言い替えが可能であることを述べた。今回は同様の方法がC. DeConcini及びC. Procesiらが研究しているcomplete symmetric varietiesのあるクラスの代数多様体にも適用できることを示す。このクラスにはAdjoint型の複素半単純リー群を自然にコンパクト化して得られる代数多様体も含まれる。

§1. Complete Symmetric Varieties.

定義1. G : 単連結複素半単純リー群
　　σ : 位数2の G の自己同型写像
　　$H = G^\sigma = \{ x \in G \mid x^\sigma = x \}$
　　$\widetilde{H}$ = GでのHのnormalizer
　(一般に非負整数 s があり $[\widetilde{H}, H] = 2^s$ が成立)

とするとき、$\widetilde{H} \supseteq H' \supseteq H$ を満たす任意の部分群 H' に対してC. DeConciniとC. Procesiに従い均質空間 G/H' をsymmetric varietyと言う。

例1.　G' : 単連結複素半単純リー群
　　$G = G' \times G'$
　　$\sigma(x,y) = (y,x)$　　, $(x,y) \in G = G' \times G'$

とすると
　　$H = \{ (x,x) \mid x \in G' \}$

となりsymmetric variety $G/\bar{H}$ は群 $G''=G'/C(G')$、ここで $C(G')$ はcentralizer、と同一視できる。つまりAdjoint型の複素半単純リー群である。

$\underline{g}=\mathrm{Lie}(G)$, $\underline{h}=\mathrm{Lie}(H)$、Tを$\sigma$で固定される極大torusとする。$\underline{t}=\mathrm{Lie}(T)$ はσの固有値$+1,-1$に従って $\underline{t}=\underline{t}_0\oplus\underline{t}_1$ と分解される。$\underline{t}_0$, $\underline{t}_1$ に対応するsubtorusをT_0, T_1とすると積写像 $T_0\times T_1\to T$ はisogenyになる。以後 $l=\dim T_1$ が最大になるようにTをとる。

$\underline{t}^*\supseteq\Phi$ をルート系

$$\underline{g}=\underline{t}\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\underline{g}_\alpha$$

をルート分解とすると一般に $\sigma(\underline{g}_\alpha)=\underline{g}_{\alpha^\sigma}$ が成立。特にΦはσ不変。さらに分解 $\Phi=\Phi^+\cup\Phi^-$, Φ^+:正ルート, Φ^-:負ルート、を条件

$$\alpha\in\Phi^+,\ \alpha\neq 0 \text{ on } \underline{t}_1 \text{ ならば } \alpha^\sigma\in\Phi^-$$

を満たすように取れるのでこれを仮定する。

$$\Phi_0=\{\alpha\in\Phi \mid \alpha\equiv 0 \text{ on } \underline{t}_1\}$$

$$\Phi_1=\Phi-\Phi_0$$

とおくと

$$\underline{h}=\underline{t}_0\bigoplus_{\alpha\in\Phi_0}\underline{g}_\alpha\bigoplus_{\alpha\in\Phi_1^+}\mathbb{C}(X_\alpha+\sigma(X_\alpha))$$

と成る。ここで $0\neq X_\alpha\in\underline{g}_\alpha$, $\alpha\in\Phi_1^+$。従って

$$\underline{t}_1\bigoplus_{\alpha\in\Phi_1^-}\mathbb{C}X_\alpha$$

は$\underline{g}$での$\underline{h}$の補空間となり、よって次元は

$$\dim G/H=\dim\underline{t}_1+|\Phi_1^-|=l+\frac{1}{2}|\Phi_1|。$$

$\Phi^+\supseteq\Gamma$ を単純ルート系とし

$$\Gamma_0 = \Gamma \cap \Phi_0 = \{\beta_1, \cdots, \beta_k\}$$
$$\Gamma_1 = \Gamma \cap \Phi_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_j\}$$

と置くと $\alpha_1, \cdots, \alpha_j$ に関しては次を仮定してよい。

1) $1 \leq i \leq l$ に対しては $\alpha_i - \alpha_i^{\sim}$ は互いに異なる。

2) 各 $i > l$ に対しては $\alpha_i - \alpha_i^{\sim} = \alpha_s - \alpha_s^{\sim}$ と成る $s \leq l$ が存在。

$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_i^{\sim})$, $1 \leq i \leq l$, を<u>制限された単純ルート系</u>と言う。

G の $\underline{g}$ への Adjoint 表現を考えると $\underline{h}$ の G における stabilizer は $\hat{H}$ と成る。従って symmetric variety $G/\hat{H}$ はグラスマン多様体 $Gr(n, m)$, $n = \dim \underline{g}$, $m = \dim \underline{h}$, の $\underline{h}$ の orbit と同一視できる。

<u>定義2.</u> 上記の orbit の Zariski 閉包を取って得られる algebraic variety

$$\underline{X} = \overline{G\underline{h}} \subseteq Gr(n, m) \subseteq \mathbb{P}(\overset{m}{\wedge} \underline{g})$$
$$(\text{Plücker embedding})$$

を<u>complete symmetric variety</u>と言う。

$\Phi_0^+ = \{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$, $\Phi_1^+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_t\}$ とすると $\underline{h}$ に対応する line のクラス $\bar{h}$ は

$$\wedge^m \underline{h} = \wedge^k \underline{t}_0 \wedge X_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge X_{\beta_r} \wedge X_{-\beta_1} \wedge \cdots \wedge X_{-\beta_r}$$
$$\wedge (X_{\alpha_1} + \sigma(X_{\alpha_1})) \wedge \cdots \wedge (X_{\alpha_t} + \sigma(X_{\alpha_t}))$$

が張る。右辺のカッコを外すと weight が $\mu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$ のベクトル、つまり

$$v_\mu = \wedge^k \underline{t}_0 \wedge X_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge X_{\beta_r} \wedge X_{-\beta_1} \wedge \cdots \wedge X_{-\beta_r} \wedge X_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge X_{\alpha_t}$$

が unique に存在。さらに $t \in T_1$ の作用は

$$t(\wedge^m \underline{h}) = \wedge^k \underline{t}_0 \wedge X_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge X_{-\beta_r} \wedge (X_{\alpha_1} + t^{-2\bar{\alpha}_1} \cdot \sigma(X_{\alpha_1}))$$
$$\wedge \cdots \wedge (X_{\alpha_t} + t^{-2\bar{\alpha}_t} \cdot \sigma(X_{\alpha_t}))$$

と成り、$t^{-2\bar{\alpha}_i} \to 0$, $1 \leq i \leq t$, となる極限を考えると v_μ は $\overline{X}$ に属することになる。同様にして weight が $\mu - 2\bar{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq l$, のベクトルを考えると T_1 の像 $T_1\hat{h}$ には次の座標が入る。

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \longrightarrow & T_1\hat{h} & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{C}^*)^l & \subseteq & \mathbb{C}^l \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \\ t & \longrightarrow & t\hat{h} & \longrightarrow & (t^{-2\bar{\alpha}_1}, \cdots, t^{-2\bar{\alpha}_l}) & & \end{array}$$

以後 $\mathbb{C}^l$ の座標を $(y_1, \cdots, y_l)$ と表す。

Complete symmetric variety $\overline{X}$ について知られている基本的性質は次である。

1) $\overline{X}$ は smooth.
2) $\overline{X} - G\hat{h}$ は l コの transversal に交わる smooth な超曲面 S_i の union である。
3) $\overline{X}$ 内の各 G orbit は $\{1, 2, \cdots, l\}$ の部分集合と 1:1 に対応する。実際各 orbit 閉包は $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_k}$ の形をしている。
4) closed orbit は unique に存在しそれは $Y = S_1 \cap \cdots \cap S_l \cong G/P$ である。ここで P は vector v_μ を固定する G の parabolic subgroup。

§2. $\overline{X}$ 上の局所座標系.

Φ_1^- に対応した unipotent 部分群を U そのリー環を $\underline{u}$ とする。$\underline{u}$ の元 Z を基底 を固定して

$$Z = \bigoplus_{\gamma\in\Phi_1^-} z_\gamma X_\gamma \in \underline{u}\ , \quad X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma\ , \ \gamma\in\Phi_1^-$$

と表す。リー環 $\mathfrak{t}_1$ の基底 $A_1, \cdots, A_l$ を $\alpha_i(A_j) = -\frac{1}{2}\delta_{i,j}$ とると $t_1 = \exp\left(\sum_{i=1}^{l} a_i A_i\right) \in T_1$ は

$$t_1^{-2\alpha_j} = \exp\left(-2\sum_{i=1}^{l}\alpha_j(A_i)\right) = \exp a_j$$

を満たす。 $N(T)$, つまり G における T の normalizer, の元 w に対して次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m \arrow[r] & G/\widehat{H} \arrow[r] & G/\widehat{H} \\
\underline{u}\times(\mathbb{C}^*)^l \arrow[r, "\phi"] \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & U\cdot T_1\tilde{h} \arrow[r, "w"] \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & wU\cdot T_1\tilde{h} \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \\
(Z, (y_i)_{i=1}^{l}) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & \exp Z\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{l} a_i A_i\right)\tilde{h} \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90] & w\cdot\exp Z\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{l} a_i A_i\right)\tilde{h} \arrow[u, phantom, "\in" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

$\underline{u}$ は nilpotent だから指数写像 $Z \longrightarrow \exp Z$ は U の上への $1:1$ 写像であり、さらに ϕ も $\mathbb{C}^m$ から $\overline{X}$ の中への同型写像 $\tilde{\phi}$ に拡張できることが示される。$\tilde{\phi}$ による像を V と書く。

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\phi} : \mathbb{C}^m & \longrightarrow & V & \subseteq & \overline{X} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\phi : U\times(\mathbb{C}^*)^l & \longrightarrow & U\cdot T\tilde{h} & \subseteq & G/\widehat{H}
\end{array}$$

このことより、組 $(wV, \tilde{\phi}^{-1}\circ w^{-1})$ は Zariski open 集合

wV の局所座標に成っていることがわかる。特に V 上では $\mathbb{C}^m$ の原点に対応するのがクラス $[v_u]$ であり S_i は $y_i=0$ で定まる。S_i の G 不変性より各 wV 上でも $y_i=0$ で定まる。w は実際には $W'=N(T)/N(T)\cap p$ を動かせば十分であるが一般には

$$\bigcup_{w\in W'} wV \subsetneq X$$

であり等号は成立しない。しかし先にあげた例1では等号成立。その時 $W'=W'\times W'$ である。ただし W' は G' のワイル群。§.4からは等号成立を仮定する。次の定理が示すようにこの局所座標は非常に優れた性質を持っている。従って等号不成立の場合にもこの様な局所座標系を具体的に求めることは非常におもしろい問題である。

定理1. X を symmetric variety $G/\tilde{H}$ をコンパクト化して得られる complete symmetric variety とする。その時 wV は T 不変な Zariski 開集合となる。実際局所座標 $(wV, \tilde{\phi}^{-1}\circ w^{-1})$ を用いると、$\exp J\in T$, $J\in \mathfrak{t}$、により

$$\{(z_\gamma)_{\gamma\in\Phi_1^-},\ (y_i)_{i=1}^{l}\}$$

は

$$\{(\exp(w\gamma)(J)\,z_\gamma)_{\gamma\in\Phi_1^-},\ (\exp(-2(w\bar{\alpha}_i)(J))y_i)_{i=1}^{l}\}$$

に変化する。

証明. $\exp J\in T$, $J\in\mathfrak{t}$ に対して

$$\exp J\cdot\exp Z\cdot\exp\Big(\sum_{i=1}^{l}a_iA_i\Big)\cdot\tilde{h}$$

$$=w\cdot w^{-1}\exp J\,w\cdot\exp Z\cdot w^{-1}\exp(-J)w\cdot w^{-1}\exp J w\cdot\exp\Big(\sum_{i=1}^{l}a_iA_i\Big)\cdot\tilde{h}$$

$$= w\cdot \exp w^{-1}(J)\cdot \exp Z\cdot \exp(-w^{-1}(J))\cdot \exp w^{-1}(J)\cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{l} a_i A_i\right)\cdot \tilde{h}$$

$$= w\cdot \exp(\mathrm{Ad}(\exp w^{-1}(J))Z)\cdot \exp\left(-2\sum_{i=1}^{l}\bar{\alpha}_i(w^{-1}(J))\right)\cdot t'\cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{l} a_i A_i\right)\cdot \tilde{h}$$

$$= w\cdot \exp(\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}\, w^{-1}(J))\cdot Z)\cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{l}(-2(w\bar{\alpha}_i)(J)+a_i)\right)\cdot \tilde{h}$$

ここで $y_i = \exp a_i$

$$\exp(w^{-1}(J)) = \exp\left(-2\sum_{i=1}^{l}\bar{\alpha}_i(w^{-1}(J))\right)\cdot t'$$

$$\exp\left(-2\sum_{i=1}^{l}\bar{\alpha}_i(w^{-1}(J))\right)\in T_1\ ,\quad t'\in T_0$$

とした。従って

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}(w^{-1}(J)))\cdot Z = \sum_{\gamma\in\Phi_1}\exp((w\gamma)(J))z_\gamma\cdot X_\gamma \in \underline{U}$$

に注意すれば証明は終わる。

§3. $\bar{X}$ 上のベクトル場.

$\bar{X}$ 上に次の規則でベクトル場 V_J を構成する。

$$(V_J f)(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(f(\exp(\varepsilon J)\cdot p) - f(p)\right)$$

$J\in \underline{t}$, $p\in\bar{X}$, f : p の回りの局所関数。

定理1. より局所座標 $(wV, \hat{\phi}^{-1}\circ w^{-1})$ を用いると次のように書かれることがわかる。

$$V_J = \sum_{\gamma\in\Phi_1}(w\gamma)(J)\, z_\gamma\frac{\partial}{\partial z_\gamma} - 2\sum_{i=1}^{l}(w\bar{\alpha}_i)(J)\, y_i\frac{\partial}{\partial y_i}$$

J としては次の条件を満足するようにとる。

$(w\gamma)(J) \neq 0$, $\gamma \in \Phi_1^-$ かつ real

$(w\bar{\alpha}_i)(J) \neq 0$, $1 \leq i \leq l$, かつ real

その時 V_J は $w \in wV$ で一位の零点を取る。以後次を仮定する。

(A) $\quad \bar{X} = \bigcup_{w \in W'} wV$

[7] と同様の議論を使うと次の結果を得る。

<u>定理2.</u> 仮定(A)を満たすとき $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ は次できまる。

1) $h^{p,q} = 0$ if $p \neq q$

2) $h^{p,p} = \#\left\{ w \in W' \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{数値}\ (w\gamma)(J),\ \gamma \in \Phi_1^-,\ -2(w\bar{\alpha}_i)(J), \\ 1 \leq i \leq l,\ \text{の中で}\ p\ \text{コ正} \end{array} \right\}$

§4. <u>$\bar{X}$ の数値的 Schubert calculus.</u>

仮定(A)のもとでベクトル場 V_J の零点 Z は $W' = N(T)/N(T) \cap P$ と同一視でき J. B. Carrell と D. Lieberman の結果より、次の filtration が $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ に存在。ただし $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\bar{X}}/i(V_J)\Omega^1$。

1) $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = F_{-n} \supseteq F_{-n+1} \supseteq \cdots \supseteq F_1 \supseteq F_0 \supseteq \{0\}$

2) $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$

3) $F_{-k}/F_{-k+1} \cong H^k(\bar{X}, \Omega^k)$

4) $gr\, H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \bigoplus_{k=0}^{n} F_{-k}/F_{-k+1} \cong H^*(\bar{X}, \mathbb{C})$

ここで $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ は自然に Z 上の複素数値をとる関数のなすベクトル空間

$$\bigoplus_{w \in W'} \mathbb{C}_w$$

と同一視できることに注意。

<u>定義3.</u> $\bar{X}$ 上のベクトル束 E が <u>V_J equivariant</u> であるとは次を満たす $\mathbb{C}$ 線形写像 $\tilde{V}_J$ が存在するときを言う。

$$\tilde{V}_J(f \cdot s) = (V_J f) \cdot s + f \cdot \tilde{V}_J s$$

f：局所関数，s：局所切断

その時 E の d-th Chern class は F_d に属し、代表元として次が与えられる。

$$(-1)^d \sigma_d(\tilde{V}_Z) \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$$

σ_d：d-th 基本対称式

<u>定理3. $\bar{X}$ の接ベクトル束 $T(\bar{X})$ は V_J equivariant であり d-th Chern class は写像</u>

$$\begin{array}{ccc} W' = Z = \mathrm{Zero}(V_J) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ w & \longmapsto & (-1)^d \sigma_d\left(\left(-(w\gamma)(J)\right)_{\gamma \in \Phi_1^-}, \left(2(w\alpha_i)(J)\right)_{i=1}^{l} \right) \end{array}$$

<u>で与えられる。</u>

<u>証明.</u> $T(\bar{X})$ の局所切断 v に対して

$$\tilde{V}_J v = [V_J, v]$$

と定義してやれば V_J equivariant の条件を満たす。

<u>系</u> 上記の定理より一点の Poincaré 双対の F_m での代表元として次が与えられる。

$$\begin{array}{ccc} W' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ w & \longrightarrow & \dfrac{(-1)^m}{|W'|}\sigma_m\left(\left(-(w\gamma)(J)\right)_{\gamma\in\Phi_1^-}, \left(2(w\bar{\alpha}_i)(J)\right)_{i=1}^{l}\right) \end{array}$$

定理4. $\mathcal{O}(S_i)$の局所切断に付随したline束はV_J equivariantでありfirst Chern classは次で与えられる。

$$\begin{array}{ccc} W' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \Psi \\ w & \longrightarrow & 2w\bar{\alpha}_i(J) \end{array}, \quad 1\leq i\leq l,$$

証明 $\mathcal{O}(S_i)$から$\mathcal{O}$への写像$\widetilde{V}_J$を次で定義する。

$$(\widetilde{V}_J s)(p)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{s(\exp(\varepsilon J)p)-s(p)\}.$$

s : $\mathcal{O}(S_i)$の局所切断.

その時、局所座標$(wV,\ \tilde{\phi}^{-1}\circ w^{-1})$での成分$y_i$, $1\leq i\leq l$,を特にy_i^wと書くと, y_i^wに対しては

$$\begin{aligned}(\widetilde{V}_J y_i^w)(p) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{y_i^w(\exp(\varepsilon J)p)-y_i^w(p)\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{\exp(-2w\bar{\alpha}_i)(\varepsilon J)\,y_i^w(p)-y_i^w(p)\} \\ &= (-2w\bar{\alpha}_i)(J)\,y_i^w(p)\end{aligned}$$

となる。従って$\widetilde{V}_J$は$\mathcal{O}(S_i)$から$\mathcal{O}(S_i)$への$\mathbb{C}$線型写像になり作り方よりV_J equivariantになることは明らか。定理の主張も上のことより明らか。

定理3.と先に述べた$\bar{X}$の基本的性質からG orbitの閉包でないcyclesのPoincaré dualが計算できれば$\bar{X}$のコ

ホモロジー環の構造は完全に数値的な問題として決定できたことになる。

これからやらなければならない問題をまとめると

1) 仮定(A) $\bigcup_{w\in W'} wV = \overline{X}$ を満たさない complete symmetric variety $\overline{X}$ に対して V, $w\in W'$ に相当するものをとりうまい局所座標系を見つけることができるか.

2) algebraic homogeneous spaces G/P, complete symmetric variety $\overline{X}$ 以外にこの論法が用いられる例はないか.

3) cycles の Poincaré dual の代表元を $F_{-\ell}$ に求める具体的計算法はあるか.

参考文献.

[1] Carrell, J. B. and Lieberman, D., Vector fields and Chern numbers, Math. Ann., Vol. 225 (1977), 263-273.

[2] Carrell, J. B. and Lieberman, D., Holomorphic vector fields and kähler manifolds, Invent. Math., Vol. 21 (1973), 303-309.

[3] Carrell, J. B. Chern classes of the Grassmannians and Schubert calculus, Topology, Vol. 17 (1978), 177-182.

[4] De Concini, C. and Procesi, C., Complete symmetric varieties, Springer Lecture Notes, 996, 1-44

[5] De Concini, C. and Procesi, C., Complete symmetric varieties II (Intersection theory) preprint.

[6] Kato, Y., A new characterization of the Bruhat decomposition, Nagoya Math. J., Vol. 86 (1982), 131-153.

[7] Kato, Y., On the vector fields on an algebraic homogeneous space, Pacific J. of Math., Vol. 108(2) (1983) 285-294

[8] Kato, Y., Vector fields on some class of complete symmetric varieties, to appear in Nagoya Math. J. Vol. 103

[9] 加藤芳文, G/P 上の Schubert calculus への一つの試み, 軽井沢可換環論セミナー, (1982), 77-92

Maximal Buchsbaum modules over regular local rings

Shiro Goto (Nihon University)

1. Introduction.

The purpose of my lecture is to prove the following

Theorem (1.1). Let A be a regular local ring with maximal ideal m and $d = \dim A \geqq 1$. Let E_i $(0 \leqq i \leqq d)$ be the $i^{\underline{th}}$ syzygy module of A/m. Then for a finitely generated A-module M of $\dim_A M = d$, the following two conditions are equivalent:

(1) M is a Buchsbaum A-module;

(2) $M \cong \bigoplus_{i=0}^{d} E_i^{h_i}$ for some integers $h_i \geqq 0$.

When this is the case, the integers h_i's are given by

$$h_i = l_A(H_m^i(M)) \qquad (0 \leqq i < d)$$

$$h_d = \operatorname{rank}_A M - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot h_i$$

and hence uniquely determined by M.

As an immediate consequence, one has

Corollary (1.2). With the same assumption as in (1.1), let M be a finitely generated A-module. Then the following two conditions are equivalent:

(1) M is an indecomposable Buchsbaum A-module of $\dim_A M = d$;

(2) $M \cong E_i$ for some integer $1 \leqq i \leqq d$.

When this is the case, the integer i is given by $i = \operatorname{depth}_A M$.

Now let us recall some definition. For a moment, let A be a Noetherian local ring with maximal ideal m and M a finitely generated A-module. Then we say that M is <u>Buchsbaum</u>, if the difference

$$I_A(M) = l_A(M/qM) - e_q(M)$$

is an invariant of M which does not depend on the particular choice of a parameter ideal q for M. (Here $l_A(M/qM)$ and $e_q(M)$ respectively denote the length of the A-module M/qM and the multiplicity of M relative to q.) Thus M is Cohen-Macaulay if and only if M is Buchsbaum and of $I_A(M) = 0$; in this sense the concept of Buchsbaum module is a generalization of Cohen-Macaulay modules. We say that a Buchsbaum module M is <u>maximal</u> if $\dim_A M = \dim A$.

As is well-known, if A is regular, any maximal Cohen-Macaulay A-module is free and our theorem (1.1) asserts a similar strong restriction for maximal Buchsbaum modules over the regular local ring A. Notice that maximal Buchsbaum modules represent vector bundles on the punctured spectrum $\operatorname{Spec} A - \{m\}$ of A and so Theorem (1.1) may have some interest as a decomposition theorem of certain vector bundles over regular local rings. See [1] for a further detail, in which there is also given another expression of Theorem (1.1).

2. Proof of Theorem (1.1).

First of all we recall the following

Lemma (2.1) ([4], [6]). Let M be a finitely generated A-module. Then M is Buchsbaum if and only if the canonical map

$$h_M^i : \operatorname{Ext}_A^i(A/m, M) \to H_m^i(M)$$

is surjective for any $i \neq \dim_A M$.

Corollary (2.2) ([6]). Let M be a finitely generated A-module and assume that $H_m^i(M) = (0)$ for each i, $t = \operatorname{depth}_A M < i < \dim_A M$. Then M is Buchsbaum if and only if $m.H_m^t(M) = (0)$.

Proof. Suppose $m.H_m^t(M) = (0)$ and let

$$0 \to M \to I^0 \to \dots \to I^t \to I^{t+1} \to \dots$$

denote a minimal injective resolution of M. Then applying $H_m^0(\ )$ to the resolution, we have a complex

$$(*) \quad \dots \to 0 \to H_m^0(I^t) \to H_m^0(I^{t+1}) \to \dots$$

of A-modules whose cohomology is, by definition, $H_m^i(M)$. Therefore as $m.H_m^t(M) = (0)$, we get that $H_m^t(M)$ coincides with $\operatorname{Hom}_A(A/m, I^t)$, which implies the canonical map $h_M^t : \operatorname{Ext}_A^t(A/m, M) \to H_m^t(M)$ is an isomorphism; thus M is Buchsbaum by (2.1). The opposite implication is clear.

Let $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_d \geqq 0$ be integers such that $h_i > 0$ for some $1 \leqq i \leqq d$. Let $M = \bigoplus_{i=0}^{d} E_i^{h_i}$. Then we have

Proposition (2.3) ([2]). (1) M is a Buchsbaum A-module of $\dim_A M = d$.

(2) $l_A(H_m^i(M)) = h_i$ for each $0 \leqq i < d$.

(3) $\operatorname{rank}_A M = \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . h_i + h_d$.

Proof. Clearly $\dim_A M = d$. Let q be a parameter ideal for M. Then as q is a parameter ideal for the E_i's too, we have

$$l_A(M/qM) = \sum_{i=1}^{d} l_A(E_i/qE_i).h_i + h_0 ,$$

$$e_q(M) = \sum_{i=1}^{d} e_q(E_i).h_i .$$

Therefore to show that M is Buchsbaum, it suffices to prove that each E_i is Buchsbaum which easily follows from (2.2) because $H_m^p(E_i) = (0)$ for $p \neq i, d$ and $H_m^i(E_i) = A/m$. Assertions (2) and (3) are now obvious.

Let $0 \to N \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} M \to 0$ be an exact sequence of A-modules with F finitely generated and free. Assume that M is a maximal Buchsbaum A-module and that $N = \bigoplus_{i=1}^{d} E_i^{r_i}$ with integers $r_i \geqq 0$. We put $N' = \bigoplus_{i=1}^{d-1} E_i^{r_i}$ and consider the dual sequence

$$0 \to M^* \to F^* \to N^* \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}_A^1(M,A) \to 0$$

where ∂ denotes the connecting homomorphism. Then we have the following

Lemma (2.4). (1) $\partial(N'^*) = (0)$.

(2) $\operatorname{Ker} \partial = \bigoplus_{i=1}^{d} E_i^{s_i}$ and $M^* = \bigoplus_{i=1}^{d} E_i^{t_i}$ for some integers s_i and $t_i \geqq 0$.

Proof. (1) Let $p : N \to N'$ be the projection and we will show that the composite of the following two maps

$$N'^* \xrightarrow{p^*} N^* \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_A^1(M,A)$$

is zero. Notice that by the local duality theorem our assertion $\partial \circ p^* = 0$ is equivalent to saying that the composite of

$$H_m^{d-1}(M) \xrightarrow{\tau} H_m^d(N) \xrightarrow{p} H_m^d(N')$$

is zero, where τ denotes the connecting map of local cohomology modules.

Now take a regular system $\underline{x} = x_1, x_2, \ldots, x_d$ of parameters for A and recall how to calculate the local cohomology modules $H_m^{d-1}(M)$ and $H_m^d(N)$ in terms of $\underline{x}$. Firstly consider the commutative diagram

$$(\#) \qquad \begin{array}{ccccc} H^{d-1}(\underline{x};M) & \xrightarrow{\rho} & H^d(\underline{x};N) & \xrightarrow{p} & H^d(\underline{x};N') \\ \downarrow{\psi_M} & & \downarrow{\phi_N} & & \downarrow{\phi_{N'}} \\ H_m^{d-1}(M) & \xrightarrow{\tau} & H_m^d(N) & \xrightarrow{p} & H_m^d(N') \end{array}$$

of A-modules, where the vertical maps are canonical homomorphisms from the Koszul cohomology modules to the local cohomology modules and ρ denotes the connecting homomorphism of the Koszul cohomology modules. Then as

$$H^{d-1}(\underline{x};M) = \mathrm{Ext}_A^{d-1}(A/m,M) ,$$

we get by (2.1) that ψ_M is onto. Consequently assertion (1) is equivalent to saying that the composite of

$$H^{d-1}(\underline{x};M) \xrightarrow{\rho} H^d(\underline{x};N) \xrightarrow{\phi_N} H_m^d(N) \xrightarrow{p} H_m^d(N')$$

is zero, which directly follows from the second square in the diagram (#) because the map $\phi_{N'}:N'/mN' = H^d(\underline{x};N') \to H_m^d(N')$ is zero by (2.5) (notice that the structure map $f_{n,m}$ $(1 \leqq n \leqq m)$ of the inductive system $\{N'/(x_1{}^n,x_2{}^n, \ldots , x_d{}^n)N' = H^d(x_1{}^n, x_2{}^n, \ldots , x_d{}^n;N')\}_{n\geqq 1}$ considered are defined by

$f_{n,m}(z \mod (x_1{}^n, x_2{}^n, \ldots , x_d{}^n)N') = (\prod_{i=1}^{d} x_i)^{m-n}.z \mod$

$(x_1^m, x_2^m, \dots x_d^m)N'$ for each $z \in N'$). Thus $\partial(N'^*) = (0)$ as required.

(2) Recall that $m.\mathrm{Ext}_A^1(M,A) = (0)$ by local duality, since $m.H_m^{d-1}(M) = (0)$. Let $F' = E_d^{r_d}$. Then $N^* = N'^* \oplus F'^*$ clearly and so as $\partial(N'^*) = (0)$ by (1), in the exact sequence

$$0 \to M^* \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{f^*} N^* \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}_A^1(M,A) \to 0$$

we get $\partial(F'^*) = \mathrm{Ext}_A^1(M,A)$. Hence we have an isomorphism

$$(\#\#) \quad \mathrm{Ker}\,\partial = N'^* \oplus E_1^s \oplus A^t$$

for some integers $s, t \geqq 0$ because F'^* is free and $\mathrm{Ext}_A^1(M,A)$ is a vector space over A/m . As N'^* is isomorphic to a direct sum of some copies of E_i's, we get by (##) the formar part of assertion (2). The proof of the latter part is now standard.

We used in the proof of (2.4) the following fact on the boundary modules of the Koszul complex $K.(\underline{x};A)$. This is fairly obvious but let me give a proof for completeness.

(2.5). Let B_p be the $p^{\underline{th}}$ boundary module of $K.(\underline{x};A)$. Then $(\prod_{i=1}^{d} x_i).B_p$ is contained in $(x_i^2 \mid 1 \leqq i \leqq d).B_p$ for any $0 \leqq p \leqq d-2$.

Proof. Let $T_1, T_2, \dots, T_d$ be a basis of $K_1(\underline{x};A)$. We put for each subset I of $\{1, 2, \dots, d\}$ with $\#I = p+1$

$$T_I = T_{i_1} \wedge T_{i_2} \wedge \cdots \wedge T_{i_{p+1}}$$

where $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{p+1}\}$ with $i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1}$. Let ∂ denote the differentiation of the complex $K.(\underline{x};A)$. Then for any $1 \leqq j \leqq d$ we have

$$a_j\,\partial(T_I) = \sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha+1} a_{i_\alpha} \partial(T_j \wedge T_{I-\{i_\alpha\}}),$$

because

$$\partial(T_j \wedge T_I) = x_j T_I - \sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha+1} x_{i_\alpha} T_j \wedge T_{I-\{i_\alpha\}} .$$

So we may write with $z_\alpha \in (x_i^2 \mid i \in I)A$

$$(yx_j)\partial(T_I) = \sum_{\alpha=1}^{p+1} z_\alpha \partial(f_\alpha) ,$$

where $y = \prod_{i \in I} x_i$ and $f_\alpha = T_j \wedge T_{I-\{i_\alpha\}}$. Therefore choosing j so that $j \notin I$, we get

$$(\prod_{i=1}^{d} x_i).\partial(T_I) \in (x_i^2 \mid i \in I)B_p$$

whence $(\prod_{i=1}^{d} x_i).B_p$ is contained in $(x_i^2 \mid 1 \leq i \leq d)B_p$ as required.

<u>Proof of Theorem</u> (1.1). We only have to show [(1) => (2)]. Let $V = H_m^0(M)$. Then as $V \cap mM = (0)$ (cf., e.g., [5, Hilfssatz 11]), V is a direct summand of M. Therefore passing to M/V, we may assume that $t = \operatorname{depth}_A M \geqq 1$. If $t = d$, then M is free. Assume $t < d$ and that our conclusion (2) is true for any maximal Buchsbaum A-module N of $\operatorname{depth}_A N = t + 1$.

Firstly we choose a presentation

$$(\#) \qquad 0 \to N \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} M \to 0$$

of M so that F is finitely generated and free. Then $\operatorname{depth}_A N = t + 1$. Furthermore N is a maximal Buchsbaum A-module. In fact, applying the functors $\operatorname{Ext}_A^i(A/m, .)$ and $H_m^i(.)$ to the exact sequence (#), as F is Cohen-Macaulay we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Ext}_A^{i-1}(A/m,M) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Ext}_A^i(A/m,N) \\
\downarrow h_M^{i-1} & & \downarrow h_N^i \\
H_m^{i-1}(M) & \xrightarrow{\sim} & H_m^i(N)
\end{array}$$

for each $i < d$. Because h_M^{i-1} is onto by (2.1), so is h_N^i and hence N is Buchsbaum. Thus the hypothesis on t yields that N is a direct sum of some copies of E_i's and consequently by (2.4), M^* is.

Secondly consider the dual sequence

$$0 \to M^* \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{f^*} N^* \xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}_A^1(M,A) \to 0$$

of (#). We put $W = \mathrm{Ker}\,\partial$. Then by (2.4), W is a direct sum of some copies of E_i's , whence W is a maximal Buchsbaum A-module (cf. (2.3)). Furthermore taking the A-dual of

$$(\#\#) \quad 0 \to M^* \xrightarrow{g^*} F^* \xrightarrow{h} W \to 0$$

again, we get a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & W^* & \xrightarrow{h^*} & F^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & M^{**} & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Ext}_A^1(W,A) & \to 0 \\
 & & & \| & & \uparrow h_M & & & \\
0 \to & N & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & M & \to & 0 &
\end{array}$$

with exact rows, where $h_M : M \to M^{**}$ is the canonical map. As M is torsionfree, chasing the above diagram, we have the sequence

$$0 \to M \xrightarrow{h_M} M^{**} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ext}_A^1(W,A) \to 0$$

to be exact too; hence $M = \mathrm{Ker}\,\tau$.

Lastly, because W is a maximal Buchsbaum A-module and M^* is a direct sum of some copies of E_i's , by (2.4)(2) applied to the sequence (##) we get $M = \mathrm{Ker}\,\tau$ is a direct sum of some copies of E_i's , which completes the proof of Theorem (1.1).

3. Remarks.

Let B be a Noetherian local ring with maximal ideal n and $d = \dim B \geqq 1$. We assume that B is complete and contains an infinite field. Let $x_1, x_2, \dots, x_d \in n$ and assume that $n^{r+1} = q.n^r$ for some $r \geqq 0$, where $q = (x_1, x_2, \dots, x_d)B$. Let k be a coefficient field of B and put $A = k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$ in B .

Theorem (3.1) ([3]). Suppose that B is a Buchsbaum ring. Then

$$e(B) \geqq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . l_B(H_n^i(B)) .$$

This result holds for any Buchsbaum ring B even though B does not contain a field. However in equicharacteristic case we can easily deduce it from (1.1). In fact, as B is a Buchsbaum ring, it is a maximal Buchsbaum A-module whence by (1.1),

$$B = \bigoplus_{i=0}^{d} E^{h_i}$$

as A-modules where $h_i = l_B(H_n^i(B))$ $(0 \leqq i < d)$ and $h_d = \mathrm{rank}_A B - \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . h_i$. Therefore $e(B) = h_d + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . l_B(H_n^i(B))$ and so, because $h_d \geqq 1$ by the famous theorem due to M. Hochster, we have the required inequality at once.

I would like to say that the Buchsbaum rings B which satisfy the condition

$$e(B) = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . l_B(H_n^i(B))$$

are of minimal multiplicity. Buchsbaum rings of minimal multiplicity enjoy some extra properties (cf. [3]) and it seems to be interesting to explore this kind of Buchsbaum rings. After giving my lecture, Mr. M. Amagasaki (Kyoto University) discovered examples of Buchsbaum local integral domains B such that dim B = e(B) = 3 and depth B = 2 ; these rings are of minimal multiplicity. His construction can be extended to higher-dimensional cases and I feel these examples to be a starting point of the research on Buchsbaum rings of minimal multiplicity —— the detail shall be reported in the next meeting of 1986.

References

[1] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, J. Algebra, 88 (1984), 89-133.

[2] S. Goto, On Buchsbaum rings, ibid., 67 (1980), 272-279.

[3] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, ibid., 85 (1983), 490-534.

[4] J. Stückrad, Über die kohomologische Characteriserung von Buchsbaum-Moduln, Math. Nachr., 95 (1980), 256-272.

[5] J. Stückrad and W. Vogel, Eine Verallgemeinerung der Cohen-Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, J. Math. Kyoto Univ., 13 (1973), 513-528.

[6] J. Stückrad and W. Vogel, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.

次数付環の還元と擬平担次数付加群

大石　彰　　（広島大学 理学部）

序．この論文の目的は Northcott と Rees による古典的な局所環のイデアルの還元理論を一般化した，斉次次数付環の（ある次数付加群による）還元の理論を展開することである．発想は次数付環（及びそれ上の次数付加群）についての問題を次数付環の中で最も簡単な多項式環上の有限生成次数付加群についての問題に帰着させようという単純なものである．要するに次数付環に対するネーターの正規化定理の一般化と思ってよい．代数幾何で一般の射影多様体 X を調べるのに，それを射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上の有限被覆として表わし，その被覆の様子から X の性質について調べるのと同様である．一般には体上の次数付環のように任意の次数付環を多項式環の有限拡大として表わすことは出来ない．それが可能なのは次数付環が擬平担と呼ばれる性質を満たす場合であり，これは平担性の条件を一般化したものになっている．擬平担性の概念はもともと広中により導入された局所環のイデアルによるモノイダル変換についての法擬平担性と呼ばれる条件として現われた．法擬平担性はモノイダル変換についての一種の等重複度性を表わす条件である．

次に次数付環が多項式環と隔たっている度合を表わす一つの目安として還元指数と呼ばれる不変量を導入する．これは局所コホモロジーの消失についての Castelnuovo の正則性などと密接に関係する不変量であり，還元指数を使って次数付環及びそれ上の次数付加群の性質について研究することを試みる．詳しい証明などについては[5]を見て下さい．

擬平担次数付加群．以下特に断わらない限り，R はネーター環，$A=\bigoplus_{n\geq 0}A_n=R[A_1]$ は R 上のネーター斉次次数付環，$M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$ は有限生成次数付 A-加群であるとする．R の

任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $A\otimes_R k(\mathfrak{p})$-加群 $M\otimes_R k(\mathfrak{p})$ のKrull次元が一定であるとき，Mは擬平担（pseudo-flat）であると言う．又，Rの任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $M_{\mathfrak{p}}$ が擬平担 $A_{\mathfrak{p}}$-加群であるとき，Mは局所的に擬平担（locally pseudo-flat）であると言う．Mが局所的に擬平担で Spec(R)が連結ならばMは擬平担である．擬平担加群の構造定理を述べる前に幾つかの例を挙げよう．

例．(1)（平担加群）MがR-平担な加群であればMは局所的に擬平担である．実際MがR-平担でSpec(R)が連結（例えばRが局所環）であればRの任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $M\otimes_R k(\mathfrak{p})$ のHilbert関数 $H(M\otimes_R k(\mathfrak{p}), n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ が一定なのでMは擬平担で $e(M\otimes_R k(\mathfrak{p}))$ が任意の $\mathfrak{p}$ について一定である．この逆は一般には成立しない．例えばRが π を素元とするDVRで k，K を各々Rの剰余体，商体として $A=R[X,Y,Z]/(\pi X^2, XY, XZ)$ とおくと $A\otimes_R k=k[X,Y,Z]/X(Y,Z)$, $A\otimes_R K=K[X,Y,Z]/X(X,Y,Z)$. これらは共に2次元で $e(A\otimes_R k)=e(A\otimes_R K)=1$．しかし $x^n\neq 0$, $\pi x^n=0$ $(n\geqq 2)$ より A_n $(n\geqq 2)$ はR-平担ではない．
(2)（イデアルの法擬平担性）Iを局所環Rのイデアルとすると $G_I(R)=\oplus_{n\geqq 0} I^n/I^{n+1}$ が擬平担であるための必要十分条件は等式 $\ell(I)=ht(I)$ が成り立つことである．但し，ここで $\ell(I)=\dim G_I(R)\otimes_R k$．このときRはIに沿って法擬平担（normally pseudo-flat）であると言う．Rが quasi-unmixed とすると，これはある（又は全ての）R/Iのパラメーター系 $\underline{x}$ に対して等式 $e(\underline{x}, I)=e(\underline{x}+I)$ が成り立つことと同値である（Herrmann-Orbanz）．但し，ここに $e(\underline{x}, I)$ は Northcott による重複度記号．特にR/Iが正則局所環であれば条件は $e(R)=e(R_I)$ と同値であ る．
(3)（対称代数とRees環）Eが有限生成R-加群のとき，$S_R(E)$ が局所的に擬平担ということと $E\otimes_R R_{red}$ が R_{red}-平担ということは同値．$(R, \mathfrak{m})$ が局所環のとき $S_R(\mathfrak{m})$ が擬平担であるためにはRがアルチン環であるかDVRであることが必要十分である．又，$R_{\mathfrak{m}}(R)=\oplus_{n\geqq 0}\mathfrak{m}^n$ が擬平担であるためには $\dim(R)\leqq 1$ であることが必要十分である．

(4) Aが整域で $\dim(A) \leqslant 2$ か AがUFDで $\dim(A) \leqslant 4$ ならば Aは擬平担である．一方，$\dim(A) = 3$ でAが整閉又は $\dim(A) = 5$ でAがUFDでもAは擬平担とは限らない．前者の例としては $(R, \mathfrak{m})$ を2次元正則局所環として $A = R_{\mathfrak{m}}(R)$ を考えればよく，後者の例としては $(R, \mathfrak{m})$ を3次元正則局所環，$\mathfrak{m} = (x, y, z)$ として $A = R[X, Y, Z]/(xX + yY + zZ)$ を考えればよい．

Mが擬平担であることは $M \otimes_R R(X)_{red}$ が擬平担であることと同値なので，擬平担性の問題をRが被約な局所環で剰余体が無限体である場合に帰着出来る．

<u>定理</u> 1．（擬平担加群の構造定理）$(R, \mathfrak{m}, k)$ が被約な局所環で剰余体 k は無限体であるとする．このとき，Mが擬平担であるためには，あるAの部分斉次次数付環BでR上の多項式環と同型なものがあり，MがB-加群として有限生成かつ忠実になっていることが必要十分である．特にAが擬平担であるというのは，AがR上の多項式環の有限拡大になっていることと同値である．

以下でこの定理の証明を与えるために，次数付環の還元の一般論を展開しておく必要がある．

<u>次数付環の還元</u>．Mを有限生成次数付A-加群とする．Aの部分斉次次数付環Bは，MがB-加群と見て有限生成であるときAのMに関する<u>還元</u>(reduction)，又は簡単にAのM-還元であると言う．従ってBがAのM-還元であるというのは，十分大な自然数nについて等式 $B_1 M_n = M_{n+1}$ が成り立つことと同値である．包含関係に関して極小なAのM-還元をAの<u>極小M-還元</u>(minimal M-reduction)と言う．Aの(極小)A-還元のことを単にAの(極小)還元と言う．又，Eを有限生成R-加群，$J \subset I$ をRのイデアルとして $R_J(R)$ が $R_I(R)$ の $R_I(E)$-還元になるとき JをIのE-還元と言う．但し，ここで $R_I(E) = \bigoplus_{n \geqq 0} I^n E$．即ち，JがIのE-還元であるとは等式 $JI^n E = I^{n+1} E$ がある自然数nについて成り立つことである．（これが NorthcottとReesによるイデアルの

還元の定義である.)

例. $k[X,Y]/(XY)$ の極小還元の1つとして $k[X+Y]$ が取れ, $k[X^3,X^2Y,XY^2]=k[U,V,W]/(V^2-UW)$ の極小還元の1つとしては $k[X^3,XY^2]$ が取れる.

<u>定理</u>2. (還元の基本定理) $(R,\mathfrak{m},k)$ を局所環とする.
(1) Aの任意のM-還元Bに対して, Bに含まれるAの極小M-還元Cが存在する. 更に $\mathfrak{m}C_1=\mathfrak{m}A_1\cap C_1$ が成り立つ.
(2) k が無限体のとき, AのM-還元Bについて次の条件は同値:
(a) BはAの極小M-還元.
(b) $B/\mathfrak{m}B$ は多項式環で $M/\mathfrak{m}M$ は忠実な $B/\mathfrak{m}B$-加群.
(c) $\ell(M)=emb(B)$.
但し, ここに $\ell(M)=\dim_{A\otimes_R k}(M\otimes_R k)$, $emb(B)=\mu(B_1)$ (R-加群 B_1 の生成系の個数の最小値) とおく. $\ell(M)$ をMの <u>analytic spread</u> と言う. (解析的拡散度とでも訳すのだろうか. 良い訳があれば教えて下さい.) $emb(B)$ はBの<u>埋入次元</u>(embedding dimension) と言う.

定理2の証明はイデアルの還元の場合とほぼ同様の方針で出来るのでここでは述べない. 詳しくは[5]を見て下さい. 定理2により極小還元を求めるにはMの analytic spread を求めることが重要である. そこで $\ell(M)$ について分る基本的な事実を列挙する. $(R,\mathfrak{m},k)$ は局所環とする.

(1) 一般に $ht(A_+,M)\leqslant alt(A_+,M)\leqslant cora(A_+,M)\leqslant ara(A_+,M)$
$\leqslant \ell(M) \leqslant \dim(M)$
という不等式が成立する. 但し, ここでIがネーター環Aのイデアルのとき, $alt(I)=\max\{ht(P)\mid P$ はIの極小素イデアル$\}$, $cora(I)=\max\{n\mid H^n_I(A)\neq 0\}$, $ara(I)=\min\{n\mid$ ある $a_1,\cdots,a_n\in I$ に対して $rad(I)=rad(a_1,\cdots,a_n)\}$ (Iが次数付環Aの斉次イデアルのときは $a_1,\cdots a_n$ は斉次元とする) とおき, それぞれIの altitude, cohomological rank, arithmetical rank と呼ぶ. 又, MがA-加群のとき $ht(I,M)$

$= ht(IA/ann_A(M))$ などとおく．（このとき $cora(I, M) = \max\{n \mid H^n_I(M) \neq 0\}$ となる．）I が R のイデアルのとき

$$ht(I) = ht(G_I(R)_+),\quad ara(I) \leqslant ara(G_I(R)_+),$$
$$alt(I) \leqslant cora(I) \leqslant ara(I) \leqslant \ell(I) \leqslant \mu(I)$$

が成り立つ．特に R が I に沿って法擬平担（$\ell(I) = ht(I)$）であれば I は集合論的完全交叉である．

(2) 十分大な自然数 n に対して $\dim_R(M_n)$, $depth_R(M_n)$ は一定な値を取り不等式 $\dim_A(M) - \dim_R(M_n) \leqslant \ell(M) \leqslant \dim_A(M) - depth_R(M_n)$ が成り立つ．特に，十分大な n について A_n が Cohen-Macaulay R-加群ならば $\ell(A) = \dim(A) - \dim(R)$．

(3) $M \neq 0$ が擬平担であるためには $Supp_R(M) = Spec(R)$ かつ $\ell(M) = ht(A_+, M)$ が成り立つことが必要十分である．

例えば A が 4 次元の UFD ならば A が擬平担であることを見よう．R は局所環（かつ UFD）としてよい．$\dim R \leqslant 1$ ならば A が R-平担なので明白．$\dim(R) \geqslant 2$ とすると各 A_n は反射的 R-加群なので $depth(A_n) \geqslant 2$ 従って，上記(2)により $\ell(A) \leqslant 4-2 = 2$　$A \neq R$ とすれば $1 \leqslant ht(A_+) \leqslant \ell(A) \leqslant 2$．$ht(A_+) = 2$ なら A は擬平担．もし $ht(A_+) = 1$ なら K を R の商体として $A \otimes_R K \cong K[X]$ なので各 A_n は階数 1 の反射的 R-加群，従って R と同型である．故に A は R-自由加群で擬平担になる．

主類の次数付環．R 上の斉次次数付環 A について，一般に $ht(A_+) \leqslant emb(A)$ であるが，等式 $ht(A_+) = emb(A)$ が成り立つとき A は主類の次数付環（*homogeneous algebra of the principal class*）であると言う．$(R, \mathfrak{m}, k)$ が局所環のとき，A が主類であるためには A が擬平担で $A/\mathfrak{m}A$ が k 上の多項式環であることが必要十分である．更にこのとき R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ が $k(\mathfrak{p})$ 上の多項式環になる．A が主類の斉次次数付環であれば A_S, A/IA 及び A_{red} もそうである．但し，ここで S は R の積閉集合，I は R のイデアルとする．

命題．（主類の次数付環の構造定理）A について次の

条件は同値：

(1) Aは主類の斉次次数付環．

(2) Aは $R[X_1, \cdots, X_v]/I$ に同型，但し $v = emb(A)$ かつ I は $R[X_1, \cdots, X_v]$ の巾零イデアル．

(3) A_{red} は $R_{red}[X_1, \cdots, X_v]$, $v = emb(A)$ に同型．

特に，R が被約ならば A は R 上の多項式環と同型である．

証明．(2)と(3)の同値性及び(3)⇒(1)は明白．(1)⇒(2)を示そう．$I = Ker(R[X_1, \cdots, X_v] \to A)$ とおくと R の任意の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}}[X_1, \cdots, X_v] = v$ より $I_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}[\underline{X}]$．故に $I \subset \cap\, \mathfrak{p}[\underline{X}] = nil(R[\underline{X}])$．証明終り．

ネーター環 R のイデアル I は $ht(I)$ 個の元で生成されるとき<u>主類のイデアル</u>であると言われる．このことは $G_I(R)$ が主類の次数付環で $\mu(I) = \mu(I/I^2)$ であるということと同値である．（後者の条件は R が局所環ならば満たされる．）これにより，上記命題の応用として主類のイデアルに対して Davis 等により知られている結果を容易に示すことが出来る．結果だけ挙げよう：

(1) I が主類のイデアルであるためには，I が解析的に独立な元で生成されることが必要十分である．但し，ここで $a_1, \cdots, a_n$ が解析的に独立とは $f \in R[X_1, \cdots, X_n]$ が斉次多項式で $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ とすると f の各係数が $rad(a_1, \cdots, a_n)$ に属することである．

(2) I が根基イデアルのとき，I が主類のイデアルということと R-正則列で生成されているということは同値である．

(3) I が解析的に独立な元 $x_1, \cdots, x_n$ で生成されているとして $S = R[x_2/x_1, \cdots, x_n/x_1]$ とおくと，I を含む R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}S$ は S の素イデアルで $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$ であり，$S/\mathfrak{p}S \cong R/\mathfrak{p}[Y_2, \cdots, Y_n]$ が成り立つ．

<u>定理1の証明</u>．以上の準備のもとに定理1を証明しよう．M が擬平担として，B を A の極小 M-還元とする．R の任意の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $P = \mathfrak{p} \oplus B_+$ は B_+ の極小素イ

デアルである．（逆に B_+ の極小素イデアルは全てこのようにして得られる．）このとき

$$ht(P)=\dim(B_P)=\dim(B_{\mathfrak{p}})\geqslant\dim(M_{\mathfrak{p}})=\ell(M_{\mathfrak{p}})=\ell(M)=emb(B).$$

従って $ht(B_+)=emb(B)$ が成り立つので B は主類の次数付環で，R が被約なので B は R 上の多項式環と同型である．又，R の任意の極小素イデアルに対して $\dim(M_{\mathfrak{p}})=\dim(B_{\mathfrak{p}})$ かつ $B_{\mathfrak{p}}$ は体 $R_{\mathfrak{p}}$ 上の多項式環であることから $ann_{B_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})=0$．よって $ann_B(M)\subset\cap\,\mathfrak{p}[X]=0$ となり M は忠実な B-加群である．証明終り．

<u>応用</u>．定理1の応用として擬平担次数付加群について幾つかの事実を証明することが出来る：

(1) 集合 $\{\mathfrak{p}\in Spec(R)\mid M_{\mathfrak{p}}$ が擬平担$\}$ は $Spec(R)$ の開集合．

(2) A が擬平担とすると集合 $\{\mathfrak{p}\in Spec(R)\mid A\otimes_R k(\mathfrak{p})$ が多項式環$\}$ は $Spec(R)$ の開集合である．

(3) 集合 $\{\mathfrak{p}\in Spec(R)\mid A_{\mathfrak{p}}$ が主類の次数付環$\}$ は $Spec(R)$ の開集合である．

(4) M が擬平担とすると関数 $\mathfrak{p}\longmapsto e(M\otimes_R k(\mathfrak{p}))$ は上半連続である．

<u>定理</u>3．(1) R が被約な局所環，$M/\mathfrak{m}M$ が Cohen-Macaulay のとき，M が擬平担で $e(M\otimes_R k(\mathfrak{p}))$ が任意の $\mathfrak{p}\in Spec(R)$ について一定ということと M が R-自由加群ということは同値である．

(2) R が正則局所環のとき，M が擬平担な Cohen-Macaulay（又は Gorenstein）加群であるための必要十分条件は，M が R-自由加群で $M/\mathfrak{m}M$ が Cohen-Macaulay（又は Gorenstein）加群なることである．

証明の方針．(1) B を A の極小 M-還元とすると条件より B の任意の極小素イデアル P に対して $\mu(M_P)=\mu(M)$ が分り，これは M が B-自由加群であることを意味する．(2) は次の補題から従う：

補題．$(A, \mathfrak{m}) \longrightarrow (B, \mathfrak{n})$ が局所準同型，M，N が各々零でない有限生成 A－加群，有限生成 B－加群で N が A－平坦とする．$M \otimes_A N$ が Cohen－Macaulay（又は Gorenstein）B－加群であるためには M，$N/\mathfrak{m}N$ が共に Cohen－Macaulay（又は Gorenstein）であることが必要十分である．但し，Gorenstein の場合には B は A－平坦と仮定する．

応用(5) A が擬平坦な整閉整域とすると
(a) 拡大 $R \subset A$ について Going－down 定理が成り立つ．
(b) 各 A_n は反射的 R－加群である．
(c) $Cl(R) \longrightarrow Cl(A)$ なる単射準同型がある．
(d) $ht(A_+) = 1$ ならば $A \cong S_R(A_1)$ で A_1 は階数 1 の射影的 R－加群である．

例．$\mathfrak{p}$ が 2 次元局所整閉整域 R の高さ 1 の素イデアルのとき，次数付環 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(n)}$ がネーター環ならばある $\mathfrak{p}^{(r)}$ が主イデアルであるという Rees による事実を還元を使って証明しよう．仮定によりある r に対して $A = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{p}^{(nr)}$ は 3 次元整閉斉次整域で，各 A_n は反射的 R－加群なので，十分大な n に対して $1 \leqslant ht(A_+) \leqslant \ell(A) \leqslant \dim(A) - \mathrm{depth}_R(A_n) = 3 - 2 = 1$. 従って A は擬平坦なので上記(d)により $\mathfrak{p}^{(r)} = A_1$ は主イデアルである．

<u>次数付加群の還元指数</u>．次に還元の理論の応用として，極小還元を用いて次数付加群 M の数値的不変量 $\delta_A(M)$（M の還元指数）を定義し，これにより次数付環及びそれ上の次数付加群を研究することを考える．以下では断わらない限り，$(R, \mathfrak{m}, k)$ は局所環で剰余体 k は無限体であるとする．有限生成次数付 A－加群 M に対して

$$\delta_A(M) = \min\left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{ある } A \text{ の極小 } M\text{－還元 } B \text{ に対して} \\ B_1 M_m = M_{m+1} \ (\forall m \geqslant n) \end{array} \right\}$$

とおき，これを M の<u>還元指数</u>(reduction exponent) と呼ぶ．特に $\delta_A(A)$ を $\delta(A)$ と書く．R のイデアル I に対して $\delta(I) = \delta(R_I(R))$ とおけば $\delta(I) = \min\{n \mid$ ある I の極小還元 J に対して $JI^n = I^{n+1}\}$ となり，これはイデアル I の還元指数と呼

ばれSallyその他の人々によって研究されている不変量である．還元指数について知られる基本的な事実を次に列挙しよう．

(1)（Castelnuovoの補題）不等式

$\delta_A(M) \leqslant \mathrm{reg}_A(M) \underset{def.}{=} \min\{n \mid [H^i_{A_+}(M)]_j = 0 \ (i+j>n)\}$

が成り立つ．等号は一般には成立しない．

(2) Mが擬平担で $\dim(M)=d$ とすると，任意の $n>\delta_A(M)-\dim(M)$ に対して $[H^d_{A_+}(M)]_n=0$．従って，特にMがCohen-Macaulayであれば $\delta_A(M)=\mathrm{reg}_A(M)$

(3) Rが体でMがBuchsbaum加群ならば $\delta_A(M)=\mathrm{reg}_A(M)$．

(4) Rの任意のイデアルIに対して $\delta_{A/IA}(M/IM)=\delta_A(M)$．

(5) A/mAがCohen-Macaulay環とすると

$\delta(A) \leqslant f(A)+\ell(A)-\mathrm{emb}(A)$，但し，ここで $f(A)=e(A/mA)$．

(6)（Eakin-Sathaye）$\ell(A)=d$ かつ $\mu(A_n)<\binom{n+d}{d}$ が成り立つとき $\delta(A)<n$．

(7)（Sally）$\ell(A)>0$ かつ A/mA がCohen-Macaulay環のとき

$\delta(A) \leqslant \ell(A)!\,f(A)-1$．

(8) Rは局所環と限らないとし，Rの任意の素イデアルの剰余体は無限体とする．Mが局所的に擬平担ならば関数 $\mathfrak{p} \longmapsto \delta_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ は上半連続である．

還元指数についてはまだよく分っていないことが多い．例えば $\delta_A(M)$ はAの極小M-還元の取り方によらないか？又は，$\delta_A(M)$ の“良い”上界，下界は何か？等．還元指数についての詳しい研究は別の機会に譲ることにして，最後に $\delta(A)$ についての定理を一つ与えよう．Aを無限体k上の斉次次数付環として $A=S/I$，$S=k[X_1,\cdots,X_v]$，$v=\mathrm{emb}(A)$ と書き $i(A)=\min\{n \mid I_n \neq 0\}$ とおく．

定理4．Aは多項式環ではないとし，$\delta(A)=m$，$\dim(A)=d$ とおく．

(1) 一般に不等式 $\delta(A) \geqslant i(A)-1$ が成り立つ．

(2) 等式 $\delta(A)=i(A)-1$ が成り立つとすると

$$e(A) \leqslant \binom{v+m}{m} - d\binom{v+m-1}{m-1}.$$

更に，ここで等号が成り立つのはAがCohen-Macaulay環である場合に限る．このときAはSchenzelの意味でextremalなCohen-Macaulay環になる．即ちAはlinear resolutionを持ちAのBetti数，Cohen-Macaulay型などは完全に決定されている．

証明の概略．$\delta(A)=i(A)-1$としてBがAの極小還元で$B_1A_m = A_{m+1}$とすると

$$A/B_1A \cong k \oplus (A_1/B_1) \oplus \cdots \oplus (A_m/B_1A_{m-1}),$$

$$B_1A_i \cong B_1 \otimes_k A_i \quad (1 \leqslant i < m)$$

なので

$$e(A) = \mathrm{rank}_B(A) \leqslant \mu_{B_N}(A_N) = \dim_k(A/B_1A) \quad (N = B_+)$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{v+i-1}{i} - d\sum_{i=0}^{m-1}\binom{v+i-1}{i} = \binom{v+m}{m} - d\binom{v+m-1}{m-1},$$

かつ等式が成り立つのはAがB-自由加群の場合，即ちAがCohen-Macaulay環のときに限る．

例．(1) Aが代数的閉体上の斉次次数付整域のとき，$\delta(A)=1$と$\mathrm{reg}(A)=1$は同値で，このときAはCohen-Macaulay環かつ$\mathrm{emb}(A)=e(A)+\dim(A)-1$．このようなAの構造は完全に分っている．即ち，$\mathrm{Proj}(A)$はminimal varietyと呼ばれている射影多様体である．

(2) $A = k[X_1, \cdots, X_v]/(X_1, \cdots, X_v)^r \cap (X_v)$ $(v, r \geqslant 2)$とすると$\delta(A) = \mathrm{reg}(A) = 1 > 0 = e(A) + \dim(A) - \mathrm{emb}(A)$.

参考文献

[1] M. Herrmann and U. Orbanz, On equimultiplicity, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91 (1982), 207–213.

[2] J. Lipman, Equimultiplicity, reduction, and blowing-up, Commutative Algebra, Analytic Methods, Dekker 1982, 111–147.

[3] D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954), 145–158.

[4] A. Ooishi, Castelnuovo's regularity of graded rings and modules, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 627–644.

[5] A. Ooishi, Reductions of graded rings and pseudo-flat graded modules.

(December 1985)

Level rings, doubly Cohen-Macaulay complexes and algebras with straightening laws

名古屋大学・理学部　日比孝之

序. R. Stanley は, [S_1] において, combinatorics の立場から, Cohen-Macaulay 環と Gorenstein 環の中間に位置する "level 環" の概念を定義した.

次数付環 $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ は基礎体 $k=R_0$ 上定義されており, $R=k[R_1]$ かつ $\dim_k R_1<\infty$ を満たすものとする. 以下, この様な R, 即ち, homogeneous k-algebra を考察の対象とする. 今,

$$H(R,n):=\dim_k R_n$$

$$P_R(\theta):=\sum_{n=0}^{\infty}H(R,n)\theta^n$$

を, それぞれ, R の Hilbert 関数, Poincaré 級数とすると,

$$P_R(\theta)=\frac{h_0+h_1\theta+\cdots+h_s\theta^s}{(1-\theta)^d}\quad (d=\dim R,\ h_s\neq 0)$$

と表すことが可能である. ここで,

$$h(R):=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$$

を R の <u>h-vector</u> と呼ぶ.

さて，R が Cohen-Macaulay 環であれば，$h_s \leq \mathrm{type}(R)$ である．実際，k を無限体として，R_1 より regular sequence $\underline{f} = \{f_1, \cdots, f_d\}$ を取り，$R/(\underline{f})$ を考えることによって，R は Artin環 $\bigoplus_{0 \leq n \leq s} R_n$ であると仮定して，一般性を失なわない．すると，

$$\mathrm{type}(R) := \dim_k \mathrm{Soc}(R) \geq \dim_k R_s = h_s$$

と所期の結果を得る．もっとも，$h_s = \dim_k [K_R]_{-a(R)}$，$\mathrm{type}(R) = \mu(K_R)$ であることに注意すれば，$h_s \leq \mathrm{type}(R)$ は直ちに従う．

そこで，Cohen-Macaulay homogeneous k-algebra R が，$h_s = \mathrm{type}(R)$ を満たす時，<u>level環</u>と呼ぶ．例えば Gorenstein環は，$h_s = 1$ なる level環である．

本稿では，Stanley が level環を定義するに至った，combinatorial な背景と，その level環が combinatorics の立場からは，きわめて自然な概念であることを暗示する Baclawski [B2] の結果を詳述し，更に，現在準備中の論文 [H5] の内容である，ASL (algebra with straightening laws) と level環との関係についても，若干触れる．

ところで，歴史と権威のある Cohen-Macaulay 環と Gorenstein環の中間に位置する概念などを軽々しく定義すべきではないと言った意見は確かに耳にする．しかしながら，可換環論と combinatorics の境界線上に立って，両分野を見渡した時，今までは，可換環論の概念を combinatorics に持ち込む方向のみに，力点が置かれていたわけであるが，level環を定義することは，それとは逆行する試みであり，その様な観点からすれば，level環が，多少なりとも，興味の対象となることは，不思議ではない．なお，現段階では，level環は homogeneous k-algebra のみを対象にして定義しているが，近い将来，可換環論の分野での level環の「市民権」獲得運動を展開しようとするならば，一般の Noether 局所環に対して，level環をどう定義するかが重要な課題となる．

§1. Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ の Betti 数 $\beta_i(k[\Delta])$

a) 次数付環 $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ は，homogeneous k-algebra であって，$\mathrm{emb}(R):=\dim_k R_1 = v$, $\dim R = d$ としよう．$A=k[X_1,\cdots,X_v]$ を体 k 上の v 変数多項式環とし，$R=A/I$, I は A の homogeneous ideal, と表す．

さて，R の A-module としての次数付 minimal free resolution を

$$(*)\quad 0\longrightarrow F_h \xrightarrow{f_h} F_{h-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{g} R\longrightarrow 0$$

とし，

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} A(-a_{ij}) \qquad (a_{ij}\in\mathbb{Z})$$

と置く．ここで，

$$\beta_i=\beta_i(R):=\mathrm{rank}_A F_i$$

は，R の Betti 数である．もちろん，$\beta_0=1$ で，homology 代数の言葉で述べれば，$\beta_i=\dim_k \mathrm{Tor}_i^A(R,k)$ となる．$(*)$ における h は，R の A-module としての homology 次元 $hd_A R$ であり，一般に，$v-d\leq h\leq v$, $\mathrm{depth}\,R=v-h$ である．特に，R が Cohen-Macaulay 環ならば $h=v-d$, $\beta_{v-d}(R)=\mathrm{type}(R)$ となる．

b) 有限集合 V を vertex 集合とする simplicial complex Δ を考える．即ち，Δ は V の部分集合の集合であって，

i) $\{v\}\in\Delta \quad (\forall v\in V)$

ii) $\sigma\in\Delta,\ \tau\subset\sigma$ ならば $\tau\in\Delta$

を満たすものである．$A=k[v\,;\,v\in V]$ を体 k 上の $\#(V)$ 変数多項式環とし，A の ideal I_Δ を

$$I_\Delta := (v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_r}\,;\, i_1<i_2<\cdots<i_r,\ \{i_1,\cdots,i_r\}\notin\Delta)$$

で定義し，$k[\Delta]:=A/I_\Delta$と置く．$k[\Delta]$をΔの<u>Stanley-Reisner環</u>と呼ぶ．

以下，$k[\Delta]$に関する詳細は割愛し，昨年度の可換環論Symposium（於 西条）での筆者の報告集[H_7]の参照箇所のみ明記する．

C）$k[\Delta]$のBetti数を計算する公式は，Hochster[Ho_2]で与えられている．それを述べる前に，記号等の準備をしよう．

Δがvertex 集合V上のsimplicial complex，$W\subset V$の時，W上のsimplicial complex Δ_Wを$\Delta_W:=\{\sigma\in\Delta;\ \sigma\subset W\}$で定義する．また，$\tilde{H}_i(\Delta;k)$で，$k$を係数とする$\Delta$のi-th reduced homology group（cf.[Ho_2, §2]）を表す．

さて，$\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta],k)$を自然に$\mathbb{Z}$-次数付 A-moduleと考える時，そのPoincaré級数は

<u>定理</u>（Hochster[Ho_2]）

$$P_{\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta],k)}(\theta)=\sum_{W\subset V}\{\dim_k \tilde{H}_{\#(W)-i-1}(\Delta_W;k)\}\theta^{\#(W)}$$

で与えられる．従って，

<u>系1</u>　$$\beta_i(k[\Delta])=\sum_{W\subset V}\dim_k \tilde{H}_{\#(W)-i-1}(\Delta_W;k)$$

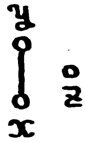
となる．特に，ΔがCohen-Macaulay complex（cf.[H_7, P.33]）の時には，

<u>系2</u>　$\#(V)=v$，$\dim k[\Delta]=d$で，ΔがCohen-Macaulayであれば，

$$\mathrm{type}(k[\Delta])=\beta_{v-d}(k[\Delta])=\sum_{W\subset V}\dim_k \tilde{H}_{\#(W)-(v-d)-1}(\Delta_W;k)$$

となる．なお，Δのsimplicial complexとしての次元を$\dim(\Delta)$（cf. [H_7, P.24]）とする時，$k[\Delta]$のk-algebraとしての次元 $\dim(k[\Delta])$ は，$\dim(\Delta)+1$ である．

d) 簡単な例を使って，Hochster の定理を確認しよう．

例 $\Delta =$ 

とする時，$v=3$，$d=2$ であって，

$k[\Delta]$ の minimal free resolution は

$$0\longrightarrow A(-3)\xrightarrow[{[y,\,-x]}]{} A(-2)\oplus A(-2)\xrightarrow[{\begin{bmatrix}xz\\ yz\end{bmatrix}}]{} A\to k[\Delta]\to 0$$

となる．すると $\otimes_A k$ を施して，$\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta],k)$ を考えれば，

$$P_{\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta],k)}(\theta)=\begin{cases}1 & (i=0)\\ 2\theta^2 & (i=1)\\ \theta^3 & (i=2)\\ 0 & (i\geqq 3)\end{cases}$$

となる．他方，

$$\dim_k \widetilde{H}_i(\phi;k)=\begin{cases}1\ (i=-1)\\ 0\ (i\neq -1)\end{cases}\qquad \dim_k \widetilde{H}_i([\,\mathsf{I}\ \circ\,];k)=\begin{cases}1\ (i=0)\\ 0\ (i\neq 0)\end{cases}$$

$$\dim_k \widetilde{H}_i([\overset{\circ}{\alpha_1}\ \overset{\circ}{\alpha_2} \cdots \overset{\circ}{\alpha_n}];k) = \begin{cases} n-1 & (i=0) \\ 0 & (i\neq 0) \end{cases} \qquad \dim_k \widetilde{H}_i\left(\left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \vdots \\ | \\ \circ \end{array}\right];k\right) = 0 \quad (\forall i)$$

等々であることを考慮して，Hochster の定理を使って，$P_{\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta],k)}(\theta)$ を計算すると，

$$P_{\mathrm{Tor}_0^A(k[\Delta],k)}(\theta) = \dim_k \widetilde{H}_{-1}(\phi;k)$$

$$P_{\mathrm{Tor}_1^A(k[\Delta],k)}(\theta) = \{\dim_k \widetilde{H}_0([\overset{\circ}{y}\ \overset{\circ}{z}];k)\}\theta^2 + \{\dim_k \widetilde{H}_0([\overset{\circ}{x}\ \overset{\circ}{z}];k)\}\theta^2$$

$$P_{\mathrm{Tor}_2^A(k[\Delta],k)}(\theta) = \{\dim_k \widetilde{H}_0([\ \overset{y}{\underset{x}{|}}\ \circ z];k)\}\theta^3$$

と，確かに所期の結果を得る．

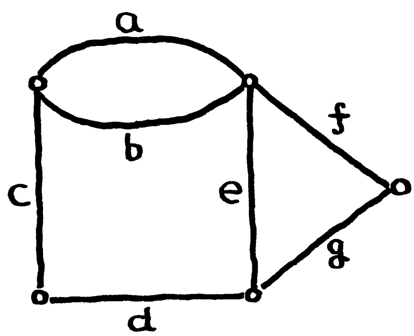
§2. G-complex（或は"matoroid"）と level 環

本節では，Stanley が level 環を定義する motivation となった G-complex に関する話題を記述する．

a) V を vertex 集合とする simplicial complex Δ が <u>G-complex</u>（或は "matoroid"）であるとは，$\forall W \subset V$ に対して，Δ_W が pure である時を言う．ここで，simplicial complex が <u>pure</u> とは，その maximal face（facet とも呼ぶ，cf. [$\overline{H_7}$, P.24]）の次元がすべて等しい時を言う．

例$_1$ Vをvector空間の零でない有限個のvectorの集合、ΔをVの一次独立な部分集合全体の集合とすると、ΔがG-complexとなることは、線型代数の基礎事実に他ならない。この例は、G-complexの起源とも言うべきもので、G-complexは、線型代数における一次独立の概念を抽象化したものであって、combinatorial geometry (cf. Crapo-Rota [C-R])の土台を成している。

例$_2$ Gを有限graphでmultiple edgeは許すが、loopは含まないものとしよう。VをGのedge全体の集合、Δをcycleを含まないVの部分集合全体の集合としよう。この時、ΔはG-complexとなる。例えば、Gを



とすれば、Gのcycleは、ab, acde, bcde, efg, acdgf, bcdgfとなる。すると、$\mathcal{A}$を$\langle a,b,c,d,e,f,g\rangle$を基底とする7次元vector空間、$\mathcal{B}$を$a+b$, $a+c+d+e$, $e+f+g$が生成する$\mathcal{A}$の部分空間とする時、$\mathcal{A}/\mathcal{B}$において vectorの集合$V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$を考えて、例$_1$の如く構成したG-complex Δが、graph Gから得られるものである。

b) ΔをG-complexとすれば、combinatorial geometryにおける、いわゆる"Tutte-Grothendieck decomposition"(Brylawski [Br])の議論を経て、Δが任意の体上Cohen-Macaulayであることが、比較的容易に示せる。しかしながら、combinatorial geometryとは

無関係に，純粋に可換環論的にも，G-complex が Cohen-Macaulay であることが簡単に示せる (cf. [$\widetilde{H}_4$])。

C) Δ を vertex 集合 V 上の simplicial complex, $d = \dim(\Delta)+1$ とし，Δ の f-vector, h-vector (cf. [$\widetilde{H}_7$, P.24]) を，それぞれ，$f(\Delta)=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$, $h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ と置き，

$$\widetilde{\chi}(\Delta)=\sum_{i=-1}^{d-1}(-1)^i f_i=\sum_{i=-1}^{d-1}(-1)^i \dim_k \widetilde{H}_i(\Delta;k)$$

を Δ の reduced Euler characteristic とすると，$h_d=(-1)^{d-1}\widetilde{\chi}(\Delta)$ となる．特に，Δ が Cohen-Macaulay ならば，$\widetilde{H}_i(\Delta;k)=0$ $(i \neq d-1)$ である (cf. [$\widetilde{H}_7$, P.34]) から，$h_d=\dim_k \widetilde{H}_{d-1}(\Delta;k)$ を得る．

d) さて，Δ が G-complex ならば，Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ が level 環であることを証明しよう．

まず，§1, C), 系$_2$ において，Δ が G-complex であれば，Δ_W も W 上の G-complex 故，Cohen-Macaulay，すると，C) で述べたことから，

$$\mathrm{type}(k[\Delta])=\sum_{\#(W)-(v-d)-1=\dim(\Delta_W)}(-1)^{\dim(\Delta_W)}\widetilde{\chi}(\Delta_W)$$

となる．ところで，$\#(W)-(v-d)-1=\dim(\Delta_W)$ が成立する為には，$(d-1)-\dim(\Delta_W)=v-\#(W)$，換言すれば，$\forall v \in V-W$ は，$\mathrm{star}_\Delta(\{v\}):=\{\sigma\in\Delta;\ \sigma\cup\{v\}\in\Delta\}=\Delta$ を満たさなくてはならない．今，$\mathrm{core}_\Delta V:=\{v\in V;\ \mathrm{star}_\Delta(\{v\})\subsetneq\Delta\}$ と置くと，$k[\Delta]=k[\mathrm{core}_\Delta V][v;\ v\in V-\mathrm{core}_\Delta V]$ となる (cf. [$\widetilde{H}_7$, P.42]) 故，最初から，$\mathrm{core}_\Delta V=V$ と仮定してよい．しからば，$\mathrm{type}(k[\Delta])=(-1)^{d-1}\widetilde{\chi}(\Delta)=h_d$ となる．

一般に，$h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ で，$h_d \neq 0$ ならば，Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ の k-algebra としての h-vector $h(k[\Delta])$ は，Δ の simplicial complex としての h-vector $h(\Delta)$ と一致 (cf. [$\widetilde{H}_7$, P.32]) する．従って，

$\mathrm{type}(k[\Delta]) = k_d$ は，$k[\Delta]$がlevel環であることを示している．即ち，

<u>定理</u>(Stanley[S1]) ΔがG-complexならば，$k[\Delta]$はlevel環である．

この結果は，Stanleyがlevel環を定義するにあたってのmotivationとなった重要なものである．

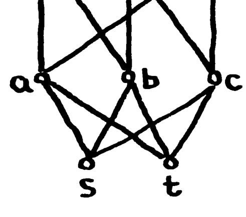
§3. Doubly Cohen-Macaulay connectivity

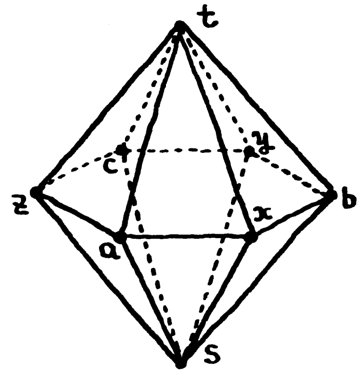
a) まず，Baclawski[B2]に従って，doubly Cohen-Macaulay connectivityの定義を述べよう．

Δをvertex集合V上のCohen-Macaulay complexとする．この時，Δが<u>doubly Cohen-Macaulay connected</u>であるとは，$\forall v \in V$に対して，$\Delta_{V-\{v\}}$がCohen-Macaulayであり，かつ$\dim(\Delta_{V-\{v\}}) = \dim(\Delta)$を満たす時を言う．

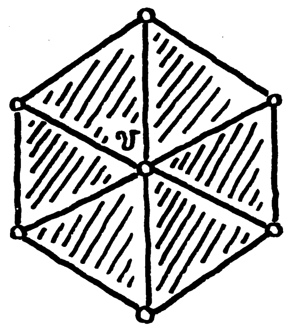
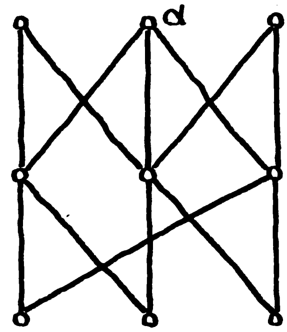
また，Cohen-Macaulay poset Qがdoubly Cohen-Macaulay connectedであるとは，Qのorder complex $\Delta(Q) := \{Q\text{の non-empty chains}\}$がdoubly Cohen-Macaulay connectedである時を言う．

例えば，ΔがV上のG-complexで，$V = \mathrm{core}_\Delta V$となる時，$\Delta$はdoubly Cohen-Macaulay connectedである．また，球面の三角形分割，例えば，

$Q =$ 

$\Delta(Q) =$ 

等々は，doubly Cohen-Macaulay connected である．他方，

$\Delta =$  $Q =$ 

は，doubly Cohen-Macaulay connected ではない)．実際 $\dim(\Delta)=2$ だけれども，$\dim(\Delta_{V-\{v\}})=1$ であるし，また $Q-\{\alpha\}$ は，Cohen-Macaulay ではない)．

b) simplicial complex Δ の h-vector を $h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$，$d=\dim(\Delta)+1$，とする時，$\Delta$ の a-invariant $a(\Delta)$ を

$$a(\Delta) := -(d - \max_{h_s \neq 0} s) \qquad (\leqq 0)$$

で定義する．Δ が Cohen-Macaulay の時，$a(\Delta)$ は，Goto-Watanabe [G-W] で定義された意味での $k[\Delta]$ の a-invariant $a(k[\Delta])$ に他ならない)．

C) <u>補題</u>　Δ を vertex 集合 V，$\#(V)=v$，上の Cohen-Macaulay complex，$\dim(\Delta)=d-1$，とする時，次は同値である：

(i) Δ は doubly Cohen-Macaulay connected，
(ii) $\forall W \subsetneqq V$，$\forall i < \#(W)-(v-d)$ に対して，$\tilde{H}_i(\Delta_W; k)=0$ である，
(iii) $\beta_{v-d}(k[\Delta])=(-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta)$ ．

[証明] (i)⇒(ii) $v \in V-W$を取って, $\Delta' = \Delta_{V-\{v\}}$ と置くと, $\Delta_W = \Delta'_W$ である. Δは doubly Cohen-Macaulay connected だから, Δ'は $\dim(\Delta') = d-1$ なる $V-\{v\}$上の Cohen-Macaulay complex である. すると, $i > (v-1)-d$ ならば, $\beta_i(k[\Delta']) = 0$, 即ち, §1, C), 系1 によって, $\tilde{H}_j(\Delta_W)$は, $j < \#(W) - \{(v-1)-d\} - 1$ で消えなければならない.

(ii)⇒(iii) $\forall W \subsetneq V$ に対して, $\tilde{H}_{\#(W)-(v-d)-1}(\Delta_W ; k) = 0$ だから, $\beta_{v-d}(k[\Delta]) = \dim_k \tilde{H}_{d-1}(\Delta ; k) = (-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta)$ となる.

(iii)⇒(i) $k_d = (-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta) = \beta_{v-d}(k[\Delta]) \neq 0$だから, $a(\Delta) = 0$, 従って, $\forall v \in V$に対して $\dim(\Delta_{V-\{v\}}) = d-1$ である. 仮に, $\Delta_{V-\{v\}}$ がCohen-Macaulayでないとすると, $\tilde{H}_j(\Delta_{V-\{v\}} ; k) \neq 0$ なる $j < d-1$ が存在. ところが, ΔはCohen-Macaulayであるから, $\beta_i(k[\Delta]) = 0$ $(i > v-d)$ 故, $j < d-2$ であれば $\tilde{H}_j(\Delta_{V-\{v\}} ; k) = 0$でなければならない. 従って, $\tilde{H}_{d-2}(\Delta_{V-\{v\}} ; k) \neq 0$. すると, $\beta_{v-d}(k[\Delta]) > (-1)^{d-1}\tilde{\chi}(\Delta)$ となる.

補題の系として

<u>定理</u> (Baclawski [B_2]) ΔがCohen-Macaulay complex の時, 次は同値である:

(i) Δはdoubly Cohen-Macaulay connected,

(ii) $k[\Delta]$ は level環で $a(\Delta) = 0$.

この結果の御陰で, level 環には, doubly Cohen-Macaulay connectivity という combinatorial な概念の環論的表現という決定的な意味付けが与えられる.

d) ところで, C) の定理における $a(\Delta) = 0$という条件は, かなり特殊な条件である. 例えば, Lを distributive lattice とし, $Q = L - \{\hat{0}, \hat{1}\}$ (後述) と置く時, $a(\Delta(Q)) = 0$ ならば, Lは Boolean lattice , 特に, $k[\Delta(Q)]$ は Gorenstein 環となる.

§4. Algebras with straightening laws, integral partially ordered sets and level rings

前節までは, simplicial complex Δ のどの様な性質が, Stanley-Reisner 環 $k[\Delta]$ を level 環にならしめるかということを考察した. 本節では, ASL 整域と level 環の関係を中心にして, [H-W1], [H3], [H5] の survey を行なう.

a) k を基礎体, R を k-algebra, Q は finite poset (partially ordered set) で, Q は R の部分集合であるとする. Q の元の R における積 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\ell$ ($\alpha_i \in Q$) を <u>monomial</u>, $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_\ell$ ならば, <u>standard monomial</u> と呼ぶ.

さて, R が ASL (algebra with straightening laws) on Q over k であるとは, 次の条件を満たす時を言う:

(ASL-1) standard monomial 全体の集合が R の k 上の vector 空間としての基底を成す.

(ASL-2) $\alpha, \beta \in Q$ が, Q の順序で比較できない ($\alpha \not\sim \beta$ と書く) 時, $\alpha\beta$ は standard ではないから, (ASL-1) によって

$$(*) \qquad \alpha\beta = \sum_i r_i \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_{\ell_i}},$$

$0 \neq r_i \in k$, $\gamma_{i_1} \leqq \gamma_{i_2} \leqq \cdots$, と k 係数の standard monomials の和として一意的に書けるが, この時, $\gamma_{i_1} \leqq \alpha, \beta$ ($\forall i$) が成立する.

b) Stanley-Reisner 環 $k[Q]$ ($:= k[\Delta(Q)]$) は, (*) の右辺がすべて $=0$ となった, いちばん簡単な ASL ("discrete" ASL とも呼ぶ) であると考えることができる. 以下, 考える ASL は homogeneous, 即ち, $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ は $R_0 = k$ 上の次数付環で, $Q \subset R_1$ を満たすものとする.

さて, (ASL-1) によって, Q 上の ASL R の Hilbert 関数

やPoincaré級数は，$k[Q]$ のHilbert 関数やPoincaré級数と一致する．また，(ASL-2) の $\gamma_{i_1} \leq \alpha, \beta$ の条件は，ちょっと不思議な気がするが，これによって，$k[Q]$ が，Cohen-Macaulay (resp. level, Gorenstein) 環であれば，R も so であることが従うのである．

即ち，ASLの理論は，Stanley-Reisner環 $k[Q]$ の環論的性質（換言すれば，poset Q のcombinatorial な性質）を，もう少し広い範囲の環に，遺伝させることをその目的とするのである．そして，この様な観点から考察すれば，ASL よりも隔段に広い（cf.[H_1]）概念である Hodge algebraの理論[D-E-P] に至るのは，きわめて自然な現象である．しかしながら，Hodge algebra の概念は広範過ぎる故に，"discrete" Hodge algebra が適当な combinatorial な概念とはうまく結び付かない．そこで，[H_1]の結果を保ちつつ，"discrete" な algebra がGraph 理論と結び付く様な ASL と Hodge algebraの間に位置する概念を探す試みをしたものが [H_6] である．

C) 古典的な不変式論に登場するASLの具体例については，[D-E-P, III] 等を参照するとして，その様な例を考察すると，整域であるASLは，いろいろと良い性質を持つことが期待される．そして，整域であるASLの環論的性質を調べようとすると，(☆) どんな poset上に整域となるASLが存在するか？ という問が必然的に浮かび上がる．

そこで，(☆) の問を combinatorial に解釈する為に，"integral poset" の概念を定義する．

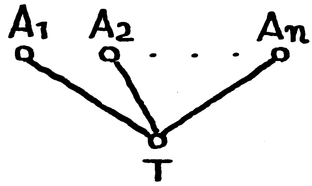
<u>定義</u> Q が体 k 上 <u>integral</u> であるとは，Q 上に homogeneous ASL 整域 R over k が存在する時を言う．

d) Q が integral ならば，Q には minimal element が唯１つ存在する．それを T と置く．

以下，rank(Q) $(:= \dim(\Delta(Q)))$ $= d-1$ $(d>1)$ と置く．

まず，$d=2$ の時は

$Q =$



$(n \geqq 1)$

となるが，任意の n に対して，Q は integral である．実際，$k[x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, y^n]$ は Q 上の ASL 整域である．

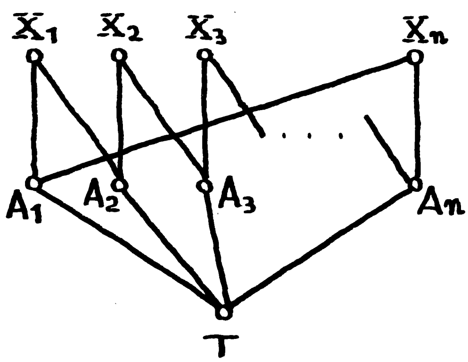
e) 次に，$d=3$ の時であるが，integral poset の分類は，完成まではまだまだ長い道程を歩まねばならない．以下，既知の事実を列挙しよう．

1° Q が integral ならば $Q-\{T\}$ は connected である．他方，$d=3$ の時，Q が Cohen-Macaulay と，$Q-\{T\}$ が connected であることは同値だから，

<u>定理</u>([H-W1]) 体上の3次元 homogeneous ASL 整域は Cohen-Macaulay環である．

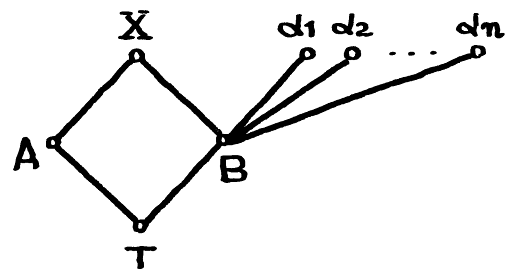
<u>例</u>1

$Q =$



は，$Q-\{T\}$ が connected であるけれども，$n \geqq 5$ の時，integral ではない．$n \leqq 4$ ならば，Q は integral である．

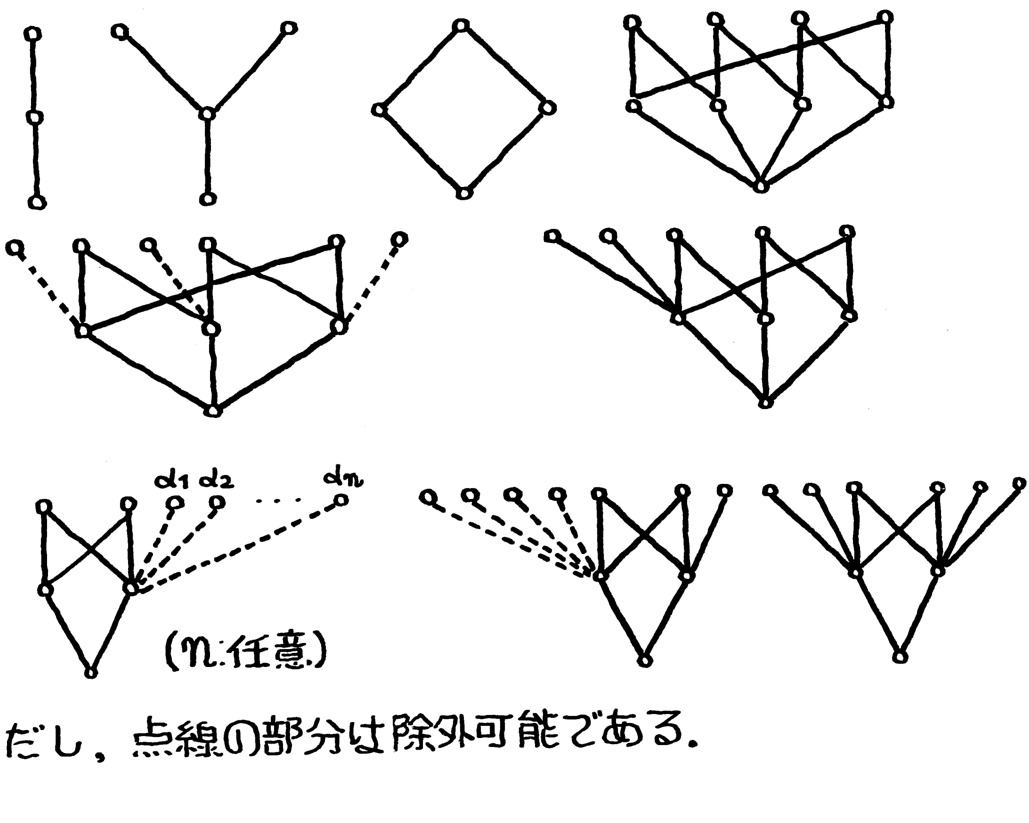
__例__$_2$

$Q=$ 

は、k が無限体の時、k 上 integral であるが、k が有限体の時、$n \gg 0$ ならば、integral ではない)。

2° integral poset Q で、Q 上に homogeneous ASL で Gorenstein 環となるものが存在するもの（即ち、weakly Gorenstein poset）は、完全に分類ができている。

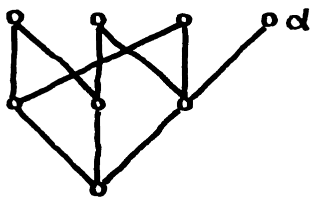
__定理__([H-W$_1$]) $d=3$, k が無限体の時、weakly Gorenstein poset は、次に限る：

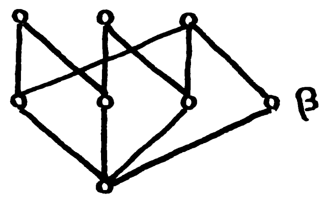


ただし、点線の部分は除外可能である。

なお，更に，kを代数的閉体と仮定すると，3次元homogeneous Gorenstein ASL 整域は，すべてrational（即ち，商体が基礎体k上純超越的）であり，また，non-normal な3次元 homogeneous Gorenstein ASL 整域は分類ができる（cf. [H-W$_2$]）.

3° $Q-\{T\}$ を bipartite graph と考えた時，その端点を Q の“枝”と呼ぶ。例えば，

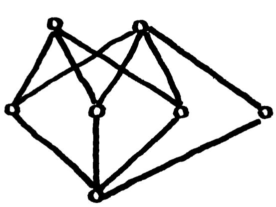




において，αとβは枝である。

<u>補題</u> Qがintegralならば，$Q-\{T\}$の任意のminimal elementは枝ではない。

従って，例えば

$Q=$ 

はintegralではない)。

4° さて，3° の補題を基礎として，更に詳しく，3次元homogeneous ASL整域を調べることによって，

<u>定理</u>([H$_5$]) 3次元homogeneous ASL 整域はlevel 環である。

が得られる．なお，

<u>予想</u> R を体 k 上の3次元Cohen-Macaulay homogeneous 整域で，$a(R)<0$ とすれば，R は level 環である．

は，上記定理を一般化しようとした点で興味深い．

f）古典的によく知られた poset の分類と integral poset の関係がどうなっているかを調べることは，当然 integral poset の理論を築き上げるにあたっての重要な課題である．

<u>定理</u>$_1$（[H$_3$]）L を finite lattice，k を基礎体とし，

$$R_k[L]=k[X_\alpha;\alpha\in L]/(X_\alpha X_\beta - X_{\alpha\wedge\beta}X_{\alpha\vee\beta};\alpha\not\sim\beta)$$

と置く．この時，次は同値である：

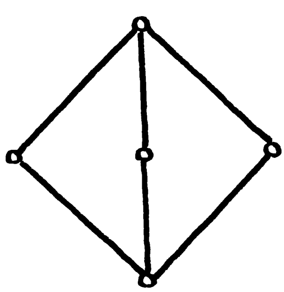
（i）$R_k[L]$ はL上のASLである．

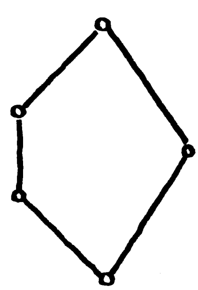
（ii）$R_k[L]$ は整域である．

（iii）L は distributive lattice である．

更に，この条件が満たされる時，$R_k[L]$ は Cohen-Macaulay，normal かつ rational である．

証明を概観しよう．まず，(i)⇒(iii)は，$\alpha,\beta,\gamma\in L$ を取って，$\alpha^2\beta\gamma$ の standard monomial 表現を，$\alpha^2(\beta\gamma)$ と $(\alpha\beta)(\alpha\gamma)$ の両方から計算して，(ASL-1) を使うと，distributive lattice の定義に至る．次に，(ii)⇒(iii)は，L が distributive でないと仮定すると，

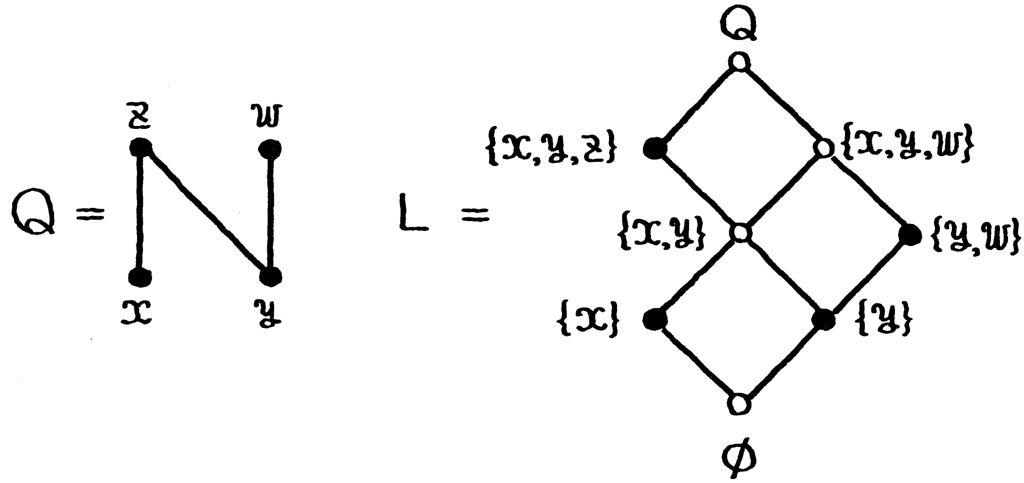




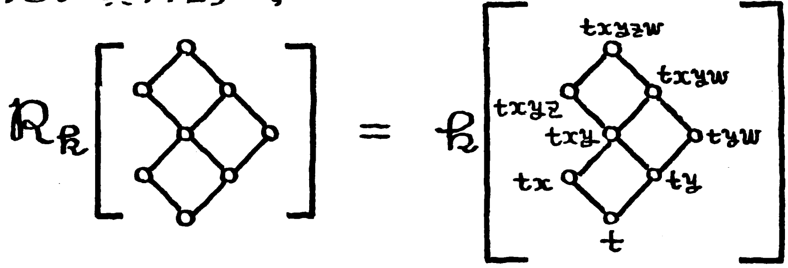
のいずれかを，Lがsublatticeとして含むことから，直ちに従う．定理の証明で，大切なところは，(iii)⇒(i)&(ii)を導くところで，それには，Birkhoffの古典的なdistributive lattice の構造定理が必要である．

一般に，Lをlatticeとする時，$\alpha \in L$がjoin-irreducibleであるとは，$\alpha = x \vee y$ならば$\alpha = x$または$\alpha = y$を満たす時を言う．また，poset Qの部分集合Iがposet idealとは，$\alpha \in I$，$\beta \in Q$，$\beta \leq \alpha$ならば$\beta \in I$を満たす時を言う．

さて，Lをdistributive lattice，QをLのjoin-irreducibleな元全体から成るLのsubposetとし，J(Q)をQのposet ideal全体がその包含関係で作るlatticeとする．この時Birkhoffの構造定理とは，$L \simeq J(Q)$を主張するものである．例えば，



そこで，distributive latticeが与えられた時，構造定理を使って，$R_k[L]$をaffine semigroup ringとして表現するのである．具体的に，



と書いてあげば，その idea は簡単に理解できる．
更に，$\mathcal{R}_k[L]$ が affine semigroup ringとして構成できることから，Hochsterの判定法（cf.[Ho_1]）を使えば，$\mathcal{R}_k[L]$ は normal であることがわかるし，$\mathcal{R}_k[L]$が rational であることは明らかである．もちろん，distributive lattice は，Cohen-Macaulay posetだから，$\mathcal{R}_k[L]$も Cohen-Macaulay環である．
ところで，normal affine semigroup ring に対しては，Stanley の結果（cf.[S_2]）によって，その canonical moduleがきわめて具体的に計算できる．我々の $\mathcal{R}_k[L]$ の場合にそれを実行し，$\mu(K_{\mathcal{R}_k[L]})$ をもとめることによって

定理$_2$（[H_3]）$\mathcal{R}_k[L]$，$L=J(Q)$，が Gorenstein環となる為の必要十分条件は，Q が pure となることである．

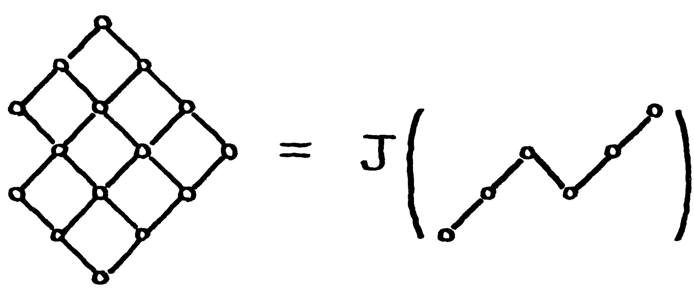
Birkhoff の構造定理は，群論で言えば，有限生成Abel群の基本定理に相当するもので，古典的な束論における重要な結果である．定理$_1$ は，distributive lattice の束論的性質を，ASL を媒介として，環論的性質から把握したものと考えることができる．この様に，integral poset の理論は，partially ordered set の combinatorial な性質から，如何にして，整域を構成するかということを，その土台としているのである．
さて，distributive lattice が integral であることがわかった以上は，もう少し一般の modular lattice等もintegral であることが期待できる．しかしながら，modular lattice に対しては，distributive lattice における Birkhoff の定理の様な簡単な構造定理がなく，状況は暗い．他方，integral poset は常に Cohen-Macaulay であるという予想も，大変確からしく思いたい心情であるが，別に根拠はない．

9) 一般に "良い" Cohen-Macaulay poset Q が与えられた時，Q 上の homogeneous ASL 整域はすべて level 環になるのではないかと期待できる．もっとも "良い" と

いう定義が難しいのであるが…. 一応, 古典的な poset の理論や束論での評価を参考にするのが, まず妥当な線であると言える. そんな立場からすれば, Boolean lattice や distributive lattice は, きわめて"良い" poset であると言ってよいだろう.

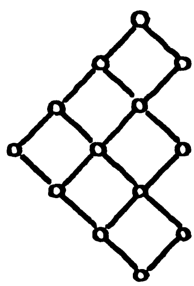
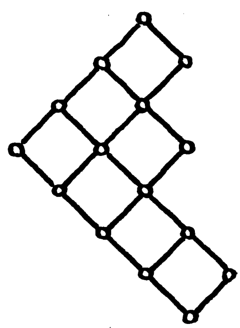
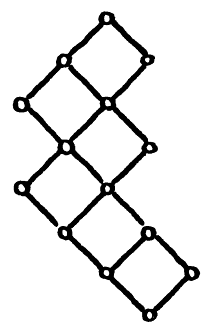
Boolean lattice B_n は, $\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合全体がその包含関係で作る lattice であって, $\hat{0}$ および $\hat{1}$ を, それぞれ, B_n の最小元・最大元とすれば, $\Delta(B_n-\{\hat{0},\hat{1}\})$ は, $\mathbb{R}^{n-1}$ において, n 個の affine 独立な集合の凸閉包である simplex T^{n-1} の boundary complex (cf. [H7, P.26]) だから, 特に, 幾何学的実現 $|\Delta(B_n-\{\hat{0},\hat{1}\})|$ は, 球面 S^{n-2} に位相同型となり, $k[\Delta(B_n-\{\hat{0},\hat{1}\})]$ は, Gorenstein 環 (cf. [H7, P.36]), 故に, B_n 上の任意の homogeneous ASL は, Gorenstein 環である.

さて, L を distributive lattice とし, f) で構成した $R_k[L]$ を考えよう. 希望としては, distributive lattice が"良い" poset とすれば, $R_k[L]$ は, すべて level 環となってほしいのである. しかしながら, 決定的な反例として, L を



とすると, $h(R[L])=(1,8,9,1)$ となり, L 上の homogeneous ASL は, 絶対に, level 環とはならない. 従って, distributive lattice は, 我々の目的からすれば"良い" poset とは言い難いのであって, ASL の理論からすれば, 古典的な poset の理論や束論を, 可換環論の立場から, 再編成する必要がある.

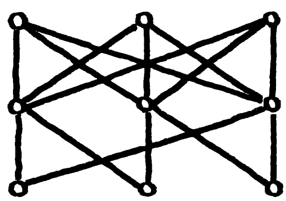
h) 我々の $R_k[L]$ ($L=J(Q)$)は、normal affine semigroup ringとして表現でき、canonical module も具体的に計算することが可能だから、$R_k[L]$が level 環になる為の必要十分条件を、Q の combinatorial な言葉で求めることは、原理的には可能である．しかしながら、f)、定理$_2$ における Gorenstein 環の様には、簡単には、記述できないから、[H_5] を参考にしてもらうことにして、以下では、若干の例のみを表示する．

$R_k[L]$	Gorenstein	level	Cohen-Macaulay
L			
$h(R_k[L])$	(1,6,6,1)	(1,7,9,2)	(1,6,9,2)
$\dim R_k[L]$	7	8	8
$a(R_k[L])$	-3	-4	-4

i) 最後に、Stanley が level 環を定義した（裏の）背景を想像しよう．Stanley [S_2] により、Cohen-Macaulay

整域においては、Gorenstein環であるか否かが、h-vectorのみで完全に決定できる。しからば、Gorenstein環よりも、もう少し拡張された概念で、Cohen-Macaulay整域において、h-vectorのみで支配されるものを探すのは自然であろう。そして、恐らく、level環はその有力な候補として登場したのではなかろうか。

しかしながら、Cohen-Macaulay整域においても、level環であるか否かを、h-vectorのみで決定することは不可能である。実際、

$Q =$ 

とすると、QはCohen-Macaulay posetで、$h(k[Q]) = (1, 6, 9, 2)$であり、$k[Q]$はlevel環となる。他方、$Q \cup \{-\infty\}$はintegralだから、$Q \cup \{-\infty\}$上には、homogeneous ASL整域Rが存在し、Rはlevel環、$h(R) = (1, 6, 9, 2)$となる。ところが、h)で例示した様に、$h(R)$と同じh-vectorを持つnon-level環$R_k[L]$がdistributive lattice上のhomogeneous ASL整域として得られるのである。

参考文献

K. Baclawski:

[B1] Cohen-Macaulay ordered sets, J. of Alg. 63 (1980), 226-258.

[B2] Cohen-Macaulay connectivity and Geometric lattices, Europ. J. Combinatorics 3 (1982), 293-305.

G. Birkhoff:
[Bi] "Lattice Theory", 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 25, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1967.

A. Björner, A. Garsia and R. Stanley:
[B-G-S] An introduction to Cohen-Macaulay partially ordered sets, Ordered sets, I. Rival ed., D. Reidel Publishing Company, 1982, 583-615.

T. Brylawski:
[Br] A decomposition for combinatorial geometries, Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), 235-282.

H. Crapo and G.-C. Rota:
[C-R] On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1970.

C. DeConcini, D. Eisenbud and C. Procesi:
[D-E-P] Hodge algebras, Astérisque 91 (1982).

D. Eisenbud:
[E] Introduction to algebras with straightening laws, Ring Theory and Algebra III, Proc. of the third Oklahoma Conf., Lect. Notes in Pure and Appl. Math. No. 55, Dekker, 1980, 243-268.

S. Goto and K.-i. Watanabe:
[G-W] On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), 179-213.

T. Hibi:
[H_1] Every affine graded ring has a Hodge algebra structure, to appear.
[H_2] For which finite groups G is the lattice $\mathcal{L}(G)$ of subgroups Gorenstein?, submitted.
[H_3] Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, submitted.
[H_4] A union and the glueing of a family of Cohen-Macaulay partially ordered sets, in preparation.

[H_5] Level rings and algebras with straightening laws, in preparation.
[H_6] Cohen-Macaulay graphs, in preparation.
[H_7] 有限数列と可換環, 第6回可換環論symposium (於 西条) 報告集, 1984, 12-59.

T. Hibi and K.-i. Watanabe:
[H-W_1] Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 27-54.
[H-W_2] Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, Hiroshima Math. J. 15 (1985), 321-340.

M. Hochster:
[Ho_1] Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.
[Ho_2] Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Proc. of the second Oklahoma Conf., Lect. Notes in Pure and Appl. Math. No. 26, Dekker, 1975, 171-223.

G. Reisner:
[R] Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Adv. in Math. 21 (1976), 30-49.

R. Stanley:
[S_1] Cohen-Macaulay complexes, Higher Combinatorics, M. Aigner ed., D. Reidel, Dordrecht, 1977, 51-62.
[S_2] Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.
[S_3] Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 133-135.

[S4] The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Applied Math. 54 (1975), 135-142.
[S5] Balanced Cohen-Macaulay complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1979), 139-157.
[S6] "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math. No.41, Birkhäuser, 1983.
[S7] Supersolvable lattices, Algebra Universalis 2 (1972), 197-217.
[S8] Finite lattices and Jordan-Hölder sets, Algebra Universalis 4 (1974), 361-371.
K.-i. Watanabe:
[W] Study of algebras with straightening laws of dimension 2, preprint.

付記: 束論に関しては, Birkhoff [Bi] が古典的な名著である. また, Cohen-Macaulay poset の理論の survey としては, [B-G-S] が大変優れており, 簡潔で読み易く, Stanley の初期の論文 [S7], [S8] を含めて参考とすれば, Cohen-Macaulay poset が如何にして登場したかという combinatorial な歴史的背景も理解できる.

2次元正規特異点の幾何種数の下限について

泊 昌孝　京大・数理研

§1. 定理I&IIの証明.
§2. $H^1_M(G)$の有限性について([15]の補正を含む)
§3. 一般次元での研究(dualizing sheaf と $a(G)$-invariant)

<u>Introduction</u>　特異点解消(resolution)を使って定義される不変量を固定した時，そのresolution達(もちろん一意ではない)には共通性があると思われる。例えばblowing-up with smooth centerの合成で特異点をresolveする時，途中にあらわれるHilbert-Samuel関数はどのような制約を受けるのだろうか？具体的にnumericalなboundを与える事は可能か？このノートでは，特異点の幾何種数と特異点の極大イデアルを中心とするblowing-upとの関係について論じたい。

d次元正規algebraic variety $\bar V \subsetneq \mathbb{P}^N/\mathbb{C}$ の1点pに於けるgerm(局所環$\mathcal{O}_{\bar V,p}$)を考え，正規特異点$(\bar V,p)$とあらわす。このような特異点について，特に断わらずにaffine chart V $(\subseteq \bar V)$をとり$(\bar V,p)=(V,p)$ともあらわす。resolution $\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$ with $\psi^{-1}(p)=A$をとり，特異点(V,p)の幾何種数$p_g(V,p)$を$p_g(V,p)=\dim(R^{d-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V})_p$により定める(なお，$R^{d-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$がresolutionのとり方に依らない事c.f.[5]，$R^{d-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$のsupportがzero次元である事が知られており，この定義はwell-definedである。)

この$p_g(V,p)$の計算を次の手続きで行なおう(§1,§2[13])

$$\begin{tikzcd} \bar V = \bar V_0 & \bar V_1 \arrow[l, "\psi_1"'] & \bar V_2 \arrow[l, "\psi_2"'] & \cdots \arrow[l] & \bar V_N = \tilde{\bar V} \arrow[l, "\psi_N"'] \arrow[llll, bend left, "\Psi"] \end{tikzcd}$$

resolution diagram for (V,p)

$\psi_i: V_i \longrightarrow V_{i-1}$ blowing-up with center the ideal $\mathcal{I}_{\Gamma_i}$ of $\Gamma_i \subsetneq V_{i-1}$ $i=1,\cdots,N$，この合成をΨとして，上図を$\bar V$にひきおこす対応とする。Ψに対するLeray's spectral sequenceにより，

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{\bar V}}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar V}) = (-1)^{d-1}\,\mathrm{length}(R^{d-1}\Psi_*\mathcal{O}_{\tilde{\bar V}}) + \sum_{k=1}^{d-2}(-1)^k\chi(R^k\Psi_*\mathcal{O}_{\tilde{\bar V}})$$

となる。特に，$\bar V-\{p\}$がrational singularityのみであって，

かつ (V,p) が Cohen-Macaulay ならば，$R^i\Phi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=0$ $\ 1\leqq i\leqq d-2$ となる (c.f. [17],[5]) ので上の等式より，この時，

$$(-1)^{d-1}p_g(V,p)=\sum_{i=1}^{N}\{\chi(\mathcal{O}_{\bar V_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}})\}$$

が成立する。更に，$H_i(k)=\chi(\Gamma_i, \mathcal{I}_{\Gamma_i}^{k}\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}}/\mathcal{I}_{\Gamma_i}^{k+1}\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}})$ と置き，$P_i(t)\in\mathbb{Q}[t]$ を $P_i(k)=H_i(k)$ (k 充分大) となるものとすると，

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar V_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}})=\sum_{k\geqq 0}\{P_i(k)-H_i(k)\}$$

と書ける事が容易にわかる (Proposition (1.3) [13], [11]も参)。

更に．center が maximal ideal $\mathfrak{m}$ の場合 (以下6行 添字 i を省く) $H(k)$ は Hilbert-Samuel 関数であり $P(k)$ は Hilbert-Samuel 多項式であり，$G=\bigoplus_{k\geqq 0}\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$，$X=\mathrm{Proj}(G)$，$M=G_+$ と置き，

$$0\longrightarrow H^0_M(G)\longrightarrow G\longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}H^0(\mathcal{O}_X(k))\longrightarrow H^1_M(G)\longrightarrow 0\ ,$$

$H^s_M(G)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}H^{s-1}(\mathcal{O}_X(k))$ $\ s\geqq 2$ (§5 [6]) となる事から，

$$\sum_{k\geqq 0}\{P(k)-H(k)\}=-\sum_{h=0}^{d}(-1)^h\dim[H^h_M(G)_{\geqq 0}]$$

がわかる。

また実際，(V,p) が2次元超曲面孤立特異点であって smooth center の blowing-up の合成による resolution については，(center が curve の場合も含めて) 上の $\chi(\mathcal{O}_{\bar V_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}})$ が計算でき p_g が上の要領で求められる §2 [13]。以上の計算にあらわれた data が，幾何種数と関する何らかの制約を受ける事を clear にできれば良いと思うが，わからない。例えば，normally flat な center の blowing-up の合成を考えると，必ず $\{\chi(\mathcal{O}_{\bar V_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar V_{i-1}})\}$ のうちに，正負両者があらわれる特異点もある (Example (2.9) [13] よりわかる。)

結果を述べよう。我々は次の situation を考える。

$$\begin{tikzcd}
A\subset\tilde V \arrow[r,"\eta"] \arrow[dr,"\theta"'] \arrow[rr, bend right=80, "\xi"'] & V_1 \arrow[r,"\psi_1"] & V\ni p \\
& \tilde V_1 \arrow[u,"\pi"'] \arrow[ur,"\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

(V,p) : normal of dim d.

$\xi^{-1}(p)=A$

ψ_1: blowing-up of V with center maximal ideal $\mathfrak{m} \subsetneq \mathcal{O}_{V,p}$. π: the normalization, η: the resolution of singularities of V_1, として θ と ξ は上の図を可換にする morphisms. $G = \bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$, $M = G_+$

定理Ⅰ $V-\{p\}$ が rational singularity のみを特異点として持つ時，$1 \leqq i_0 \leqq d-1$ なる整数 i_0 をひとつ固定して考える。

(1) $[H_M^{i_0}(G)]_k = 0$ for any $k \leqq -1$ ならば，
$\dim R^{i_0}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} \leqq \dim R^{i_0}\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ かつ $\dim R^{i_0}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} \leqq \dim R^{i_0}\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}$
である。（ただし，$\dim R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1} \leqq \dim R^1\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ は $V-p$ が rational sing. で成立している。）

(2) その上 G が Cohen-Macaulay（特に (V,p) も Cohen-Macaulay）の時，
$p_g(V,p) \geqq \dim R^{d-1}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} = \dim[H_M^d(G)_{\geq 0}]$ である。

定理Ⅱ $\dim V = 2$ の時，$[H_M^1(G)]_k = 0$ for any $k \leqq 0$ という仮定のもとで，

(1) $\dim R^1\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} = \dim R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ となる為には，$V_1 = \tilde{V}_1$（すなわち V_1 が normal）となる事が必要十分である。

(2) $\dim R^1\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} = p_g(V,p)$ となる為には，$V_1 = \tilde{V}_1$ であってかつ V_1 が rational singularity のみを特異点として有する事が必要十分である。

次に，定理Ⅱの高次元化を考えたい。その為に，canonical sheaf の言葉で定理Ⅰに類するものを示そう。（以下に述べる canonical sheaf は各 stage ごとに同型を除いて唯一に存在するものである。だから，それらを比較するには，具体的な対応を指定しなければならない。その対応の構成は§3で与える。）

定理Ⅲ $\dim V = d$ で $V-\{p\}$ が rational singularity のみを特異点として持ち，更に G が Cohen-Macaulay であるとする。ω_V, ω_{V_1}, $\omega_{\tilde{V}_1}$ および $\omega_{\tilde{V}}$ をそれぞれ $V, V_1, \tilde{V}_1$ および $\tilde{V}$ 上の canonical sheaf とし，§3の意味での対応を考える時，

$$p_g(V,p) = \dim \omega_V/\xi_*\omega_{\tilde{V}} \geqq \dim \omega_V/\varphi_*\omega_{\tilde{V}_1} \geqq \underset{\displaystyle \dim R^{d-1}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1}}{\underset{\shortparallel}{\dim \omega_V/\psi_{1*}\omega_{V_1}}}$$

である。

<u>定理IV</u>　定理IIIの状況で，更にGがGorensteinであって$a(G)+1\geqq 0$であると仮定する。この時，
(1) $\dim \omega_V/\varphi_*\omega_{\tilde{V}_1} = \dim[H^d_M(G)_{\geqq 0}]$となる為には，$V_1=\tilde{V}_1$となる事が必要十分である。
(2) $p_g(V,p)=\dim[H^d_M(G)_{\geqq 0}]$となる為には，$V_1=\tilde{V}_1$であってかつ$V_1$がGorenstein rational（これはGorenstein canonicalと同値[12][18]など参）singularityのみを特異点として有する事が必要十分である。

<u>系V</u>　(1) d次元超曲面特異点$(V,p)\subsetneqq(\mathbb{C}^{d+1},0)$が$V-\{p\}$でrational singularityのみを特異点として持つとする。$\mathrm{mult}_p V=\rho$とするならば$p_g(V,p)\geqq\binom{\rho}{d+1}$である。
(2) $\rho\geqq d$であると(1)において仮定する時，$p_g(V,p)=\binom{\rho}{d+1}$である為には，$V_1$がnormalであってrational singularityのみを特異点として有する事が必要十分である。

特に，2次元に於いては系Vの(2)の条件$\rho\geqq d''^{2}$は（実質的には）不要であるし，$p_g(V,p)=\binom{\rho}{3}$の時，V_1はdouble pointsのみを特異点として持つ事も[1]よりわかる。

以下，上記結果に関連して注意を述べる。
① <u>$H^i_M(G)$の有限性 $1\leqq i\leqq d-1$</u> によりV_1のCohen-Macaulay性が従う事は，我々のシンポジウムには既に明らかな事であろう。実際この路線に沿ったLemma(1.2)が，このノートでは本質的である。また，定理Iと定理IIに設けたこの種の仮定も，その必然性がclearでない。仮に取り除く事が完全にはできないにしても，次に②で述べるstatementとこのノートの結果を含む拡張はできないであろうか？
② <u>$H^i_M(G)$の条件なしで</u>次の命題が知られている。

<u>定理</u>（Lipman-Teissier-伊藤，泊）$\dim V=2$かつ$\dim R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}=0$ならば，$V_1=\tilde{V}_1$かつ$(V,p)$はCohen-Macaulay of maximal embedding dim.である。

渡辺敬一先生より，“$R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}=0$ならば（[8]の言葉で）$r(\mathfrak{q})\leqq 1$”が，Lipman-Teissierの議論を使って導ける事をおそわりました。そのあと，上に述べた結論を示す事は[8]で行なわれ

ている。一方，筆者は，我々の situationにて，特異点 (V, p) の ambient space 内の hyperplane による " generic な section " として得られる 1次元孤立特異点 (C, p) を考察した §3[13]。Lemma (2.5) [14] における議論，Proposition (3.4) [13] そして，Theorem (4.3) [13] をあわせて，同様の結論が導ける事を注意しておきたい。

③ Deformation を用いて．V_1の正規性の特徴づけなどを除けば，系で与えた評価式は，幾何種数の 1-parameter の deformation に於ける上半連続性（[2] [7]）と，定義方程式の「ニュートン図形」より算出できるものである。そのアプローチで話をすすめるならば，まだ評価の精密化には改良の余地があるはずである。例えば，Theorem (2.4) [11] p329 にある数値は良い目標になるのではないか？

渡辺敬一先生には常に相談にのっていただき，多くの事をおそわりました。伊藤先生より [15] についての重大な gap など御指摘いただきました。それにつきましては，注意 (2,5) として補正させていただきます。渡辺先生，伊藤先生はじめ，発表の機会を与えて下さったこのシンポジウムの皆様に感謝いたします。

なお，講演では " Serre の multiplicity " を用いて議論しましたが，実はもっと簡単に述べられる内容でした。(1, 9) の議論の形に変えました。

§1. 定理 I & II の証明

(1, 1) 渡辺敬一氏は，[16]で，特異点の局所 Cohomology に induce される filtration を研究している。我々は；そこに書かれている精神で次の Lemma を示そう。

Lemma (1.2) d次元特異点 (V, p) の blowing-up with m, $\psi_1 : V_1 \longrightarrow V$ と整数組 (i_0, j_0), $(1 \leqq i_0 \leqq d-1,\ j_0 \in \mathbb{Z})$ を固定する。$[H_M^{i_0}(G)]_k = 0$ for any $k \leqq j_0$ ならば，
(1) $i_0 = 1$ の時，$R^1 \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{\delta}) \longrightarrow H^1(V-p, \mathcal{O}_V)$ は

$q \leqq j_0+1$ で単射である。
(2) $i_0 \geqq 2$ の時，$H^{i_0}_X(V_1, \varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})^q) = 0$ for any $q \leqq j_0+1$ である。ただし $X = \mathrm{Proj}(G)$ である。

証明は3段階に分けて行なおう。

(1.3) <u>Step 1</u> V の ambient 多様体 U（N-次元であるとする）をとり

$$\begin{tikzcd} p \in V \arrow[d, phantom, "\cap\ \text{closed}"] & V_1 \arrow[l, "\varphi_1"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \supset X = \mathrm{Proj}(G) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ U & U_1 \arrow[l, "\tilde\varphi_1"'] & \supseteq \mathbb{P}^{N-1} \end{tikzcd}$$

$\tilde\varphi_1 : U_1 \longrightarrow U$ the blowing-up with center maximal ideal $\mathfrak{m}$ であって V の strict transform by $\tilde\varphi_1$ が V_1 となるようにする。この時、$\mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}) = 0$ が成立する。

<u>証明</u> §5[6] $0 \to H^0_{\mathfrak m}(G) \to G \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_X(k)) \to H^1_{\mathfrak m}(G) \to 0$,
$H^i_{\mathfrak m}(G) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^{i-1}(\mathcal{O}_X(k))$ $(i \geqq 2)$ と，与条件より，

(1.3.1) $\quad H^{i_0-1}(\mathcal{O}_X(k)) = 0 \quad k \ll 0$ (十分小の意味)

である。I = the injective hull of $\mathcal{O}_{U,p}/\mathfrak{m}$ として，duality
$H^{i_0-1}(\mathcal{O}_X(k)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{U,p}}(\mathrm{Ext}^{N-i_0+1}(U_1; \mathcal{O}_X(k), \Omega^N_{U_1}), I)$ with
$E_2^{p,q}(k) = H^p(U_1, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_X(k), \Omega^N_{U_1})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(U_1; \mathcal{O}_X(k), \Omega^N_{U_1})$

(p188 [9]) を使おう。$E_2^{p,q}(k) \cong H^p(U_1, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_X, \Omega^N_{U_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_1}} \tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-k})$ であるから $E_2^{p,q}(k) = 0$ $p \geqq 1$ かつ $k \ll 0$ となる。
ゆえに (1.3.1) より
$H^0(U_1, \mathcal{E}xt^{N-i_0+1}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_X, \Omega^N_{U_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_1}} \tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-k}) = 0 \quad k \ll 0$
である。すなわち
$t \longmapsto \chi(U_1, \mathcal{E}xt^{N-i_0+1}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_X, \Omega^N_{U_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_1}} \tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})^t)$
なる Hilbert-Samuel 多項式が zero である事がわかった。ゆえに，$\mathcal{E}xt^{N-i_0+1}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_X, \Omega^N_{U_1}) = 0$ である。

この消滅と完全列 $0 \to \tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})\cdot\mathcal{O}_{V_1} \to \mathcal{O}_{V_1} \to \mathcal{O}_X \to 0$ on V_1 により，次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}) \arrow[rr, "\text{上射}"] \arrow[d, phantom, "\wr\!\mathrm{S}\ (1.4)\text{参照}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}) \\ \tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_1}} \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}) \arrow[urr, "\text{積}"'] & & \end{tikzcd}$$

$\tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m}) \cdot \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}) = \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\tilde\varphi_1^{-1}(\mathfrak{m})\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})$ が

これより従うが，NAKにより $\mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\psi_1^{-1}(m)\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})=0$ であり，$\mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\psi_1^{-1}(m)\cdot\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})=0$ も上の同型より従う。

注意(1.4)　上の議論では，$\psi_1^{-1}(m)\otimes_{\mathcal{O}_{U_1}}\mathcal{O}_{V_1}\cong\psi_1^{-1}(m)\cdot\mathcal{O}_{V_1}$ である事を自由に用いている。これについては，[13] の (i) of Lemma(1.6) を見て下さい。

(1.5) Step 2　$H^{i_0}_X(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k\cdot\mathcal{O}_{V_1})=0$　$k\ll 0$

証明　(1.3)と同様に duality
$H^{i_0}_X(U_1, \psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1})\cong Hom_{\mathcal{O}_{U_1,p}}(Ext^{N-i_0}(U_1;\psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}), I)$
$E_2^{p,q}(k)=H^p(U_1, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{U_1}}(\psi_1^{-1}(m)^k\cdot\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1}))\Rightarrow Ext^{p+q}(U_1;$ $\psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})$　(p188 [9])　を使おう。$E_2^{p,q}(k)=0$，$p\geqq 1$ かつ $k\ll 0$ より，(1.3) の結論から
$Ext^{N-i_0}(U_1;\psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})\overset{k\ll 0}{=\!=}H^0(U_1, \mathcal{E}xt^{N-i_0}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\psi_1^{-1}(m)^k, \Omega^N_{U_1}))$
$=0$　となる。

(1.6) Step 3　(1.5)により，整数 $q\leqq j_0+1$ であって，$H^{i_0}_X(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k\cdot\mathcal{O}_{V_1})=0$ for any $k\leqq q$ となるものが存在する。ゆえに，完全列

$$H^{i_0-1}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1})\to H^{i_0-1}(V_1-X, \psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1})\to 0$$
$$\Vert$$
$$H^{i_0-1}(V_1-X, \mathcal{O}_{V_1})$$
$$0\to H^{i_0}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1})\to H^{i_0}(V_1-X, \psi_1^{-1}(m)^k\mathcal{O}_{V_1})$$
$$\Vert$$
$$H^{i_0}(V_1-X, \mathcal{O}_{V_1})$$

が $k\leqq q$ について成立する。

$i_0\geqq 2$ の時　$H^{i_0}_M(C_T)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}H^{i_0-1}(\mathcal{O}_X(k))$ であり，今 $H^{i_0-1}(\mathcal{O}_X(k))=0$ for any $k\leqq j_0$ である。これは，

$$H^{i_0-1}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^{k+1})\longrightarrow H^{i_0-1}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k)\to 0$$
$$0\to H^{i_0}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^{k+1})\longrightarrow H^{i_0}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^k)$$

なる完全列が $k\leqq j_0$ について成立する事で同値である。
ゆえに，完全列

$$H^{i_0-1}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^{k+1})\longrightarrow H^{i_0-1}(V_1-X, \mathcal{O}_{V_1})\to 0$$
$$0\to H^{i_0}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^{k+1})\longrightarrow H^{i_0}(V_1-X, \mathcal{O}_{V_1})$$

が $k\leqq j_0$ について得られた。これは，$H^{i_0}_X(V_1, \psi_1^{-1}(m)^{k+1})$

$=0$ が $k \leqq j_0$ について成立する事と同値である。

<u>$i_0=1$ の時</u>　$S = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k)/\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{k+1})$，$T = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k/\psi_1^{-1}(m)^{k+1}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathcal{O}_X(k))$　と置く。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dr] & & & \\
 & & & S \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & H^0_M(G) \arrow[r] & G \arrow[ur] \arrow[rr] & & T \arrow[r] & H^1_M(G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

という可換図式ができる。完全列

$$0 \to \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{k+1}) \to \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k) \xrightarrow{a_k} H^0(\mathcal{O}_X(k))$$
$$\to R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{k+1}) \xrightarrow{b_k} R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k)$$

に気をつけて，次の　関係　が得られる。

$[H^1_M(G)]_k = 0 \iff [G]_k \longrightarrow [T]_k \to 0$ 完全 $\Rightarrow$
$[S]_k \longrightarrow [T]_k$ 同型 $\iff a_k$ 上射 $\iff b_k$ 単射

ゆえに，$R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{k+1}) \longrightarrow R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k)$ は $k \leqq j_0$ に対して単射である。これと，このパラグラフの初めに書いた (1.5) よりの帰結とつなげば，$R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^{k+1}) \longrightarrow H^1(V_1-X, \mathcal{O}_{V_1})$ の $k \leqq j_0$ における単射性が従う。

Lemma (1.2) 証明終

(1.7) <u>定理 I の (1) の証明</u>

Introduction で述べた diagram にて，

$$E_2^{p,q} = H^p(V-p, R^q\xi_*\mathcal{O}_{\tilde V}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde V - A, \mathcal{O}_{\tilde V})$$

$V-\{p\}$ が rational singularity のみを特異点として持つので，$E_2^{p,q} = 0$　$q \geqq 1$ である。ゆえに，$H^p(V-p, \mathcal{O}_V) \cong H^p(\tilde V - A, \mathcal{O}_{\tilde V})$ がわかる。整数 α を固定するごとに次の可換図式が従う。

$$\begin{tikzcd}
R^{i_0}\xi_*(\xi^{-1}(m)^\alpha) \arrow[r, equal, "\uparrow (V\text{-}p \text{ rational})"'] & H^{i_0}(\tilde V, \xi^{-1}(m)^\alpha) \arrow[r] & H^{i_0}(\tilde V - A, \mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[d, equal] \\
 & & H^{i_0}(V-p, \mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[d, equal] \\
R^{i_0}\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^\alpha) \arrow[uu, "e_\alpha"] \arrow[d, "d_\alpha"] \arrow[r, equal] & H^{i_0}(V_1, \psi_1^{-1}(m)^\alpha) \arrow[uu, "e_\alpha"] \arrow[d, "d_\alpha"] \arrow[r, "c_\alpha"] \arrow[uur, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{i_0}(V_1 - X, \mathcal{O}_{V_1}) \arrow[d, equal, "\leftarrow V\text{-}p \text{ が normal}"] \\
R^{i_0}\varphi_*(\varphi^{-1}(m)^\alpha) \arrow[r, equal] & H^{i_0}(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^\alpha) \arrow[r] & H^{i_0}(\tilde V_1 - \varphi^{-1}(p), \mathcal{O}_{\tilde V_1})
\end{tikzcd}$$

ここで定理の仮定 $[H^{i_0}_M(G)]_k \quad 0$ for $k \leqq -1$ と Lemma(1.2) より C_0 は単射である。ゆえに d_0 と e_0 も単射となり主張が従う。

また，$E_2^{p,q} = R^p\varphi_*(R^q\theta_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \Rightarrow R^n\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ により，単射 $0 \to R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1} \longrightarrow R^1\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ が常に従う。特に，$V-p$ が rational singularity の時は $R^1\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の support は例上にあり，$\dim R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1} \leqq \dim R^1\xi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ となる。

<u>(1.8) 定理 I の (2) の証明</u>　G が Cohen-Macaulay なので $H^i_M(G) = 0$ $i = 0, 1, \cdots, d-1$ であり，また $H^{i-1}(\mathcal{O}_X(k)) = 0$, $2 \leqq i \leqq d-1$，$k \in \mathbb{Z}$ である。ゆえに $R^j\psi_{1*}(\mathcal{O}_{V_1}) = 0$ $j = 1, \cdots, d-2$ である。Introduction で述べた議論により

$$(-1)^{d+1}\dim H^d_M(G)_{\geq 0} = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_0}) = (-1)^{d-1}\dim R^{d-1}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1}$$

が従う。

<u>(1.9) 定理 II の (1) の証明</u>　定理に述べる situation を考えよう。

$$\begin{tikzcd} \tilde{V}_1 \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V_1 \arrow[dl, "\psi_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

sheaf $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}/\mathcal{O}_V$ は $|X| = |\psi_1^{-1}(p)|$ に support が含まれる。ゆえに，Hilbert-多項式

$$P(t) = \chi(V_1, \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}/\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \psi_1^{-1}(m)^t)$$

を考えると，高々一次の多項式となる。$P(t) = a_1 t + a_0$ $a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ と書こう。また，完全列

$$\begin{aligned} 0 &\to \psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k) \to \varphi_*(\varphi^{-1}(m)^k) \to \psi_{1*}((\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}/\mathcal{O}_{V_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \psi_1^{-1}(m)^k) \\ &\to R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k) \to R^1\varphi_*(\varphi^{-1}(m)^k) \to R^1\psi_{1*}((\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}/\mathcal{O}_{V_1}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \psi_1^{-1}(m)^k) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} P(k) = \dim R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k) &- \dim R^1\varphi_*(\varphi^{-1}(m)^k) \\ &+ \dim \varphi_*(\varphi^{-1}(m)^k)/\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)^k) \end{aligned}$$

とも書ける。特に，

$$\begin{aligned} a_1 = P(1) - P(0) = \dim R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)) &- \dim R^1\varphi_*(\varphi^{-1}(m)) \\ &- \dim R^1\psi_{1*}(\mathcal{O}_{V_1}) + \dim R^1\varphi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) \end{aligned}$$

となる。定理の仮定より，$a_1 = \dim R^1\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(m)) - \dim R^1\varphi_*(\varphi^{-1}(m))$ となる。そして，仮定 $[H^1_M(G)]_j = 0$ $j \leqq 0$ と Lemma(1, 2) 及び (1.7) の議論により $a_1 \leqq 0$ である。$\psi_1^{-1}(m)$ の ψ_1-ample 性より $a_1 = 0$ である事がわかった。そして，

$a_0 = P(0) = \dim R^1\psi_{1*}(\mathcal{O}_{V_1}) - \dim R^1\varphi_*(\mathcal{O}_{\tilde V_1}) = 0$ であり、Hilbert多項式 P は zero である。$\psi_1^{-1}(m)$ の ψ_1-ample 性より $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde V_1}/\mathcal{O}_{V_1} = 0$ である。

(1.10) <u>定理IIの(2)の証明</u>. $E_2^{p,q} = R^p\varphi_*(R^q\theta_*\mathcal{O}_{\tilde V}) \Rightarrow R^n\xi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ より $0 \to R^1\varphi_*(\mathcal{O}_{\tilde V_1}) \to R^1\xi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \to \varphi_*(R^1\theta_*(\mathcal{O}_{\tilde V})) \to 0$ となり主張は明らかである。

§2. $H^1_M(G)$ の有限性について([15]の補正を含む).

(2.1) ここでは、$[H^1_M(G)]_k = 0$ for any $k \leq -1$ が成立するひとつの例を示そうと思う。

(V,p) を normal d-次元特異点/$\mathbb{C}$ であって $\psi_1 : V_1 \longrightarrow V$ を blowing-up with center maximal ideal m, $\pi : \tilde V_1 \longrightarrow V_1$ を normalization $\varphi : \tilde V_1 \longrightarrow V$ を、それらの合成とする。

<u>命題(2.2)</u> $H^0(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^k/\varphi^{-1}(m)^{k+1}) = 0$ $k \leq -1$ である。特に、$V_1 = \tilde V_1$ (すなわち V_1 が normal) ならば $[H^1_M(G)]_k = 0$ $k \leq -1$ が成立する。

証明は2段階に分けて行なう。V は affine variety による特異点の representative であるとする。そして Introduction のように

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[rrrr, bend right, "\xi"'] & \tilde{V} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] \arrow[rr, bend left, "\xi"] & V_1 \arrow[r, "\psi_1"] & V \arrow[r, phantom, "\supset"] & U \\
 & & \tilde{V}_1 \arrow[u, "\pi"'] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\xi^{-1}(p) = A$

N-dim mfd　　N-dim mfd

なる diagram を考える。ここで、η は blowing-up の合成による resolution であって、しかも ambient 多様体同志の blowing-up ξ よりみちびかれるものとする。

(2.3) <u>Step 1</u> $H^1_A(\tilde V, \xi^{-1}(m)^a) = 0$ for any $a \leq 0$.

<u>証明</u> $h \in \Gamma(V, m\cdot\mathcal{O}_V)$ であって、$\tilde V$ 上で $(\xi^{-1}(h))_{\mathcal{O}_{\tilde V}} \cong \mathcal{I}_{H_1}\cdot\xi^{-1}(m)$ なる同型が成立するものをとる。ただし、$H = V(h) = \{h=0\} \subseteq V$ の ξ による strict transform を

H_1 と書き、$\mathcal{I}_{H_1}$ を $\mathcal{O}_{\tilde V}$ における その ideal sheaf であるとする。なお、このような「大域的な」h の存在性は §3[13] の議論より保障されている。

さて、Grauert-Riemenschneider's vanishing (§2[5]を参) より $\underline{R^{d-1}\xi_*(\Omega^d_{\tilde V})=0}$ である。

上でとった h により、

$$\Omega^d_{\tilde V} \cong \xi^{-1}(h)\cdot\Omega^d_{\tilde V} = \mathcal{I}_{H_1}\cdot\xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V} \hookrightarrow \xi^{-1}(m)\cdot\Omega^d_{\tilde V}$$

$$0 \to \Omega^d_{\tilde V} \to \xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V} \to \mathcal{O}_{H_1}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde V}}\xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V} \to 0$$

なる短完全列が $\tilde V$ 上できる。これより

$$0 = R^{d-1}\xi_*(\Omega^d_{\tilde V}) \to R^{d-1}\xi_*(\xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V}) \to \underset{(ロ)\to\,\overset{\|}{0}}{R^{d-1}\xi_*(\mathcal{O}_{H_1}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde V}}\xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V})}$$

ここで、消滅(ロ)は、$H_1 \longrightarrow H$ の relative 次元が $d-2$ 以下である事による。かくして $\underline{R^{d-1}\xi_*(\xi^{-1}(m)\Omega^d_{\tilde V})=0}$ である。

一般には、$b \geqq 0$ についての

$$0 \to \xi^{-1}(m)^b\Omega^d_{\tilde V} \to \xi^{-1}(m)^{b+1}\Omega^d_{\tilde V} \to \mathcal{O}_{H_1}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde V}}\xi^{-1}(m)^{b+1}\Omega^d_{\tilde V} \to 0$$

を用いて、帰納法で $R^{d-1}\xi_*(\xi^{-1}(m)^b\Omega^d_{\tilde V}) = 0 \quad b \geqq 0$ がわかる。再び duality (p188[9]) を用いよう!!

$$H^1_A(\tilde V, \xi^{-1}(m)^a\mathcal{O}_{\tilde V}) = H^1_A(\tilde U, \tilde\xi^{-1}(m)^a\mathcal{O}_{\tilde U}) \cong Hom_{\mathcal{O}_{U,p}}(Ext^{N-1}(\tilde U;\ \xi^{-1}(m)^a\cdot\mathcal{O}_{\tilde V}, \Omega^N_{\tilde U}), I) \qquad I = \text{injective hull of } \mathcal{O}_U/m.$$

$$\cong Hom(H^{d-1}(\tilde U, \Omega^d_{\tilde V}\otimes\xi^{-1}(m)^{-a}), I)$$

そして、これは $a \leqq 0$ で消滅する。

(2.4) <u>Step 2</u> $E_2^{p,q} = H^p_{|\varphi^{-1}(p)|}(\tilde V_1, R^q\theta_*(\xi^{-1}(m)^k)) \Rightarrow H^{p+q}_A(\tilde V, \xi^{-1}(m)^k)$

と、(2.3) により、$\theta_*(\xi^{-1}(m)^k) = \varphi^{-1}(m)^k$ に気をつけて

$H^1_{|\varphi^{-1}(p)|}(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^k) = 0 \quad k \leqq 0$ を得る。ゆえに

$H^1(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^k) \longrightarrow H^1(\tilde V_1 - \varphi^{-1}(p), \mathcal{O}_{\tilde V_1})$ 単射 $k \leqq 0$

が成立し、

$$\begin{tikzcd}
H^1(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^{k+1}) \arrow[d, "b_k"] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start] & \\
H^1(\tilde V_1, \varphi^{-1}(m)^k) \arrow[r] & H^1(\tilde V_1 - \varphi^{-1}(p), \mathcal{O}_{\tilde V_1})
\end{tikzcd}$$

b_k は $k \leqq -1$ で単射である。ゆえに $\varphi_*\left(\varphi^{-1}(m)^k/\varphi^{-1}(m)^{k+1}\right) = 0$ for $k \leqq -1$ である。

証明終.

(2.5) <u>[15] Theorem 2 について</u> その証明にては，丁度本節で行なった考察が欠けている。ゆえに，命題(2.2)を使って、現時点で私が主張する statementを書いておきたい。

<u>定理</u> (V,p)：正規 d 次元特異点 $/\mathbb{C}$ 又は正規2次元特異点 $/k=\bar{k}$ について，$\psi:\tilde{V}_1 \longrightarrow V$ を blowing-up with center maximal ideal m followed by normalization とする。この時，

$$H^0_M\Big(\bigoplus_{k\geq 0} \overline{m^k}/\overline{m^{k+1}}\Big)=0 \quad \text{かつ},$$

$$H^1_M\Big(\bigoplus_{k\geq 0} \overline{m^k}/\overline{m^{k+1}}\Big)=\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Ker}\{R^1\psi_*(\psi^{-1}(m)^{k+1}) \longrightarrow R^1\psi_*(\psi^{-1}(m)^{k})\}.$$

なお，2次正規特異点に対する Grauert-Riemenschneider's vanishing Th. $/k=\bar{k}$ は，J. Wahl, (H.B. Laufer) J. Lipman などにより示されていて，我々の議論(2.3),(2.4)がそのまま適用する事を注意しておきたい。([9]参).

<u>§3 一般次元での研究 (dualizing sheaf と $a(G)$-invariant)</u>

(3,1). [12]に於いて見られるように，一般次元に対して，Gorensteinかつ rationalであっても(我々の記号で) V_1 は，一般には normalにはならない。本節では，G が Gorenstein の場合に，上の状況で V_1 の正規性が $a(G)$ の大きさと関係している事を明らかにしよう。そこで Key となるのは，定理(3.5)である。

我々は，canonical sheaf の言葉を使って議論し，定理 III, IV 及系 V を証明しよう。

(3.2)

右図は Introduction 及 (2.2) の diagram

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U} \arrow[r, "\tilde{\eta}"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{\xi}"] & U_1 \arrow[r, "\tilde{\psi}_1"] & U \ \text{N-dim} \\
\cup & \cup & \cup \\
\tilde{V} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] \arrow[rr, bend right=60, "\xi"'] & V_1 \arrow[r, "\psi_1"] & V \ \text{d-dim} \\
& \tilde{V}_1 \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

U, U_1, と $\tilde{U}$ は ambient 多様体，$\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\psi}_1$ が V, V_1, $\tilde{V}$ 上の ξ, η, ψ_1 を induce するものとする。

ここで，V_1 が Cohen-Macaulay であると仮定する。$\tilde{V}, \tilde{V}_1$, V_1, 及び V 上には，それぞれ canonical sheaf $\omega_{\tilde{V}}, \omega_{\tilde{V}_1}$, ω_{V_1}, ω_V が同型を除いて唯一存在する。まず，$\omega_{\tilde{V}}$ の構成から出発して，他の canonical sheaf を関連して構成する。そして，以下の対応を明確にしたい。

(3.2.1) $\quad \theta_* \omega_{\tilde{V}} \hookrightarrow \omega_{\tilde{V}_1} \quad$ on $\tilde{V}_1$

(3.2.2) $\quad \pi_* \omega_{\tilde{V}_1} \hookrightarrow \omega_{V_1} \quad$ on V_1

(3.2.3) $\quad \psi_{1*} \omega_{V_1} \hookrightarrow \omega_V \quad$ on V として

(3.2.4) $\quad \xi_* \omega_{\tilde{V}} \hookrightarrow \varphi_* \omega_{\tilde{V}_1} \hookrightarrow \psi_{1*}\omega_{V_1} \hookrightarrow \omega_V$

構成　まず，$\Omega^N_{\tilde{U}}$ をひとつ固定する。$\omega_{\tilde{V}}$ は $\Omega^d_{\tilde{V}} = \omega_{\tilde{V}} = \mathcal{E}xt^{N-d}_{\mathcal{O}_{\tilde{U}}}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}, \Omega^N_{\tilde{U}})$ として構成する。$\omega_{\tilde{V}_1}$ は，$j : (\tilde{V}_1)_{reg} \hookrightarrow \tilde{V}_1$ inclusion from regular part を用いて $\omega_{\tilde{V}_1} = j_*(\theta_*(\omega_{\tilde{V}}|_{\theta^{-1}(\tilde{V}_1)_{reg}}))$ として構成する。これより，$0 \to \theta_* \omega_{\tilde{V}} \longrightarrow \omega_{\tilde{V}_1}$ は canonical に定まる。以上で (3.2.1) は示された。

ω_{V_1} は $\Omega^N_{U_1} = \tilde{\eta}_* \Omega^N_{\tilde{U}}$ とした上で，$\omega_{V_1} = \mathcal{E}xt^{N-d}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \Omega^N_{U_1})$ として構成する。さて $\theta : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}_1$ は，$\tilde{V}_1$ 内の codimension ≥ 2 の closed set, S と呼ぶ，を除いて同型である。また $T = \pi(S) \subseteq V_1$ と置く。$\tilde{V}_1 - S \subseteq (\tilde{V}_1)_{reg}$ であり，$\omega_{\tilde{V}_1}|_{\tilde{V}_1 - S} = \theta_*(\mathcal{E}xt^{N-d}_{\mathcal{O}_{\tilde{U}}}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}, \Omega^N_{\tilde{U}})|_{\theta^{-1}(\tilde{V}_1 - S)})$ だが，これより $\pi_* \omega_{\tilde{V}_1}|_{V_1 - T} \hookrightarrow \omega_{V_1}|_{V_1 - T}$ を次の様に構成する。

$$\pi_* \omega_{\tilde{V}_1}|_{V_1 - T} = \eta_*(\mathcal{E}xt^{N-d}_{\mathcal{O}_{\tilde{U}}}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}, \Omega^N_{\tilde{U}})|_{\eta^{-1}(V_1 - T)})$$

$\quad \cong \quad \leftarrow$ relative duality η は finite over $V_1 - T$

$$\mathcal{E}xt^{N-d}_{\mathcal{O}_{U_1}}(\eta_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}, \Omega^N_{U_1})|_{V_1 - T}$$

$\quad \cong \quad \leftarrow$ $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}_1} = \eta_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ と V_1 の Cohen-Macaulay 性

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{V_1}}(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}, \omega_{V_1})|_{V_1 - T}$$

$\quad$ ㋺ $\downarrow$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{V_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \omega_{V_1})|_{V_1 - T} = \omega_{V_1}|_{V_1 - T}.$$

対応の Ⓑ の単射性は

$$0 \to Hom_{O_{V_1}}(\pi_* O_{\tilde V_1}/O_{V_1}, \omega_{V_1}) \to Hom_{O_{V_1}}(\pi_* O_{\tilde V_1}, \omega_{V_1}) \xrightarrow{\text{Ⓑ}} Hom_{O_{V_1}}(O_{V_1}, \omega_{V_1})$$

$$Ass_{O_{V_1}}(Hom_{O_{V_1}}(\pi_* O_{\tilde V_1}/O_{V_1}, \omega_{V_1})) = Ass_{O_{V_1}}(\omega_{V_1}) \cap Supp(\pi_* O_{\tilde V_1}/O_{V_1}) = \emptyset$$

(∵ V_1 がCohen-Macaulayなので ω_{V_1} は unmixed.) より従う。

さて，$g: \tilde V_1 - S \hookrightarrow \tilde V_1$ inclusion，$h: V_1 - T \hookrightarrow V_1$ inclusion とすると $\pi_*\omega_{\tilde V_1} = \pi_*(g_*(\omega_{\tilde V_1}|\tilde V_1 - S)) =$

$$h_*(\pi_*\omega_{\tilde V_1}|V_1 - T) \underset{\text{上の対応より induce}}{\hookrightarrow} h_*(\omega_{V_1}|V_1 - T) \underset{\omega_{V_1}\text{ はCohen-Macaulay}}{=} \omega_{V_1}$$

以上で (3.2.2) が構成された。ただし，上の対応が，V_1 上の normal locus 上では trivial identity となっている事に注意しておく。

<u>ω_V は</u>　$i: V_{reg} \hookrightarrow V$ inclusion from regular part を用いて $\omega_V = i_*(\xi_*(\omega_{\tilde V}|\xi^{-1}(V_{reg})))$ として構成する。

V_{reg} 上では ξ, φ, 及び ψ_1 は恒等写像であり，そして

$$\begin{tikzcd}
\xi_*\omega_{\tilde V} = \psi_{1*}(\pi_*(\theta_*\omega_{\tilde V})) \arrow[r, hook, "(3.2.1)"'] \arrow[d] & \psi_{1*}(\pi_*\omega_{\tilde V_1}) = \varphi_*\omega_{\tilde V_1} \arrow[r, hook, "(3.2.2)"'] \arrow[d] & \psi_{1*}\omega_{V_1} \arrow[d, "(3.2.3)"] \\
\omega_V = i_*(i^{-1}(\xi_*\omega_{\tilde V})) \arrow[r, hook, "\cong", "(3.2.1)\text{より induce}"'] & i_*(i^{-1}(\varphi_*\omega_{\tilde V_1})) \arrow[r, hook, "\cong", "(3.2.2)\text{より induce}"'] & i_*(i^{-1}(\psi_{1*}\omega_{V_1}))
\end{tikzcd}$$

(3.2.1) と (3.2.2) より自然に induce される対応より (3.2.4) の対応が構成される。

ここで，Introductionで述べた定理Ⅲを示そう。

(3.3) <u>定理Ⅲ</u>. $\dim V = d$ で $V - \{p\}$ が rational singularity のみを特異点として持ち，更に G が Cohen-Macaulay であるとする。$\omega_V, \omega_{V_1}, \omega_{\tilde V_1}, \omega_{\tilde V}$ をそれぞれ $V, V_1, \tilde V_1$ 及び $\tilde V$ 上の canonical sheaf とし，(3.2) の意味での対応を考える時，

$$\begin{array}{l} p_g(V,p) = \dim \omega_V/\xi_*\omega_{\tilde V} \geq \dim \omega_V/\varphi_*\omega_{\tilde V_1} \geq \dim \omega_V/\psi_{1*}\omega_{V_1} \\ \hspace{20em} \| \\ \hspace{17em} \dim R^{d-1}\psi_{1*}O_{V_1} \end{array}$$

である。

<u>証明</u>　等式 $p_g(V,p) = \dim \omega_V/\xi_*\omega_{\tilde V}$ と $\dim \omega_V/\psi_{1*}\omega_{V_1} = \dim R^{d-1}\psi_{1*} O_{V_1}$ を示す事が残っている。前者については，(例えば) Lemma 3.3.3 [19] を参照せよ。

後者を示そう。まず，$H^{d-1}_x(V_1, O_{V_1}) = 0$ を示そう。

$d \geq 3$ の時は，$H^{d-1}_M(G) = 0$ と Lemma (1.2) より従う。$d=2$ については $0 \to H^0_X(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \to H^0(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \to H^0(V_1 - X, \mathcal{O}_{V_1}) \to H^1_X(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \to H^1(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) \to H^1(V_1 - X, \mathcal{O}_{V_1})$ を見ながら，Lemma (1.2) 及び V の正規性より従う。

V_1 上の duality $H^1_X(V_1, \omega_{V_1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(H^{d-1}(V_1, \mathcal{O}_{V_1}), I)$，及び $H^{d-1}_X(V_1, \mathcal{O}_{V_1}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(H^1(V_1, \omega_{V_1}), I) = 0$ (cf. p188[9]，及び (2.3)) より $0 \to H^0_X(V_1, \omega_{V_1}) \to H^0(V_1, \omega_{V_1}) \to H^0(V_1 - X, \omega_{V_1}) \to H^1_X(V_1, \omega_{V_1}) \to H^1(V_1, \omega_{V_1}) = 0$ となり，主張が従う。

証明終。

(3. 4) 次の結果は[3]の系と言うべきであろう。また，渡辺敬一氏は Rees 環が normal になるような filtered blowing-up について同系統の結果を得ている（本報告集を参照）。いずれも，定理(5.4)[13]の拡張を与えている。

定理(3.5) (V, p) を d 次元正規 Gorenstein 特異点であって，$\psi_1 : V_1 \to V$ を blowing-up with center maximal ideal $\mathfrak{m}$ とし，$G = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ が Gorenstein であるとする。ω_V, ω_{V_1} を V 及び V_1 上の canonical sheaf とすると，$\psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{a(G)+1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \psi_1^{-1}(\omega_V) \cong \omega_{V_1}$ なる同型が存在する。

証明 $a(G) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid [H^d_M(G)]_\alpha \neq 0\} = \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid H^{d-1}(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^\alpha/\psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{\alpha+1}) \neq 0\}$ であるが，$a(G) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid H^{d-1}(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^\alpha) \neq 0\}$ とも書ける。duality (p188[9]) により
$H^1_X(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes \omega_{V_1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(H^{d-1}(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{a(G)+1}), I) = 0$
を得る（I = injective hull of $\mathcal{O}_V/\mathfrak{m}$）。

$$0 \to H^0_X(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}) \to H^0(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}) \to$$

$$\begin{array}{l} H^0(V_1 - X, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}) \to H^1_X(V_1, \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}) = 0 \\ \qquad\qquad \| \\ H^0(V - p, \omega_V) \cong H^0(V, \omega_V) \end{array}$$

ゆえに

$$\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}) \xrightarrow{\cong} \omega_V$$

なる同型ができた。これより，単射 g が

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \psi_1^{-1}(\omega_{V_1}) & \xrightarrow[g]{\qquad\qquad} & \psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1} \\ \wr\| & & \\ \psi_1^{-1}(\psi_{1*}(\psi_1^{-1}(\mathfrak{m})^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1})) & & \end{array}$$

上の同型を通して構成できた。Coker g の support は $X =$

$\mathrm{Proj}(G)$ に含まれる。そこで Hilbert-多項式 $Q(t)$ を $Q(t) = \chi(V_1, \psi_1^{-1}(m)^t \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} (\mathrm{Coker}\, g))$ によって定める。そこで

$$0 \to \psi_1^{-1}(m)^{t+1} \longrightarrow \psi_1^{-1}(m)^t \longrightarrow \mathcal{O}_X(t) \to 0$$

$\otimes_{\mathcal{O}_{V_1}}(\mathrm{Coker}\, g)$ を考える事によって

$$Q(t+1) - Q(t) = \chi(V_1, \mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{V_1}}(\mathrm{Coker}\, g, \mathcal{O}_X(t))) - \chi(V_1, (\mathrm{Coker}\, g) \otimes \mathcal{O}_X(t))$$

である。更に, $0 \to \mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{V_1}}(\mathcal{O}_{V_1}, \mathcal{O}_X(t)) \to \mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{V_1}}(\psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}, \mathcal{O}_X(t)) \longrightarrow \mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{V_1}}(\mathrm{Coker}\, g, \mathcal{O}_X(t)) \longrightarrow \mathcal{O}_{V_1} \otimes \mathcal{O}_X(t)$

$$\longrightarrow \psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \mathcal{O}_X(t) \longrightarrow (\mathrm{Coker}\, g) \otimes \mathcal{O}_X(t) \to 0$$

なる完全列と, $\psi_1^{-1}(\omega_V)$ と $\psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes \omega_{V_1}$ が locally free $\mathcal{O}_{V_1}$-module だから,

$$Q(t+1) - Q(t) = \chi(\mathcal{O}_{V_1} \otimes \mathcal{O}_X(t)) - \chi(\psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1} \otimes \mathcal{O}_X(t))$$

となる。

[3]により $\psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes \omega_{V_1} \otimes \mathcal{O}_X(t) \cong \mathcal{O}_X(t)$ (ただし, この同型が上記の対応 g により導かれるかどうかは, 泊には明らかではなかった。ゆえにこのような手続きによる証明となった。) となるから, $Q(t+1) = Q(t)$ for any t となる。$\psi_1^{-1}(m)$ が ψ_1-ample であるから, $\mathrm{Coker}\, g$ の support は zero 次元である。$\psi_1^{-1}(m)^{-a(G)-1} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1}} \omega_{V_1}$ と $\psi_1^{-1}(\omega_V)$ は locally free $\mathcal{O}_{V_1}$-module なので, g は同型写像を与えている。

証明終.

(3.6) 定理IVの(1)の証明. まず, G が Cohen-Macaulay なので, $\dim R^{d-1}\psi_{1*}\mathcal{O}_{V_1} = \dim[H_M^d(G)_{\geq 0}]$ である (1.8)。

$\dim \omega_V/\varphi_* \omega_{\tilde{V}_1} = \dim \omega_V/\psi_{1*}\omega_{V_1} = \dim[H_M^d(G)_{\geq 0}]$ が定理IIIの状況で成立するので, (3.2.4) の対応によって同型 $\varphi_* \omega_{\tilde{V}_1} \xrightarrow{\cong} \psi_{1*}\omega_{V_1}$ が従う。この対応は (3.2.2) より, ψ_1 の direct image によって induce されるものであるから, 次の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd}
\psi_1^{-1}(\varphi_* \omega_{\tilde{V}_1}) = \psi_1^{-1}(\psi_{1*}(\pi_* \omega_{\tilde{V}_1})) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \pi_* \omega_{\tilde{V}_1} \arrow[d, "(3.2.2)"] \\
\psi_1^{-1}(\psi_{1*}\omega_{V_1}) \arrow[r, hook, "h"'] & \omega_{V_1}
\end{tikzcd}$$

$a(G)+1 \geq 0$ ならば, ω_{V_1} は ψ_1 について relative に global section

により生成され（定理(3.5)による），hは同型である。ゆえに，(3.2.2) は同型写像となる。

(3.2)の構成の言葉を用いて，V_1-T 上の π に対する relative duality $\pi_*\Theta_{\tilde{V}_1}|_{V_1-T}=\pi_*\mathcal{H}om_{\Theta_{\tilde{V}_1}}(\omega_{\tilde{V}_1},\omega_{\tilde{V}_1})|_{V_1-T}\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{V_1}}(\pi_*\omega_{\tilde{V}_1},\omega_{V_1})|_{V_1-T}=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{V_1}}(\omega_{V_1},\omega_{V_1})|_{V_1-T}=\mathcal{O}_{V_1}|_{V_1-T}$.
ゆえに，V_1-T は non-singular である。codimension of T w.r.to. $V_1\geq 2$ かつ，V_1 が Cohen-Macaulay だから，V_1 は正規であり $V_1=\tilde{V}_1$ となる。

証明終．

(3.7) 定理IVの(2)の証明　$p_g(V,p)=\dim[H^d_M(G_T)_{\geq 0}]$ であると仮定する。(3.6)と同様にして，ω_V の subsheaf として (3.2.4)の対応により $\xi_*\omega_{\tilde{V}}=\varphi_*\omega_{\tilde{V}_1}=\psi_{1*}\omega_{V_1}$ である。(3.6)により，$V_1=\tilde{V}_1$ となるが，(3.2.1)の対応について次の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^{-1}(\xi_*\omega_{\tilde{V}})=\varphi^{-1}(\varphi_*(\theta_*\omega_{\tilde{V}})) & \hookrightarrow & \theta_*\omega_{\tilde{V}} \\
\| & & \downarrow (3.2.1) \\
\psi_1^{-1}(\psi_{1*}\omega_{V_1})=\varphi^{-1}(\varphi_*(\omega_{\tilde{V}_1})) & \xhookrightarrow{h} & \omega_{\tilde{V}_1}=\omega_{V_1}
\end{array}$$

(3.6)の場合と同様にして，hは同型であり，(3.2.1) は同型である。これは $\tilde{V}_1$ が canonical 特異点である事を意味する（[12]）。

証明終．

(3.8) 系Vの証明　$a(G_T)=\rho-d-1$，$\dim[H^d_M(G_T)_{\geq 0}]=\binom{\rho}{d+1}$ だから定理IVより従う。

参考文献

[1] M. Artin., On isolated rational singularities of surface, Amer. J. Math., 88 (1966), 129－136.
[2] R. Elkik., Singularités rationelles et déformations. Invent. Math. 47 (1978) 139－147.
[3] S. Goto., K.-i. Watanabe., On graded rings I, J. Math. Soc. Japan. 30 (1978) 179－213.
[4] H. Grauert., O. Riemenschneider., Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Invent.

Math. 11 (1970) 263 − 292.
[5] R. Hartshorne, A. Ogus., On the factoriality of local rings of small embedding codimension. Comm. Algebra, 1 (5) (1974) 415 − 437.
[6] M. Hochster, J.L. Roberts., Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. Adv. in Math., 13 (1974) 115 − 175.
[7] S. Ishii., Deformations of normal singularities. preprint. 1985.
[8] S. Itoh., Analytically unramified local ring について，可換環論シンポジウム報告集 No.5. (1983) 71 − 76.
[9] J. Lipman., Desingularization of two-dimensional scheme. Ann. of. Math. 107 (1978), 151 − 207.
[10] M. Morales., Polyèdre de Newton et genre geométrique d'une singularité intersection complete Bull. Soc. Math. France 112 (1984) 325 − 341.
[11] ――――., Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissance d'un idéal m-primaire. Bull. Soc. Math. France 112 (1984) 343 − 358.
[12] M. Reid., Canonical 3-folds, Journees de geometrie algebrique d'Anges 1979, "Algebraic geometry" edited by A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, (1980), 273 − 310.
[13] M. Tomari., A p_g-formula and elliptic singularities., Publ. RIMS Kyoto Univ., 21 (1985) 297 − 354.
[14] ――――., Maximal-ideal-adic filtration on $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ for normal two-dimensional singularities., to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics 8. (1986) "U.S.-Japan Seminor 1984 Complex Analytic Singularities" Kinokuniya - NorthHoland.
[15] ――――., 2次元次数環 $\bigoplus_{n\geq 0} Q^n/Q^{n+1}$ の Cohen-Macaulay性について（M. Morales その他の方々の結果より）可換環論シンポジウム報告集 No. 6 (1984) 317 − 327.
[16] K.-i. Watanabe., Filtered Rings と Filtered Blow-up について　可換環論シンポジウム報告集 No.3 (1981) 37 − 48.
[17] S.S.-T. Yau., Sheaf cohomology on 1-convex manifolds, "Recent Developments in Several Complex Variables" Ann. of Math. Studies, Princeton Univ., 100 (1981), 429 − 452.
[18] K.-i. Watanabe., Normal graded ring が rational singularity

又は canonical singularity になる為の条件について．数理研講究録 No.400 (1980) 33 — 41.
[19] J. Kollár., Toward moduli of singular varieties, Compositio Math. 56 (1985) 369 — 398.

Normal surface singularities associated to ruled surfaces

日高文夫・専修大学北海道短大

1. Notations and Introduction.

k : 代数閉体, $\mathrm{ch}(k) = p \geqq 0$,
C : non-singular projective curve / k of genus g,
$\mathcal{L}$: line bundle on C

C 上で次の $\mathcal{O}_C$-module の extension を考える:

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0 .$$

この exact sequence $(*)$ は locally splitting であるので $\mathcal{E}$ は C 上の rank 2 の vector bundle である。その global splitting data δ は $(*)$ に $\mathcal{H}om(\mathcal{L}^{-1}, *)$ を作用させた

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

の cohomology
$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{L}) \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ 1 & \longmapsto & \delta \end{array}$$
によって与えられる。

即ち $\delta = 0 \iff \mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$.

<u>Def</u> vector bundle $\mathcal{E}$ が decomposable とは $\mathcal{E}$ が2つの line bundle の直和として表わされるときをいう。

一般に $\delta \neq 0$ であっても $\mathcal{E}$ が decomposable となり得る。例えば $C = \mathbb{P}^1$ のとき

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0$$

がその例である。

また、$\mathcal{E}$ が indecomposable ならば $-g \leq \deg(\mathcal{L}) \leq 2g-2$ が知られている。この不等式の右側は $\delta \neq 0$ なる事より明らかであるが、左側は non-trivial な結果である。

$\mathcal{E}$ の C 上の symmetric algebra $\bigoplus_{n \geq 0} S^n(\mathcal{E})$ を $S(\mathcal{E})$ と書く。

また、$V = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ とおき、その natural projection を

$\pi : V \longrightarrow C$ とすると、V は C 上の $\mathbb{P}^1$-bundle である。

$\mathrm{rank}(\mathcal{E}) = 2$ であるので、(*) は自然に次の graded $\mathcal{O}_C$-algebra の exact sequence を生ずる。

$$0 \longrightarrow S(\mathcal{E}) \longrightarrow S(\mathcal{E})(1) \longrightarrow S(\mathcal{L}^{-1})(1) \longrightarrow 0 .$$

この事より我々は次の diagram を得る

$$\begin{tikzcd}
V = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}(\mathcal{L}^{-1}) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\sim"'] \\
C . &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}(\mathcal{L}^{-1}) = C_0$ と書けば、$C \xrightarrow{s} C_0$ は π の section である。

C_0 の構成の仕方より、

$$\begin{cases} \mathcal{O}_V(1) = \mathcal{O}_V(C_0) \\ \mathcal{O}_{C_0}(C_0) \cong \mathcal{L}^{-1} \end{cases}$$

を得る。<u>これ以後我々は $\deg(\mathcal{L}) > 0$ と仮定する</u>。

この仮定によって C_0 の V 上での self intersection number が負となるので、Grauert [1] の結果により、C_0 を一点

に contract させて新たに normal surface を構成できる。

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] & x \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=-90] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ C & \end{tikzcd}$$

その surface を X とおき contraction $\varphi: V \longrightarrow X$ による C_0 の image を x とおく。

前述した様に、一般には $\delta \neq 0$ でも $\mathcal{E}$ は indecomposable とは限らないが、$\deg(\mathcal{L}) > 0$ の仮定の下では次の Lemma が成立する。

<u>Lemma</u> $\delta \neq 0 \iff \mathcal{E}$: indecomposable

pr) $\Leftarrow$ は明らか。
$\Rightarrow$) もし $\mathcal{E}$ が decomposable であるとすると $\mathcal{E} = L_1 \oplus L_2$ と line bundle の直和で書ける。(*) において

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow L_1 \oplus L_2 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0$$

は $\delta \neq 0$ より non-splitting. 従って $\mathcal{O}_C \to L_1$, $\mathcal{O}_C \to L_2$ は共に non-zero map $\therefore \deg(L_i) \geqq 0$ $i=1,2$. これより $\deg(\mathcal{L}^{-1}) \geqq 0$ となって仮定に反する。■

$\delta = 0$ の時、X の構造は良く知られている。実際、X は $\operatorname{Spec} \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(C, \mathcal{L}^n)$ の自然な projective closure となっている。また特異点 (X, x) の性質も調べられている (cf. Goto-Watanabe [2])。本稿では $\delta \neq 0$

の場合に得られた結果を $\delta=0$ の case と比較しながら述べたいと思う。

2. Main results

記号は前節の通りとする。前に述べた通り、$\delta=0$ ならば C_0 を contract してできた variety X は projective である。我々の main result は次の定理である。

<u>Theorem</u>

$g(C)\geq 2$, $0<\deg \mathfrak{e} \leqq 2g-2$, $\delta\neq 0$ と仮定する。

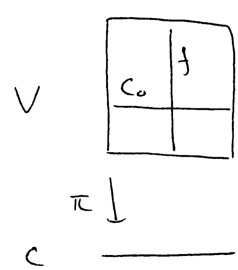
If $ch(k)=0 \Longrightarrow X$ is <u>not</u> algebraic

If $ch(k)=p>0 \Longrightarrow X$ is projective.

一般に ruled surface V の Picard group $\operatorname{Pic} V$ は

$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}\cdot C_0 \oplus \pi^* \operatorname{Pic} C$ の形の分解をもつ。即ち任意の V 上の divisor D は $D\sim aC_0+\pi^*(\mathfrak{a})$

$a\in\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}\in\operatorname{Pic} C$ とおける。以下 $\pi: V\longrightarrow C$ における general fibre を f とおく。



<u>Lemma</u> $\deg \mathcal{L} \geqq 0$ の下で

1) D: irreducible curve で $\neq f, \neq C_0$ とすると、D の上記の分解において

$a>0, \quad -a\deg \mathcal{L} + \deg \mathfrak{a} \geqq 0$.

2) D ; ample divisor
$\Updownarrow$
$a>0, \quad -a\deg \mathcal{L} + \deg \mathfrak{a} > 0$.

pr) 1) $Df>0, \quad DC_0 \geqq 0$ より 明らか。

2) $\Downarrow$ $Df>0$, $DC_0>0$ より 明らか、

$\Uparrow$ 仮定より $Df>0$, $DC_0>0$. さらに Y を $\neq f, \neq C_0$ なる irreducible curve としたとき

$Y \sim bC_0 + \pi^*(\mathfrak{b})$ とおくと 1) より $b>0$,

$-b\deg \mathcal{L} + \deg \mathfrak{b} \geqq 0$.

$$D.Y = (aC_0 + \pi^*(\mathfrak{a})) . (bC_0 + \pi^*(\mathfrak{b}))$$

$$= -ab\deg \mathcal{L} + b\deg \mathfrak{a} + a\deg \mathfrak{b}$$

$$= b(-a\deg \mathcal{L} + \deg \mathfrak{a}) + a\deg \mathfrak{b} > 0$$

q.e.d.

proof of Theorem)

初めに $ch(k)=p>0$ の場合について具体的に X を構成する。

$a>0$ とし、$D \sim aC_0 + \pi^*(\mathcal{L}^{a+1})$ とおくと Lemma より D は ample であり、$\mathcal{O}(D+C_0)\otimes\mathcal{O}_{C_0} \simeq \mathcal{O}_{C_0}$ が成立している。 $\hat{C}_0$ を formal completion of V along C_0 とする。

<u>Claim</u> $\exists \nu \gg 0$ s.t

$$\mathcal{O}_V(p^\nu(D+C_0))\otimes\mathcal{O}_{\hat{C}_0} \simeq \mathcal{O}_{\hat{C}_0} \qquad (**)$$

∵) $n\in\mathbb{N}$ として、$\mathcal{O}_V$-module の exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{C_0}(-nC_0) \longrightarrow \mathcal{O}_{(n+1)C_0} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{nC_0} \longrightarrow 0$$

$$\mathcal{O}_{C_0}(-nC_0) \cong \mathcal{O}_V(-nC_0)\big/\mathcal{O}_V(-(n+1)C_0)$$

を考える。全射 α を unit に制限する事により

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_0}(-nC_0) & \longrightarrow & \mathcal{O}^*_{(n+1)C_0} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}^*_{nC_0} & \longrightarrow 1 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \\ & a & \longmapsto & 1+a & & & \end{array}$$

が定まる。ここで左側は上の様に定め、右側は multiplicative な自然な map で、$\forall a,b\in\mathcal{O}_{C_0}(-nC_0)$ は $ab=0$ に注意すれば $a+b \longmapsto 1+a+b = (1+a)(1+b)$ と well defined となる。

ここでこの cohomology の H^1-terms に注目すると

$$
\begin{tikzcd}
H^1(C, \mathcal{L}^n) \arrow[r] & \mathrm{Pic}((n+1)C_0) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(nC_0) \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Pic}\, V \arrow[ul, "\mu_{n+1}"] \arrow[u, "\mu_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

$n=1$ のとき仮定より $\mu_1(D+C_0)=0$, よって

$\exists \Delta_1 \in H^1(C, \mathcal{L}^1)$ s.t. $\Delta_1 \longmapsto \mu_2(D+C_0) \longmapsto 0$.

ところで $H^1(\mathcal{L}^1)$ は k-vector space であるので $p\cdot\Delta_1=0$

$\therefore\ \mu_2(p(D+C_0))=0$ これをくり返せば

$\therefore\ \mu_{\nu+1}(p^\nu(D+C_0))=0 \quad (\nu=1,2,\cdots)$

一方 $\deg \mathcal{L}>0$ より $H^1(C, \mathcal{L}^\nu)=0$ for $\forall \nu \gg 0$.

$\therefore\ \mathrm{Pic}(\hat{C_0}) \simeq \mathrm{Pic}(\nu C_0)$ for some $\nu \gg 0$.

この事より Claim が示される。

今 D は ample であるので ν を充分大きく

$(**)$, かつ $p^\nu D$: very ample, $H^1(V, \mathcal{O}(p^\nu D))=0$

が成立するようにとる。exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-p^\nu C_0) \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_{p^\nu C_0} \longrightarrow 0$$

に $\otimes\, \mathcal{O}(p^\nu(D+C_0))$ を作用させて $(**)$ に注意すれば

$$0 \to \mathcal{O}(p^\nu D) \to \mathcal{O}(p^\nu(D+C_0)) \to \mathcal{O}_{p^\nu C_0} \to 0$$

を得る。故に

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(p^\nu D) \arrow[r, "\beta"] & \Gamma(p^\nu(D+C_0)) \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma"] & \Gamma(\mathcal{O}_{p^\nu C_0}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & \Gamma(\mathcal{O}_{C_0}) & \end{tikzcd}$$

ここで complete linear system $|p^\nu(D+C_0)|$ による map $\varphi = \varphi_{|p^\nu(D+C_0)|}$ を考える。$p^\nu D$ は very ample であるので $\mathrm{Bs}\,|p^\nu(D+C_0)| \subseteq C_0$ であるが、γ の surjectivity より $\mathrm{Bs}\,|p^\nu(D+C_0)| = \phi$. よって φ は morphism であり その image を $\varphi : V \longrightarrow X$ とおく。以下これが求める C_0 の contraction である事を示す。$\mathcal{O}(p^\nu(D+C_0)) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \simeq \mathcal{O}_{C_0}$ より $\varphi|_{C_0}$: constant i.e. $\varphi(C_0) = x$ (一点). $p^\nu(D+C_0)$ の section は $p^\nu D$ の section に C_0 の defining equation の p^ν 乗の積の形の元を含んでいる。$V \setminus C_0$ 上では C_0 の defining equation は unit である事より $p^\nu(D+C_0)$ の section の一部が $V \setminus C_0$ の 2点 を分離し、tangent をも分ける。従って $\varphi : V \setminus C_0 \xrightarrow{\sim} X - \{x\}$. よって X は C_0 の V における contraction を与える。

$ch(k)=0$ の場合は次の Key lemma から示される。

<u>Key lemma</u>

$\delta \neq 0$ とし, $D \geq 0$: effective divisor on V で

$D \cap C_0 = \phi$ と仮定する。

If $ch(k)=0 \Longrightarrow D=0$

If $ch(k)=p>0 \Longrightarrow p \mid (D.f)$

pr) D を irreducible と仮定してさしつかえない。

$D \neq f$ であるから $D \longrightarrow C$ は surjective, $\tilde{D} \longrightarrow D$ を normalization として $\lambda : \tilde{D} \longrightarrow D \longrightarrow C$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
 & V\times_C \tilde{D} \arrow[rrr] \arrow[dd] & & & V \arrow[dd, "\pi"] \\
D\times_C \tilde{D} \arrow[ur, hook] \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & D \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & \\
 & \tilde{D} \arrow[r] & D \arrow[rr] & & C
\end{tikzcd}$$

上の diagram において, $\mathbb{P}^1$-bundle $V\times_C \tilde{D} \longrightarrow \tilde{D}$ には $\pi : V \longrightarrow C$ の section C_0 の pull back $C_0 \times_C \tilde{D} \rightleftarrows \tilde{D}$ なる section が明らかに存在する。さらに normalization $\tilde{D} \longrightarrow D$ と $\tilde{D} \xrightarrow{id} \tilde{D}$ により $D \times_C \tilde{D} \rightleftarrows \tilde{D}$ なる section がもう一つ存在する。この事より, $V\times_C \tilde{D}$ には互いに交わらない2つの section が存在するので, (*) の pull back

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{D}} \longrightarrow \lambda^* \mathcal{E} \longrightarrow \lambda^* \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0$$

は split している。故に

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{L}^{-1}) & \xrightarrow{\lambda^*} & H^1(\lambda^* \mathcal{L}^{-1}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \delta & \longmapsto & 0 \end{array}$$

ここで λ が finite である事より $H^1(\lambda^* \mathcal{L}^{-1}) \cong H^1(\mathcal{L}^{-1} \otimes \lambda_* \mathcal{O}_{\tilde{D}})$

即ち、上の λ^* は natural map $0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \lambda_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}$ より

自然に得られる。ここで $\deg \lambda = d$ とおくと、

$ch(k) = 0$ のときは常に

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \underset{\frac{1}{d}\mathrm{Tr}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \lambda_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}$$

が存在するので $\mathcal{O}_C$ は $\lambda_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}$ の direct summand であり

従って λ^* は injective である。これは矛盾であるので

$D = 0$ でなければならない。一方 $ch(k) = p > 0$ のとき

は必然的に $p \mid d$ である。 q.e.d.

実際 $ch(k) = p > 0$ のとき、この様な D が存在する事

は Theorem の証明の前半で示されている事になる。

proof of Theorem 続)

$ch(k)=0$ のとき，もし X が algebraic と仮定すると x のまわりに affine 近傍 U が存在する。X が normal であるので $\varphi_* \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X$ に注意をすると $H^0(\mathcal{O}_X) \cong k$ 従って X は not affine．$\therefore U \subsetneqq X$．$Z = X \setminus U$ とおくと $\operatorname{codim}_X Z = 1$ である。実際もし $\operatorname{codim}_X Z = 2$ とすると，Z は X の non-singular point の有限和となるので $\operatorname{depth}_Z \mathcal{O}_X = 2$．この事より

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\Gamma_Z(\mathcal{O}_X)} \to \Gamma(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{O}_U) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1_Z(\mathcal{O}_X)}$$

となり矛盾．よって Z は X の x を通らない divisor となるが $\varphi^*(Z)$ を考えると，この様な divisor の存在は Key lemma に矛盾する。よって Theorem は示された ∎

3. some properties.

この節では特異点 (X, x) の Gorenstein 性について考える。$\delta=0$ のとき次の事が知られている。

<u>Fact</u> $(\delta=0)$

$$(X.x) : \text{Gorenstein} \iff \exists a>0 \text{ s.t } K_C \sim \mathcal{L}^a$$

V の canonical divisor K_V は

$$K_V \sim \pi^*(K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2C_0$$

とかけることに注意をしておく。

<u>Lemma</u>

(X, x) : Gorenstein

$\Updownarrow$

$$\exists -tC_0 + D \in |K_V|$$

s.t

$$D \cap C_0 = \phi \quad \text{\&} \quad t \geqq 0$$

(但. D は not nec. effective)

$\because$) $\Uparrow$) $V \xrightarrow{\varphi} X$ において x の small nbd $U \subset X$ を $\varphi^{-1}(U) \cap D = \phi$ となるようにとる。$V \setminus C_0 \simeq X \setminus \{x\}$ により $\omega_{U \setminus x} \simeq \mathcal{O}_{U \setminus x}$. $U \setminus \{x\} \overset{i}{\underset{j}{\hookrightarrow}} U$ として

$\omega_U \simeq j_* \omega_{U \setminus \{x\}} \simeq j_* \mathcal{O}_{U \setminus \{x\}} \simeq \mathcal{O}_U$ ($\because$ x : normal)

$\therefore$ $(X.x)$: Gorenstein. //

$\Downarrow$) (X, x) Gorenstein とすると $\exists\, U \ni x$ small nbd in X

s.t $\omega_U \simeq \mathcal{O}_U$. $\therefore\ \varphi^*(\omega_U) \simeq \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U)}$.

natural map $\varphi^*(\omega_U) \longrightarrow \omega_{\varphi^{-1}(U)}$ に対し この map

は $\varphi^{-1}(U) \setminus C_0$ 上で identity. よって $\omega_{\varphi^{-1}(U)}$ は

C_0 上のみで support をもつ divisor で書ける

q.e.d

<u>Proposition</u> $\delta \neq 0$ と仮定して

1) $ch(k) = 0$ のとき (X, x) : Gorenstein $\Longleftrightarrow K_C \sim \mathcal{L}$

2) $ch(k) = p > 0$ のとき (X, x) : Gorenstein

$\Downarrow$

$K_C \sim \mathcal{L}^a$ with $a > 0$ and $p \mid a-1$

pr) 1) $K_C \sim \mathcal{L}$ とおくと $K_V \sim -2C_0$ よって

lemma より (X, x) Gorenstein. 逆に (X, x) Gorenstein

とすると lemma と前節の Key lemma より

$K_V \sim -2C_0$ $\therefore K_C \sim \mathcal{L}$ //

2) (X, x) Gorenstein とすると $K_V \sim -(a+1)C_0 + D$

と書ける $(C_0 \cap D = \phi)$. $\therefore K_C = (K_V + C_0).C_0 = \mathcal{L}^a$

$\deg \mathcal{L} > 0$ より $a > 0$. さらに

$-2 = K_V.f = -a-1 + (D.f)$ $\therefore (D.f) = a-1$

再び Key lemma より $p \mid a-1$ q.e.d

次の proposition は $\delta=0$ のときは既知であろう。

<u>Proposition</u> ($\delta=0$ でも $\neq 0$ でもよい)

$K_C \sim \mathcal{L}$ とすると

$\Downarrow$

X は Gorenstein K3 surface.

i.e)

1) $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$

2) $q(X) = 0$

とくに 3) $p_g(X.x) = g+1$, $p_a(X.x) = g$.

pr) $K_V = \pi^*(K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) - 2C_0 = -2C_0$ より

$$\omega_X = j_* \omega_{X \setminus \{x\}} = \mathcal{O}_X \qquad \text{ここで } j : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$$

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q\varphi_*\mathcal{O}_V) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_V) \quad \text{より}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\mathcal{O}_X) \arrow[r] & H^1(\mathcal{O}_V) \arrow[r] & H^0(R^1\varphi_*\mathcal{O}_V) \arrow[r] & H^2(\mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\!\!\parallel"] & H^2(\mathcal{O}_V) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
 & & H^1(\mathcal{O}_C) \arrow[u, "\pi^*", "\wr"'] \arrow[d, phantom, "\wr\!\!\parallel"] & & H^2(\omega_X) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dual}"] & 0 \\
 & & k^g & & H^0(\mathcal{O}_X) \arrow[d, phantom, "\wr\!\!\parallel"] & (\because V : \text{ruled}) \\
 & & & & k &
\end{tikzcd}$$

ここで $H^0(R^1\varphi_*\mathcal{O}_V) \cong k^{g+1}$ を示せば、$q(X) = 0$

また $p_g(X.x) = g+1$ を得る。

$\because$) $(R^1\varphi_*\mathcal{O}_V)^\wedge_x \simeq \varprojlim_n H^1(\mathcal{O}_{nC_0})$ に注意して

exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_{C_0}(-nC_0) \to \mathcal{O}_{(n+1)C_0} \to \mathcal{O}_{nC_0} \to 0$$

より

$$H^1(nK_C) \to H^1(\mathcal{O}_{(n+1)C_0}) \to H^1(\mathcal{O}_{nC_0}) \to 0$$

を得る。 ここで $n=1$ のときを考えると

$h^1(\mathcal{O}_{C_0}) = g$, $h^1(K_C) = 1$ で 左側 a map は non-zero であるので

$h^1(\mathcal{O}_{2C_0}) = g+1$. $n \geqq 2$ のときは $H^1(nK_C) = 0$ より

$$h^1(\mathcal{O}_{nC_0}) = h^1(\mathcal{O}_{2C_0}) = g+1.$$

$$\therefore \dim (R^1 \varphi_* \mathcal{O}_V)^\wedge_x = g+1 \qquad //$$

また、

$$p_a(mC_0) = \frac{1}{2}(K_V + mC_0).\, mC_0 + 1$$

$$= m(m-2)(1-g) + 1 \quad \text{より}$$

$m=1$ のときが max であるので

$$\therefore \quad p_a(X, x) = g \qquad //$$

References

[1] Grauert, H. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331 - 368

[2] S. Goto - K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 172-213.

Conductorイデアルと単項イデアルの非孤立準素成分

金光三男・愛知教育大
吉田憲一・岡山理科大　応数

Rは商体Kをもつネーター整域とし、$\bar{R}$をRの整閉包とし、$\bar{R}$は有限R－加群であると仮定する。

<u>定義</u>　SをRのoverringとする。RがSにおいて<u>Arf closed</u>とは、

$$\overset{*}{{}_S}R = \{\alpha \in S \mid \alpha \otimes 1 = 1 \otimes \alpha \text{ in } S \otimes_R S\}$$

とおくとき、$\overset{*}{{}_S}R = R$のときをいう。

このようなものの例として、

<u>命題　1</u>　AをRのoverringとする。RがAにおいてweakly normalなら、RはAにおいてArf closedである。

<u>証明</u>　RのAにおけるweak normalizationを$\overset{w}{{}_A}R$とかくと、仮定より、$\overset{w}{{}_A}R = R$。写像$\bar{\varphi}$を図式の様に定義すると、M. Manaresiの結果より([3])

$$\mathrm{Ker}(\bar{\varphi}) = \overset{w}{{}_A}R。$$

これより$\overset{*}{{}_A}R = R$がいえる。

$$\begin{tikzcd}
\alpha \in A \arrow[rr, "\bar{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & (A \otimes_R A)_{red} \\
& A \otimes_R A \arrow[ur, "\text{自然写像}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \in A \otimes_R A$$

$\left\{ (A \otimes_R A)_{red} \text{は} A \otimes_R A \text{の nilradical による剰余環を表わす} \right\}$

[Q.E.D.]

<u>注意</u>　命題1の逆は成立するとは限らない。その例として、$\mathbb{Z}[3X, X^2, X^3]$は$\mathbb{Z}[X]$においてArf closedだがweakly normalではない。(上で$\mathbb{Z}$は有理整数環とする)。

<u>定義</u>　$\alpha \in K$に対して

$$I_\alpha = \{x \in R \mid \alpha x \in R\}$$

とおくと、これはRのイデアルでこれをαのRにおける<u>分母イデアル</u>という。

命題 2. AをRの双有理整拡大とし、RはAにおいてArf closedとする。このとき、Aの任意の元α, βに対して、$I_{\alpha\beta} \supset I_\alpha \cap I_\beta$ となる。

証明 $I_\alpha \cap I_\beta \ni {}^\forall x\ (\neq 0)$ に対して、${}^\exists y, z \in R$ s.t. $\alpha x = y$, $\beta x = z$。ところが、$\frac{yz}{x} \otimes 1 = 1 \otimes \frac{yz}{x}$ がいえるから、$\frac{yz}{x} \in {}^*_A R$。仮定より ${}^*_A R = R$ だから、$x\alpha\beta = \frac{yz}{x} \in R$。$\therefore x \in I_{\alpha\beta}$

[Q.E.D.]

注意. AがRの双有理整拡大でないときは、命題2は成立するとは限らない。その例として、

$R = \mathbb{Z}[3X, X^2, X^3] \subset K = \mathbb{Q}(X)$ (ここで、$\mathbb{Q}$は有理数体)。$X^{-1}, X^{-2} \in K - R$ に対する分母イデアル $I_{X^{-1}}, I_{X^{-2}}$ を考えると、

$$I_{X^{-1}} = \{ f \in R \mid f = 3a_1X + 3a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots\cdots \quad {}^\forall a_i \in \mathbb{Z} \}$$

$$I_{X^{-2}} = \{ f \in R \mid f = a_2X^2 + 3a_3X^3 + a_4X^4 + \cdots\cdots \quad {}^\forall a_i \in \mathbb{Z} \}$$

となる。これより、$I_{X^{-2}} \not\supset I_{X^{-1}} = I_{X^{-1}} \cap I_{X^{-1}}$。

系 3. 命題2と同じ仮定の下で、更に$\mathfrak{a}$をRのイデアルとする。$A(\mathfrak{a}) = \{ \alpha \in A \mid I_\alpha \supset \mathfrak{a} \}$ とおくと、$A(\mathfrak{a})$は環となる。

証明 ${}^\forall \alpha, \beta \in A(\mathfrak{a})$ に対して、$\alpha\beta \in A(\mathfrak{a})$ をいうのに、命題2の $I_{\alpha\beta} \supset I_\alpha \cap I_\beta$ を使う。

定義 $\mathfrak{a}$をRのイデアルとする。このとき、$\mathfrak{a}$がconductorイデアルとは、Rと$\bar{R}$の中間環Bが存在して、$\mathfrak{a} = R :_K B\ (= R :_R B)$ のときをいう。このイデアルを $\mathfrak{c}(B/R)$ とも書くことにする。

[2, Lemma 2.1] より、すぐに、conductorイデアルはdivisorialイデアルであることがいえる。

このある意味での逆が次の形でいえる。

<u>定理4.</u> $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(\overline{R}/R)$ とおく。$\mathfrak{a}$ をRのイデアルとし、Rは$\overline{R}$においてArf closedとする。このとき、次は同値。

(1) $\mathfrak{a}$がconductorイデアルである。

(2) $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{C}$かつ$\mathfrak{a}$がdivisorialイデアルである。

<u>証明</u> (1)$\Longrightarrow$(2). $\mathfrak{a}$がdivisorialであることは上で述べたから、$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{C}$をいう。定義より$R\subset B\subset\overline{R}$なる中間環$B$が存在して、$\mathfrak{a}=\mathfrak{C}(B/R)$。$R:B\supset R:\overline{R}$だから、$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{C}$がいえた。

(2)$\Longrightarrow$(1). $B=\mathfrak{a}^{-1}$とおく。$B=\{\alpha\in K \mid I_\alpha\supset\mathfrak{a}\}$となり$\mathfrak{a}\supset\mathfrak{C}$より$B=\mathfrak{a}^{-1}\subset\mathfrak{C}^{-1}=\overline{R}$。系3より、$B=\overline{R}(\mathfrak{a})=\{\alpha\in\overline{R}\mid I_\alpha\supset\mathfrak{a}\}$は環である。$\mathfrak{a}$はdivisorialだから、$\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}=B^{-1}=\mathfrak{C}(B/R)$。

[Q.E.D.]

conductor idealは有限個とは限らない(Y. Koyamaの例[2])が、特別のイデアルである。

<u>定理5.</u> $\mathrm{Spec}(R)\ni\mathfrak{p}\neq(0)$で$\mathrm{depth}\,R_\mathfrak{p}=1$, $\mathfrak{p}\ni a\neq 0$とし、$\mathfrak{p}$は$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$か又は"$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1$で$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{C}$"のどちらかとし、$R$は$\overline{R}$においてArf closedとする。このとき、

(1) aRは$\mathfrak{p}$-準素成分をもつ。

(2) $\mathfrak{p}$はconductorイデアルである。

(3). $Ht_1(R)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1\}$とおく。今、$Ht_1(\overline{R})\cap R$が$Ht_1(R)$とすると、$aR$の$\mathfrak{p}$-準素成分はconductorイデアルではない。

(4) (3)と同じ仮定の下で、Qを$\mathfrak{p}$-準素イデアルかつconductorイデアルとすれば、QはaRの$\mathfrak{p}$-準素成分ではない。

<u>証明</u> (1) [1, p.25 Corollary 3.25]

(2) [2, 3.2]より、$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)$とすると、$\mathfrak{p}$がdivisorialであることは、$\mathrm{depth}\,R_\mathfrak{p}=1$であることは同値である。定理4より$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{C}$をいえばよい。$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=1$のときは終りで、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}>1$のときは、$R_\mathfrak{p}$は$(S_2)$条件を満たさないから、normalではない。従って、$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{C}$である。(4)は(3)のいいかえ。

(3) $(R,\mathfrak{m})$は局所環としてよい。ここで、$\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$と考える。$aR=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t\cap\mathfrak{q}$をirredundantな準素分解とし、$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$、$\mathfrak{q}$は$\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。ここで、$A$を$\mathrm{ht}\,\mathfrak{m}=1$のときは$\overline{R}$で、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{m}>1$のときは$\{\alpha\in K\mid I_\alpha=R$ 又はI_αは$\mathfrak{m}$-準素イ

デアル$\mathfrak{z}$とおく。$Ht_1(\ )$に関する仮定より、$A \subset \overline{R}$がいえる。$\mathfrak{L}(A/R)$はM-準素イデアルだから、$aA \cap R = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$が少し考えればいえる。$B_a = A \cap \frac{1}{a} R$とおくと、命題2より$B_a$は$R$と$A$の中間環である。$\mathfrak{q}$がconductorイデアルとして矛盾を導く。$\mathfrak{q} = \mathfrak{L}(B_a/R)$となり、$\mathfrak{q} = \mathfrak{q} : (\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t)$。ところがこれは起りえないから矛盾。よって、$\mathfrak{q}$はconductorイデアル。

[Q.E.D.]

<u>注意</u> M-準素イデアルだがconductorイデアルにも単項イデアルの準素成分にもならないものが存在する。

次に、divisorial $\mathfrak{p}$-準素イデアルがconductorイデアルとなる場合を考察しよう。

<u>定理7.</u> Rはarf closed in $\overline{R}$とし、$\mathfrak{p} \in Spec(R)$とする。$\mathfrak{q}$がdivisorial $\mathfrak{p}$-準素イデアルで$ht\,\mathfrak{p} > 1$又は"$ht\,\mathfrak{p} = 1$なら$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{L}$"とし、$Ht_1(\overline{R}) \cap R \subset Ht_1(R)$を仮定する。$\mathfrak{q}$はconductorイデアルである。

<u>証明</u> $ht\,\mathfrak{p} = 1$のときは、定理4よりいえる。$ht\,\mathfrak{p} > 1$のとき、$B = \mathfrak{q}^{-1}$とおき、$B \subset \overline{R}$がいえれば、$\mathfrak{L} = (\overline{R})^{-1} \subset B^{-1} = (\mathfrak{q}^{-1})^{-1} = \mathfrak{q}$。$B \subset \overline{R}$は、$Ht_1(\ )$についての仮定よりいえる。

[Q.E.D.]

<u>注意</u> 定理7の仮定の下では、divisorial準素イデアルは、conductorイデアルしか存在しない。I_αがM-準素イデアルならconductorイデアルである。

<u>height 1 の conductor イデアル</u>

Rは常にarf closed in $\overline{R}$とし、ここでは$\mathfrak{p} \in Spec(R)$かつ$ht\,\mathfrak{p} = 1$とする。

<u>補題8.</u> $\overline{(R_\mathfrak{p})}$は単項イデアル整域で有限個の離散付値環の共通部分である。

以下、$(R, \mathfrak{m})$は一次元局所整域で無限体kを含み、$\overline{R} = V_1 \cap \cdots \cap V_t$ (離散付値環 $V_1, \dots, V_t$)とし、V_i の付値を v_i $(i=1, \dots, t)$とする。また、$v = (v_1, \dots, v_t)$ とかく。

補題9. $\mathfrak{a}$をRのconductorイデアルとすると、任意の$\mathfrak{a}$の元yに対して、$y\overline{R} \cap R \subset \mathfrak{a}$ となる。

証明　Rが$\overline{R}$においてarf closedだから命題2が使え、また定理4より$\mathfrak{a}$はdivisorialイデアルであることを使えばいえる。 [Q.E.D.]

$\overline{R}$は単項イデアル整域だから、$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\overline{R}/R)$は単項イデアル。従って、Rの元$c$を使って $\mathfrak{c} = c\overline{R}$ とかける。aがRの元で $a\overline{R} \supset \mathfrak{c}$ なら、$a\overline{R} \cap R \supset \mathfrak{c}$ だから定理4より、$a\overline{R} \cap R$ はconductorイデアルである。

定義　BがRのdivisorial overringであるとは、Rと$\overline{R}$の中間環Bが存在して $B = R :_K (R :_K B)$ となるときをいう。

$\mathfrak{c}(B/R) = \mathfrak{a}$とおくと、$B = \mathfrak{a}^{-1}$ となり、また、$\mathfrak{a} = \mathfrak{c}(B/R)$ なら、$B = \mathfrak{a}^{-1}$はdivisorial overringである。

定理10. $\mathfrak{a}$をRのconductorイデアルとする。このとき次は同値である。

(1) $\mathfrak{a} = a\overline{R} \cap R$ となる$\mathfrak{a}$の元aが存在する。

(2) 上の(1)の0でない元aに対して

$$\mathfrak{a}^{-1} = \overline{R} \cap \frac{1}{a}R = \frac{1}{a}\mathfrak{a}.$$

証明　(1) $\overline{R}$は単項イデアル整域だから、$\mathfrak{a}\overline{R} = a\overline{R}$となる$a \in \mathfrak{a}$が存在する。補題9より$a\overline{R} \cap R \subset \mathfrak{a}$。一般論より逆の包含関係がいえる。故に、$\mathfrak{a} = a\overline{R} \cap R$となる。

(2) $B_a = \overline{R} \cap \frac{1}{a}R$とおくと、これはdivisorial環である。$a \in \mathfrak{a}$だから、$\mathfrak{a}^{-1} \subset \frac{1}{a}R$。$\mathfrak{a}$はconductorイデアルだから、Rと$\overline{R}$の中間環Bが存在して、$\mathfrak{a} = \mathfrak{c}(B/R) \supset \mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\overline{R}/R)$。故に、$B = \mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{c}^{-1} = \overline{R}$がいえ、よって、$\mathfrak{a}^{-1} \subset B_a$となる。逆は命題2を使って$\frac{1}{a}\mathfrak{a}^2 \subset R$がいえることよりでてくる。

故に、$\mathfrak{a}^{-1} = B_a$ がいえた。 [Q.E.D.]

従って、conductor イデアルとそれに対応する divisorial overrings が簡明な形で対応する：

$$a\overline{R} \cap R \xleftrightarrow{\text{bijection}} \overline{R} \cap \frac{1}{a} R = B_a$$

$\mathfrak{a}$ が conductor イデアルなら、$\mathfrak{a}^{-1} = \frac{1}{a}\mathfrak{a}$ とかける。従って、$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}^{-1}$ は単項分数イデアルだけの違いである。

<u>定理11.</u> $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ を R の conductor イデアルとし、K の元 α によって $\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b}$ とする。このとき、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$（従って α は $\mathfrak{a}^{-1}$ の単元になる）。

<u>証明</u> $\mathfrak{b}^{-1} = C$ とおくと、$\mathfrak{b} = \mathfrak{L}(C/R)$ となる。故に、$\mathfrak{b}C \subset \mathfrak{b}$。仮定より、$\alpha\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \subset R$。故に、$\alpha \in C$ となり、$\mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$。逆も同様だから、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$。 [Q.E.D]

以下では、$\mathfrak{p}$-準素イデアルについて考える。

<u>定理12</u> $\mathfrak{q}$ が divisorial $\mathfrak{p}$-準素イデアルなら、$\mathfrak{q}$ は、単項分数イデアルの違いで conductor イデアルとなる。

<u>証明</u> $f_i = \min\{ v_i(x) \mid x \in \mathfrak{q} \}$ とおく。このとき、$\mathfrak{q}$ の元 a で $v(a) = (f_1, \cdots, f_t)$ なるものが存在する。これより

$$\frac{1}{a}\mathfrak{q} \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots\cdots \cap V_t = \overline{R}$$

は、divisorial である。定理10より、R の元 x があって、$x(\frac{1}{a}\mathfrak{q}) = \mathfrak{a}$ は conductor イデアル。故に、$\mathfrak{q} = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{a}$。[Q.E.D]

<u>注意</u> $\mathfrak{p}$-準素イデアルはすべて divisorial とは限らない。

<u>$ht > 1$ なる conductor イデアル</u>

$(R, \mathfrak{M})$ は必ずしも1次元とは限らない局所整域で、

無限体kを含むとする。また、Rは$\overline{R}$において *Arf closed* とする。Aを、$ht\,\mathfrak{m}=1$のときは$\overline{R}$とし、$ht\,\mathfrak{m}>1$のときは、$\{\alpha\in\overline{R} \mid I_\alpha=R$ 又は I_α は $\mathfrak{m}$-準素イデアル$\}$のこととする。また、aをRの元とするとき、$B_a=A\cap\frac{1}{a}R$とおくと、これは、*divisorial overring* となる。また、Rの2元a,bに対して$a\approx b$を$B_a=B_b$なることと定義すると、$\approx$はRの同値関係となる。

<u>命題13.</u> $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$を$\mathfrak{m}$-準素イデアルとすると、$\mathfrak{c}(B_a/R)$は、$a$を含む最小の *conductor* イデアルとなる。

<u>証明</u> B_aはRと$\overline{R}$の中間環だから、$\mathfrak{c}(B_a/R)$は *conductor* イデアルでaを含む。$\mathfrak{a}$をaを含む任意の *conductor* イデアルとして、$\mathfrak{c}(B_a/R)\subset\mathfrak{a}$を証明すればよい。$C=R:\mathfrak{a}$とおくと、$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$が$\mathfrak{m}$-準素イデアルだから、$C\subset A$。また、$a\in\mathfrak{a}$だから、$C\subset\frac{1}{a}R$となる。故に、$C\subset B_a$。よって、$\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(C/R)\supset\mathfrak{c}(B_a/R)$がいえた。 [Q.E.D.]

Rの *conductor* イデアルが有限個しかないとき、*divisorial overring* について考察しよう。

<u>命題14.</u> Rの *conductor* イデアルが有限個（例えば、$ht\,\mathfrak{m}=1$のときは、このような例になっている）とする。$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$が$\mathfrak{m}$-準素イデアルで$B$が$R$の *divisorial overring* とすれば、$B=B_a$となるRの元aが存在する。

<u>証明</u> $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(B_a/R)$とおく。$\mathfrak{a}$に含まれる *conductor* イデアルは有限個しかないから、それを、$\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_t$（但し、$\mathfrak{a}\supsetneqq\mathfrak{a}_i$ $i=1,2,\cdots,t$）としておく。このとき、

$\mathfrak{a}\supsetneqq\bigcup_{i=1}^{t}\mathfrak{a}_i$ より、$\mathfrak{c}(B_a/R)$はaを含む最小の *conductor* イデアル（命題13より）となり、aは$\mathfrak{a}$の元で$a\notin\bigcup_{i=1}^{t}\mathfrak{a}_i$となるようにとれる。よって、$\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(B_a/R)$となり、$B$は *divisorial overring* だから、$B=\mathfrak{a}^{-1}=B_a$となる。[Q.E.D.]

ある仮定の下で、Rの *conductor* イデアルの集合は、Rのある同値類と *bijective* になる。

定理15. R の conductor イデアルは、有限個しかないとする。また、$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき、$\Gamma=R/\sim$ と、R の conductor イデアル全体は bijective である。

証明 $\overline{a}\in\Gamma$ に対して $\mathfrak{c}(B_a/R)$ を対応させる。$\mathfrak{c}(B_a/R)$ は命題13より conductor ideal で、$b\sim a$ なら $B_b=B_a$ だから $\mathfrak{c}(B_b/R)=\mathfrak{c}(B_a/R)$ である。逆に、$\mathfrak{a}$ を R の conductor イデアルとすると、$\mathfrak{a}^{-1}$ は divisorial だから、命題14より $\mathfrak{a}^{-1}=B_a$ で $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(B_a/R)$ となる。$\mathfrak{a}$ にこの $\overline{a}$ を対応させるとこの対応で Γ と R の conductor イデアルは bijective になる。

[Q.E.D.]

さて、次に conductor イデアルを2つの型に分類する。

定義 $\mathfrak{a}$ を R の conductor イデアルとする。このとき、$\mathfrak{a}$ が Type I とは、$\mathfrak{a}$ に真に含まれるすべての conductor イデアル $\mathfrak{b}_\lambda$ に対して、$\mathfrak{a}\supsetneqq\bigcup_\lambda\mathfrak{b}_\lambda$ となるときをいう。$\mathfrak{a}$ が Type II とは $\mathfrak{a}$ が Type I でないときのことをいう。

ある状況の下では、Type I の conductor イデアルの特徴付けができる。

定理16 R の conductor イデアルが有限個しかないとする。$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$ が $\mathfrak{m}$-準素イデアルで、$\mathfrak{a}$ を conductor イデアルとする。このとき次の(1)と(2)は同値である。

(1) $\mathfrak{a}$ は Type I である。

(2) ある R の元 a が存在して、$\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(B_a/R)$ とかける。

証明 (1)$\Longrightarrow$(2) $\mathfrak{a}\supsetneqq\bigcup_\lambda\mathfrak{b}_\lambda$ ($\mathfrak{b}_\lambda\subsetneqq\mathfrak{a}$ なる conductor イデアルとする) とする。このとき、$\mathfrak{a}$ の元 a で $a\notin\bigcup_\lambda\mathfrak{b}_\lambda$ なるものが存在する。このとき、命題13より $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(B_a/R)$ となる。

(2)$\Longrightarrow$(1) $\mathfrak{a}$ が Type II とすると、$\mathfrak{a}=\bigcup\mathfrak{b}_\lambda$ と $\mathfrak{b}_\lambda(\subsetneqq\mathfrak{a})$ は conductor ideal とかける。よって $\mathfrak{b}_\lambda$ の元 a が存在するが、これは $\mathfrak{c}(B_a/R)$ は命題13より a を含む最小の conductor

イデアルであるが、$\mathfrak{b}_\lambda \ni a$ だから矛盾。　[Q.E.D.]

定理17. R は conductor ideals を有限個しかもたないとする。$\mathfrak{c}=\mathfrak{c}(\overline{R}/R)$ は、$\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき、$\Gamma=\overline{R}/\mathfrak{c}$ と Type I の R の conductor イデアル全体は bijective である。

証明　$\overline{a}$ を Γ の任意の元とする。このとき、$\overline{a}$ に、$\mathfrak{c}(Ba/R)$ ($=\mathfrak{a}_a$ とおく) を対応させる。これは代表元のとり方によらずに決まる。定理16より $\mathfrak{a}_a$ は Type I の conductor イデアルである。逆に、$\mathfrak{a}$ を Type I の conductor イデアルとする。定理16より、ある $\mathfrak{a}$ の元 a に対して $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_a$ とかける。これらの対応で Γ と Type I の conductor イデアル全体が bijective になる。　[Q.E.D.]

命題18. 定理17と同じ仮定の下で、$\mathfrak{a}$ を Type II の conductor イデアルとする。このとき、$\mathfrak{a}=\bigcup_\lambda \mathfrak{b}_\lambda$ と Type I の conductor イデアル $\mathfrak{b}_\lambda$ を使ってかける。

証明. $\mathfrak{b}_\lambda$ を $\mathfrak{a}$ に真に含まれる conductor イデアルとする。$\mathfrak{a}$ は Type II だから、$\mathfrak{a}=\bigcup_\lambda \mathfrak{b}_\lambda$ とかける。0でない $\mathfrak{a}$ の任意の元 a に対して、定理16より $\mathfrak{c}(Ba/R)=\mathfrak{a}_a$ は a を含み Type I である。故に、$\mathfrak{a}=\bigcup_{a\in\mathfrak{a}}\mathfrak{a}_a$ となる。　[Q.E.D.]

単項イデアルの非孤立準素成分

$(R,\mathfrak{m})$ をクルル次元が2以上の局所整域で depth $R=1$ とし、R は $\overline{R}$ において arf closed とする。A と D を次のようなものとする。

$$A=\{\alpha\in K \mid I_\alpha=R \text{ 又は } I_\alpha \text{ は } \mathfrak{m}\text{-準素イデアル}\}$$

$$D=\{\alpha\in A \mid I_\alpha \supset \mathfrak{m}\}$$

$D\neq R$ としておく。R の真の divisorial overring C に対して、$C\supset D\supsetneqq R$ がいえる。実際、$\mathfrak{a}=\mathfrak{c}(C/R)$ とおくと、$C=\mathfrak{a}^{-1}$, $\mathfrak{m}^{-1}=D$ だからである。

単項イデアルの非孤立準素成分になれない場合の考察をしよう。

定理19. Q を D のイデアルで $\mathfrak{q}=Q\cap R$ とおき、$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。また、$Ht_1(\overline{R})\cap R\subset Ht_1(R)$ を仮定する。このとき、$\mathfrak{q}$ は単項イデアルの非孤立準素成分ではない。

証明　$\mathfrak{q}$ の 0 でないある元 a に対して

$$aR=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cdots\cap\mathfrak{q}_t\cap\mathfrak{q}$$

を irredundant な準素分解とする。定理6の(3)で示したように、$aA\cap R=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ となる。また、$aD\cap R=aR$ だから、D の元 α で R に属さないものが存在する。$a\in\mathfrak{q}$ だから、$a\alpha\in R$ となり、故に $a\alpha\in aR$。よって $\alpha\in R$ となり矛盾。 [Q.E.D.]

系20 定理19と同じ仮定の下で $\mathfrak{a}=\mathfrak{L}(C/R)$ を conductor イデアルで $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。このとき、$\mathfrak{a}$ は単項イデアルの非孤立準素成分にはなれない。

証明　$C=\mathfrak{a}^{-1}$ だから $C\supset D=\mathfrak{m}^{-1}$ となる。$\mathfrak{a}$ は C のイデアルでもあるので、$\mathfrak{a}\cap D=\mathfrak{a}$。従って、$\mathfrak{a}$ は D のイデアルの制限として得られるので、定理19よりいえた。 [Q.E.D.]

注意 (1) 今迄の仮定の下で、depth $R=1$ だから、aR には必ず $\mathfrak{m}$-準素成分が存在する。
(2) $\mathfrak{L}(D/R)=\mathfrak{m}$ である。

D は単項イデアルの非孤立準素成分を理解する上で大変重要な役をする。以下も A, D は上と同じものとする。また、$Ht_1(\overline{R})\cap R\subset Ht_1(R)$ を仮定しておく。

length $(D/R)>1$ とする。このとき、conductor イデアルでも単項イデアルの準素成分でもないものが存在することを示そう。

$$aR = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t \cap \mathfrak{q}$$

を irredundant な準素分解とする。ここで、$\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}$-準素成分を表わすものとする。

<u>命題21.</u> $\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ は単項イデアルの非孤立準素成分にはなれない。特に、$\mathfrak{m}^{\ell}$ は単項イデアルの非孤立準素成分にはなれない。

<u>証明</u> $\mathfrak{L}(D/R) = \mathfrak{m}$ だから、$\mathfrak{q}D \subset \mathfrak{m}D \subset R$ となる。故に、$\mathfrak{m}\mathfrak{q}D \subset \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ となる。$\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ は D のイデアルだから定理19より単項イデアルの非孤立準素成分ではない。

[Q.E.D.]

<u>定理22.</u> 命題21と同じ仮定の下で、$\mathfrak{q}$ は aR の非孤立準素成分とする。このとき、$a \notin \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ となる。従って、a は $\mathfrak{q}$ の極小生成系の一部となりえる。

<u>証明</u> $a \in \mathfrak{m}\mathfrak{q}$ とすると、$a \in \mathfrak{q}$ だから、$\mathfrak{q}$ も $\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ も非孤立準素成分となり命題21に反する。

[Q.E.D.]

参考文献

[1] S. Greco, Normal varieties, Acad. Press. 1978

[2] Y. Koyama, T. Sugatani and K. Yoshida, Some remarks on divisorial and seminormal overring, Comm. in Alg. 13 1985 795–810.

[3] M. Manaresi, Some properties of weakly normal varieties, Nagoya Math. J. 77 (1980), 61–74.

A NOTE ON VMC-DOMAINS

群馬高専　岡部　章
岡山理科大　吉田　憲一

以下，Dは単位元をもつ可換整域，Kはその商体，さらにDの拡大環はDのproperなoverringを表わすものとする。

[1]において，DobbsとFedderはconducive domain（略してCDと呼ぶ）の概念を導入した。Dが次の条件（CD）を満すとき，Dをconducive domainと言う。

(CD)：　Dの各拡大環T（≠K）に対し，D：T≠(0)

DがCDであるための十分条件としては，ある1つの付値拡大環Vに対して，D：V≠(0)が成り立てばよい（[1, Th.3.2]）。

本稿では，上の条件（CD）よりも強い次の条件（VMC）を満す整域（これをVMC-domainと呼ぶ）について調べるのを目的とする。

(VMC)：　Dの各付値拡大環Vに対し，D：VはVの極大イデアルである。

<u>命題1.</u>　付値環はVMC-domainである。

（証明）　Tを付値環Vの拡大環とすれば，ある$P \in \mathrm{Spec}(V)$に対して，$T = V_P$となる。このとき

$$V : T = V : V_P = P = PV_P$$

よって $V:T$ は $T=V_P$ の極大イデアルである。

[1, Prop. 2.1] により、PVD はすべて CD である。次の定理により、VMC-domain は PVD であることがわかる。

<u>定理2</u>. D を VMC-domain とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) D は PVD である。

(2) $\bar{D} = M:M$ 。

ここで $\bar{D}$ は D の整閉包, M は D の極大イデアルとする。

<u>注意3</u>. この定理により、VMC-domain は局所環（ネーターとは限らぬ）であることがわかる。

<u>命題4</u>. VMC-domain D の任意の拡大環は VMC-domain である。

（証明） T を D の拡大環とし、V を T の付値拡大環とするとき、$D:V \subseteq T:V$ が成り立つ。ところで、仮定より $D:V$ は V の極大イデアルである。
よって
$T:V = D:V$ となり, $T:V$ も V の極大イデアル。

<u>系5</u>. D を VMC-domain とする。このとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) D の付値拡大環は、すべて $P:P$ ($P \in \mathrm{Spec}(D)$) の形に表わせる。
(2) 各 $P (\neq (0)) \in \mathrm{Spec}(D)$ に対し、$P:P$ が D_P を支配する唯一の付値拡大環である。

定理6.　V は M を極大イデアルにもつ付値環とし，$L=V/M$ とする。このとき，L の部分体 K を L/K が代数拡大であるようにとれば

$$D=\{v\in V\mid v+M\in K\}$$

は VMC-domain となる。

次に VMC-domain のいくつかの特徴付けを与える。

定理7.　D は M を極大イデアルにもつ局所環（ネーターは仮定しない）とする。このとき，次の条件は同値である。

(1)　D は VMC-domain である。

(2)　D は PVD で，かつ各 $P\in \mathrm{Spec}(D)$（$P\neq(0)$）に対し，D_P を支配する D の付値拡大環は唯一つ存在する。

(3)　D は PVD で，かつ D の付値拡大環は $P:P$（$P(\neq(0))\in \mathrm{Spec}(D)$）に限る。

(4)　D は PVD で，かつ $\bar{D}=M:M$ である。

(5)　D は PVD で，かつ D を支配する付値拡大環は $M:M$ に限る。

(6)　D は PVD で，かつ $(M:M)/M$ は D/M の代数拡大体である。

(7)　D は PVD で，かつ $\bar{D}$ は付値環である。

(8)　D は PVD で，かつ $M:M$ は D の整拡大である。

(9)　Dの拡大環Tは，すべて局所環であり，かつ D:T はTの極大イデアルである。

<u>命題8.</u>　D は VMC-domain であるとする。このとき，各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(D)$ に対して，$D/\mathfrak{p}$ も VMC-domain である。

(証明)　これは定理7と[4, Th. 2.2]による。

<u>系9.</u>　D はMを極大イデアルにもつ局所整域であるとする。このとき，次の条件は同値である。

(1)　D は Noetherian VMC-domain である。

(2)　$V=M:M$ は M を極大イデアルにもつ DVR で，V/M は D/M の有限次拡大である。

(3)　$V=M:M$ は M を極大イデアルにもつ DVR で，V は finite D-module である。

定理2により，VMC-domain は PVD であるが，この<u>逆</u>は一般には成り立たぬ。しかし，D が coherent であれば，この逆が成り立つ。

<u>命題10.</u>　coherent PVD は VMC-domain である。

(証明)　これは定理7と[2, Prop. 4.2]による。

<u>系11.</u>　D が coherent 整域のとき，

$$D\text{が PVD} \iff D\text{が VMC-domain}.$$

<u>注意12.</u>　VMC-domain は必らずしも coherent とは限らぬ(cf. [3, Example 3.2])。

次に VMC-domain と D+M-construction との関係についての基本定理を述べる。

<u>定理13</u>. V を DVR とし, さらに V は K+M (ここで K は体, M は V の極大イデアル) の形をしているとする。今, K の subdomain D を K が D の商体であるようにとる。このとき, R = D+M とおけば

$$D \text{ が VMC-domain} \Longleftrightarrow R \text{ が VMC-domain}.$$

<u>注意14</u>. 定理13において, D が付値環でなければ R = D+M も付値環ではない。さらに, dim R = dim D + 1 である。従って, 定理13により, 任意の整数 $n>0$ に対し, n 次元の VMC-domain で付値環ではない例を作ることができる。1次元の VMC-domain で付値環でないものの例としては, 次のものがある。$V=K[[X]]=K+M$ (K は体, $M=XV$ は V の極大イデアル) とおく, このとき, K の部分体 k を $[K:k]=2$ であるようにとり, $R=k+M$ とおく。この R が求めるものである。

<u>命題15</u>. D を VMC-domain とし, M を D の極大イデアルとする。このとき D は divided domain で, かつ M:M が R を支配する唯一の付値拡大環である。

(証明) PVD は divided domain ゆえ, これは定理7から出る。

<u>注意16</u>. 命題15の逆は成り立たない。実際, k を体とし, $R=k[[X^2, X^3]]=k+M$ ($M=X^2R+X^3R$ は R の極大イデアル) とおく。このとき, R は1次元の局所環ゆえ, divided domain となる。さらに, $M:M=k[[X]]$ は R を支配する唯一の付

値拡大環である。しかし，$R:V=X^2V$ は V の極大イデアルではない。よって，R は VMC-domain ではない。

定理2，6，7，13の証明については，[6]を参照して下さい。

参考文献

1. D.E.Dobbs and R.Fedder, Conducive integral domains, J. Algebra, 86(1984), 494-510.
2. J.R.Hedstrom and E.G.Houston, Pseudo-valuation domains, Pacific J.Math., 75(1978), 137-147.
3. ―――――― and ――――――, Pseudo-valuation domains (II), Houston J.Math., 4(1978), 199-207.
4. A. Okabe, Some results on pseudo-valuation domains, Tsukuba J. Math., 8(1984), 333-338.
5. ――――――, On conductor overrings of an integral domain, Tsukuba J. Math., 8(1984), 69-75.
6. ―――――― and K.Yoshida, A conducive condition VMC for an integral domain, preprint.
7. T.Sugatani and K.Yoshida, Some remarks on pseudo-valuation domains, Math.Rep.Toyama Univ., 5(1982), 147-158.

Picard groups and relative invariants.

馬 場　清（大分大・教育）

§0. 序

以下，次のように記号を定める。

(0.1)　Gは整域Aの自己同型群$\mathrm{Aut}(A)$の有限部分群とし，Gに関するAの不変部分環を$A' = A^G$とする。

本稿では，相対不変元のなす加群A_χについて　有限性の1つの十分条件を与え，次に　Picard群との関係を調べる。即ち，Picard群の間の準同型写像　$j_{A'A}: \mathrm{Pic}(A') \longrightarrow \mathrm{Pic}(A)$が単射になる条件を　A_χを用いて記述する。次に，Aが体を含み　いくつかの条件をみたすときに，準同型写像Φ: $\mathrm{Ker}(j_{A'A}) \longrightarrow H^1(G, A^*)$（$\Phi$の定義については　§3 を参照のこと）が同型となる条件を与える。

§1. 相対不変元

A，G，A′は（0.1）の通りとし，Aの単元群をA^*とする。1双対輪体のなす群$Z^1(G, A^*)$の元χについて，

$$A_\chi = \{a \in A \mid G\text{の任意の元}\sigma\text{に対して，}\sigma(a) = \chi(\sigma)a\}$$

と定め，A_χの元をχの相対不変元と呼ぶ。

A_χは，A′-加群となり，さらに，

$$Z_A^1(G, A^*) = \{\chi \in Z^1(G, A^*) \mid A_\chi A = A \text{ かつ } A_{\chi^{-1}} A = A\}$$

とおけば，$Z_A^1(G, A^*)$は　1双対境界輪体のなす群$B^1(G, A^*)$を含む$Z^1(G, A^*)$の部分群となる。

そこで，

$$H_A^1(G, A^*) = Z_A^1(G, A^*) / B^1(G, A^*)$$

とおく。このとき，$H_A^1(G, A^*)$は　$H^1(G, A^*)$の部分群である。

Aの商体$Q(A)$について，$Q(A)^* = Q(A) - \{0\}$とおく。$Q(A)^*$の元xに対して　写像$f_x : G \longrightarrow Q(A)^*$を$f_x(\sigma) = \sigma(x)/x$で定める。

補題1.1.　$Z^1(G, A^*)$の元χについて　次が成立する。

(1)　$\chi = f_a$となるAの非零元aが存在する。

(2)　$A_\chi \neq \{0\}$。

証明. (1) GのAへの作用は $Q(A)$まで一意的に拡張されるので，Hilbertの定理90により，

$$H^1(G,\ Q(A)^*) = \{0\}.$$

ここで，$\chi \in Z^1(G, A^*) \subset Z^1(G, Q(A)^*)$ であるから，$\chi \in B^1(G,\ Q(A)^*)$. これより，$\chi = f_x$ となる$Q(A)^*$の元xが存在する。$x = \ell/c$ $(\ell, c \in A,\ c \neq 0)$と書いて 元cのノルムを$N(c)$とすれば，$x = (\ell \frac{N(c)}{c})/N(c)$, $\ell \frac{N(c)}{c} \in A$, $N(c) \in A'$ となる。$a = \ell \frac{N(c)}{c}$ とおけば，$x \neq 0$ より $a \neq 0$ で $\chi = f_x = f_a$ が成り立つ。

(2) (1)から $\chi = f_a$ と書けることと，A_χ の定義より $a \in A_\chi$. 故に，$A_\chi \neq \{0\}$.　　Q.E.D.

§2. A_χの有限性

A_χは一般には，有限生成A'-加群になるとは限らない。

例2.1. 体k上の無限変数多項式環 $A = k[X_1, X_2, \cdots, X_m, \cdots]$ のk-自己同型写像を $\sigma(X_i) = -X_i$ $(i=1,2,3,\cdots)$ で定義し，σで生成された$\mathrm{Aut}(A)$の部分群をGとおくと，

$A' = k[X_iX_j \mid i,j=1,2,3,\ldots]$となる。ここで，$x=f_{X_1}$とおくと，$A_x = X_1A'+X_2A'+\cdots+X_nA'+\cdots$ で A_xはA'-加群として有限生成ではない。

そこで，$A_xA=A$ をみたすA_xについて有限性を調べる。

注意2.2．次の補題2.3においては，$A'=A^G$である必要はない。$A'=A^G$のときは，AがA'上整，$Q(A')\cap A=A'$という条件はみたされている。

A'のイデアルIについて，$A':I=\{z\in Q(A')\mid zI\subset A'\}$と定義し，$A'$-加群$M$と$A'$の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して，$M$の$A'-\mathfrak{p}$に関する局所化を$M_{\mathfrak{p}}$と表す。

補題2.3．A，A'は共に整域で，AはA'上整，かつ$Q(A')\cap A=A'$なるものとする。IはA'のイデアルで，次の(1)—(3)の条件をみたすとする。

(1) IAは単項イデアルである。(生成元を$x\in A$とおく。)

(2) $IA \cap A' = I$

(3) Iは，局所的に単項である。（即ち，A'の任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して，$I_{\mathfrak{p}} = zA'_{\mathfrak{p}}$となるような$Q(A')$の元$z$が存在する。）

このとき，次の(i)―(vi)は同値である。

(i) Iは有限生成である。

(ii) A'の任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して，$(A' : I)_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}$

(iii) $A' : (A' : I) = \{A : (A : IA)\} \cap A'$

(iv) Iは因子的イデアルである。

(v) $I = A' : (A' : J)$ ただし，Jは，$i_1 a_1 + \cdots + i_r a_r = x$，$i_1, \cdots, i_r \in I$，$a_1, \cdots, a_r \in A$となる元に対して，$J = i_1 A' + \cdots + i_r A'$とおいた$A'$のイデアルである。

(vi) Iは可逆イデアルである。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). $(A' : I)_{\mathfrak{p}}$の任意の元z/s ($z \in A' : I$, $s \in A' - \mathfrak{p}$)に対して $zI \subset A'$より $zI_{\mathfrak{p}} \subset A'_{\mathfrak{p}}$.
ゆえに，$z/s \in A'_{\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}$となり，$(A' : I)_{\mathfrak{p}} \subset A'_{\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}$.

逆に，Iの生成元を$a_1', \cdots, a_s'$とすると，$A'_{\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}$の

任意の元zに対して　$zI_{\mathfrak{q}} \subset A'_{\mathfrak{q}}$ であるから，$za_i s$ $\in A'$ $(i=1,2,\cdots,s)$ となる $A'-\mathfrak{q}$ の元sが存在する。これより，$zs \in A':I$ が分り，$z \in (A':I)_{\mathfrak{q}}$. ゆえに，$A'_{\mathfrak{q}}:I_{\mathfrak{q}} \subset (A':I)_{\mathfrak{q}}$. 以上より，$(A':I)_{\mathfrak{q}} = A'_{\mathfrak{q}}:I_{\mathfrak{q}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 一方の包含関係

$$A':(A':I) \supset \{A:(A:IA)\} \cap A'$$

の証明は簡単であるから，逆の包含関係を示す。

$A':(A':I)$ の任意の元をzとする。$1 \in A':I$ より $z \in A'$ は明らか。あとは $z \in A:(A:IA)$ のために次を示せばよい。

$$z(A':I) \subset A',\quad \beta I \subset A \quad (\beta \in Q(A)) \Rightarrow z\beta \in A$$

これを示すためには，Aの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して　$z\beta \in A_{\mathfrak{p}}$ を示せばよい。

$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A'$ とおくと，(ii) より　$(A':I_{\mathfrak{q}}) = A'_{\mathfrak{q}}:I_{\mathfrak{q}}$.
Iは局所的に単項であるから　$I_{\mathfrak{q}}$ は $A'_{\mathfrak{q}}$ の可逆イデアル。ゆえに，

$$(A':I)_{\mathfrak{q}} I_{\mathfrak{q}} = (A'_{\mathfrak{q}}:I_{\mathfrak{q}})A'_{\mathfrak{q}} = A'_{\mathfrak{q}},$$

$z(A':I)_{\mathfrak{q}} \subset A'_{\mathfrak{q}}$, $\beta I_{\mathfrak{q}} \subset A_{\mathfrak{q}}$ であるから，$z\beta \in A_{\mathfrak{q}}$ $\subset A_{\mathfrak{p}}$.

(iii) ⇒ (iv)　条件 (1) より IA は A の可逆イデアルであるから $IA = A:(A:IA)$　(2) の $IA \cap A' = I$ と合わせて $\{A:(A:IA)\} \cap A' = I$ これと (iii) より $A':(A':I) = I$ ゆえに, I は A' の因子的イデアルとなる。

(iv) ⇒ (v)　$I \subset A':(A':J)$ を証明する。そのためには, I の任意の元 a' と $A':J$ の任意の元 z に対して $a'z \in A'$ を示せばよい。$zJ \subset A'$ より $zi_1, \cdots, zi_r \in A'$ であるから, $x = i_1a_1 + \cdots + i_ra_r$ の両辺に z をかけて

$xz = (zi_1)a_1 + \cdots + (zi_r)a_r \in A$

ところで, $a' \in I$, $IA = xA$ より $a' = xa$ となる A の元 a が存在する。これより, $a'z = (xz)a \in A$

さらに, $a'z \in Q(A')$ であるから, $a'z \in Q(A') \cap A = A'$

次に, 逆の包含関係を示す。$I \supset J$ より, $A':I \subset A':J$ ゆえに, $A':(A':I) \supset A':(A':J)$　(iv) で I が因子的イデアルであるから, $I = A':(A':I) \supset A':(A':J)$

以上をまとめて, $I = A':(A':J)$

(v) ⇒ (vi)　J が有限生成であるから (v) より I は v-イデアルとして有限生成である。また, I が局所的に

単項であるから，[1]，定理2.1.より I は可逆イデアル。

(vi) $\Rightarrow$ (i) 可逆イデアルは有限生成であることから明らか。 Q.E.D.

χ を $Z^1(G, A^*)$ の元とする。χ^{-1} に対して補題1.1(1)を適用すれば，$\chi = f_{x^{-1}}$ となる A の非零元 x が存在する。$I = xA_\chi$ とおけば，I は $A' = A^G$ のイデアルとなるが，条件 $A_\chi A = A$ の下で，I が補題2.3の(1)—(3)をみたすことを以下，順を追って証明する。

$IA = xA_\chi A = xA$ より条件(1)はみたされる。

また，$I = \{xa \mid a \in A,\ xa \in Q(A')\}$ となるから，$Q(A') \cap A = A'$ より，$IA \cap A' = xA \cap Q(A') = I$ 即ち，条件(2)も成立する。

A の元 a のノルム $\prod_{\sigma \in G} \sigma(a)$ を $N(a)$ で表す。

補題2.4. $Z^1(G, A^*)$ の元 χ が $A_\chi A = A$ をみたせば，A' の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $N(a) \notin \mathfrak{p}$ となる A_χ の非零元 a が存在する。

証明. $\mathfrak{p}$ 上の A の素イデアルの1つを $\mathfrak{P}$ とすると，条

件 $A_\chi A = A$ から，$A_\chi \not\subset \mathfrak{P}$ であるから $a \notin \mathfrak{P}$ となる A_χ の非零元 a が存在する。このとき，$a \in A_\chi$ より，G の任意の元 σ に対して $\sigma(a)/a \in A^*$ であるから，$\sigma(a) = u_\sigma a$，$u_\sigma \in A^*$ とおける。G の位数を n とすれば

$$N(a) = \left(\prod_{\sigma \in G} u_\sigma\right) a^n$$

となるから，$N(a) \notin \mathfrak{P} \cap A' = \mathfrak{p}$．　　　　Q.E.D

補題 2.5．$Z^1(G, A^*)$ の元 χ が $A_\chi A = A$ をみたすとする。$\chi = f_{x\dagger}$ $(x \in A)$，$I = xA_\chi$ とおけば，A' の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $I_\mathfrak{p} = xaA'_\mathfrak{p}$ となる A_χ の非零元 a が存在する。特に，I は局所的に単項である。

証明．補題 2.4 での $a \in A_\chi$ をとる。包含関係 $I_\mathfrak{p} \supset xaA'_\mathfrak{p}$ の証明は簡単であるから，逆の包含関係の証明をする。I の任意の元 i に対して $i = xb$ となる A_χ の元 b が存在する。

$$i = xb = xa\frac{b\frac{N(a)}{a}}{N(a)}$$

と書けば，a のとり方から，$N(a) \in A' - \mathfrak{p}$．あとは，$\frac{b}{a}N(a) \in A'$ を示せば，$i \in xaA'_\mathfrak{p}$ が分る。$a, b \in A_\chi$ であるから，$\frac{b}{a} \in Q(A')$．ゆえに，$\frac{b}{a}N(a) = b\frac{N(a)}{a}$

$\in Q(A') \cap A = A'$ Q.E.D.

補題 2.6. $Z^1(G, A^*)$ の元 χ が $A_\chi A = A$ をみたすとする。$\chi = f_{x^{-1}}$ $(x \in A)$, $I = xA_\chi$ とおけば, A' の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $(A' : I)_\mathfrak{p} = A'_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}$ が成立する。

証明. 包含関係 $(A' : I)_\mathfrak{p} \subset A'_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}$ は 明らかであるので, $(A' : I)_\mathfrak{p} \supset A'_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}$ を証明する。$IA = xA$ より, $i_1 a_1 + \cdots + i_r a_r = x$ となる元 $i_1, \cdots, i_r \in I$, $a_1, \cdots, a_r \in A$ が存在する。z を $A'_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}$ の任意の元とする。$zI_\mathfrak{p} \subset A'_\mathfrak{p}$ であるから, $szi_1, \cdots, szi_r \in A'$ となる元 $s \in A' - \mathfrak{p}$, $a'_1, \cdots, a'_r \in A'$ が存在する。

$$I = \{ xa \mid a \in A,\ xa \in Q(A') \}$$
$$= \{ xa \mid a \in A,\ xa \in A' \}$$

となることより, I の元 xa に対して,

$$szxa = sza(i_1 a_1 + \cdots + i_r a_r)$$
$$= (szi_1)(aa_1) + \cdots + (szi_r)(aa_r)$$
$$\in A$$

また, $sz(xa) \in Q(A')$ であるから, $szxa \in Q(A') \cap A = A'$。これより, $sz \in A' : I$。ゆえに, $z \in (A' : I)_\mathfrak{p}$ と

より，包含関係 $A'_{\mathfrak{p}}:I_{\mathfrak{p}}\subset(A':I)_{\mathfrak{p}}$ が，証明された。

Q.E.D.

以上により，次が成立する。

定理 2.7. $Z^1(G, A^*)$ の元 χ が $A_\chi A=A$ をみたせば，A_χ は有限生成 A'-加群となる。

$A_\chi A=A$ のとき，$\chi=f_{x^{-1}}$, $I=xA_\chi$ について，$A_{\chi^{-1}}$ を x と I とを用いて表すことを考える。

補題 2.8. $Z^1(G, A^*)$ の元 χ について，$\chi=f_{x^{-1}}$ $(x\in A)$, $I=xA_\chi$ とおく。$A_\chi A=A$ のとき，$A_{\chi^{-1}}=x(A':I)$。即ち，$A_\chi=x^{-1}I$ ならば，$A_{\chi^{-1}}=x(A':I)$ となる。

証明。最初に，$A_{\chi^{-1}}\subset x(A':I)$ を示す。$A_{\chi^{-1}}$ の任意の元 ℓ に対して，$x^{-1}\ell\in A':I$ であればよい。$\ell\in A_{\chi^{-1}}$ より，$x^{-1}\ell\in Q(A')$ は明らか。I の任意の元 xa, $(a\in A_\chi)$ に対して，$(x^{-1}\ell)(xa)=a\ell\in Q(A')\cap A=A'$。これより，$x^{-1}\ell\in A':I$。

次に，逆の包含関係を示す。$x(A':I)$ の任意の元 xz

$(z \in A' : I)$ に対して，$x^{-1}(xz) \in Q(A')$ であるから，後は，$xz \in A$ が示されれば，$xz \in A_{x^{-1}}$ となることが，分る。$IA = xA$ より，$i_1 a_1 + \cdots + i_r a_r = x$ となる元 $i_1, \cdots, i_r \in I$, $a_1, \cdots, a_r \in A$ が存在するから，

$$xz = (zi_1)a_1 + \cdots + (zi_r)a_r \in A.$$

ゆえに，$A_{x^{-1}} = x(A' : I)$。　Q. E. D.

$Z'_A(G, A^*)$ の記述を簡単にするため，次の補題を用意する。

補題 2.9. $Z^1(G, A^*)$ の元 X が A_X をみたせば，次の (i), (ii) は同値である。

(i) A_X は，A' の可逆イデアルと A'-同型である。

(ii) $A_{X^{-1}}A = A$。

証明. (i) ⇒ (ii). $X = f_{x^{-1}}$, $(x \in A)$, $I = xA_X$ とおく。補題2.8. より，$A_{X^{-1}} = x(A' : I)$。(i) より，I も可逆イデアルとなるから，$I(A' : I) = A'$。A に持ち上げて，

$$\{x^{-1}IA\}\{x(A' : I)A\} = A.$$

$x^{-1}IA = A$ であるから，$x(A' : I)A = A$。これより，

$$A_{\chi^{-1}}A = x(A' : I)A = A = A。$$

(ii)$\Rightarrow$(i). A が A' 上整であるから，A' の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ の上に，A の素イデアルが存在するので，それを，$\mathfrak{P}$ とする。$A_\chi A = A$, $A_{\chi^{-1}}A = A$ であるから，a, $b \notin \mathfrak{P}$ となる元 $a \in A_\chi$, $b \in A_{\chi^{-1}}$ が存在する。このとき，$b(A_\chi)_\mathfrak{p} = A'_\mathfrak{p}$ を示す。$b(A_\chi)_\mathfrak{p} \subset A'_\mathfrak{p}$ は，明らか。

逆の包含関係を示す。まず，$ab \notin \mathfrak{P} \cap A' = \mathfrak{p}$ であるから，A' の任意の元 a' に対して，

$$a' = \frac{b(aa')}{ab} \in b(A_\chi)_\mathfrak{p}。$$

ゆえに，$b(A_\chi)_\mathfrak{p} = A'_\mathfrak{p}$ となり，$(A_\chi)_\mathfrak{p}$ は階数1の自由 $A'_\mathfrak{p}$-加群となる。定理2.7.より，A_χ は，有限生成 A'-加群であるから，A_χ は階数1の射影 A'-加群となり，A' の可逆イデアルと A'-同型となる。 Q.E.D.

命題2.10. $Z^1_A(G, A^*) = \{\chi \in Z^1(G, A^*) \mid A_\chi A = A\}$。

証明。補題2.3，定理2.7，補題2.9より明らか。

Q.E.D.

§3. 相対不変元のなす加群A_χとPicard群との関係

A, G, A'は，(0.1)の通りとする。$Inv(A)$で，Aの可逆イデアル全体のなす群を表し，写像$j_{A'A}: Inv(A') \longrightarrow Inv(A)$を，$A'$の可逆イデアル$I$に対して，$j_{A'A}(I) = IA$と定義し，この準同型写像$j_{A'A}$から誘導されたPicard群の間の準同型写像を，$\bar{j}_{A'A}: Pic(A') \longrightarrow Pic(A)$とする。さらに，$\bar{j}_{A'A}$の核$Ker(\bar{j}_{A'A})$から1-コホモロジー群$H^1(G, A^*)$への準同型写像$\Phi$: $Ker(\bar{j}_{A'A}) \longrightarrow H^1(G, A^*)$を次のように定める。$I$は$A'$の可逆イデアルで，$j_{A'A}(I)$が単項イデアルとなるものとする。$j_{A'A}(I) = IA = \chi A$, $\chi \in Q(A)^*$とおくとき，$\Phi(\bar{I}) = f_\chi \mod B^1(G, A^*)$と定義する。このとき，$\Phi$は定義可能で，単射準同型写像であることが分る。

命題3.1. $Ker(\bar{j}_{A'A}) \xrightarrow{\Phi} H^1_A(G, A^*)$。

これを使えば，$\bar{j}_{A'A}$が単射となる条件が得られる。

定理3.2. 次の(i), (ii)は，同値である。

(i). $\bar{j}_{A'A}$は，単射である。

(ii). $Z^1_A(G, A^*)$ の任意の元 χ について，A_χ は階数1の自由 A'-加群である。

$j_{A'A}$ が単射でない例も存在する。

例 3.3. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の二変数多項式環を $\mathbb{C}[X, Y]$ とし，$A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2+Y^2-1)$ とおく。X，Y の剰余類を，それぞれ，x，y で表し，A の自己同型写像を，$\sigma(i) = -i$，$\sigma(x) = x$，$\sigma(y) = y$ で定義し，$G = \langle\sigma\rangle$，$A' = A^G$ とおく。このとき，次が成立する。

(1) $A' = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2+Y^2-1) = \mathbb{R}[x, y]$。

(2) A は U.F.D で，$\mathrm{Pic}(A) = Cl(A) = (0)$。

(3) A は，分離 A'-代数であるから，Φ は同型となり（後述の定理4.1. 参照），$H^1(G, A^*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることと合わせて，$\mathrm{Pic}(A') = \mathrm{Ker}(j_{A'A}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

(4) (1), (3) より，$j_{A'A}$ は単射でない。

(5) $z = x-1+iy$，$\chi = f_z$ とおくと，

$$A_\chi = (x-1+iy)A' + \{-i(x+1)+y\}A'$$

となり，A_χ は階数1の自由加群ではない。

§4. Φが同型となるための条件

A, A′, Gは, (0.1)の通りとする。Φが同型となるための1つの十分条件として, 次が知られている。([2]の7項完全系列から分る。)

定理4.1. Aが分離A′-代数であれば, Φは同型となる。

Aの素イデアル$\mathfrak{P}$について, $\mathfrak{P}$の惰性群を

$$T_{\mathfrak{P}}=\{\sigma\in G \mid \text{Aの任意の元}a\text{について}, \sigma(a)-a\in\mathfrak{P}\}$$

とおく。Gの元σが, ある惰性群に含まれるとき, 即ち, $\sigma\in T_{\mathfrak{P}}$となる素イデアル$\mathfrak{P}$が存在するとき, σを, 準鏡映と呼ぶことにする。

以下では, さらに, Aが体kを含むと仮定する。このとき, Φが同型となるための必要十分条件を与えることを, 目標とする。

定理4.2. Gは, 体kを含む整域Aの自己同型群Aut(A)の有限部分群とする。$A'=A^G$とおき, すべての準鏡映で生成されたGの部分群をHとし, 次の(1)—(3)を仮定する。

(1) $A^* = k^*$。

(2) Gは，kに自明に作用する。

(3) kの標数 char kは，Gの位数を割り切らない。

このとき，$\mathrm{Ker}(\tilde{j}_{A'A}) \cong \mathrm{Hom}(G/H, k^*)$。

（昨年のシンポジウムの講演で，"AがKrull整域で，AがA'上不分岐ならば，Φは同型である" という命題と，定理4.2.で(3)の仮定のない定理を書きましたが，共に証明が不備でしたので，おわびして撤回いたします。）

ここで，$D_k(G) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Hom}(G, k^*)} \mathrm{Ker}\,\chi$ とおき，準同型写像 $\eta: \mathrm{Hom}(G/H, k^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, k^*)$ を，$\eta(\omega)(\sigma) = \omega(\sigma H)$ で定義する。

補題4.3.　Gが，kに自明に作用していれば，次の(1), (2)が成立する。

(1) ηは，単射である。

(2) ηが，同型写像である。$\Longleftrightarrow$ $D_k(G) \supset H$。

定理4.2.と補題4.3.を使えば，次が得られる。

定理4.4.　Gは，体kを含む整域Aの自己同型群$\mathrm{Aut}(A)$の有限部分群とする。$A' = A^G$とおき，すべての準鏡映で生成されたGの部分群をHとし，次の(1)―(3)の条件を仮定する。

(1) $A^* = k^*$.

(2) Gは，kに自明に作用する。

(3) $\mathrm{char}\, k$は，Gの位数を割り切らない。

このとき，Φが同型写像となるための必要十分条件は，$\mathcal{D}_k(G) \supset H$となることである。

参考文献

[1] D. D. Anderson: Globalization of some local properties in Krull domains, Proc. Amer. Math. Soc., <u>85</u> (1982), 141–145.

[2] S. Chase, D. Harrison and A. Rosenberg: Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs of Amer. Math. Soc., No. 52, (1965), 1–19.

[3] H. Nakajima: Relative invariants of finite groups, J. of Alg., <u>79</u>, (1982), 218–234.

ON THE STRUCTURE THEOREM FOR FREE RESOLUTIONS

(Dedicated to Dr. Erich Platte.)

Yuji Yoshino (Nagoya University)

Section 1. Introduction

Let R be a commutative Noetherian ring and let

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow M \to 0$$

be a finite free resolution of a finitely generated R-module M. If we denote the rank of f_i by r_i, then each $\Lambda^{r_i} f_i$ can be described as the composition of two maps $-a_i^*$ and a_{i-1}, where $a_i \in \mathrm{Hom}_R(R, \Lambda^{r_i} F_i)$ and $a_n = \Lambda^{r_n} f_n$.

This beautiful law on the structure of finite free resolutions was first discovered by D.Hilbert[H] in case $n=2$ and $M=R/I$ where R is a polynomial ring of three variables over a field. L.Burch[B] was the first one who gave a proof of this Hilbert's law over an arbitrary Noetherian ring. The result stated in the above was proved in full generality by D.Buchsbaum and D.Eisenbud[BE]. They clearly aimed at generalizing the Hilbert-Burch theorem to free resolutions of arbitrary finite length. We call this result due to D.Buchsbaum and D.Eisenbud <u>the structure theorem for finite free resolutions</u>.

Of course the structure theorem may fail for infinite free resolutions as one sees in [BE;p.98] or in [N;Example,p.219]. In fact they show the free resolution of the residue field of $R = k[[X,Y]]/(Y^2 - X^3)$ does not admit such structure theorem. However there is an example of infinite free resolution on which the structure theorem holds. For instance, consider the free resolution of the residue field of $R = k[[X,Y,Z]]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$. It is given as follows;

$$\cdots \longrightarrow R^4 \xrightarrow{f_4} R^4 \xrightarrow{f_3} R^4 \xrightarrow{f_2} R^4 \xrightarrow{f_1} R^3 \xrightarrow{f_0} R \longrightarrow k \to 0$$

where, by a suitable choice of basis of free modules, one can describe each f_i as a matrix. E.g.,

$$f_0 = {}^t[\, X,\ Y,\ Z\,]$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} Y & -X & 0 \\ Z & 0 & -X \\ 0 & Z & -Y \\ X & Y^2 & Z^4 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} Z & -Y & X & 0 \\ Y^2 & Z^4 & 0 & X \\ -X & 0 & Z^4 & Y \\ 0 & -X & -Y^2 & Z \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} Z^4 & Y & -X & 0 \\ -Y^2 & Z & 0 & -X \\ X & 0 & Z & -Y \\ 0 & X & Y^2 & Z^4 \end{bmatrix}$$

We remark that $rk(f_0) = 1$ and $rk(f_i) = 2$ for any $i > 0$. In this example one easily sees that each $\overset{2}{\wedge} f_i$ $(i > 0)$ factors into two linear maps as it is stated in the structure theorem. Thus this infinite free resolution admits the structure theorem !

The aim of this short note is to find a good sufficient condition for free resolution to have the structure theorem. Roughly speaking, we can show that <u>any free resolutions</u> (finite or infinite) <u>over a normal domain admit the structure theorem</u>. The reader will notice that the core of this result lies in the lemma which we call Platte's lemma.

<u>Section 2</u>. <u>The Main Theorem</u>

The precise statement of our theorem is the following;

<u>Theorem</u>. Let R be a normal domain and let

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

be a free resolution of an R-module M such that $r_i = rk(f_i)$. Then there is a divisorial ideal I of R and there are R-module homomorphisms a_n $(n=1,2,3,\ldots)$ such that

(i) $a_n \in \mathrm{Hom}_R(I^*, \overset{r_n}{\Lambda} F_n)$ if n is even , and $a_n \in \mathrm{Hom}_R(I, \overset{r_n}{\Lambda} F_n)$ if n is odd.

(ii) In the divisor class group of R , $cl(I) = cl(M)$ where $cl(M)$ denotes the divisor class of M in the sence of Bourbaki.

(iii) The following diagram is commutative for any n ;

$$\begin{array}{ccc} \overset{r_n}{\Lambda} F_n & \xrightarrow{\overset{r_n}{\Lambda} f_n} & \overset{r_n}{\Lambda} F_{n-1} \\ \Vert\wr & & \uparrow a_{n-1} \\ (\overset{r_{n+1}}{\Lambda} F_n)^* & \xrightarrow{a_n^*} & I \text{ or } I^* \end{array}$$

according as n is even or odd.

In particular if one of the following conditions holds, then one can take $I = R$ in the above;

(a) M has a free resolution of finite length,

(b) R is a factorial domain, or

(c) $\mathrm{codim}(M) > 1$ (i.e. $M_p = 0$ if $ht(p) \leqq 1$).

This theorem asserts that any free resolutions over a normal domain admit the structure theorem in a weak sence and if the situation is good (e.g. R is factorial or $\mathrm{codim}(M) > 1$), then the structure theorem in the original sence holds on it. Thus one can say that it is not the finiteness of free resolution that makes the structure theorem holds on it, but there is another reason for the structure theorem. We want to claim the following lemma due to E.Platte is a key of the structure theorem.

Platte's Lemma. ([P]) Let R be a Noetherian ring and let

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

be an exact sequence with F a free module of rank n . Assume

(*) M has rank r and M_p is R_p-free module for any prime p with $\operatorname{depth}(R_p) \leqq 1$.

Then there is a canonical isomorphism;

$$(\overset{r}{\Lambda} M)^{**} \simeq (\overset{n-r}{\Lambda} N)^{*} .$$

Section 3. Easy Proof of the Buchsbaum-Eisenbud Theorm and Our Theorem.

Now we show a proof of the Buchsbaum-Eisenbud theorem by using Platte's lemma. For this one needs the following observation which is almost trivial:

(**) If M is a submodule of a finite free module and has a free resolution of finite length, then M satisfies the condition(*) in Platte's lemma.

Now let

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

be a finite free resolution of M and let r_i denote the rank of f_i and $M_i = f_i(F_i)$. Then the above resolution is considered as a collection of short exact sequences;

$$0 \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow M_i \longrightarrow 0 \qquad (0 \leqq i \leqq n-1)$$

where $M_n = F_n$ and $M_0 = M$. As one already knows by (**) that each M_i ($0 < i \leqq n-1$) satisfies the condition (*), one can apply Platte's lemma on each short exact sequence. Thus one obtains the following diagram;

$$
\begin{tikzcd}
\bigwedge^{r_i} F_i \arrow[r, "\bigwedge^{r_i} f_i"] \arrow[d, "c_i"] & \bigwedge^{r_i} F_{i-1} & (\bigwedge^{r_i} F_{i-1})^{**} \arrow[l, "d_{i-1}"'] \\
(\bigwedge^{r_{i+1}} F_i)^* \arrow[r, "(b_i)^*"] & (\bigwedge^{r_{i+1}} M_{i+1})^* \arrow[r, "p_i"] & (\bigwedge^{r_i} M_i)^{**} \arrow[u, "(b_{i-1})^{**}"']
\end{tikzcd}
$$

where c_i and d_i are the natural isomorphisms of free modules and b_i is the natural map obtained from the inclusion $M_{i+1} \to F_i$ by taking exterior power and p_i is the Platte's isomorphism. By the canonicality of maps one easily sees that the diagram is certainly a commutative diagram for any i ($0 < i \leqq n-1$). Since $(\bigwedge^{r_i} M_i)^{**}$ is isomorphisc to R by subsequent use of Platte's lemma, if we denote by a_i the composition of $(b_i)^{**}$ with this identification, we obtain the following commutative diagram;

$$
\begin{tikzcd}
\bigwedge^{r_i} F_i \arrow[rr, "\bigwedge^{r_i} f_i"] \arrow[d, "c_i"] & & \bigwedge^{r_i} F_{i-1} \\
(\bigwedge^{r_{i+1}} F_i)^* \arrow[r, "(a_i)^*"'] & R \arrow[r, "a_{i-1}"'] & (\bigwedge^{r_i} F_{i-1})^{**} \arrow[u, "d_{i-1}"']
\end{tikzcd}
$$

This is certainly the content of the structure theorem for finite free resolutions.

Looking back the proof above, one sees that the finiteness of free resolution is not essential for the structure theorem. In fact the following holds in stead of (**);

(***) If R is a normal domain, then any submodule of a finite free module satisfies the condition(*).

Combining this observation(***) with the above proof, it becomes an easy exercise to prove our theorem. Actually it will be sufficient to notice that a free resolution over a normal domain is merely a collection of short exact sequences on which one can apply Platte's lemma. The reader will allow the author to leave the further discussion to the reader and to close this note here.

REFERENCES

[B] L.Burch, On ideals of finite homological dimension in local rings,Proc. Cambridge Phil. Soc. 64 (1968),941-946.

[BE] D.Buchsbaum and D.Eisenbud, Some structure theorems for finite free resolutions, Adv. Math. 12 (1974),84-139.

[H] D.Hilbert, Uber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. 36 (1890),473-534.

[N] D.G.Northcott, Finite free resolutions, Cambridge University Press, Cambridge (1975).

[P] E.Platte, Zur endlichen homologischen Dimension von Differentialmoduln, Manuscripta Math. 32 (1980), 295-302.

Supplement: After finishing the present paper, the author was aware of the existence of the paper;

W.Bruns, The Buchsbaum-Eisenbud structure theorems and alternating syzygies, (in Preprint)

in which W.Bruns had developed the essentially same arguement as ours and remarked the similar result as our main theorem.

Seminormality に関する若干の注意

兵庫教育大学　柳　原　弘　志

以下、A は 1 を含む可換環、B は A の拡大環、S は A の積閉集合とする。A が B で seminormal であるという概念に密接に関連して、A が B で F－closed であるとか(Asanuma [1])、A が B で p－seminormal である(Swan [2])という概念がある。この小文では、これらの F－closedness や p－seminormality の定義を一般化した S－seminormality という考えを導入して、この立場から F－closedness や p－seminormality を見直してみる。まず、基本的な役割を果たす次の定義を与える。

定義1． $(A,B;S) = \{ x \in B \mid sx \in A \text{ for some } s \in S \}$.

この A と B の中間環 (A,B;S) は局所化を用いることにより、次の命題のように特徴付けられる。

命題1． (A,B;S) は次の条件を満たす A と B の中間環 C のうちで最大のものである：

$p \cap S = \phi$ となる Spec(A) の元 p に対し、 $C_P = A_P$.

定義2． A,B,S が次の条件を満たすとき、A は B で S－seminormal であるという：

$x \in B$, $x^2 \in A$, $x^3 \in A$ でかつ、S の元 s で $sx \in A$ となるものが存在すれば x は A に属する。

Seminormality 及び S－sminormality の定義から容易に次の補題を得る。

補題1． 次の (i),(ii) は同値である：

(i)　A は B で S－seminormal である。

(ii)　A は (A,B;S) で seminormal である。

例。(i)　積閉集合 S が 0 を含んでいれば、B ＝ (A,B;S) となり、

S－normality と seminormality とは同じものである。
(ii) p を素数とし、$S = \{ p^e \cdot 1 \mid e: 0$ または自然数 $\}$ とする。このとき S－normality は Swan[2] における p－seminormality に他ならない。
(iii) $S = \{ n \cdot 1 \mid n:$ 自然数 $\}$ とするとき、S－normality は Asanuma[1] における F－closedness に他ならない。

命題2． 次の (i),(ii) は同値である：
(i) A は B で S－seminormal である。
(ii) A と B の中間環 D で A 上整なるものに対し、$I = A :_A D$ とおく。このとき、$I \cap S = \phi$ または I は D における根基イデアル $\sqrt{I}$ と一致する。

定義3． A, B, S が次の条件を満たすとき、B は A 上 S－subintegral であるという：
(i) B は A 上整である。
(ii) $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ は全単射である。
(iii) $q \in \mathrm{Spec}(B)$, $p = q \cap A \in \mathrm{Spec}(A)$ とするとき

$$q \cap S = \phi \text{ ならば } B_q \cong A_p$$
$$q \cap S \neq \phi \text{ ならば } k(q) \cong k(p),$$

ただし $k(q) = Q(B/q)$, $k(p) = Q(A/p)$ とする。

命題3． 次の (i),(ii) は同値である：
(i) B は A 上 S－subintegral である。
(ii) [2] の意味で B は A 上 subintegral であり、かつ (A, B ; S) は B と等しくなる。

命題4． ${}^{+}_{B}A^{S}$ を次の条件を満たす B の元 b 全体の集合とすると、${}^{+}_{B}A^{S}$ は B に含まれる最大の A 上 S－subintegral である部分環である：
$p \in \mathrm{Spec}(A)$ とするとき、$B_p \supset A_p$ と考えて

$$p \cap S \neq \phi \text{ ならば } b/1 \in A_p + J(B_p),$$
$$p \cap S = \phi \text{ ならば } b/1 \in A_p.$$

定義3． S を可換環 A の積閉集合とし、次の条件を満たしているとき、A は S－seminormal であるという：
(i) A は reduced である。

(ii) b, c, d A, s S に対し、$b^3 = c^2$, $d^2 = s^2 b$, $d^3 = s^3 c$ となるなら、A の元 a で $a^2 = b$, $a^3 = c$ となるものが存在する。

注意. (i) 定義3の(ii)に於いて、$d = sa$ が成り立つ。
(ii) A が Swan[2] の意味での seminormal であるなら、もちろん A は S－seminormal である。

補題2. A が B の部分環で、A が S－seminormal であれば、A は B で S－seminormal である。

補題3. B が S－seminormal であり、A が B で S－seminormal であるならば、A は S－seminormal である。

系. B が seminormal であり、A が B で S－seminormal であるなら、A は S－seminormal である。

補題4. A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が 1 を含む可換環の族年、$A = \Pi A_\lambda$ とする。$p_\lambda : A \longrightarrow A_\lambda$ を標準射影とし、 S は A の積閉集合で、S_λ は p_λ による S の像 $p_\lambda(S)$ とする。このとき、次の (i), (ii) は同値である:
(i) A は S－seminormal である。
(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、A_λ は S_λ－seminormal である。

補題5. S が 体 F の積閉集合であるとき、F は S－seminormal である。

系. F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を体の族とし、$A = \Pi F_\lambda$ とする。このとき、 A の任意の積閉集合 S に対し、A は S－seminormal である。

命題5. A が reduced で、かつ A の極小素イデアルが有限個しか存在しなければ、次の (i), (ii) は同値である:
(i) A は S－seminormal である。
(ii) A は A の商体 Q(A) で S－seminormal である。

系. A が reduced で、かつ A の極小素イデアルが有限個しかないとき、次の (i), (ii) は同値である:

(i)　A は S－seminormal である。
(ii)　B が A を含む $Q(A)$ の部分環で A 上整とするとき、$A:_A B \cap S = \phi$ または、$A:_A B$ はその における根基イデアル $\sqrt{A:_A B}$ に一致する。

補題6．　S，T は A の積閉集合とし、$S_T = \{s/1 \in A_T \mid s \in S\}$ とおく。このとき、A が S－seminormal なら、A_T は S_T－seminormal である。

命題6．　次の (i),(ii) は同値である：
(i)　A は S－seminormal である。
(ii)　A の任意の極大イデアル m に対し、A_m は S_m－seminormal である。

補題7．　B は A 上 subintegral であり、A は S－seminormal であるとする。このとき、もし B が reduced なら、$(A,B;S) = A$ となる。

命題7．　A が reduced で、S が A の積閉集合であるとき、A の拡大環 B で次の条件を満たすものが A－同型を除いて唯一つ存在する：
(i)　B は A 上 S－subintegral である。
(ii)　B は S－seminormal である。
更にこの B は次の性質を持っている：
C が可換環で、$f:A \longrightarrow C$ 環準同型 とする。もし C が $f(S)$－seminormal なら、B から C への環準同型 g で、$g|_A = f$ となるものが唯一つ存在する。更に、このとき f が単射なら、g も単射である。

定義4．　命題7 の B を A の S－seminormalization という。

参　考　文　献

[1] Asanuma, T. ; D－algebras which are D－stably equivalent to D[Z], Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto(1977), 447－476. Kinokuniya(Tokyo).
[2] Swan, R. G. ; On Seminormality, J. of Alg. Vol. 67 (1980), 210－229.

Normal filtration について

渡辺 敬一 (名工大)

序

環に grading を入れて graded ring にすると、いろいろな性質が調べやすくなったり、代数幾何的な道具を使って記述ができたりする。筆者の"filtration"を考える目的は、filtration を考える事によって、対応する associated graded ring をもとの環の"第一次近似"とし、その性質によって、もとの環の性質を知ろうとするものである。勿論 filtration には"良い" filter も"悪い" filter もあり、できるだけ"一番良い"ものを取りたいし、また、どの位"良い"ものが有り得るかも問題になる。この稿では normal ring 上 Rees 環も normal となるような filtration について、divisor class group, canonical class を調べ、また、このような filtration の特徴づけを考える(これは既に Rees 等によってなされている)。後半ではある種の特異点に対する"標準的な" filtration を考える。この後半部分は泊昌孝氏との共同の仕事の紹介である。

Situation と Notation.

A : Noetherian normal domain, $\dim A = n$ とする.

$\{F^k\}$: A 上の decreasing filtration ($F^k \cdot F^j \subset F^{k+j}$), $A \supsetneq F^1 \neq 0$

$\mathcal{R} = \bigoplus_{k\geq 0} F^k \cdot T^k \hookrightarrow A[T]$ が Noetherian, normal を仮定する.

$\mathcal{R}' = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F^k \cdot T^k$ ($k<0$ のとき, $F_k = \mathrm{Hom}_A(F_{-k}, A)$), $u = T^{-1}$.

$G = \mathcal{R}'/u\mathcal{R}'$. ($\mathrm{ht}\, F^k \geq 2$ のとき ($\forall k>0$), $G = \mathcal{R}/J$, $J = u\mathcal{R}' \cap \mathcal{R}$)

($G = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (F^k/F^{k+1}) \cdot T^k$ である.)

K : A の商体 とする.

$W=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Proj}(\mathcal{R})$, $\widetilde{\mathcal{R}(k)}=\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k$, $Z=\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$,
$Z'=\mathrm{Spec}(\mathcal{R}')$, $Y=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k)$, $Y'=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k)$,

とおくと，下記の可換図式を得る．写像はすべて canonical なものである．

$$\begin{tikzcd}
 & Y'=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, hook, "\text{open}"] & Z'=\mathrm{Spec}(\mathcal{R}') \arrow[d] \\
S \arrow[r, hook, "\text{closed}"] \arrow[dr, "\sim"] & Y=\mathrm{Spec}_X(\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & Z=\mathrm{Spec}(\mathcal{R}) \arrow[d] \\
E \arrow[r, hook] & X=\mathrm{Proj}(\mathcal{R}) \arrow[r, "\psi"] & W=\mathrm{Spec}(A)
\end{tikzcd}$$

ここで，S は $\mathcal{O}_X$ - Algebra $\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k$ の ideal, $\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{O}_X(k)\cdot T^k$ の定義する closed subvariety, $E=\mathrm{Proj}(G)=V_+(J)$ は $\mathcal{R}$ の graded ideal J の定義する closed subvariety.

$\mathcal{R}|_m=\bigoplus_{k\geq m}\mathcal{R}_k$, $\mathcal{R}^\natural=\bigoplus_{m\geq 0}\mathcal{R}|_m\cdot U^m$ とおき，$\mathcal{R}^\natural$ に U で grading を入れる．($(\mathcal{R}^\natural)_m=\mathcal{R}|_m\cdot U^m$) このとき，$Y=\mathrm{Proj}(\mathcal{R}^\natural)$ とも書ける．

$f\in A$, $f\in F^m$, $f\notin F^{m+1}$ をとり，$F^k(A_f)=\bigcup_{\ell\geq 0} f^{-\ell}\cdot F^{\ell m+k}$ とおき，上記の図形と dual な環の写像を，$\underbrace{D_+(f\cdot T^m)}_{\text{open affine set}}\subset X$ で書くと，

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F^k(A_f)\cdot T^k & \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} F^k(A)\cdot T^k \arrow[l] \\
F^0(A_f) & \bigoplus_{k\geq 0} F^k(A_f)\cdot T^k \arrow[l, two heads] \arrow[u, hook] & \bigoplus_{k\geq 0} F^k(A)\cdot T^k \arrow[l] \arrow[u, hook] \\
F^0(A_f)/F^1(A_f) & F^0(A_f) \arrow[l, two heads] \arrow[u] \arrow[ul, "\sim"'] & A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

§1. 特徴づけと Class Group

R' は normal だから，uR' は unmixed，ht 1．ゆえに，J も unmixed，height 1．

$J = \mathfrak{p}_1^{(a_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t^{(a_t)}$ を J の準素分解，V_i を $\mathfrak{p}_i$ に対応する R の valuation，v_i を V_i を K に制限して正規化した valuation とする．$x \in K$ に対して，$V_i(x) = q_i \cdot v_i(x)$（又は，$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{p}_i \cap A$ とおいて，$\mathfrak{g}_i \cdot R_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i^{q_i} \cdot R_{\mathfrak{p}_i}$）とおくと，$F^k = u^k R' \cap A$（$A = R_0$ と思う）だから，

$$F^k = \{ x \in A \mid V_i(x) \geq k \cdot a_i \ (i = 1, \cdots, t) \}$$

$$= \{ x \in A \mid v_i(x) \geq k \frac{a_i}{q_i} \ (i = 1, \cdots, t) \}.$$

どんなものを考えたいか，少し例を挙げて見よう．

例 0．$\mathfrak{a} \subset A$（任意のイデアル），$F^k = \overline{\mathfrak{a}^k}$（整閉包）とすると R は normal になる．

例 1．$A = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^3)$，$\mathfrak{m} = (x, y, z) \subset A$ とおく．A は rational singularity だから，Lipman [L] により，
$R = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{m}^k \cdot T^k$ は normal である．しかし，$F^k = \mathfrak{m}^{\{\frac{k}{2}\}}$（$\{\ \}$ は分数部分を切り上げる記号）とおくと R は normal でなく，実際，$x \notin F^3$ だが，$x^2 = -(y^3 + z^3) \in F^6 = \mathfrak{m}^3$．この場合，$R$ の normalization による filtration は，A 上の $\deg x = 3$，$\deg y = \deg z = 2$ とおいた grading による filtration と一致する．
またこの新しい filtration でも $X = \mathrm{Proj}(R)$ はふつうの $\mathfrak{m}$-adic blowing-up と一致する．但し，$G = k[xT^3, yT^2, zT^2]$

例 2．$A = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^4)$，$\mathfrak{m} = (x, y, z)$，$F^k = \mathfrak{m}^{\{\frac{k}{2}\}}$ とおいて normalization をとると，
$R = k[x, y, z, xT, yT, zT, xT^2, yT^2, zT^2, xT^3]$
$G = k[\bar{x}T^3, \bar{y}T^2, \bar{z}T^2] \cong k[X, Y, Z]/(Y^3 - X^2)$．

例 3．$A = k[x, y, z]/(z^2 - xy)$，$\mathfrak{g} = (x, z)$ とおくとき，

(i) $F^k = \mathfrak{g}^{(k)}$ ($k \geq 0$) とおくとき，
$R = k[x, y, z, xT, zT, xT^2]$，$R' = R[(xT^2)^{-1}]$，
$\psi : X \to W$ は同型．

(ii) $F^k = \mathfrak{g}^k$ ($k \geq 0$) とおくとき，$\mathfrak{g}^2 = x(x, y, z)$ で，
$\psi : X \to W$ は $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ による blow-up と一致する．(i)，(ii) 共，R は normal である．

例4. $A = k[x, y, z, w]/(xw - yz)$, $\mathfrak{p} = (x, y)$.
$F^k = \mathfrak{p}^k = \mathfrak{p}^{(k)}$ とおくとき, $\mathcal{R}' = k[x, y, xT, yT, \frac{z}{x}T^{-1}]$
$\psi : X \longrightarrow W$ は原点の代りに $\mathbb{P}^1$ がはめこまれた, W の desingularization を与えている。

いろいろな例を並べてみたが, これらを統一した理論をこの稿で書こうというのではない.「何か珍らしい事がいろいろ起きるみたいだから、何かできないかな?」というのが本音である。さて, 本論に戻って,

例5. $f : W' \longrightarrow W$: proper birational morphism, W': normal, D : rational coefficient Weil divisor on W' で, $-ND$ が ample Cartier divisor となる N が存在するとき,
$$F^k = \{x \in A \mid \mathrm{div}_{W'}(f^*x) \geqslant kD\}$$
とおくと, $\mathcal{R}$ は normal で, $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}) = W'$ となる.
(証明) $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}) = W'$ となるのは, $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{R}^{(N)})$ である事と, $-ND$ が ample Cartier divisor (very ample として良い) である事からあきらか. $\mathcal{R}$ の normality については,

Lemma. $r_1, \cdots, r_s$: positive rational numbers, $v_1, \cdots, v_s$; K の valuation (discrete), $v_i(A) \geqslant 0$ $(i = 1, \cdots, s)$ とする.
$$F^k = \{x \in A \mid v_i(x) \geqslant k r_i \ (i = 1, \cdots, s)\}$$
とおくとき, $\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geqslant 0} F^k T^k$ は normal.
(証明) $r_i = p_i/q_i$ (p_i, q_i は互いに素な正整数) のとき, $K(T)$ の valuation V_i を, $V_i(x) = q_i \cdot v_i(x)$ $(x \in K)$, $V_i(T) = -p_i$ で定めると, $\mathcal{R} = \{f(T) \in A[T] \mid V_i(f) \geqslant 0 \ (i = 1, \cdots, s)\}$ と書ける. 故に $\mathcal{R}$ は Krull 環. (一般には Noether 環とは限らない.)

Divisor class group の計算

今の所, $\mathrm{ht}(F^1) \geqq 2$ の場合しか良くわからないので, この場合のみを扱かう.
q_i, a_i を, $J = \mathfrak{p}_1^{(a_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t^{(a_t)}$, $V_i(x) = q_i \cdot v_i(x)$ $(x \in K)$ で定まる正整数とする. このとき,

Proposition. $\mathrm{ht}(F_1) \geqq 2$ のとき,

(i) $Cl(R) \cong Cl(Y)$, $Cl(R') \cong Cl(Y') \cong Cl(Y)/\mathbb{Z}\cdot[S]$

(ii) $0 \to Cl(X) \xrightarrow{\pi^*} Cl(Y) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z} \to 0$ は exact

(iii) $Cl(R) \cong Cl(A) \oplus \mathbb{Z}^t$, $Cl(R') \cong Cl(A) \oplus I$, 但し,

I は, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{(a_1,\cdots,a_t)} \mathbb{Z}^t \to I \to 0$ (exact) で定まる. 特に, R' が factorial $\Leftrightarrow$ A が factorial かつ $t=1$, $a_1 = 1$. (R が factorial になる事はない).

(証明) (i) $Y - S \cong Y' \cong Z - V(R_+)$ は一般の graded ring に対して成立する. $R/R_+ \cong A$ だが, $R \otimes_A K \cong K[T] \cong \left(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_X(k)\cdot T^k\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} K$ だから, $\varphi : Y \to Z$ は $V(R_+)$ の generic point でも同型. 従って φ は codim. 1 で同型 $\therefore Cl(Y) \cong Cl(R)$.

また, $g \in R_+$, homogeneous とすると, $R_g \ni u$ だから, $R'_g = R_g \cong H^0(\pi^{-1}(D_+(g)), \mathcal{O}_{Y'})$ ($g = f\cdot T^m$ とおくと, $(R_g)_k = F^k(A_f)\cdot T^k$ は容易にわかる). $\mathrm{ht}(R_+\cdot R') \geqq 2$ だから,

$\varphi' : Y' \xrightarrow{\text{open}} Z'$ は codimension 1 で同型. $\therefore Cl(Y') \cong Cl(R')$.

(ii) $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ と既約分解し, $F_i = (\pi^{-1}(E_i))_{red}$. とすると, E_i に対応する valuation が v_i, F_i に対応する valuation が V_i だから, $\pi^* E_i = q_i \cdot F_i$ であり, $x \in X$, $x \notin E$ に於て, ($\psi : X - E \xrightarrow{\sim} W - V(F_1)$ である.) $\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}[T]$. $\mathcal{O}_{Y'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}[T, T^{-1}]$ であるから, $H\mathrm{Div}(Y)$ を Y の (T による grading に関して) homogeneous な divisors のなす group とすると, $\pi^* : \mathrm{Div}(X) \to H\mathrm{Div}(Y)$ は injective で $\mathrm{Coker}(\pi^*) = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}/q_i\mathbb{Z}$.

次に, $\mathrm{Div}(X) = \psi^*(\mathrm{Div}(W)) \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}.[E_i]$ であり, ψ は birational だから, $Cl(X) \cong Cl(A) \oplus \mathbb{Z}^t$. ($\mathrm{Div}(X)/P(X) = Cl(X)$ とするとき, ($P(X)$ は principal divisors の class) $P(X) \cap \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}.[E_i] = (0)$ だから, 直和). $Cl(Y) = H.\mathrm{Div}(Y)/H.P(Y)$,

$H.\mathrm{Div}(Y) = \pi^*\psi^*(\mathrm{Div}(W)) \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}.[F_i] \oplus \mathbb{Z}\cdot[S]$, $HP(Y) = \pi^*(P(X)) \oplus \mathbb{Z}\cdot \mathrm{div}(T)$, $\mathrm{div}(T) = S - \sum_{i=1}^{t} a_i \cdot F_i$ より, (ii) を得る.

(iii) $Cl(R) \cong Cl(Y)$, $Cl(R') \cong Cl(Y')$ と上の議論からあきらか.

例. 上記の例3 (i) に於て, $R' = k[zT, xT^2, x^{-1}T^{-2}] \cong k[U, V, V^{-1}]$ より, factorial. (だが $Cl(A) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ゆえに, $\mathrm{ht}(F_1) = 1$ のときは上記の Proposition は成立しない.

追記. 上に述べたことのうち, valuation による特徴づけについては吉野雄二氏に, また, $Cl(R)$, $Cl(R')$ の別の簡単な求め方を伊藤史朗氏に教えて頂いた. 感謝の意を表したい. また, $Cl(R)$, $Cl(R')$ は G が domain のとき, $\mathrm{ht}\, F^k = 1$ の場合も含めて, [H-V] に証明されている.

§2. Canonical class

Blow-up した space の canonical sheaf については, 多分どこかに書いてあると思うのだが, 見つからないので書いてみたい. この節では A は local, canonical module をもつとする. また, $\mathrm{ht}(F^1) \geqq 2$ を仮定する.

<u>Proposition</u>. (1) G が Gorenstein, $K_G \cong G(a)$, $(q_i=1,\ (i=1,\ldots,t))$ のとき,

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(a+1) = \mathcal{O}_X(-(a+1)E) \qquad (E = \textstyle\sum_{i=1}^t a_i E_i).$$

ゆえに, $\psi_*(\omega_X) = A \iff a < 0$.

更に, $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(-(a+2)S)$. ゆえに, $K_R \cong (R_+)^{(a+2)}$

ゆえに, K_R が free $\iff a = -2$.

(2) A が Gorenstein, G が integral domain のとき, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(m)$, $\omega_E \cong \mathcal{O}_E(m-1)$ となる $m \in \mathbb{Z}$ が存在する. 従って, $\overline{G} = \bigoplus_{k \geqq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(k)) \cdot T^k$ とおくと, $K_{\overline{G}} \cong \overline{G}(m-1)$. 特に, $\overline{G}$ が Cohen-Macaulay なら $\overline{G}$ は Gorenstein である.

(3) $K_Y \equiv \pi^* K_X + \sum_{i=1}^t (q_i - 1) . F_i - S$

特に, K_R が free $\iff K_Y \equiv 0 \iff \pi^* K_X + \sum_{i=1}^t (q_i - a_i - 1) F_i \equiv 0$

$K_{R'}$ が free $\iff K_{Y'} \equiv 0 \iff \pi^* K_X + \sum_{i=1}^t (q_i - 1) F_i \equiv m \sum_{i=1}^t a_i F_i$

例. $\overline{G} = \bigoplus_{k \geq 0} m^k/m^{k+1}$ が Gorenstein domain, $a(\overline{G}) = a$ とする.
(m は A の maximal ideal) このとき, $F^k = m^{\{k \cdot \frac{p}{q}\}}$ として filtration を定義すると, ($R = \bigoplus_{k \geq 0} F^k \cdot T^k$), $X = \mathrm{Proj}(R)$ は m-adic blow-up と一致するから, $K_X = -(a+1)E$.

$$K_Y \equiv \{-q(a+1) + (q-1) - p\} F \qquad (F = (\pi^{-1}(E))_{red.})$$

$\therefore$ $K_Y \equiv 0 \iff K_R$ が free $\iff p = -aq-1$.

例えば, $A = k[[x, y, z]]/(x^2 - yz)$ とおくと, $a = -1$. だから, K_R が free $\iff p = q-1$. $q = 2$, $p = 1$ とおくと,

$$R = k[[x, y, z]][xT, yT, zT, xT^2, yT^2, zT^2]$$

は Gorenstein ring になる.

(証明) (1) の仮定の下で, R' は Gorenstein だから,

$K_{Y'} \equiv 0$, $K_Y \equiv kS$ ($\exists k \in \mathbb{Z}$). このとき, (3) より,
$\pi^* K_X \equiv (k+1)\cdot S \equiv (k+1)\pi^*(E)$. $\pi^* : Cl(X) \to Cl(Y)$ は injective だから, $K_X \equiv (k+1)E.$, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-(k+1))$.

$$0 \to \underset{\substack{\wr\wr \\ \mathcal{O}_X(1)}}{\mathcal{O}_X(-E)} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \to 0 \qquad (\text{exact}) \quad と$$

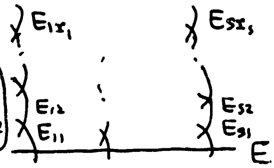
$\omega_E \cong \mathcal{O}_E(a) \cong \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_E, \omega_X) \cong \mathcal{O}_E(-(k+2))$ より,
$k = -(a+2)$, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(a+1) \cong \mathcal{O}_X(-(a+1)E)$, $K_Y = -(a+2)\cdot S$.

(2) G が integral domain だと, $Cl(X) \cong Cl(A) \oplus \mathbb{Z}[E]$.
$\omega_X|_{X-E}$ は trivial だから, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-mE) = \mathcal{O}_X(m)$ となる $m \in \mathbb{Z}$ が存在する. あとは (1) の後半と同様.
(3) は [W] (1.6) 参照.

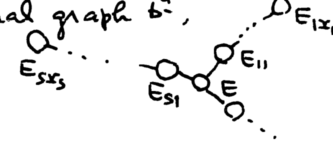
§3. "Star-shaped" resolution をもつ normal surface singularity について.

R が体上の2次元 normal graded ring とすると，R の resolution は

$\boxed{f : \widetilde{X} \to \mathrm{Spec}(R) \text{ の exceptional curve}}$



の形（dual graph が，



となるので "star-shaped resolution" という）をしている。但し，E, E_{ij} はすべて smooth curve, E 以外はすべて $\mathbb{P}^1$, 交りはすべて transversal となっている。このとき，grading を与える filtration は "central curve" E に対応する valuation で与えられている。即ち，$x \in R$; homogeneous のとき，$x \in R_k \iff \mathrm{div}_{\widetilde{X}}(f^* x) = kE +$ (他の成分).

$$\iff f^* x \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-kE),\quad f^* x \notin \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-(k+1)E).$$

逆に，"star-shaped resolution" をもつ特異点は，"ほとんど graded ring" であろうと想像されるが，その "ほとんど" を正確に記述しようとしたものが以下の結果である。以下の結果の証明は 泊昌孝 氏との共著の論文で発表する予定である（準備中）.

A を上のような resolution $f : \widetilde{X} \to W = \mathrm{Spec}(A)$ をもつ2次元 normal local ring, X を E 以外の exceptional curves E_{ij} をすべて "つぶした" normal surface,（X は rational singularity — 実はもっと特別な "cyclic quotient singularity" — しかもたないので，scheme として存在する.）.

$$F^k = f_*(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-kE)) = \{x \in A \mid f^* x \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-kE)\}.$$

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} F^k . T^k,$$

$$G = \bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1} . T^k$$

既約分数 p_i/q_i を，$q_i/p_i = a_{i1} - 1 \big/ a_{i2} - 1 \big/ \cdots - 1 \big/ a_{ir_i}$（連分数）で定義し，$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E) \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_E(F)$, $P_i \in E$ を E と E_{i1} の交点とし，

$$D = F - \frac{p_1}{q_1} \cdot P_1 - \cdots - \frac{p_s}{q_s} \cdot P_s \quad (E \text{ 上の fractional divisor}),$$

$$R = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_E(k.D) . T^k \quad (2\text{次元 normal graded ring となる})$$

$$P_g(A) = \dim_k H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \qquad (k = A/m)$$
$$P_g(R) = \sum_{l \geq 0} \dim_k H^2_m(R)_l \qquad \text{とおくと,}$$

Theorem. (1) $X = \mathrm{Proj}(\mathcal{R})$, $\mathcal{O}_X(l)/\mathcal{O}_X(l+1) \cong \mathcal{O}_E(lD)$ $(l \in \mathbb{Z})$

(2) $0 \to \mathcal{O}_X(l+1) \to \mathcal{O}_X(l) \to \mathcal{O}_E(lD) \to 0$ より, canonical に, $G \hookrightarrow R$ だが, $\dim_k R/G = p_g(R) - p_g(A)$ (特に, 有限).

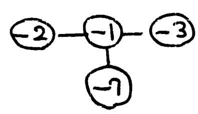
(3) $a(R) := \max\{l \mid H^2_m(R)_l \neq 0\} = \max\{l \mid H^1(E, \mathcal{O}_E(lD)) \neq 0\} \leqq 1$ のとき, $G = R$ である。即ち, G は normal.

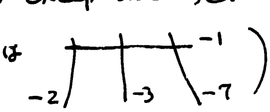
(4) A が cyclic quotient singularity でないとき, A 上の filtration $\{F'^k\}$ で, $G' = \bigoplus_{k \geq 0} F'^k/F'^{k+1} . T^k$ が (normal とは限らない) isolated singularity をもつものは F と一致する。(但し, $GCD\{l \mid G'_l \neq 0\} = 1$ とする.)

(5) (A が star-shaped resolution をもつという仮定ナシで), A 上に filtration $\{F^k\}$ が存在して, $G = \bigoplus_{k \geq 0} F^k/F^{k+1} . T^k$ が, A/m 上の2次元 graded domain で isolated singularity をもつとき, A は star-shaped resolution をもち, A から前頁のように定まる $R = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(lD)) . T^l$ は G の normalization と一致する.

(6) A が Gorenstein のとき, R は Gorenstein である.
(A が Gorenstein で, G が Gorenstein でない例はまだ知らない.)

例. $f: \tilde{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ の exceptional set の成分がすべて $\mathbb{P}^1$ で,



(又は 

) のとき,

$D = (\infty) - \frac{1}{2}(\infty) - \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{7}(1)$ とおいておく,
$R = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(kD)) \cong k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ となる

($\deg x = 21$, $\deg y = 14$, $\deg z = 7$). $a(R) = 42 - 21 - 14 - 7 = 1$ だから, Theorem の (3) により, $G = R$. G が Gorenstein より, A も Gorenstein である. 例えば $A = k[[x, y, z]]/(x^2 + y^3 + z^7 + yz^5)$ とおくと, A と $\hat{R}$ は同型でない.

<u>Remark.</u> G が normal にならない例については，本報告集の日高氏の例の他いくつか発見されている。

<u>追記.</u> 本稿の中で，一般的によくわからないため，成立するように仮定をつけてしまった所がいくつかある。例えば，$\mathrm{et}(F^k)=1$ $(\forall k>0)$ の時は，$Cl(X) \cong Cl(A)$ だと思うのだが，証明できない。また，$\pi : Y \to X$ が分岐するとき，($q_i > 1$ なる i が存在するとき)，$K_G \cong G(a)$ なら，$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(a+1)$ (?) など，見直してみると，講演ではいくつか不適切な事を云ったようで，お詫びをしたい．

REFERENCES.

[H-V] J. Herzog - W.V. Vasconcelos, On the divisor class group of Rees algebras, J. of Alg. <u>93</u> (1985), 182-188.

[L] J. Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, Publ. I.H.E.S. <u>36</u> (1969), 195-280.

[R] D. Rees, Nagoya lectures.

[W] K. Watanabe, Rational singularities with k*-action, "Commutative Algebra", Proc. of the Trento Conference, 339-351, Marcel Dekker, (1983).

有限体上の不変式

松村英之　名古屋大学理学部

数か月前、Ｒｕｔｇｅｒｓ大学の　Ｌａｎｄｗｅｂｅｒ教授から、algebraic topology と commutative algebra の境界領域における、topology 側からの最近の研究について色々教わった。そこには純代数の立場から見ても役に立ちそうな新しい手法や、興味ある問題などがあるので、ここに紹介してみたい。

1．Ｂａｃｋｇｒｏｕｎｄ：　Ｃｏｈｏｍｏｌｏｇｙ　Ｒｉｎｇｓ

位相空間Ｘの、体ｋを係数とするコホモロジー環を　$H^*(X, k)$ で表すと、これは　ｓｋｅｗ ｃｏｍｍｕｔａｔｉｖｅ　な　ｇｒａｄｅｄ　ｒｉｎｇ　である。即ち、簡単のために $H^i(X, k)$ を単に　H^i　と書けば

1）　$H^* = H^0 + H^1 + H^2 + \cdots,\qquad H^i \cdot H^j \subset H^{i+j}$；

2）　$x \in H^i,\quad y \in H^j \Rightarrow xy = (-1)^{ij} yx.$

従って　H^* では左イデアル、右イデアルの区別はなく、可換環に極めて近い。　ｋの標数が２のときは本当の可換環であり、標数　$p > 2$　のときは偶数次元の元のみ取って得られる部分環は可換環である。　トポロジストにとっては　$k = \mathbb{R}$　の場合と同様に　$k = \mathbb{F}_p$　（標数ｐの素体）の場合も重要であり、そのとき例えばコンパクト・リー群　Ｇ　の分類空間　ＢＧ　のコホモロジー環 $H_G^* := H^*(BG, \mathbb{F}_p)$ は、Ｇ が　ｐ－ｔｏｒｓｉｏｎ　を持たなければ、多項式環 $\mathbb{F}_p[X_1, \cdots, X_n]$　に作用する Ｇ の　Weyl 群　Ｗ　に関する不変式の環　$\mathbb{F}_p[X]^W$　である（［１］）。　このあたりが、有限体上の不変式論に対してトポロジストが興味を持つようになった始まりではなかろうか。

コホモロジー環　$H^*(X, \mathbb{F}_p)$ には　Ｓｔｅｅｎｒｏｄ作用素（ｒｅｄｕｃｅｄ　ｐｏｗｅｒ ともいう）$\mathcal{P}^m$（ｍ＝０，１，２，…）が定義される。　これは、環が可換のときには、われわれの言葉でいえば　Ｈａｓｓｅ－Schmidt　の意味の高階導分（［**２**］§２７）の特殊のものである。

Steenrod作用素の存在によって $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ は制限を受ける。 どのような graded ring がコホモロジー環になり得るかという問題は、近くは Adams-Wilkerson [3] によって扱われている。 Noetherian なコホモロジー環の一般論は Rector [4] にもある。 Quillen [5] はコホモロジー環の可換環論的研究のさきがけとなったようである。 コホモロジー環の depth を特殊な場合に調べた Duflot [6] も Quillen の指導の下に書かれた学位論文である。

2. The Dickson Invariants

$k=\mathbb{F}_q$ をq元体とし、k上のn次元ヴェクトル空間 V と、V 上の symmetric algebra $S(V)$ $(\simeq \mathbb{F}_q[X_1, \cdots, X_n])$ を考える。 線形変換群 $GL(V)$ は、容易に判るように、位数

$$(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$$

の有限群である。 したがって $S(V)$ の $GL(V)$ 不変式の全体 $S(V)^{GL(V)}$ はやはり k 上に超越次数 n の整域である。 1911年に、アメリカの有名な代数学者 L. E. Dickson は $S(V)^{GL(V)}$ の生成元を計算した。 以下大体 Wilkerson [7] に従ってこれを解説する。

V の $\mathbb{F}_q$ 上の basis $x_1, \cdots, x_n$ をひとつ固定して、$i=1, 2, \cdots, n$ に対し $V_i = \Sigma_{\nu=1}^{i} \mathbb{F}_q x_\nu$ とおく。 更に $f_i(X) = \prod_{v\in V_i}(X-v)$ とおく。 ここで V の元同士の積は $S(V)$ の中で行う。

$$\Delta_n(X) = \det\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & X \\ x_1^q & \cdots & x_n^q & X^q \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{q^n} & \cdots & x_n^{q^n} & X^{q^n} \end{pmatrix}.$$

とおく。 $\Delta_n(X)$ の X に V の元 $v=\Sigma_1^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{F}_q$, を代入すると、$\alpha_i^q=\alpha_i$ であるから $v^{q^j} = \Sigma \alpha_i x_i^{q^j}$ となり、従って上の行列の第 $(n+1)$ 列が他の列の1次結合となるから

$$\Delta_n(v)=0 \quad \text{for all} \quad v\in V.$$

故に　$f_n(X) \mid \Delta_n(X)$　である。　Xについて次数はどちらも　q^n　であるから

$$\Delta_n(X)=c_n\cdot f_n(X), \quad c_n\in S(V).$$

行列の形から明らかに　$c_n=\Delta_{n-1}(x_n)$　$(n>1)$　である。　$n=1$　のときは $\Delta_1(X)=x_1X^q-x_1^qX$，　故に　$c_1=x_1\neq 0$，　$\Delta_1(X)=x_1\cdot f_1(X)$．　$f_1(X)$の根は　$V_1=\mathbb{F}_q x_1$　の元で、x_2 は V_1　に入らないから　$c_2=\Delta_1(x_2)\neq 0$．　以下帰納法で　$c_i\neq 0$　$(i=1, 2, \cdots, n)$が出る。　故に、$\Delta_n(X)$の展開を利用して、$f_n(X)$が

$$f_n(X)=\prod_{v\in V}(X-v)=X^{q^n}+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}c_{n,i}X^{q^i}$$

の形であることが判る。　f_n は q^n 次式であるが $n+1$ 個の項しか持たないのである。

f_n の係数 $c_{n,i}$ は当然 $x_1, \cdots, x_n$の多項式であり、V の元の任意の置換でf_n が変わらないから、　$c_{n,i}\in S(V)^{GL(V)}$　$(i=0, 1, \cdots, n-1)$．　$x_1, \cdots, x_n$ についての次数は、$c_n f_n(X)=\Delta_n(X)$　の両辺の係数をくらべると

$$\begin{aligned}\deg c_{n,i} &= (1+q+\cdots+q^n-q^i)-\deg c_n\\ &= q^n-q^i\end{aligned}$$

である。　$c_{n,i}$ を Dickson invariants という。　また、$D_n=\mathbb{F}_q[c_{n,n-1}, \cdots, c_{n,0}]$と置き、Dickson algebra という。

定理 (Dickson [8])

$$S(V)^{GL(V)}=D_n.$$

証明。　x_i は $f_n(X)$の根であるから、$S(V)=\mathbb{F}_q[x_1, \cdots, x_n]$は D_n 上に整である。故に $c_{n,i}$ $(0\leqq i\leqq n-1)$は $\mathbb{F}_q$ 上代数的独立である。　$S(V)$の商体を K，D_n の商体を L とする。　K は L 上の多項式 $f_n(X)$の分解体であるから Galois 拡大である。　$G=\mathrm{Gal}(K/L)$とおくと　$G\subset GL(V)$は明らか。　一方　$\sigma\in G$　は　$f_n(X)$の根の置換を起こすから　$\sigma(V)=V$　であり、また σ は L-linear したがって $\mathbb{F}_q$-linear である。　故に $\sigma\in GL(V)$，　$G=GL(V)$である。　よって $K^{GL(V)}=L$，　よって　$S(V)^{GL(V)}$ は D_n 上に整で D_n と同じ商体 L を持つ。　D_n は多項式環であるから整閉整域であり、したがって

$S(V)^{GL(V)} = D_n$.　　　　証明終わり。

注意：D_n は環としては多項式環であるが graded ring としては生成元 $c_{n,i}$ の次数が全部ことなり、普通の多項式環ではない。

3. Depth Conjecture.

$\mathbb{F}_q$, V, $S(V)$, D_n は前節のとおりとする。 $u_i = c_{n,n-i}$ とおくことにする。 従って $D_n = F[u_1, \cdots, u_n]$. G を $GL(V)$ の部分群とし、$A = S(V)^G$ とおく。$G \subset GL(V)$ により $D_n \subset A \subset S(V)$ であり、$S := S(V)$ は A 上に、A は $D := D_n$ 上に有限加群である。 環 A の depth が ここの主題 である。 ただし depth A は graded ring としての意味にとる、即ち次数＞0の斉次元から成るA正則列の長さの最大値である。 A は D 上に有限であるから、よく知られているように $\operatorname{depth} A = \operatorname{depth}_D A$ が成り立つ。 更に、D は n次元の 正則環 だから すべての D 加群は射影次元有限であり、

$$\operatorname{depth} A + \operatorname{proj\,dim} A = n$$

が成り立つ。 特に $G = \{e\}$ 従って $A = S$ の場合、$\operatorname{depth} S = n$ だから S は D加群として free である。

$|G|$ が p で割れなければ、G のすべての元にわたって平均をとることにより S から A へのレイノルズ作用素がえられ、A が S の A加群としての直和因子になる。 よって $\operatorname{depth} A = \operatorname{depth} S = n$ となり、A は Cohen−Macaulay環になる。

$\operatorname{depth} A = n$ のときは A は D 上の自由加群であるから、$u_1, \cdots, u_n$ は A正則列になる。 より一般に、Landweber と Stong は次の予想を立てた。

<u>Depth Conjecture</u>:　$\operatorname{depth} A \geqq r$ ならば $u_1, \cdots, u_r$ は A正則列であろう。

$r = n$ なら上記のようにこれは正しい。また

$r = 1$ については自明である。

$r = 2$ のときにも容易である。 実際 $a, b \in A$ が S正則列をなすものとすれば、

$$bx = ay, \quad x, y \in A,$$

のとき、$aS : b = aS$ から $x = az$, $z \in S$ と書ける。 これから $a(bz-y)=0$ 従って $bz-y=0$. $\sigma \in G$ を施せば $b\sigma(z)-y=0$ で、b も S正則元だから $z=\sigma(z)$ が任意の $\sigma \in G$ に対して成り立ち、$z \in A$, $x \in aA$.

よって予想は $r=1, 2, n$ のときには $u_1, \cdots, u_n$ の順序には無関係に成り立つが、その他の場合には 順序に関係すると Landweber たちは言っている。 さて 、予想は 今の所 $r=3$ および $r=n-1$ のときにも Landweber−Stong [9] によって証明されている。

r＝n−1　のときの証明

一般にネータ環 R, イデアル $I=(a_1, \cdots, a_r)$, 有限 R加群 M があって $IM \neq M$ をみたすとき、I の中に長さ r の M正則列があれば、$a_1, \cdots, a_r$ 自身が M正則列になる（例えば [2] 定理16.8と定理16.5から）。 よって（$k=\mathbb{F}_q$ と書いて）

$$(1) \qquad \mathrm{Ext}^i_D(k, A)=0 \qquad (i<n-1)$$

の仮定から

$$(2) \qquad \mathrm{Ext}^i_D(k[u_n], A)=0 \qquad (i<n-1)$$

を示せばよい。 完全系列

$$0 \to k[u_n] \xrightarrow{u_n} k[u_n] \to k \to 0$$

から（2）は $i<n-2$ に対しては直ちに得られる。 $i=n-2$ のときも

$$0 \to \mathrm{Ext}^{n-2}_D(k[u_n], A) \xrightarrow{u_n} \mathrm{Ext}^{n-2}_D(k[u_n], A)$$

が exact, よって $u_n^{-1}\mathrm{Ext}^{n-2}_D(k[u_n], A)=0$ が言えればよい。$u_n^{-1}D=D'$, $u_n^{-1}A=A'$ とおくと

$$(3) \qquad \mathrm{Ext}^{n-2}_{D'}(D'/(u_1, \cdots, u_{n-1}), A')=0$$

を示すことになるが、$u_1, \cdots, u_{n-1}$ は D' 正則列であるから、Koszul complex の self duality を用いれば、（3）の左辺は

$$\mathrm{Tor}_1^{D'}(D'/(u_1, \cdots, u_{n-1}), A')$$

に等しい。よって A' が D'-projective ならばよい。このことは 下の Lemma 2 で 示される。

<u>Lemma</u> 1. $GL(V)$ の任意の部分群 G に対し、$S' := u_n^{-1} S(V)$ は $A' := u_n^{-1} S(V)^G = S'^G$ 上に Chase－Harrison－Rosenberg [10] の意味の Galois 拡大である。 従って A' は A' 加群としての S' の直和因子である。

<u>証明</u>. Galois 拡大を定義するいくつかの条件 ([10] p.18) の一つは
"$\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$ と S' の任意の極大イデアル m とに対し、$\sigma(x) - x \notin m$ となるような $x = x(\sigma, m) \in S'$ が存在する"
である。 われわれの場合、σ に対し $x \in V$ を $\sigma(x) \neq x$ となるように取れば、$\sigma(x) - x$ は V の 0 でない元であるから $S(V)$ で u_n の因子であり、従って $S' = u_n^{-1} S(V)$ で unit になる。よって上記の条件がみたされる。 Galois拡大なら 小さい方の環が 拡大環の直和因子になる ([10] p.21 , Lemma 1.6)。

<u>Lemma</u> 2. $A' = u_n^{-1} S(V)^G$ は $D' = u_n^{-1} D_n$ 上の 射影加群である。

<u>証明</u>. S が D_n 上 free、従って $S' = u_n^{-1} S$ は D' 上 free であり、A' は Lemma 1 により S' の A' 直和因子、従って D' 直和因子だから D' 射影的である。証明終。

以上で $r = n-1$ の場合の証明が完成した。 $r = 3$ の場合の証明には Steenrod 作用素が役立つ。

4. Steenrod Operators

Topology では universal coefficient theorem により $H^*(X, \mathbb{F}_q) = H^*(X, \mathbb{F}_p) \otimes \mathbb{F}_q$ が成り立つから、topologist は素体以外の有限体には興味を持たない。 Steenrod 作用素も普通 $\mathbb{F}_p$ の上だけで定義されているが、

われわれは一般の有限体 $\mathbb{F}_q$ の上で考えよう。 可換な次数環 $R=R_0+R_1+R_2+\cdots$ で $R_0=\mathbb{F}_q$ をみたすものにおいて、加法的な写像 $\mathcal{P}^k : R \to R$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ が

(1) $\mathcal{P}^0 = \text{identity}$,

(2) $\mathcal{P}^k(xy) = \Sigma_{i+j=k}(\mathcal{P}^i x)(\mathcal{P}^j y)$,

(3) $\mathcal{P}^k x = x^q$ if $x \in R_k$,

(4) $\mathcal{P}^k x = 0$ if $k > \deg x$,

(5) $\mathcal{P}^k(R_i) \subset R_{i+k(q-1)}$,

をみたすとき、R に定義された Steenrod 作用素ということにしよう。 (2)の条件は、写像

$$\mathcal{P}_T : R \longrightarrow R[T]$$

を

$$\mathcal{P}_T(x) = \Sigma_{k\geqq 0}(\mathcal{P}^k x)T^k \qquad \text{（条件（4）によって右辺は多項式）}$$

で定義すれば ring homomorphism になる ということである。 よって（1）と（2）は $(\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \cdots\cdots)$ が Hasse−Schmidt の高階導分であることを意味し、（4）によれば この高階導分は 中井［11］の意味で locally finite であるが、容易に確かめられるように iterative ではない。

R が普通の多項式環（前節の記号でいえば S(V)）

$$R = \mathbb{F}_q[x_1, \cdots, x_n], \qquad \deg x_i = 1,$$

のときには、Steenrod 作用素 は

$$\mathcal{P}_T(x_i) = x_i + x_i^q T \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

によって一意的に定まる。 例えば $x \in R_1$ に対して

$$\mathcal{P}_T(x^3) = (x + x^q T)^3 = x^3 + 3x^{2+q}T + 3x^{1+2q}T^2 + x^{3q}T^3$$

であるから $\mathcal{P}^2(x^3) = 3x^{1+2q}$.

前節のように G を GL(V) の部分群とすると、S(V) の Steenrod 作用素 $\mathcal{P}^k$ は G の作用と可換であるから、$\mathcal{P}^k$ が $A=S(V)^G$ にも定義される。更に一般に、群 G の コホモロジー環 $H^i(G;S(V))$, $i \geqq 0$, にも $\mathcal{P}^k$ が定義される。 後者は $A=H^0(G;S(V))$

上の graded module である。［次数環 R に $\mathcal{P}^k$ が定義されているとき、R 上の次数加群 M における $\mathcal{P}^k$ は公理（1），（2），（4），（5）をみたすものとする。 但し（2）においては $x \in R$, $y \in M$ としなければならない。］

<u>Lemma</u> 3. 次数環 R と次数加群 M とに Steenrod 作用素が定義されているとし、$x \in M$ とすると、$\sqrt{\mathrm{ann}(x)}$ はすべての $\mathcal{P}^k$ で不変なイデアルである。

証明. やさしいから読者にゆだねる。

定理（J. −P. Serre［12］） V を F 上の n次元 ヴエクトル空間 とすれば、S(V) の素イデアル で すべての $\mathcal{P}^k$ で 不変なものは、V の subspace W によって定義される 素イデアル $P_W := \mathrm{Ker}[S(V) \to S(V/W)]$ の形である。 即ち 1次同次式で生成された素イデアルである。

証明は［12］を見よ。 そこでは素体上で証明してあるが、$\mathbb{F}_q$ 上でも全く同様にできる。

<u>定理</u>. $D_n = S(V)^{GL(V)} = \mathbb{F}_q[c_{n,0}, \cdots, c_{n,n-1}]$ の graded prime ideals で すべての $\mathcal{P}^k$ で不変なものは、(0), $(c_{n,0})$, $(c_{n,0}, c_{n,1})$, …, $(c_{n,0}, \cdots, c_{n,n-1})$ の n+1 個 だけである。

証明. Q をそのような D_n の素イデアルとして、Q の上に乗っている S(V) の素イデアル $\mathbb{P}$ を一つ取る。

$$P' = \{ x \in S(V) \mid \mathcal{P}^k x \in P \ \text{ for all } k \geq 0 \}$$

とおくと、total Steenrod operation $\mathcal{P}_T' : S(V) \to S(V)[T]$ を用いれば

$$P' = \mathcal{P}_T^{-1}(P[T])$$

であるから P′ も S(V) の graded prime ideal であり、$x = \mathcal{P}^0 x \in P$ によって $P' \subset P$, $P' \cap D_n = Q$，よって $P' = P$ でなければ ならない。 よって P は

すべての $\mathcal{P}^k$ で 不変である。 よって Serre の定理により $P=P_W$ となる sub-space $W\subset V$ が存在する。 $d=\dim W$, $m=\dim(V/W)=n-d$ とし、$\pi : S(V)\to S(V/W)$ を自然な全射とすれば、容易に判るように

$$\pi(c_{n,n-r}) = \begin{cases} (c_{m,m-r})^{p^d} & (r\leqq m) \\ 0 & (r>m) \end{cases}$$

である。 よって $(c_{n,0},\cdots,c_{n,d-1})\subset Q$ となるが、 $ht(P)=d=ht(c_{n,0},\cdots,c_{n,d-1})$ であり、また $S(V)$ は D_n 上 整 かつ flat だから $ht(P)=ht(Q)$ ([2′] Th. 20). よって $Q=(c_{n,0},\cdots,c_{n,d-1})$ である。($d=0$ のときは $Q=(0)$.) また逆に、上のことからわかるように 各 $(c_{n,0},\cdots,c_{n,i})$ は $S(V)$ の $\mathcal{P}^k$ 不変イデアルを D_n へ落としたものであるから、$\mathcal{P}^k$ 不変である。

Depth Conjecture の $r=3$ の場合の証明:

$S=S(V)$, $A=S^G$, $\operatorname{depth} A\geqq 3$ とする。 u_1, u_2, u_3 は S 正則列、よって u_2, u_3 は S/u_1S 正則列、よって $r=2$ のときの証明と 同じ議論で、u_2, u_3 は $(S/u_1S)^G$ 正則列でもある。 自然な写像

$$A/u_1A = S^G/u_1S^G \to (S/u_1S)^G$$

は単射である。 これが同型であることを示せばよい。 コホモロジーの完全系列

$$H^0(G,S)=S^G \to H^0(G,S/u_1S)=(S/u_1S)^G \to H^1(G,S) \xrightarrow{u_1} H^1(G,S)$$

によれば、u_1 が $H^1(G,S)$ 正則元であればよいことになる。

$$M := \operatorname{Ker}[\,H^1(G,S) \xrightarrow{u_1} H^1(G,S)\,]$$

とおくと

$$0 \to A \xrightarrow{u_1} A \to (S/u_1S)^G \to M \to 0$$

が exact である。 仮に $M \neq 0$ とすると、u_1 は $H^1(G, S)$正則元でないから $P \in \mathrm{Ass}_D(H^1(G, S))$があって $u_1 \in P$ となる。一方 associated prime の定義により、$P = \mathrm{ann}_D(y)$となるような $y \in H^1(G, S)$があるから、Lemma 3 により P はすべての ∂^kで不変である。 前定理によれば そのような D_n の素イデアルは $(c_{n,0}, \cdots, c_{n,i})$即ち$(u_n, \cdots, u_{n-i})$の形であるから、$u_1$ を含むためには $P = (u_1, \cdots, u_n)$でなくてはならない。 $Py = 0$ だから $u_1 y = 0$, よって $y \in M$, よって $P \in \mathrm{Ass}\, M$ でもあり、従って depth $M = 0$ である。 M は A加群でもあり、A は D 上に finite だから $\mathrm{depth}_D M = \mathrm{depth}_A M = 0$ である。 一方、depth $A \geq 3$, よって depth$(A/u_1A) \geq 2$, また 既に見たように depth$(S/u_1S)^G \geq 2$ であるから、完全系列

$$0 \to A/u_1A \to (S/u_1S)^G \to M \to 0$$

から、$M \neq 0$ なら depth $M \geq 1$ でなくてはならぬ。 よって 矛盾が得られた。
証明終わり。

証明の最後の部分は、吉野雄二・渡辺敬一 両氏によって [9] よりも 簡単になっている。
[9] では Ellingsrud−Skjelbred [13] の結果を用いて 矛盾を導いている

* * * * * * * * * *

References

[1] A.Borel,Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math. 57(1953),115-207.

[2] 松村英之，可換環論，共立出版，１９８０.

[2] H.Matsumura, Commutative Algebra,Benjamin 1970,2nd ed.1980

[3] J.F.Adams and C.W.Wilkerson, Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra, Ann.of Math.111(1980), 95-143

[4] D.L.Rector, Noetherian cohomology rings and finite loop spaces with torsion, J. of pure and appl. algebra 32 (1984), 191-217.

[5] D.Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring, I,II. Ann. of Math. 94(1971),549-602.

[6] J.Duflot, Depth and equivariant cohomology, Comment. Math. Helv. 56(1981),627-637.

[7] C.Wilkerson, A primer on the Dickson invariants, Proc. of the Northwestern Homotopy Theory Conference, Contemporary Math. 19(1983), 421-434.

[8] L.E.Dickson, A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem, Trans. AMS 12(1911), 75-98.

[9] P.S.Landweber and R.E.Stong, The depth of rings of invariants over finite fields, Preprint 1985.

[10] S.V.Chase, D.K.Harrison and A.Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs AMS No.52 (1964).

[11] Y.Nakai, On locally finite iterative higher derivations. Osaka J. Math. 15 (1978) 655-662.

[12] J.-P.Serre, Surla dimension cohomologique des groupes profinis, Topology 3 (1965),413-420.

[13] G.Ellingsrud and T.Skjelbred, Profondeur d'anneaux d'invariants en caracteristique p, Compositio Math. 41 (1980) 233-244.