# 第　8　回

# 可換環論シンポジウム報告集

昭和61年度　科学研究費総合Ａ
(課題番号 61302001　代表　小田忠雄)

1986年10月29日～11月1日
於　辰口共同研修センター

# 序

この報告集は、１９８６年１０月２９日から１１月１日までの４日間、辰口共同研修センター（石川県辰口町）で行なわれた「第８回可換環シンポジウム」の講演者から提出された原稿を、そのまま印刷・作製したものです。

今回のシンポジウムも、充実した講演、参加者の活発な討論により、有意義な集会になりました。

なお、この会を開催するにあたり、辰口共同研修センター・金沢大学・富山大学数学教室の方々のあたたかい御協力がありました。また、旅費・会場費などの経費およびこの報告集の出版費は、東北大学 小田忠雄 先生の科研費によるものです。ここにあらためて感謝します。

１９８７年１月

浅沼 照雄
小野田 信春
河合 秀泰
小山 陽一
菅谷 孝

# 第8回可換環論シンポジウム・プログラム

## 10月29日（水）

19:30 - 20:00　河 合 秀 泰　（石川工専）
形式的巾級数環の素イデアルについて

20:10 - 20:30　金 光 三 男　（愛知教育大）
Locally pseudo-valuation domains

20:40 - 21:10　伊 藤 史 郎　（広島大・理）
正則列で生成されたイデアルの整閉包について

## 10月30日（木）

8:30 - 9:00　西 田 康 二　（千葉大・理）
Maximal Buchsbaum module の同型類が有限個の環について

9:05 - 9:50　宮 崎 誓　（早大・理工）
Buchsbaum rings and cone singularities

10:00 - 10:45　後 藤 四 郎　（日大・文理）
Buchsbaum 環の例

10:55 - 11:25　尼 崎 睦 実　（京大・数理研）
basic sequence が（$a : a^a : a^b$）となる曲線について

11:30 - 12:00　石 田 正 典　（東北大・理）
非特異完全扇とベルヌイ数

15:00 - 15:30　橋 本 光 晴　（京大・理）
Roberts complex について

15:35 - 16:05　柳 原 弘 志　（兵庫教育大）
On seminormal local rings and multicross singularities

16:15 - 17:00　渡 辺 敬 一　（東海大・理）
Rees 環と filtration

19:30 - 20:00　大 石 彰　（広島大・理）
可換環の種数について

20:05 - 20:50　日 比 孝 之　（名大・理）
Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially orderd set

21:00 - 21:20　宮 崎 充 弘　（京大・理）
Stanley-Reisner ring の minimal free resolution について

10月31日（金）

| | |
|---|---|
| | 特別講演 |
| 8:30 - 9:20 | 岩 永 恭 雄　　（信州大・教育）<br>多元環の表現からの話題 |
| 9:30 - 10:20 | 同 上 |
| | 特別講演 |
| 10:30 - 11:10 | 吉 野 雄 二　　（名大・理）<br>Hensel 環上の maximal CM module の理論 |
| 11:20 - 12:00 | 同 上 |
| 13:30 - 14:15 | 川 本 琢 二　　（名大・理）<br>吉 野 雄 二　　（名大・理）<br>２次元局所整閉整域の di-canonical module |
| 14:25 - 14:45 | 五 十 川 読　　（広島大・理）<br>１次元局所環の微分加群について |
| 14:50 - 15:10 | 谷 本 洋　　（宮崎大・教育）<br>$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ の root closedness について |
| 15:15 - 15:35 | 佐 藤 淳 郎　　（岡山理大・理）<br>吉 田 憲 一　　（岡山理大・理）<br>LCM-stability on a polynomial ring extension |
| 15:45 - 16:30 | 蔵 野 和 彦　　（京大・理）<br>First syzygy of determinantal ideals |
| 16:40 - 17:00 | 馬 場 清　　（大分大・教育）<br>A note on the Jacobian problem |

11月1日（土）

| | |
|---|---|
| 9:00 - 9:20 | 佐 藤 耕次郎　　（東北工大・理系）<br>松 田 隆 輝　　（茨城大・理）<br>可換半群環の話題 ： 半群の ＊-operation, M-半群環 |
| 9:25 - 9:55 | 青 山 陽 一　　（愛媛大・理）<br>後 藤 四 郎　　（日大・文理）<br>Faltings の CM 化と Sharp 予想の特別な場合 |
| 10:00 - 10:30 | 西 村 純 一　　（京大・理）<br>An example of noetherian rings |
| 10:35 - 10:55 | 吉 田 憲 一　　（岡山理大・理）<br>Integral valued polynomials のなす環 |

## 参　加　者　（五十音順）

| | |
|---|---|
| 青山　陽一 | 愛媛大・理 |
| 秋葉　知温 | 京大・教養 |
| 浅沼　照雄 | 富山大・教育 |
| 尼崎　睦実 | 京大・数理研 |
| 池畑　秀一 | 岡山大・教養 |
| 石川　武志 | 都立大・理 |
| 石田　正典 | 東北大・理 |
| 石橋　康徳 | 広大・学校教育 |
| 五十川　読 | 広大・理 |
| 伊藤　史朗 | 広大・理 |
| 岩井　斉良 | 京大・教養 |
| 岩上　辰男 | 広大・総合科学 |
| 岩永　恭雄 | 信州大・教育 |
| 宇田　広文 | 宮崎大・教育 |
| 江畑　暢之 | 茨城大・理 |
| 大石　彰 | 広大・理 |
| 大塚　香代 | 京大・教養 |
| 岡部　章 | 小山高専 |
| 奥山　廣 | 徳島大・教育 |
| 小駒　哲司 | 高知大・理 |
| 小野田信春 | 福井大・教育 |
| 加藤　芳文 | 名大・工 |
| 金光　三男 | 愛知教育大 |
| 河合　秀泰 | 石川高専 |
| 川本　琢二 | 名大・理 |
| 神蔵　正 | 早大・教育 |
| 蔵野　和彦 | 京大・理 |
| 小山　陽一 | 金沢工大 |
| 後藤　四郎 | 日大・文理 |
| 坂口　通則 | 広島修道大・商 |
| 佐久間元敬 | 広大・総合科学 |
| 佐藤　淳郎 | 岡山理大 |
| 佐藤耕次郎 | 東北工大 |
| 佐藤　英雄 | 和歌山大・教育 |
| 菅谷　孝 | 富山大・理 |
| 鈴木　敏 | 京大・教養 |
| 鈴木　直義 | 静岡薬科大 |
| 竹内　康滋 | 神戸大・教養 |
| 太刀川弘幸 | 筑波大・数学系 |
| 谷本　洋 | 宮崎大・教育 |
| 泊　昌孝 | 筑波大・数学系 |
| 土井　幸雄 | 福井大・教育 |
| 成瀬　弘 | 岡山大・教育 |
| 西田　康二 | 千葉大・理 |
| 西村　純一 | 京大・理 |
| 橋本　光靖 | 京大・理 |
| 馬場　清 | 大分大・教育 |
| 日高　文夫 | 専修大北海道短大 |
| 日比　孝之 | 名大・理 |
| 広森　勝久 | 神戸大・教養 |
| 福井　伸代 | 日大・理工 |
| 松田　隆輝 | 茨城大・理 |
| 松村　英之 | 名大・理 |
| 宮崎　誓 | 早大・理工 |
| 宮崎　充弘 | 京大・理 |
| 柳原　弘志 | 兵庫教育大 |
| 山内　紀夫 | 岐阜教育大 |
| 山形　邦夫 | 筑波大・数学系 |
| 吉田　憲一 | 岡山理大 |
| 吉野　雄二 | 名大・理 |
| 若松　隆義 | 上武大 |
| 渡辺　敬一 | 東海大・理 |

# 目　次

# 形式的べき級数環の素イデアルについて

河合秀泰　石川高専

§0、 $R$を単位元を持つ可換環，$X$を不定元とする時，多項式環 $R[X]$においては見られなかった病的な現象がべき級数環$R[[X]]$に現われる．例えば Krull 次元に関するもの．( $\dim R = n \Rightarrow n+1 \leq \dim R[X] \leq 2n+1$ が成り立つことが知られているが，$R$が階数1の非離散的付値環であれば$\dim R[[X]] = \infty$ となることも知られている) このような現象がおこる原因の1つとして，$P \in \mathrm{Spec}(R)$に対して $PR[[X]]$ と $P[[X]]$ が必ずしも一致しないことがあげられる．

ここに，

$PR[[X]] =$ $P$が$R[[X]]$において生成するideal

$P[[X]] = \{ \sum_i a_i X^i \in R[[X]] \, ; \, a_i \in P, \forall i \}$

$(R[[X]]/P[[X]] \cong (R/P)[[X]]$ ゆえ $P[[X]] \in \mathrm{Spec}(R[[X]]))$

ゆえに $PR[[X]]$ は 必ずしも素イデアルとは言えない．そこで

問題：$P$がどのような性質をもつ時，$PR[[X]]$は素イデアルになるのか．

を考えてみる．

まず，次の補題が知られている．

<u>補題1</u> ([5]) $R$ : ring　$I$ : $R$の ideal　このとき，

$IR[[X]] = I[[X]] \Leftrightarrow$ $I$に含まれる任意の可算生成 ideal $J$に対して有限生成 ideal $J'$が存在して，$J \subseteq J' \subseteq I$.

ここに，

$IR[[X]] =$ $I$が生成するideal

$I[[X]] = \{ \sum a_i X^i \, ; \, a_i \in I, \forall i \}$

このことから次がわかる．

i) $P \in \mathrm{Spec}(R)$が有限生成 $\Rightarrow$ $PR[[X]] = P[[X]] \in \mathrm{Spec}(R[[X]])$

よって ネーター環は考察の対象からはずれる．

ii) $P \in \mathrm{Spec}(R)$が可算生成であって有限生成ではない

$\Rightarrow$ $PR[[X]] \subsetneqq P[[X]]$。

§1. 以下では $R$ が付値環である場合に限定する. ただし,「付値環」は加法付値で定義されるもの(言い換えると, ideal の全体が包含関係によって全順序集合になるような整域)を意味する.

$V$ を付値環, $P \in \mathrm{Spec}(V)$ として既に知られているいくつかの結果を述べる.

<u>補題 2</u> ([3]) $P = P^2 \Rightarrow PV[[X]] = (PV_P)V_P[[X]]$.

<u>補題 3</u> ([3]) $P \neq P^2 \Rightarrow (P[[X]])^2 \subseteq PV[[X]]$

特に $\sqrt{PV[[X]]} = P[[X]]$.

<u>補題 4</u> ([2] Th 24) $\mathrm{rank}\, V = 1$, $M$ は $V$ の極大 ideal

$\Rightarrow MV[[X]] \in \mathrm{Spec}(V[[X]])$.

これらから次の補題が得られる.

<u>補題 5</u> $V$ : 付値環, $P \in \mathrm{Spec}(V)$, height $P = 1$ とすると,

(1) $P = P^2$ の時, $PV[[X]]$ は素イデアル.

(2) $P \neq P^2$ の時, $PV[[X]]$ が素イデアル $\Leftrightarrow PV[[X]] = P[[X]]$.

ところで補題1から次がわかる: $V$ が付値環である時,

$P \in \mathrm{Spec}(V)$ が可算生成ではない $\Rightarrow PV[[X]] = P[[X]]$.

というわけで, 話を付値環に限定してしまえば可算生成な素イデアルについてのみ, 先に掲げた問題を考えればよい. このとき, 次の定理が成り立つ.

<u>定理</u> $V$ : 付値環 $P \in \mathrm{Spec}(V)$, 可算生成とする.

(1) $P = P^2$ の時. height $(P/Q) = 1$, ${}^{\exists}Q \in \mathrm{Spec}(V)$

$\Rightarrow PV[[X]]$ は素イデアル

(2) $P \neq P^2$ の時. $PV[[X]]$ が素イデアル $\Leftrightarrow P$ が principal

<u>証明</u>　(2). 補題1と補題3から得られる.　(1). $\bar{V} = V/Q$,

$\bar{P} = P/Q$ とおくと, $\bar{P} = \bar{P}^2$, height $\bar{P} = 1$. 補題5の(1)から $\bar{P}\bar{V}[[X]] \in \mathrm{Spec}(\bar{V}[[X]])$. ここで,

$$\varphi : V[[X]] \longrightarrow \bar{V}[[X]]$$
$$\textstyle\sum a_i X^i \mapsto \sum \bar{a}_i X^i \quad (\bar{a}_i = a_i \bmod Q)$$

を考えると, $\varphi^{-1}(\bar{P}\bar{V}[[X]]) = PV[[X]]$. $\therefore PV[[X]] \in \mathrm{Spec}(V[[X]])$.
(終)

一方, 次の命題が知られている.

<u>命題</u>　([6])　$V$を付値環とするとき, $\mathrm{Card}(\mathrm{Spec}(V)) \leq \aleph_0$ ならば, $V$の任意のidealは可算生成.

すると, 定理から次のことがわかる.

<u>系</u>　$V$: 有限階数の付値環, $P \in \mathrm{Spec}(V)$ とすると,

$PV[[X]]$が素イデアル $\Leftrightarrow$ $P = P^2$ または $P$はprincipal.

§2.　$PV[[X]] \notin \mathrm{Spec}(V[[X]])$ となる付値環$V$と素イデアル$P$の例.

付値$v$の付値環を$V$, value groupを$G$とおく. $\mathrm{Spec}(V) \setminus \{(0)\}$ と{$G$のproper convex subgroups}との対応をつかって, $P \in \mathrm{Spec}(V)$ のべき等性やprincipalであるかどうかが判定できる場合がある.

(全順序アーベル群のproper convex subgroupの定義については[4] p.197を参照. なお, この概念は[8]におけるisolated subgroupと同じものであり, 下の対応について詳細は[8] pp 40−41を参照)

その対応は,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(V)\setminus\{(0)\} & & \{G\text{の proper convex subgroups}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$}\ \ & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & H = G\setminus\{v(\mathfrak{p})\cup(-v(\mathfrak{p}))\} \\ \mathfrak{p}=\{x\in V\,;\,v(x)\notin H\} & \longleftarrow & H \end{array}$$

というものであって，順序が逆転する。ここで便宜上 (0) と G を対応させて上の対応を拡張しておく。

素イデアルがべき等であるかどうかの判定については次の補題が有効かもしれない。

補題 6　G：全順序アーベル群，　v：体 K 上の付値，その value group は G，　V：v の付値環，　$H_1 \subsetneq H_2$ ：$H_1$ は G の proper convex subgroup，$H_2$ は G の proper convex subgroup か G，$H_1 \subsetneq H \subsetneq H_2$ となる proper convex subgroup H が存在しない，　$\mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2$ ：V の素イデアル，$\mathfrak{p}_i$ と $H_i$ が対応している $(i=1,2)$。
以上の仮定のもとで　　　$\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_1^2 \iff H_2/H_1 \cong \mathbb{Z}$ .

証明　[4] §17 Exercise 22, 31 から得られる。

任意の全順序アーベル群に対して，それを value group とする付値とその付値環が構成できる。したがって，ある性質を持つ付値環が欲しい時，全順序アーベル群をうまく作って，それを value group とする付値環を構成する方法が考えられる。

注意　例えば，(0) でも極大でもない任意の素イデアルが principal ではないような付値環が欲しければ次のような全順序アーベル群 G をつくればよい：

　$\{G_i\}_{i=1}^{n}$ $(n>1)$ を rank 1 の全順序アーベル群の族として
　これらの直和 $G=\bigoplus_i G_i$ に辞書式順序を入れて全順序
　アーベル群とする。

例. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ をそれぞれ有理整数全体, 有理数全体とする. $G=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$ とおく. 辞書式順序によって $G$ を全順序アーベル群とする. $G$ を value group に持つ付値の付値環を $V$ とおく. $G$ の proper convex subgroups は $\mathbb{Q}$ と $\{0\}$ のみ. よって $\operatorname{rank} G=2$ $\therefore \operatorname{rank} V=2$
$P$, $M$ をそれぞれ $\mathbb{Q}$, $\{0\}$ に対応する素イデアルとする.

$$\begin{array}{ccccc} (0) & \subset & P & \subset & M \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ G=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q} & \supset & \mathbb{Q} & \supset & \{0\} \end{array}$$

補題6から $P\neq P^2$, $M=M^2$.
先の注意から $P$ は principal ではない.
$G$ は正の最小元をもたないので $M$ も principal ではない.

結局, §1の系によって $PV[[X]] \notin \operatorname{Spec}(V[[X]])$
$MV[[X]] \in \operatorname{Spec}(V[[X]])$
ただし, $MV[[X]] \neq M[[X]]$.

## 参考文献


[1] J.T. Arnold, R. Gilmer, and W. Heinzer, Some countability conditions in a commutative ring, Ill. J. Math. 21 (1977), 648–665.

[2] J.W. Brewer, Power series over commutative rings, Marcel Dekker, New York, 1981.

[3] D.E. Fields, Dimension theory in power series rings, Pac. J. Math. 35 (1970), 601–611.

[4] R. Gilmer, Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker, New York, 1972.

[5] R. Gilmer and W. Heinzer, Rings of formal power series over a Krull domain, Math. Zeitschr. 106 (1968), 379–387.

[6] R. Gilmer and W. Heinzer, Cardinality of generating sets for ideals of a commutative ring, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 791 - 798.

[7] H. Kawai, A note on prime ideals in a formal power series ring, to appear

[8] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, vol. 2, Springer - Verlag, New York and Berlin, 1960.

# Locally pseudo-valuation domains

愛知教育大学　金光三男

pseudo-valuation domain (以下、PVDと略記する)は、J.R. Hedstrom と、E.G. Houston によって、1978年の Pac. J. Math. の論文で導入された。これは、付値環の一般化である。PVDに関連した論文は多いが、最近のものでは、D.E. Dobbs の Coherent pseudo-valuation domains have Noetherian completions (1986) がある。ここでは、D.E. Dobbs と M. Fontana の導入した locally pseudo-valuation domain (以下、LPVDと書く)に関してわかったことを報告させていただきます。西三重雄先生と伊藤史朗氏にいくつかの御教示をしていただきました。環Rの整閉包を$\overline{R}$でかくことにする。

定義 (J.R. Hedstrom と E.G. Houston) Rを整域としその商体をKとする。Rの素イデアル$\mathfrak{p}$が strongly prime ideal であるというのは、Kの元$x$と$y$が$xy \in \mathfrak{p}$なら$x \in \mathfrak{p}$又は$y \in \mathfrak{p}$となるときをいう。Rが PVD とは、すべての素イデアルが strongly prime ideal のときをいう([5])。

また、D.E. Dobbs と M. Fontana [3] によって、LPVD と GPVD が定義された。整域Rが LPVD とは、Rの各素イデアル$\mathfrak{p}$に対して、$R_{\mathfrak{p}}$がPVDのときをいい、整域Rが GPVD とは、Rの Prüfer overring T が存在して次の条件を満たすときをいう。

(i) 0でないTとRの両方の radical ideal $\mathfrak{A}$ で $R/\mathfrak{A} \subset T/\mathfrak{A}$ が unibranched 拡大である。

(ii) (i)の$\mathfrak{A}$に対して $\dim(R/\mathfrak{A}) = \dim(T/\mathfrak{A}) = 0$.

これらの関係を図示すると右のようになることが知られています([3])。矢印の向きの逆は必ずしもいえない。

$$\begin{tikzcd}
\text{付値環} \arrow[r] \arrow[d] & \text{PVD} \arrow[d] & \\
\text{Prüfer domain} \arrow[r] & \text{GPVD} \arrow[r] & \text{LPVD}
\end{tikzcd}$$

PVDやLPVDの例をあげる。

(1) $R = \mathbb{Z}[3\sqrt{2}]_{(2,\,3\sqrt{2})}$ はPVDだが付値環ではない。$\frac{2}{2+3\sqrt{2}} \notin R$, $\frac{2+3\sqrt{2}}{2} \notin R$ だから。

(2) (L. Ramella [10]) Rを1次元ネーター整域とし$\overline{R}$をその整閉包とする。今、$\overline{R}$は有限R-加群で conductorを$\mathfrak{C} = R:\overline{R}$としたとき、$R/\mathfrak{C}$と$\overline{R}/\mathfrak{C}$の連結成分の個数が等しいとき、Rの($\overline{R}$における) seminormalization $^{+}_{\overline{R}}R$ はLPVDとなる。

(3) (G. Angermuller [1]). $(R, \mathfrak{M})$を1次元ネーター局所整域, $n>1$でRは$n$-root closed とする。Rの整閉包$\overline{R}$の極大イデアルで$\overline{R}_M$が1の原始$n$乗根を含むならば、

RはPVDで$\overline{R}$は付値環になる。

(4) (D.E. Dobbs [2]). (R, M)がPVDなら、RのM-adic completion $\hat{R}$もPVDで1次元である。Rがcoherent PVDで付値環でなければ、$\hat{R}$はネーターPVDである。

(5) $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}]$を$\mathbb{Q}$上$\mathbb{Q}$(加法で書いておく)の群環とする。$\mathbb{Q}[\mathbb{Q}]$は∠PVDだが$\mathbb{Q}[\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}]$は∠PVDではない。

RがPVDならRは*quasi-local domain*であることは、よく知られている。RがPVDであるための条件は、Rと同じ極大イデアルを持つ付値環$V$が存在することであることが知られている。この$V$をRの*associated valuation domain*という。

Rが*i-domain*であるとは、Rの任意のoverring Tに対して、Rの各素イデアル$\mathfrak{p}$上にあるTの素イデアルは高々一つであるときをいう。これは、Rの各素イデアル$\mathfrak{p}$に対して$R_{\mathfrak{p}}$の整閉包が付値環になることと同値である([9])。また、Rが*i-domain*であることは、$\overline{R}$が*Prüfer domain*で$\mathrm{Spec}(\overline{R}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$が*injective*(従って、*bijective*)になることとも同値である([8])。

**定理 1** Rを整域とし、$\overline{R}$をその整閉包とする。このとき、Rが∠PVDで$\overline{R}$が*Prüfer domain*になることは、Rが*seminormal i-domain*で、Rの各極大イデアルMに対して$R_M$が次の条件(*)をみたすことと同値である

(*) もし、$u$が$R_M$の整閉包$\overline{(R_M)}$の単元でない元で$(R_M)[u] \neq R_M$なら、$\dim \frac{R_M[u]}{\mathcal{I}} = 0$である。但し、$\mathcal{I} = R_M : R_M[u]$とする。

[証明] ($\Longrightarrow$) Rが(*)をみたすことをいえば十分。PVD $R_M$のassociated valuation domainを$(V, MR_M)$とする。$\overline{(R_M)}$は付値環だから極大イデアルを$\overline{M}$とすると、$V = \overline{(R_M)}$となり、$\overline{M} = MR_M$ よって(*)は無内容的に成立する。

($\Longleftarrow$) $\overline{R}$が*Prüfer domain*はすぐにいえるから、Rが∠PVDを示す。(R, M)はPVDとして一般性を失わない。従って、$(\overline{R}, \overline{M})$を付値環として$M = \overline{M}$をいえばよい。$M \subsetneqq \overline{M}$とすると$\exists u \in \overline{M} - M$。仮定より、$\dim \frac{R[u]}{\mathcal{I}} = 0$、但し$\mathcal{I} = R : R[u]$とする。Rは*seminormal*だから

$$M \supset \mathcal{I} = {}^{R[u]}\!\sqrt{\mathcal{I}} = R[u] \cap \overline{M}$$

が成立する。$u \in R[u] \cap \overline{M}$だからこれは$u$のとり方に反する。故に$M = \overline{M}$。

[Q.E.D.]

**系 2** Rを1次元整域とする。このとき、Rが∠PVDで$\overline{R}$が*Prüfer domain*であるための条件は、Rが*seminormal i-domain*なることである。

[証明] 1次元整域に対しては条件(*)は成立している。

<u>系 3</u>　Rがネーター整域とする。このとき、Rが∠PVDである条件は、Rが *seminormal* *i-domain* であることである。

[証明] ネーター∠PVDもネーター *i-domain* もともに高々1次元だから、系2よりいえる。

<u>注意</u> 定理1で条件(*)をおとすと、必ずしもいえない。
例として、$k$を体，$t$を$k$上不定元で $\varphi: k((t))[X]_{(X)} \longrightarrow k((t))$ を自然準同型とする。$R=\varphi^{-1}(k[[t^2]])$ は *seminormal* *i-domain* だが *not* ∠PVDである。

系3より次のことが容易にいえる。

<u>命題4</u> Rをネーター整域とし $\overline{R}$が有限R-加群とする。このとき、Rが *i-domain* である必要十分条件は $\overset{+}{_R}R$ が∠PVDなることである。

*i-domain* の例を示そう。

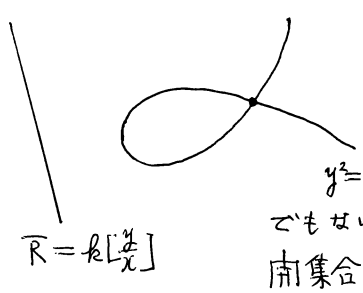
<u>例</u>　[7]より、$\overset{+}{_{\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]}}\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$。従って命題4より $\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ は *i-domain* である。しかし、これは *seminormal* ではないから、$\mathbb{Z}[\sqrt{-4}]$ は∠PVDではない。

<u>例</u>　$[K:k]<\infty$ で $K\neq k$ （$K$, $k$はともに体）とし、$X$を$K$上 *analytically independent* とする。$V=K[[X]]=K+M$　但し、$M=XV$ とし、$R=k+M^n$とする。
このとき、命題4より　Rは *i-domain* で $\overset{+}{_R}R=k+M$ はPVDである。

次の命題は、証明は省略しよう。

<u>命題5</u>　Rが1次元ネーター整域で $\overline{R}$は有限R-加群とする。このとき、Rが∠PVDであることは Rが *quasinormal* であることに同値である。

<u>例</u>　$k$を代数的閉体とし、$R=\dfrac{k[X,Y]}{(Y^2-X^2-X^3)}=k[x,y]$　（$x$, $y$は$X$, $Y$の類）




$\mathrm{Spec}(\overline{R}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ は *not injective* だから、Rは *i-domain* ではない。
よってRは∠PVDでもないし *quasinormal* でもない。$\{P\in \mathrm{Spec}(R) \mid R_P$ がPVD$\}$は *Zariski* トポロジーで開集合であるが、*surface* では成立しない。

命題5とGPVDの定義より、容易に次のことが従う。

**命題6**　1次元ネーター整域Rに対して、$\bar{R}$は有限R-加群とする。このとき、RがLPVDであることとGPVDであることは同値である。特に$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$に対してこのことは成立する。

**注意** 1) この命題において$\bar{R}$が有限R-加群であるという仮定は除くことができない。

2) [D//]と命題5より$\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$がLPVD（GPVDといっても同じ）になる必要十分条件は次の一つが成立することである。

(a) $m$はsquare-freeで$m \equiv 2$又は$3 \pmod 4$か$m \equiv 5 \pmod 8$

(b) $m$はnot square-freeで$m \equiv ab^2$, $(a, b)=1$で$a, b$はともにsquare-free integerで$a \not\equiv 1 \pmod 8$, $b$は奇数で$b$のすべての素因子$p$に対してルジャンドルの記号$\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

3) 命題4より、$m = q_1 q_2 \cdots q_r$（素因数分解）がsquare-freeで$p$を素数とし、$p \nmid m$を仮定しておく。素イデアル$(\sqrt[p^e]{m}, q_i)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$と$(\sqrt[p^e]{m}-m, p)$による$\mathbb{Z}[\sqrt[p^e]{m}]$の局所化の整閉包がすべて局所環になることと$\mathbb{Z}[\sqrt[p^e]{m}]$のseminormalizationがLPVDになることは同値である。

証明は省略しますが次のことが成立します。s.p. dimについてあとで定義する。

**定理7**　Rがcoherent LPVDですべてのidealがcountably generatedとする。更にgl.dim Rが有限なら、RはDedekind domainかgl.dim R=2でs.p. dim R=3なるPrüfer domainである。

以下、群環，半群環とLPVDの関係を調べてみよう。

Rを整域，Sを可換monoidで演算は加法で書いてあるとする。R[S]でSのR上のmonoid ringを表わすことにする。少し言葉の定義をしておく([4])。Tをmonoid，SをTのsubmonoidで0を含むとする。$t \in T$が**S上整**とは、ある正の整数$n$が存在して$nt \in S$となるときをいう。$\bar{S}$でS上整であるTの元全体を表わすこととして、これを**SのTにおける整閉包**という。Sがcancellativeのとき、GをSのthe quotient groupとする。TがGのとき$\bar{S}$を単に**Sの整閉包**といい、$S=\bar{S}$のときSは**normal**であるという。$r_0(G)$でGのtorsion-free rankを表わすことにする。また以下、$\mathbb{Q}_0$，$\mathbb{Z}_0$は負でない有理数全体，負でない整数全体をそれぞれ示すこととする。

**補題 8** $k$を体，$k[S]$を monoid ring で $S$は$\mathbb{Q}$の non-zero submonoid で $G$を$S$の the quotient group とし，$G_0=G\cap\mathbb{Q}_0$とおく．このとき次のことが成立する．

(1) $S$が$\mathbb{Q}$の部分群であることと$\overline{S}$が$\mathbb{Q}$の部分群であることは同値である。

(2) $S\subset\mathbb{Q}_0$なら，$G_0$は$S$上整である。

(3) ([4]) $k[G_0]$，$k[G]$はともに1次元 Bézout domain である。

次に，群環$R[G]$が$\angle$PVDであるのは，自明なときしかないことを示そう。

**定理 9** $G$を0でないアーベル群で$R[G]$を$G$の$R$上群環とする。このとき，$R[G]$が$\angle$PVDであることと$R$が体で$G$が$\mathbb{Q}$の部分群であることは同値である。更に，このとき$R[G]$は1次元 Bézout domain である。

[証明の方針]($\Rightarrow$) $\mathfrak{m}$を$R$の極大イデアルとする。$\mathfrak{m}$と$\{X^g-1\mid g\in G\}$とで生成される$R[G]$におけるイデアルを$M$とすると，$M$は$R[G]$の極大イデアルになる。$R[G]_M$がPVDだから，この overring $(V,N)$で付値環で$N=MR[G]_M$となるものが存在する。$R$が体でないとすると0でない$a\in\mathfrak{m}$が存在する。$a$と$X^g-1$を$V$で比較する。矛盾が導けるから$R$は体である。次に，$G$の自由部分加群$F$で$G/F$が torsion group になるものが存在する。$R[F]$は正規環で$R[G]$は$R[F]$上整拡大だから[3, Prop.2.7]より，$R[F]$は$\angle$PVDになる。従って，$F$は indecomposable だから$F\cong\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ よって，$G$は$\mathbb{Q}$の部分群で$R[G]$は1次元 Bézout domain となる。

($\Leftarrow$) $G$は locally cyclic group だから補題8の(3)よりいえる。

**系 10** $G$が0でないアーベル群とし$R[G]$を$G$の$R$上群環で$\mathrm{Max}(R[G])$はネーター空間で$R$の標数を$p$とする，$p$が正なら，$G$の自由部分加群$F$で$G/F$は torsion group でその$p$-準素成分$(G/F)_p$は有限群とする。このとき，$R[G]$が$\angle$PVDであることは，$R$が体で$R[G]$が$R[X,X^{-1}]$に同型であることと同値である。

[証明の方針] 定理9と仮定より，$R[G]$の0でない素イデアル$P$は準素イデアル$Q$を使って$P^m=Q$ ($m$は自然数)とかける。しかも，$Q$は単項イデアルにとれるから，$P$は可逆イデアルとなり，$R[G]$はデデキント整域である。$G$は有限生成となるから，$G\cong\mathbb{Z}$で$R[G]\cong R[\mathbb{Z}]$となる。

**系 11** $G$を0でないアーベル群とする。このとき$R[G]$が$\angle$PVDになる条件は，$R[G]$が$i$-domain になることである。

次は、monoid ring $R[S]$ が $\angle$PVD であるのは自明なときしかないことを示す。

定理 12　$S$ を 0 でない monoid とし、$R[S]$ は monoid ring。$G$ を $S$ の the quotient group とする。このとき、$R[S]$ が $\angle$PVD であるのは、$R$ が体で同型を除いて $S$ は $\mathbb{Q}$ の部分群であるか $\mathbb{Q}_0$ の normal submonoid であることに同値である。更にこのとき $R[S]$ は 1 次元 Bezout domain である。

[証明の方針] ($\Longrightarrow$) $T=\{X^{\alpha} \mid \alpha\in S\}$ とおくと $R[G]=R[S]_T$ となる。定理 9 より $R$ は体で $G\subset\mathbb{Q}$ (部分群) となる。$S$ が $\mathbb{Q}$ の正の有理数と負の有理数どちらも含めば $S$ は部分群 ($\mathbb{Q}$ の) となるから、$S$ は $\mathbb{Q}$ の部分群でないとする。このとき、$S\subset\mathbb{Q}_0$ と仮定してよい。$G_0=G\cap\mathbb{Q}_0$ とおくと、$S=G_0$ がいえる。従って $S=\overline{S}$ となる。補題 8 の (3) より 1 次元 Bezout domain であることもいえる。

($\Longleftarrow$) 定理 9 と補題 8 より明らか。

系　13　$S$ が 0 でない monoid で monoid ring $R[S]$ が $\angle$PVD とする。このとき、$S$ は indecomposable でピカール群 $\mathrm{Pic}(R[S])$ は 0 である。

系　14　$S$ は 0 でない monoid で $R[S]$ は monoid ring とする。このとき、$R[S]$ が i-domain であるのは、$R$ が体で同型を除いて $S$ は次の条件の一つをみたすことに同値である

(1)　$S$ は $\mathbb{Q}$ の部分群である。

(2)　$S$ は $\mathbb{Q}_0$ の submonoid である。

更に、この場合 $R[S]$ は 1 次元である。

系　15　$S$ が 0 でない monoid で $R[S]$ は monoid ring とする。このとき、$R[S]$ が $\angle$PVD であることは $R[S]$ が seminormal i-domain であることに同値である。

最後に定理 12 を使って次の形で $\angle$PVD $R[S]$ ($S\neq(0)$) を整理しておこう。

その前に言葉の準備をする。これは、H.K. Ng ([6]) によるものである。

$M$ を $R$-加群とする。このとき、次の様な完全列を考える。

$$P_{n+1}\longrightarrow P_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

ここで、各 $P_i$ は射影 R-加群で $P_n$ と $P_{n+1}$ は有限生成とする。このような n の inf を $\underline{f.p.\dim_R M}$ と定義する。このような完全列が存在しないなら、f.p.dim M は無限大とする。また、

$$f.p.\dim R = \sup\{f.p.\dim M \mid M は有限 R-加群\}$$

で $\underline{f.p.\dim R}$ を定義する。

S が 0 でない monoid で R[S] は monoid ring とする。このとき R[S] が LPVD になるのは次のどれかが成立することと同値である。

(1) R[S] は R[X] と同型である。

(2) R[S] は $R[X, X^{-1}]$ と同型である。

(3) R[S] は gl.dim R[S] = 2, f.p.dim R[S] = 3 なる 1 次元 Bézout domain である。但し R は (1), (2), (3) とも体とする。

## 参考文献


[1] G. Angermüller, On the root and integral closure of Noetherian domains of dimension one, J. Alg. 83 (1983) 437−441.

[2] D.E. Dobbs, Coherent pseudo-valuation domains have Noetherian completions, Abstracts Amer. Math. Soc (1986) 250.

[3] D.E. Dobbs and M. Fontana, Locally pseudo-valuation domains, Ann. Math. Pure Appl. 134 (1983) 147−168.

[4] R. Gilmer, Commutative semigroup rings, 1984, Chicago.

[5] J.R. Hedstrom and E.G. Houston, Pseudo-valuation domains, Pac. J. Math. 75 (1978) 137−147.

[6] H.K. Ng, Finitely presented dimension of commutative rings and modules, Pac. J. Math. 113 (1984) 417−431.

[7] A. Ooishi, On seminormal rings (general survey), Rims Kokyuroku, 374 (1980), 1−17.

[8] I.J. Papick, Topologically defined classes of going-down domains, Bull. Amer. Math. Soc 81 (1975) 718−721.

[9] ——, Topologically defined classes of going-down rings. Trans. Amer. Math. Soc 219 (1976) 1−37.

[10] L. Ramella, A geometric interpretation of one-dimensional quasinormal rings, J. Pure and Appl. Alg. 35 (1985) 77 — 83.

[11] H. Tanimoto, Normality, seminormality and quasinormality of $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$, To appear, Hiroshima Math. J.

# 正則列で生成されたイデアルの整閉包について

伊藤史朗（広島大・理）

## §1. はじめに

講演では次の定理をみとめて その応用について述べた．

定理 1．ネータ環 A と，正則列で生成される A のイデアル Q について $\overline{Q^{n+1}} \cap Q^n = \overline{Q}Q^n$ $(\forall n \geqq 0)$ が成立する．

この定理の証明の概略は他の研究集会で述べたので 今回は省略したのであるが、シンポジウムの後、上の定理の証明と同じ方針で 次の定理も証明できたので、この報告集では 第 3 節で その概略を述べることにする．

定理 2．A を *locally quasi-unmixed* なネータ環，Q を A のイデアルで *of the principal class* とする．このとき $\overline{Q^{n+1}} \cap Q^n = \overline{Q}Q^n$ $(\forall n \geqq 0)$ が成立する．

Rees 氏からの手紙で，A が体を含む場合には Huneke（と Hochster）が定理 1 を証明していることを知った．彼らの証明は [H] にのっているが、私の手法とは全く異なっている．又，Huneke からの手紙によれば，彼と Hochster とが A が体を含む場合に定理 2 の証明を与えたとのことである．その証明は受けとっていないが、[H] から推測するに、私のそれとは全く異なるものと思われる．

## §2. 応用

次の命題3,4を証明しようとして定理1にたどりついたという背景があるので、最初にこれらを述べることにする.

命題3. $A$ を Cohen-Macaulay 局所環, $Q$ をその parameter イデアルとする. もし $\overline{Q^{n+2}} = Q^n\overline{Q^2}$ ($\forall n \geqq 0$) であれば $G = \bigoplus_{n\geqq 0} \overline{Q^n}/\overline{Q^{n+1}}$ は Cohen-Macaulay.

この証明は、簡単にわかるように, $\overline{Q^2} \cap Q = \overline{Q}Q$ を証明することにつきる. 従って定理1より命題3が従う. (又必然的に $A$ は analytically unramified となり, 従って $G$ はネータ環である.)

命題4. $A$ を2次元局所環で, normal かつ analytically unramified とする. このとき $A$ が pseudo-rational $\Leftrightarrow$ 任意の parameter イデアル $Q$ と任意の $n \geqq 0$ について $\overline{Q^{n+1}} \subseteq Q^n$.

既に "$A$ が pseudo-rational $\Leftrightarrow$ $\overline{Q^2} = \overline{Q}Q$ が任意の primary イデアルについて成立" は分っている [LT]. この最後の条件をもう少し弱い条件でおきかえたのが命題4であり, そのおきかえを保障するのが定理1. 類似の結果を命題7で与える.

又, 定理1を用いると $\ell_A(A/\overline{Q^{n+1}})$ の評価がえられる.

命題5. $A$ を Cohen-Macaulay 局所環, $Q$ をその parameter イデアルとすると

$$\ell_A(A/\overline{Q^{n+1}}) \leqq \ell_A(A/Q)\binom{n+d}{d} - \left(\ell_A(\overline{Q}/Q) + \ell_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\right)\binom{n+d-1}{d-1} + \ell_A(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\binom{n+d-2}{d-2}.$$

ここで $d = \dim A$. 又各 $n \geqq 1$ について,

等号成立 $\Leftrightarrow$ $\overline{Q^{n+1}} = Q^{n-1}\overline{Q^2}$.

証明： 次の図を考えてみると分りやすい.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\overline{Q^{n+1}} \arrow[d, dash] & & Q^n \arrow[ddl, dash] \\
\overline{Q^2}\,\overline{Q^{n-1}} \arrow[dr, dash] & & \\
 & \overline{Q^{n+1}} \cap Q^n = \overline{Q}Q^n &
\end{tikzcd}$$

不等式の右辺 $= \ell(A/Q^n\overline{Q}) - \ell(\overline{Q^2}Q^{n-1}/\overline{Q}Q^n)$ を証明しておけばよい.

$\ell(A/Q^n) = \ell(A/Q)\binom{n-1+d}{d}$,

$\ell(Q^n/Q^n\overline{Q}) = \ell(A/\overline{Q})\binom{n+d-1}{d-1}$

であるから $\ell(A/Q^n\overline{Q}) = \ell(A/Q)\binom{n+d}{d} - \ell(\overline{Q}/Q)\binom{n+d-1}{d-1}$. 従って $\ell(\overline{Q^2}Q^{n-1}/\overline{Q}Q^n) = \ell(\overline{Q^2}/Q\overline{Q})\binom{n-1+d-1}{d-1}$ であればよい. ところが $\overline{Q^2}Q^{n-1}/\overline{Q}Q^n = \overline{Q^2}Q^{n-1}/\overline{Q^2}Q^{n-1}\cap Q^n \cong (Q^{n-1}\overline{Q^2} + Q^n)/Q^n \cong Q^{n-1}/Q^n \otimes \overline{Q^2}/Q\overline{Q}$ が定理1を用いて証明できるのである.

以後この節では、$A$ は2次元 Cohen-Macaulay 局所環とする. 又 $A$ は analytically unramified とする. $Q$ を $A$ の parameter イデアルとすると次の完全列を得る. ただし $Q = (x, y)$, $X = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0}\overline{Q^n})$.

$$0 \to \frac{(x^n, y^n)Q^n}{(xy)^n} \to \frac{(x,y)^n\overline{Q^n}}{(xy)^n} \xrightarrow{f_n} H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

又, $f_n$ の像を $F_n$ とおくと

$$0 = F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \qquad \subseteq H^1(X, \mathcal{O}_X) = \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$

以上の事実及び次の補題の証明は [I] をみてもらうことにしてここでは省略する.

補題. (i) $F_{n+1}/F_n \cong Q^{n-1}\overline{Q^{n+1}}/Q^n\overline{Q^n}$

(ii) $F_{n+1} = F_n \Leftrightarrow \overline{Q^{n+1}} = Q\overline{Q^n}$

$H^1(X, \mathcal{O}_X)$ は長さ有限であるので $g(Q) = \ell(H^1(X, \mathcal{O}_X))$ とかくことにする.

命題6. $g(Q) \leq 1 \Rightarrow \overline{Q^{n+2}} \subseteq Q^n \quad \forall n$.

実際，$\exists r>0$，$0=F_1=\cdots=F_r \subset F_{r+1}=\cdots$．このとき $\dim F_{r+1}/F_r=1$ であるから補題の(i)を用いて $\overline{Q^{r+1}}=Az+Q\overline{Q^r}$ となる $z \notin Q\overline{Q^r}$ ($mz \subset Q\overline{Q^r}$) が存在することがわかる．$Q\overline{Q^r}=Q^r\overline{Q}$ (補題の(ii)) であるから $z \in Q^r\overline{Q}:m \subseteq Q^{r-1}$．従って $\overline{Q^{r+1}} \subseteq Q^{r-1}$．$n \neq r$ のとき $\overline{Q^{n+1}} \subseteq Q^{n-1}$ となるのは補題の(ii)より出る．

とくに、命題4と類似の結果として

命題7. $\sup\{g(Q) \mid Q$ は parameter イデアル$\} \leq 1$ であれば任意の parameter イデアル $Q$ について $\overline{Q^{n+2}} \subseteq Q^n$ ($\forall n \geq 0$).

## §3. 定理1,2の証明(の概略)

$A$をネータ環，$Q=(x_1,\cdots,x_d)$，$\mathrm{ht}\,Q=d$，$R=\sum_{n\in\mathbb{Z}} Q^n t^n$，$R'=\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{Q^n} t^n$ とおく．$d \geq 2$ としておこう．$0 \leq r \leq d$ なる $r$ をとり $J=(x_1t,\cdots,x_dt,t^{-1})R$ とおく．定理1,2の証明に必要な事実は

定理3. $x_1,\cdots,x_d$ が正則列，又は $A$ が locally quasi-unmixed であれば

(i) $\overline{Q^{n+1}} : x_j = \overline{Q^n}$

(ii) $x_1,\cdots,x_d$ は $\overline{Q}$-independent，即ち $\sum_{i_1+\cdots+i_d=n} a_{i_1\cdots i_d} x_1^{i_1}\cdots x_d^{i_d} = 0$ ($a_{i_1,\cdots,i_d} \in A$) であれば各 $a_{i_1\cdots i_d} \in \overline{Q}$

(iii) $H_J^2(R')_n = 0$ ($n \leq 0$)

上の(iii)の主張の証明などは結構面白いと思うのではあるが

ここでは省略する．$A$ が locally quasi-unmixed のときの (i) (ii) は Ratliff が [R] で証明している．

定理 1, 2 の証明に入ろう．ただし $d = ht\, Q \geqq 2$ としておく．まず次の命題の系として $d = 2$ の場合が導ける．

命題 8．$\overline{Q^{n+1}} \cap (x_1, x_2)^n = \overline{Q}\,(x_1, x_2)^n$．

証明．$J = (x_1t, x_2t, t^{-1})R$ として定理 3 を用いる．$H_J^2(R')$ を

$$0 \to R'_{x_1t} \times R'_{x_2t} \times R'_{t^{-1}} \xrightarrow{f} R'_{x_1tx_2t} \times R'_{x_1t\cdot t^{-1}} \times R'_{x_2t\cdot t^{-1}} \xrightarrow{g} R'_{x_1tx_2tt^{-1}} \to 0$$

で計算する．$z \in \overline{Q^{n+1}} \cap (x_1, x_2)^n$ をとり $z = ax_1^n + bx_2$ $(b \in (x_1, x_2)^{n-1})$ と書いておく．すると $g(z/x_1^nx_2,\ b/x_1^n,\ -a/x_2) = 0$ となるので $R'_{x_1t} \times R'_{x_2t} \times R'_{t^{-1}}$ の元 $(b'/x_1^m, -a'/x_2^m, c)$ が存在して $f(b'/x_1^m, -a'/x_2^m, c) = (z/x_1^nx_2, b/x_1^n, -a/x_2)$ となる．(注：$(z/x_1^nx_2, b/x_1^n, -a/x_2)$ の"次数"は 0．) $m \geqq n$ としてよい．又 $x_1x_2$ を適当にかけることにより $zx_1^{m-n}x_2^{m-1} = a'x_1^m + b'x_2^m$ $(a' \in \overline{Q^m},\ b' \in \overline{Q^m})$ としてよい．さて $(ax_1^n + bx_2)(x_1^{m-n}x_2^{m-1}) = a'x_1^m + b'x_2^m$ であるから定理 3 (ii) より $ax_2^{m-1} - a',\ bx_1^{m-n} - b' \in \overline{Q^m}$．故に $ax_2^{m-1} \in \overline{Q^m}$ かつ $bx_1^{m-n} \in \overline{Q^m}$．定理 3 (i) より $a \in \overline{Q}$ かつ $b \in \overline{Q^n}$．$b \in \overline{Q^n} \cap (x_1, x_2)^{n-1}$ である．$n = 1$ のときは $b \in \overline{Q}$ となり命題の主張は正しい．よって $n$ についての帰納法を用いて証明終り．

$d$ に関する帰納法を用いて証明する．$d = 2$ の場合は証明できたので $d > 2$ とする．

$t^{-1}R'$ の prime divisors を $P_1, \cdots, P_r$ とし $V_i = (R'_{P_i})_{red}$ とおく．[I] Lemma 4 より ($P_i$ は有限ケで) $V_i$ は DVR．(実のところ，我々の議

論の一番基本的な所は[I] Lemma 4 である.) さて, $a \in \overline{Q^n} \Leftrightarrow a \in Q^n V_i \ \forall i$ となることが分るので, $x_1, \cdots, x_d$ をとり直しておいて $x_1 V_i = Q V_i \ \forall i$ としておいてよい. $B$ を $A_{x_1}$ の $A$-部分環で $x_2/x_1$ で生成されるものとする. $I = (x_1, x_3, \cdots, x_d)$ とおく. $B$ 及び $I$ は 定理1, 又は定理2 の条件をみたしていることは容易に確かめられる. 従って $\overline{I^{n+1}} \cap I^n = \overline{I} I^n$. 又 $x_1$ のとり方から $\overline{I^{n+1}} \cap A = \overline{Q^{n+1}}$ である.

$z \in \overline{Q^{n+1}} \cap Q^n$ をとる. $\{M_j\}$ を $x_1, x_2, \cdots, x_d$ の, $\{N_i\}$ を $x_1, x_3, \cdots, x_d$ の次数 $n$ の monomials 全体とする. ($M_j, N_i \in A$.) $z$ は $z = \sum a_j M_j$ と表わしておく. $B$ で $z/1 \in \overline{I^{n+1}} \cap I^n = \overline{I} I^n$ であるから $z = \sum b_i N_i$ ($b_i \in \overline{I}$). 各 $N_i$ に対して

$$w_i = \sum_{M_j(x_1) + M_j(x_2) = N_i(x_1)} a_j x_1^{M_j(x_1)} \cdot x_2^{M_j(x_2)} \quad (\in A)$$

とおく. (ここで $M_j(x_1)$ は $M_j$ に表われる $x_1$ の巾指数.) すると $\sum (b_i - \frac{w_i}{x_1^{N_i(x_1)}}) N_i = 0$ であるから 定理3(ii) より $b_i - w_i / x_1^{N_i(x_1)} \in \overline{I}$. 従って $w_i/1 \in \overline{I^{N_i(x_1)+1}}$. よって $w_i \in \overline{I^{N_i(x_1)+1}} \cap A = \overline{Q^{N_i(x_1)+1}}$. 命題8より $w_i \in \overline{Q^{N_i(x_1)+1}} \cap (x_1, x_2)^{N_i(x_1)} = \overline{Q} (x_1, x_2)^{N_i(x_1)}$. 従って定理3(ii) を再びつかって 各 $a_j \in \overline{Q}$. よって $d \geq 2$ の場合 定理1,2 は証明できた. $d = 1$ のときは簡単であるから省略する.

## §4 おわりに.

定理2 で $A$ についての条件 "locally quasi-unmixedness" は落とすことはできない. 例えば次のようなものを考えてみればよい.

例1. $k$ を体, $X, Y, Z, W$ を変数とし $B = k[[X, Y, Z, W]]$

$P_1 = WB$, $P_2 = (X^3 - Y^4, Z^3 - W^4)B$ とする. $A = B/P_1 \cap P_2$ とおくと $A$ は quasi-unmixed でない. $x, y, z, w$ をそれぞれ $X, Y, Z, W$ の $A$ への像とする. $Q = (x, y, z)A$ とせよ. すると $Q$ は $A$ の parameter ideal で $\overline{Q^2} \cap Q \neq \overline{Q}Q$ となる. (実は $xw \in \overline{Q^2} \cap Q - \overline{Q}Q$ となるのであるが証明は略す.)

References


[I] S. Itoh, Integral closures of ideals generated by regular sequences, preprint.

[R] L.J. Ratliff, Independent elements and asymptotic sequences J. Algebra, 78(1982), 410-430.

# Basic Sequence が $(a; a^a; a^b)$ となる曲線について

尾崎睦実　　　京大数理研

$\mathbb{P}^3$ の curve $X$ ( closed subscheme, $\dim X = 1$, embedded point を持たない) に対して次のような整数列 $(a; n_1, n_2, \cdots, n_a; n_{a+1}, n_{a+2}, \cdots, n_{a+b})$ を定めることができ、$X$ の basic sequence と呼んで記号で $B(X)$ と書く ([A-1], [A-3])。

(1) $a \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_a$ , $n_1 \leqq n_{a+1} \leqq \cdots \leqq n_{a+b}$ , $b \geqq 0$,

(2) $I = \bigoplus_{\nu \geqq 0} I_\nu = \bigoplus_{\nu \geqq 0} H^0(\mathcal{I}_X(\nu))$ とおくと、

$$\dim_k I_n = \binom{n-a+3}{3}_+ + \sum_{i=1}^{a} \binom{n-n_i+2}{2}_+ + \sum_{i=1}^{b} \binom{n-n_{a+i}+1}{1}_+$$

ただし $\binom{\nu}{i}_+ = \begin{cases} \binom{\nu}{i} & \text{for } \nu \geqq i \\ 0 & \text{for } \nu < i \end{cases}$ ,

(3) $\mathbb{P}^3$ の斉次座標 $x_1, x_2, x_3, x_4$ を十分 general にとったとき、$H^1_*(\mathcal{I}_X) := \bigoplus_\nu H^1(\mathcal{I}_X(\nu))$ の $S := k[x_3, x_4]$ module としての minimal free resolution

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} S[-\varepsilon_i^2] \xrightarrow{\ G\ } \bigoplus_{i=1}^{q} S[-\varepsilon_i^1] \xrightarrow{\ H\ } \bigoplus_{i=1}^{p} S[-\varepsilon_i^0] \longrightarrow H^1_*(\mathcal{I}_X) \to 0$$

を考えると、$(n_{a+1}, n_{a+2}, \cdots, n_{a+b}) = (\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \cdots, \varepsilon_r^2)$ (up to permutation) となる。

実際に curve が与えられたとき、その basic sequence がすぐ分かるかといえばそうでもなく、また勝手な数列に対してそれを basic sequence として持つような曲線が存在するかどうかを判定するのも容易ではない。ここでは見た目がきれいな数列のうちでもとりわけ単純と思われる $(a; a^a; a^b)$ をとりあげ、これを basic sequence として持つ nonsingular irreducible curve の構成について述べよう。

目標は次の定理である。実数 $x$ の整数部分を $[x]$ で表わす。

Theorem. $a \geq 3$, $0 \leq b < \left[\frac{a}{2}\right]\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)$ のとき nonsingular irreducible curve でその $b$-asic sequence が $(a; a^a; a^b)$ となるものが存在する。

Remark. 1) $B(X)=(a; a^a; a^b)$ となることと、$I_X$ が $a$-linear free resolution を持つこととは同値。

2) $B(X)=(a; a^a; a^b)$ となっているとき、degree $d$, genus $g$ は

$$d=\frac{1}{2}a(a+1)-b \quad , \quad g=1-(a-1)b+\frac{1}{6}a(a+1)(2a-5)$$

である。$X$ が nonsingular irreducible ならば $g \geq 0$ だから

$$b \leqq \frac{\frac{1}{6}a(a+1)(2a-5)}{a-1} \sim \frac{1}{3}a^2 .$$

従って、Theorem では考え得るすべての場合を扱っているわけではない。

3) 次の exact sequence

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{I}_X(\nu)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\nu)) \xrightarrow{\mu} H^0(\mathcal{O}_X(\nu)) \longrightarrow H^1(\mathcal{I}_X(\nu)) \longrightarrow 0$$

において、すべての $\nu \in \mathbb{Z}$ に対して $\mu$ の rank が最大、すなわち全射あるいは単射となっているとき、$X$ を curve of maximal rank と呼ぶ。$B(X)=(a; a^a; a^b)$ となる曲線はこの条件を満たす。一般的な存在定理としては Hirschowitz, Ballico - Ellia 等によって示されたものがあり、その内容は、「$g=0$, $d \geq 1$ あるいは $g \geq 1$, $d \geq g+3$ ならば、maximal rank を持つ nonsingular irreducible curve が存在する」([H], [BE] を見よ)。もし曲線 $X$ が maximal rank を持ち、その genus と degree が上の 2) で与えられたものと一致しかつ $H^1(\mathcal{O}_X(a-2))=0$ となっておれば $B(X)=(a; a^a; a^b)$ となることがわかる。従って [H], [BE] の結果から Theorem は上限に近い $b$ の値に対しても成立しているが、まん中あたりの $b$ の値に対しては今は証明できていない。確信はしている。

## § 証明のあらすじ

体 $k$ の標数は $0$ とし、$R=k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ とおく。任意の

graded R-module M に対し、$M_\nu$ は次数 $\nu$ の斉次な元からなる vector space とする。積 $\prod_{\ell=m}^{n} z_\ell$ は $n<m$ のとき 1 であると定める。

まず lines の configuration で、basic sequence が $(a;a^a;a^b)$ となるものを構成しよう。0とは異なる体 $k$ の元 $\alpha_i$, $\beta_i$ $(i\geq 1)$ を $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_i \neq \beta_j$ $(i\neq j)$ となるようにとって

$$y_i = x_1 - \alpha_i x_3 \ , \quad z_i = x_2 - \beta_i x_4 \qquad (i\geq 1)$$

とおく。方程式 $y_i = x_2 = x_4 = 0$ で定まる点を $P_i^1$, $z_i = x_1 = x_3 = 0$ で定まる点を $P_i^2$, $P_i^1$ と $P_j^2$ とを結ぶ line を $L_{i,j}$ と書くと、$L_{i,j}$ の方程式は $y_i = z_j = 0$。A を double indexing set $\{(i,j) \mid i\geq 1, j\geq 1\}$ の有限部分集合とするとき、

$$Z(A) = \bigcup_{(i,j)\in A} L_{i,j} \qquad (\text{with reduced structure})$$

とおく。$m \geq \max \{ i \mid (i,j)\in A \text{ for some } j\} \cup \{j \mid (i,j)\in A \text{ for some } i\}$ とし、affine open sets $U_i^1$, $U_i^2$ $(1\leq i\leq m)$ を

$$\begin{cases} U_i^1 = \mathbb{P}^3 \setminus \{ x_1 (\prod_{\ell=1}^{m} y_\ell)/y_i = 0\} \\ U_i^2 = \mathbb{P}^3 \setminus \{ x_2 (\prod_{\ell=1}^{m} z_\ell)/z_i = 0\} \end{cases}$$

によって定めると、$Z(A)$ はこれらの open sets で覆われる。$Z(A)\cap U_i^1$, $Z(A)\cap U_i^2$ はそれぞれ平面 $y_i=0$, $z_i=0$ に含まれ、従って $Z(A)$ の singularity はすべて plane singularity となる。詳しく書くと、

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{Z(A)}|U_i^1 = \left(y_i/x_1, (\prod_{\ell\in A_i^1} z_\ell)/x_1^{|A_i^1|}\right)\mathcal{O}_{U_i^1} \\ \mathcal{I}_{Z(A)}|U_i^2 = \left(z_i/x_2, (\prod_{\ell\in A_i^2} y_\ell)/x_2^{|A_i^2|}\right)\mathcal{O}_{U_i^2} \end{cases} \qquad (1\leq i\leq m),$$

ただし $A_i^1 = \{\ell \mid (i,\ell)\in A\}$, $A_i^2 = \{\ell \mid (\ell, i)\in A\}$ で $|A_i^1|$, $|A_i^2|$ は要素の個数を表わす。簡単のため

$$\begin{cases} F_i^1 = y_i/x_1, \quad G_i^1 = (\prod_{\ell\in A_i^1} z_\ell)/x_1^{|A_i^1|} \\ F_i^2 = z_i/x_2, \quad G_i^2 = (\prod_{\ell\in A_i^2} y_\ell)/x_2^{|A_i^2|} \end{cases} \qquad (1\leq i\leq m)$$

とおく。$Z(A)$ は locally complete intersection であるから，normal sheaf

$$\mathcal{N}_{Z(A)} := \mathcal{H}om\,(\mathcal{I}_{Z(A)}/\mathcal{I}^2_{Z(A)},\ \mathcal{O}_{Z(A)})$$

は locally free で，実際には，

$$\mathcal{N}_{Z(A)}|_{U^{\ell}_i\cap Z(A)} \cong \mathcal{O}_{U^{\ell}_i\cap Z(A)}\cdot(F^{\ell}_i)^* \oplus \mathcal{O}_{U^{\ell}_i\cap Z(A)}(G^{\ell}_i)^* \quad (\ell=1,2,\ 1\leqq i\leqq m)$$

となる。ここで $(F^{\ell}_i)^*$, $(G^{\ell}_i)^*$ は $F^{\ell}_i$, $G^{\ell}_i$ から自然に定まる dual basis。

<u>〈1〉 Proposition.</u> $\mathcal{N}_{Z(A)}$ の line subbundles $Q_1, Q_2$ があって

1) $\mathcal{N}_{Z(A)} = Q_1 \oplus Q_2$

2) $\begin{cases} Q_1|_{U^1_i\cap Z(A)} = \mathcal{O}_{U^1_i\cap Z(A)}(G^1_i)^* \\ Q_1|_{U^2_i\cap Z(A)} = \mathcal{O}_{U^2_i\cap Z(A)}(F^2_i)^* \end{cases}$ $\begin{cases} Q_2|_{U^1_i\cap Z(A)} = \mathcal{O}_{U^1_i\cap Z(A)}(F^1_i)^* \\ Q_2|_{U^2_i\cap Z(A)} = \mathcal{O}_{U^2_i\cap Z(A)}(G^2_i)^* \end{cases}$。

Proof. [A-4] を見よ。 ☐

以下具体的に A を定めて考えていく。$A = \{(i,j) \mid 1\leqq j\leqq i\leqq a\}$ $(a>0)$ とおいて $X_0 = Z(A)$ とする。斉次多項式

$$f_i = \Big(\prod_{\ell=1}^{i} z_\ell\Big)\Big(\prod_{\ell=i+1}^{a} y_\ell\Big) \qquad (0\leqq i\leqq a)$$

で生成される $R$ の ideal を $J$ と書くと $X_0 = \mathrm{Proj}\,R/J$ であることが容易に確かめられる。

$$\rho(a) = \Big[\frac{a}{2}\Big]\Big(a-\Big[\frac{a}{2}\Big]\Big)$$

とおこう。$0\leqq r\leqq \big[\frac{a}{2}\big]$ のとき

$$\rho(a) = \sum_{\ell=1}^{r}(a-2\ell+1) + \sum_{\ell=r+1}^{[\frac{a}{2}]}(a-2\ell+1)$$

であるから，任意の整数 $g$ $(1\leqq g\leqq \rho(a))$ は $g = r(a-r)+p$ $(1\leqq p\leqq a-2r-1,\ 0\leqq r<[\frac{a}{2}])$ の形に一意的に表わすことができる。この表現

を用いて、 $1 \leqq q \leqq \rho(a)$ に対して

$$\begin{cases} {}^{(q)}A = A \setminus \left( \{(j+2\ell-1, j) \mid 1 \leqq j \leqq a-2\ell+1, 1 \leqq \ell \leqq r\} \cup \{(j+2r+1, j) \mid 1 \leqq j \leqq p\} \right) \\ X_q = \Sigma({}^{(q)}A) \end{cases}$$

とおき、 $X_{r(a-r)}$ を $Y_r$ と書くことにする $(0 \leqq r \leqq [\frac{a}{2}])$。 $X_q$ は $Y_r$ から $p$ 個の lines $L_{j+2r+1,j}$ $(1 \leqq j \leqq p)$ を除いて得られていることに注意する。

<u>〈2〉 Lemma.</u> $h^0(\mathcal{O}_{Y_r \cap L_{j+2r+1}}) = a$ $(1 \leqq j \leqq p)$ で $j \neq j'$ ならば $L_{j+2r+1,j} \cap L_{j'+2r+1,j'} = \phi$。

Proof. [A-4] を見よ。 $\boxtimes$

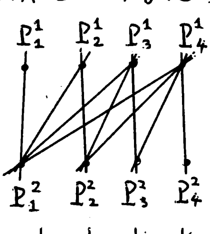
<u>〈3〉 Lemma</u> [A-2; Corollary A.3]. $X$ を $\mathbb{P}^3$ の curve で $L$ を $X$ と有限個の点で交わる line とせよ。 もし $B(X \cup L) = (a; n_1, \cdots, n_a; n_{a+1}, \cdots, n_{a+h})$ かつ $h^0(\mathcal{O}_{X \cap L}) = n \geqq n_a$ ならば $B(X) = (a; n_1, \cdots, n_a; n_{a+1}, \cdots, n_{a+h}, n)$ up to a permutation of $n_{a+1}, \cdots, n_{a+h}, n$。 $\boxtimes$

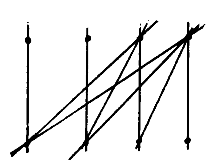
曲線 $X_0$ は projectively Cohen-Macaulay であるから $B(X_0) = (a; a^a)$ である。これから出発して、〈2〉, 〈3〉を用いれば次のことが分かる。

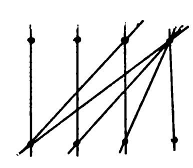
<u>〈4〉 Proposition.</u> $B(X_q) = (a; a^a; a^q)$ で $X_q$ が連結なのは $0 \leqq q < \rho(a)$ のときに限る。

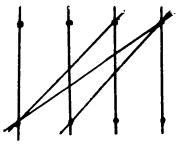
Proof. [A-4] を見よ。 $\boxtimes$

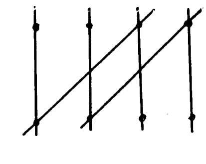
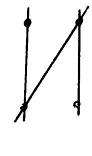
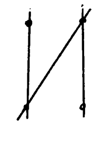
理解を助けるために $a=4$ の場合の図を書いておこう。

$X_0 =$ 


$X_1 =$ 

$X_2 =$ 

$X_3 =$ 

$X_4 =$  $=$  $\underset{\text{disjoint}}{\cup}$ 

$\langle 5\rangle$ Proposition. 各 $m$ ( $1 \leq m \leq \rho(a)$ ) に対して $m = r(a-r) + p$ ( $1 \leq p \leq a-2r-1$ , $0 \leq r < [\frac{a}{2}]$ ) と書いて

$$f_{a+m} = \left(\prod_{l=1}^{p-1} z_l\right)\left(\prod_{l=1}^{r+1} y_{p+2l-2}\, z_{p+2l-1}\right)\left(\prod_{l=p+2r+2}^{a} y_l\right)$$

とおく。すると各 $q$ ( $0 \leq q \leq \rho(a)$ ) に対して、$X_q$ の定義イデアル $I_{X_q}$ は $f_n$ ( $0 \leq n \leq a+q$ ) によって生成される。

Proof. [A-4] を見よ。 $\boxtimes$

目標としている Theorem は、$X_q$ ( $0 \leq q \leq \rho(a)$ ) が $\mathbb{P}^3$ の中での flat deformation で smooth にできることを示して得られる。そのために、Hartshorne-Hirschowitz [HH; Proposition 1.1] , Sernesi [S; (1.6)] によって指摘されたことを目下の目的に合うようにした次の事実を用いる。

$\langle 6\rangle$ Proposition. $X$ を $\mathbb{P}^3$ の reduced curve で特異点はすべて plane singularities であるとし、$T_X^1$ を $X$ の $T^1$-functor とする。もし $H^1(N_X) = 0$ でしかも各特異点 $P$ に対して自然な写像 $H^0(N_X) \longrightarrow H^0(T_X^1 \otimes \mathbb{C}_P)$ が全射であれば、$X$ は $\mathbb{P}^3$ 内の flat deformation で smooth にできる。 $\boxtimes$

これを $X_q$ に適用するには、次の形にしておいた方がよい。

$\langle 7\rangle$ Corollary. $Z(A)$, $Q_1$, $Q_2$ は $\langle 1\rangle$ と同様とする。もし $H^1(Q_l) = 0$ ( $l=1,2$ ) でしかも、各特異点 $P_i^l$ ( $l=1,2$ ) に対して自然な写像 $H^0(Q_l) \longrightarrow H^0(Q_l \otimes \mathbb{C}_{P_i^l})$ が全射であれば、$Z(A)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の flat deformation で smooth にできる。 $\boxtimes$

これから先は [HH], [S], [BE] とは少々違った方法で $\langle 6\rangle$ あるいは $\langle 7\rangle$ の仮定の成立することを示すことになる。彼らはひとつの line 上にある特異点は多くても 2つの nodes という状況で考えるのでこの部分については楽であるが、我々の場合は $X_q$ の複雑さに応じて、めんどうな計算をする必要が出てくる。それは、具体的に vector bundles $N_{X_q}$ , $N_{X_0}|_{X_q}$ の global sections を求めることである。まず計算の方法、考え方を説明していこう。 $1 \leq i \leq a$ に対し

$$\begin{cases} {}_rG_i^1 = \left(\prod_{l=1}^{i} z_l\right) \Big/ \left(x_1^{r d_i^1} \prod_{l=1}^{r} z_{i-2l+1}\right) & \left(0 \leq r \leq \left[\frac{i}{2}\right]\right) \\ {}_rG_i^2 = \left(\prod_{l=i}^{a} y_l\right) \Big/ \left(x_2^{r d_i^2} \prod_{l=1}^{r} y_{i+2l-1}\right) & \left(0 \leq r \leq \left[\frac{a-i+1}{2}\right]\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{r}H_i^1 = {}^{0}G_i^1 / {}^{r}G_i^1 = \left(\prod_{l=1}^{r} z_{i-2l+1}\right) / x_1^r & \left(0 \leqq r \leqq \left[\frac{i}{2}\right]\right) \\ {}^{r}H_i^2 = {}^{0}G_i^2 / {}^{r}G_i^2 = \left(\prod_{l=1}^{r} y_{i+2l-1}\right) / x_2^r & \left(0 \leqq r \leqq \left[\frac{a-i+1}{2}\right]\right) \end{cases}$$

とおく。ただし

$${}^{r}d_i^1 = i - \min\left(\left[\tfrac{i}{2}\right], r\right), \quad {}^{r}d_i^2 = (a-i+1) - \min\left(\left[\tfrac{a-i+1}{2}\right], r\right)$$

で、これらは、$Y_r$ に含まれる line のうち、$P_i^1$ あるいは $P_i^2$ を通るものの個数をそれぞれ表わしている。$q = r(a-r)+p$ $\left(0 \leqq r < \left[\frac{a}{2}\right],\ 1 \leqq p \leqq a-2r-1\right)$ のとき すでに述べたように

$$\mathcal{I}_{X_q}|U_i^1 = \begin{cases} \left(F_i^1, {}^{\left[\frac{i}{2}\right]}G_i^1\right)\mathcal{O}_{U_i^1} & (1 \leqq i \leqq 2r+1) \\ \left(F_i^1, {}^{r+1}G_i^1\right)\mathcal{O}_{U_i^1} & (2r+2 \leqq i \leqq 2r+p+1) \\ \left(F_i^1, {}^{r}G_i^1\right)\mathcal{O}_{U_i^1} & (2r+p+2 \leqq i \leqq a) \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{X_q}|U_i^2 = \begin{cases} \left(F_i^2, {}^{r+1}G_i^2\right)\mathcal{O}_{U_i^2} & (1 \leqq i \leqq p) \\ \left(F_i^2, {}^{r}G_i^2\right)\mathcal{O}_{U_i^2} & (p+1 \leqq i \leqq a-2r-1) \\ \left(F_i^2, {}^{\left[\frac{a-i+1}{2}\right]}G_i^2\right)\mathcal{O}_{U_i^2} & (a-2r \leqq i \leqq a) \end{cases}$$

である。また次のことに注意する。

$$\begin{cases} {}^{0}G_i^1 = f_i / x_1^i \prod_{l=i+1}^{a} y_l \\ F_i^1 = f_0 / x_1 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{a} y_l \end{cases}, \quad \begin{cases} {}^{0}G_i^2 = f_{i-1} / x_2^{a-i+1} \prod_{l=1}^{i-1} z_l \\ F_i^2 = f_a / x_2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{a} z_l \end{cases} \quad (1 \leqq i \leqq a).$$

Ideal sheaf $\mathcal{I}_{X_0}$ は free resolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a-1)^a \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a)^{a+1} \longrightarrow \mathcal{I}_{X_0} \longrightarrow 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} -z_1 & & & \\ y_1 & -z_2 & & 0 \\ & y_2 & \ddots & \\ & & \ddots & -z_a \\ 0 & & & y_a \end{bmatrix}$$

を持つから $N_{X_0}\otimes\mathcal{O}_{X_q} = N_{X_0}|_{X_q} \cong \mathcal{H}om(\mathcal{I}_{X_0}, \mathcal{O}_{X_q})$ は写像

$${}^{(q)}\theta \ : \quad \mathcal{O}_{X_q}(a)^{a+1} \xrightarrow{{}^t\varphi} \mathcal{O}_{X_q}(a+1)^a$$

の kernel に一致し、$H^0(N_{X_0}|_{X_q})$ の元を求めたければ $H^1(\mathcal{I}_{X_q}(n))=0$ $(n \geq a-1)$ であるから写像

$${}^{(q)}\Theta \ : \ (R_a/I_{X_q,a})^{a+1} \xrightarrow{{}^t\varphi} (R_{a+1}/I_{X_q,a+1})^a$$

の kernel を計算すれば十分である。$N_{X_0}$ の $V_i^1$ (resp. $V_i^2$) における local basis を $(F_i^1)^*, ({}^0G_i^1)^*$ (resp. $(F_i^2)^*, ({}^0G_i^2)^*$) $(1 \leq i \leq a)$, 〈1〉で述べられたような $N_{X_q}$ の line subbundles を ${}^{(q)}Q_1$, ${}^{(q)}Q_2$,

$$\begin{cases} {}^rE_i^l = k[V_i^l]/(F_i^l, {}^rG_i^l, {}^rH_i^l), \quad \iota_{P_i^l} : P_i^l \hookrightarrow X_q \\ {}^r\hat{E}_i^l = \iota_{P_i^l *}({}^rE_i^l) \quad \left(l=1, 0 \leq r \leq \left[\frac{i}{2}\right] \text{ or } l=2, 0 \leq r \leq \left[\frac{a-i+1}{2}\right]\right) \end{cases}$$

とする。 $\mathcal{I}_{X_0}/\mathcal{I}_{X_0}^2 \longrightarrow \mathcal{I}_{X_q}/\mathcal{I}_{X_q}^2$ を dualize して得られる exact sequence を $N_{X_q} = {}^{(q)}Q_1 \oplus {}^{(q)}Q_2$, $N_{X_0} = {}^{(0)}Q_1 \oplus {}^{(0)}Q_2$ を用いて2つに分けると、(c.f. [S])

$$0 \longrightarrow {}^{(q)}Q_1 \xrightarrow{\psi^1} {}^{(0)}Q_1|_{X_q} \xrightarrow{\omega^1} {}^{(q)}\hat{E}^1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow {}^{(q)}Q_2 \xrightarrow{\psi^2} {}^{(0)}Q_2|_{X_q} \xrightarrow{\omega^2} {}^{(q)}\hat{E}^2 \longrightarrow 0 \quad ,$$

ただし

$$\begin{cases} {}^{(q)}\hat{E}^1 = \bigoplus_{i=1}^{2r+1} {}^{[\frac{i}{2}]}\hat{E}_i^1 \oplus \bigoplus_{i=2r+2}^{2r+p+1} {}^{r+1}\hat{E}_i^1 \oplus \bigoplus_{i=2r+p+2}^{a} {}^{r}\hat{E}_i^1 \\ {}^{(q)}\hat{E}^2 = \bigoplus_{i=1}^{p} {}^{r+1}\hat{E}_i^2 \oplus \bigoplus_{i=p+1}^{a-2r-1} {}^{r}\hat{E}_i^2 \oplus \bigoplus_{i=a-2r}^{a} {}^{[\frac{a-i+1}{2}]}\hat{E}_i^2 \end{cases}.$$

このようにすると $H^0(N_{X_q})$ については次のように考えればよい。上に述べた

ように Ker $({}^{(8)}H)$ の元 ${}^t v = {}^t(v_\nu)_{0\le\nu\le a}$ は $N_{X_0}|_{X_q} = ({}^{(0)}Q_1 \oplus {}^{(0)}Q_2)|_{X_q}$ の global section $(\sigma_1, \sigma_2)$ $(\sigma_\ell \in H^0({}^{(0)}Q_\ell|_{X_q}),\ \ell = 1, 2)$ を与えるが、これは局所的には、

$$\begin{cases} c^1_i (v_0/x_1^a)(F^1_i)^* + e^1_i (v_i/x_1^a)({}^0G^1_i)^* & \text{on } U^1_i \cap X_q \\ c^2_i (v_a/x_2^a)(F^2_i)^* + e^2_i (v_{i-1}/x_2^a)({}^0G^2_i)^* & \text{on } U^2_i \cap X_q \end{cases}$$

($c^1_i, c^2_i, e^1_i, e^2_i$ は nonzero constants) と表わされる ($1 \le i \le a$)。しかも、$(\sigma_1, \sigma_2)$ が $(\psi^1, \psi^2)$ を通して $H^0(N_{X_q})$ の元に対応するための必要十分条件は $\omega^1(\sigma_1) = 0$, $\omega^2(\sigma_2) = 0$。このことにより、$N_{X_q}$ の global sections を実際に計算して得ることが可能となる。

<u>⟨8⟩ Definition.</u> $R_a$ の元を成分とする横ベクトル $v = (v_\nu)_{0\le\nu\le a}$ で $v \cdot \varphi$ のすべての成分が $I_{Y_r}$ に含まれるものを $Y_r$ の pre-normal と呼ぶ。 ☒

$Y_r$ の pre-normal は同時に $Y_{r'}$ $(r \le r' \le [\frac{a}{2}])$ の pre-normal でもあることに注意する。

<u>⟨9⟩ Lemma.</u> i) 各 $(r, m, n)$ $(0 \le r < [\frac{a}{2}],\ 0 \le m \le r,\ 0 \le n-m \le a-r-2)$ に対して、$Y_r$ の pre-normal $v^1(r,m,n) = (v^1(r,m,n)_\nu)_{0\le\nu\le a}$ で $v^1(r,m,n)_\nu = 0$ $(0 \le \nu \le a-1)$ を満たしかつ $k^* := k \setminus \{0\}$ のかけ算の違いを除いて

$$\begin{cases} v^1(r,m,n)_a / x_1^a \equiv {}^m H^1_{a-2(r+1-m)} z_{\ell_1} z_{\ell_2} \cdots z_{\ell_{n-m}} / x_1^{n-m} \pmod{F^1_a} \\ \ell_c \notin \{a-2\ell+1 \mid 1 \le \ell \le r+1\} \quad (1 \le c \le n-m) \end{cases}$$

となっているものが存在する。

ii) 各 $r$ $(0 \le r < [\frac{a}{2}])$ に対して、$Y_r$ の pre-normal $w^1(r) = (w^1(r)_\nu)_{0\le\nu\le a}$ で $w^1(r)_\nu = 0$ $(0 \le \nu \le a-1)$ を満たしかつ $k^*$ のかけ算の違いを除いて

$$w^1(r)_a / x_1^a \equiv {}^{r+1} H^1_a \pmod{F^1_a}$$

となるものが存在する。

iii) $Y_0$ の pre-normal $w'^1 = (w'^1_\nu)_{0\leqq\nu\leqq a}$ で $w'^1_\nu = 0$ $(0\leqq\nu\leqq a-1)$ を満たしかつ $k^*$ のかけ算の違いを除いて

$$w'^1_a/x_1^a \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ F^1_a)$$

となるものが存在する。

Proof. 〈5〉を用いる。詳しくは [A-4] を見よ。 $\boxtimes$

写像

$$\pi^1_i : (R_a)^{a+1} \longrightarrow k[x_2/x_1, x_3/x_1, x_4/x_1] \qquad (0\leqq i\leqq a)$$

を $v = (v_\nu)_{0\leqq\nu\leqq a}$ に対し $\pi^1_i(v) = v_i/x_1^a$ とおくことにより定める。

<u>〈10〉 Proposition.</u> $\xi$ を $k[x_2/x_1, x_3/x_1, x_4/x_1]$ の元とする。

i) 各 $(i,r)$ $(1\leqq i\leqq a,\ 0\leqq r<[\frac{i}{2}])$ に対して $Y_r$ の pre-normals $v, w$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$\begin{cases} \pi^1_\nu(v)=0\ ,\ \pi^1_\nu(w)=0 & (0\leqq\nu\leqq i-1) \\ \xi-\pi^1_i(v)\equiv 0 & (\mathrm{mod}\ (F^1_i, {}^{r+1}G^1_i, {}^{r+1}H^1_i)) \\ \pi^1_i(w)\equiv {}^{r+1}H^1_i & (\mathrm{mod}\ F^1_i) \text{ up to multiplication by } k^*. \end{cases}$$

ii) 各 $(i,r)$ $(1\leqq i\leqq a,\ 0\leqq r\leqq[\frac{i}{2}])$ に対して $Y_r$ の pre-normals $v', w'$ で次の条件を満たすものが存在する。

$$\begin{cases} \pi^1_\nu(v')=0\ ,\ \pi^1_\nu(w')=0 & (0\leqq\nu\leqq i-1) \\ \xi-\pi^1_i(v')\equiv 0 & (\mathrm{mod}\ (F^1_i, {}^{r}G^1_i, {}^{r}H^1_i)) \\ \pi^1_i(w')\equiv {}^{r}H^1_i & (\mathrm{mod}\ F^1_i) \text{ up to multiplication by } k^*. \end{cases}$$

Proof. 〈9〉を用いて $a$ の induction で示される。その課程で次の Lemma も用いられる。詳しくは [A-4] を見よ。 $\boxtimes$

〈11〉 Lemma. $s, t$ を $k$ 上の代数的独立元，$\gamma_i$ $(i \geq 1)$ を互いに異なる $k$ の元，$u_i = s - \gamma_i t$ $(i \geq 1)$ とする。$l, m$ を正の整数とし，各 $(p, q)$ $(0 \leq p \leq l, 0 \leq q \leq m)$ に対して $s, t$ の有次多項式 $h'_{p,q}$ で $\deg h'_{p,q} = q$, $u_i \nmid h'_{p,q}$ $(0 \leq \forall i \leq l)$ を満たすものが与えられているとする。

$$\begin{cases} h_p = \prod_{i=1}^{p} u_i & (0 \leq p \leq l) \\ E = k[s,t]/(h_l, h'_{0,m}) \end{cases}$$

とおいて $E$ を $k$ $(\subset k[s,t])$ vector space と考える。このとき

$$h_p \cdot h'_{p,q} \pmod{(h_l, h'_{0,m})} \qquad (0 \leq p \leq l-1, 0 \leq q \leq m-1)$$

は，$lm$ 次元 vector space $E$ の basis となる。

Proof. 簡単である。 $\boxtimes$

$q = r(a-r)+p$ $(0 \leq r < [\frac{a}{2}], 1 \leq p \leq a-2r-1)$ を $1$ と $\rho(a)$ との間にある整数としよう。勝手な $Y_r$ の pre-normal は，その転置ベクトルをとると $\mathrm{Ker}({}^{(q)}\Theta)$ の元を与え，これはまた $N_{X_0}|X_q = ({}^{(q)}Q_1 \oplus {}^{(q)}Q_2)$ のある global section に対応していることは先に述べたとおりである。$v$ を pre-normal，$(\sigma_1, \sigma_2)$ をこれに対応する $H^0(N_{X_0}|X_q)$ の元とする。局所的には

$$\sigma_1 = \pi^1_i(v)({}^0G^1_i)^* \quad (\mathrm{mod}\ H^0(\mathcal{I}_{U^1_i \cap X_q}))$$

であるから今まで述べたことにより ${}^{(q)}Q_1$ に関する次の結論が得られる。

〈12〉 Corollary. i) Complex

$$0 \longrightarrow H^0({}^{(q)}Q_1) \xrightarrow{\psi^1} H^0({}^{(0)}Q_1|X_q) \xrightarrow{w^1} H^0({}^{(q)}\hat{E}^1) \longrightarrow 0$$

は exact。

ii) 各 $i$ $(1 \leq i \leq a)$ に対し ${}^{(q)}Q_1$ の global section で $U^1_j$ $(j < i)$ 上では $0$ となり，しかも $P^1_i$ においては ${}^{(q)}Q_1 \otimes \mathcal{O}_{P^1_i} \cong k$ の生成元を与えるようなものが存在する。

iii) $H^1({}^{(q)}Q_1) = 0$。

Proof. iii) については i) の exact sequence のほかに

$$0 \longrightarrow {}^{(0)}Q_1 \otimes \mathcal{I}_{X_q/X_0} \longrightarrow {}^{(0)}Q_1 \longrightarrow {}^{(0)}Q_1 \otimes \mathcal{O}_{X_q} \longrightarrow 0$$

および次の Lemma を用いて証明する。 ☒

<u>⟨13⟩ Lemma.</u> $H^1(N_{X_0}) = 0$.

Proof. $H^1(N_{X_0}) \cong \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{P}^3}(\mathcal{I}_{X_0}, \mathcal{I}_{X_0})$ よりわかる。 ☒

$X_q$ の smoothability を ⟨7⟩ を用いて証明するには、さらに ${}^{(q)}Q_2$ についても考えねばならない。これは、しかし、すでに片づいている。というのは今まで行なった議論において、$\mathbb{P}^1_i$ と $\mathbb{P}^2_{a-i+1}$ の役割、$y_i$ と $z_{a-i+1}$ の役割、$V^1_i$ と $V^2_{a-i+1}$ の役割 $(1 \leqq i \leqq a)$ を交換すればよいから。従って ${}^{(q)}Q_2$ についても必要なことはいえている。すなわち

<u>⟨14⟩ Corollary.</u> i) Complex

$$0 \longrightarrow H^0({}^{(q)}Q_2) \xrightarrow{\psi^2} H^0({}^{(0)}Q_2|X_q) \xrightarrow{\omega^2} H^0({}^{(q)}\hat{E}_2) \longrightarrow 0$$

は exact.

ii) 各 $i$ $(1 \leqq i \leqq a)$ に対し ${}^{(q)}Q_2$ の global section で $V^2_j$ $(i<j)$ 上では $0$ となり、しかも $\mathbb{P}^2_i$ においては ${}^{(q)}Q_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_i} \cong t_i$ の生成元を与えるようなものが存在する。

iii) $H^1({}^{(q)}Q_2) = 0$. ☒

<u>⟨15⟩ Theorem.</u> 曲線 $X_q$ $(0 \leqq q < \rho(a))$ は $\mathbb{P}^3$ 内での flat deformation で smooth にできる。そのようにして得られた nonsingular irreducible curve の basic sequence は $(a; a^a; a^q)$ である。

Proof. $q=0$ のときはよく知られた事実である。Basic sequence については次のように考えればよい。$C_q$ を $X_q$ の small deformation で得られた smooth curve とする。$h^1(\mathcal{I}_{X_q}(a-2)) = q$, $h^1(\mathcal{I}_{X_q}(n)) = 0$ $(n \geqq a-1)$, $h^0(\mathcal{I}_{X_q}(n)) = 0$ $(n < a)$ であるから、upper-semicontinuity より $B(C_q) = (a; n_1, \cdots, n_a; a^{q'})$ $(a \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_a,\ 0 \leqq q' \leqq q)$ となっていることがわかる。ところで $h^0(\mathcal{I}_{C_q}(a)) = 1+a+q$ であるから $B(C_q) = (a; a^a; a^q)$ が導かれる。 ☒

（付記）．同様の方法により，basic sequence が $(a;a^a;(a+1)^b)$ となる曲線や $(a;a^{a'},(a+1)^{a-a'};(a+1)^b)$ となる曲線の構成もできる。

## —— References ——


[A-1] Amasaki, M., On the Structure of Arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}^3_k$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 793–837.

[A-2] Amasaki, M., Examples of Nonsingular Irreducible Curves Which Give Reducible Singular Points of red $(H_{d,g})$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 761–786.

[A-3] 尼崎睦実，$\mathbb{P}^3$の curve の basic sequence について，1986年9月の短期共同研究の報告集.（数研講究録）

[A-4] Amasaki, M., A Construction of Curves Having Neat Basic Sequences for Small $b$ (in preparation).

[BE] Ballico, E. and Ellia, Ph., The maximal rank conjecture for non-special curves in $\mathbb{P}^3$, Invent. math. 79, (1985) 541–555.

[HH] Hartshorne, R. and Hirschowitz, A., Smoothing Algebraic Space Curves, Algebraic Geometry Sitges 1983, Lecture Notes in Mathematics 1124, Springer-Verlag.

[H] Hirschowitz, A., Sur la postulation générique des courbes rationelles. Acta Math. 146, (1981) 209–230.

[S] Sernesi, E., On the existence of certain families of curves, Invent. math. 75, (1984) 25–57.

# The local cohomologies of an affine semigroup ring

Masa-Nori ISHIDA (Tohoku University)

## Introduction.

A commutative semigroup ring $k[S]$ over a field $k$ is said to be an *affine semigroup ring* if $k[S]$ is an integral domain of finite type over $k$. This is equivalent to the condition that $S$ is finitely generated and is contained in a free $\mathbb{Z}$-module $M$ of finite rank. An affine semigroup ring $k[S]$ has a natural structure of $M$-graded ring with respect to the free $\mathbb{Z}$-module $M$.

In this paper, we define the complex $I^{\cdot}(S)$ which represents in the derived category the dualizing complex of the affine semigroup ring $k[S]$. This complex $I^{\cdot}(S)$ consists of $M$-graded $k[S]$-modules $I^p(S)$ for $-\dim k[S] \leq p \leq 0$ with $M$-homogeneous coboundary homomorphisms of degree zero. Furthermore, each $I^p(S)$ behave as an injective $k[S]$-module for $M$-homogeneous homomorphisms of $M$-graded $k[S]$-modules. This complex is described in terms of the cone $\pi$ associated to $S$ in the dual vector space $N_{\mathbb{R}}$ of $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ similarly as in [I1].

When $k^*$ is the set of units in $k[S]$, the affine semigroup has the unique $M$-homogeneous maximal ideal $P(\pi)$. Then the local cohomologies $H^p_{P(\pi)}(k[S])$ are equal to the cohomologies of the complex $L^{\cdot}(S)$ defined as the "k-dual" of $I^{\cdot}(S)$. When $k[S]$ satisfies Serre's condition $(S_2)$, this description of the local cohomologies is equivalent to the topological description of them due to Trung and Hoa [TH] by the Alexander duality.

## §1. Affine semigroup rings and the associated cones.

Let $M$ be a free $\mathbb{Z}$-module of rank $r \geq 0$. For a field $k$ of an arbitrary characteristic, we denote by $k[M]$ the $k$-vector space

$$\bigoplus_{m \in M} ke(m)$$

with the free basis $\{e(m) ; m \in M\}$. $k[M]$ has the structure of commutative $k$-algebra by defineing $e(0) = 1$ and $e(m)e(m') = e(m+m')$ for $m, m' \in M$.

If we fix a basis $\{m_1, \ldots, m_r\}$ of $M$, then $k[M] = k[X_1, \ldots, X_r, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}]$ for $X_1 = e(m_1)$, $\ldots$, $X_r = e(m_r)$. In particular, $k[M]$ is an integral domain of dimension $r$.

Let $S$ be a finitely generated subsemigroup of $M$ with $0 \in S$. Then

$$k[S] := \bigoplus_{m \in S} ke(m)$$

is a $k$-subalgebra of $k[M]$. Let $\{m_1', \ldots, m_s'\} \subset S$ be a set of generators of the semigroup $S$, i.e., any element $m$ of $S$ is written as $m = a_1m_1' + \ldots + a_sm_s'$ for non-negative integers $a_1$, $\ldots$, $a_r$. Then the ring $k[S]$ is generated by $e(m_1')$, $\ldots$, $e(m_s')$ over $k$.

It is clear that the quotient field of $k[S]$ is equal to that of $k[M]$ if and only if $S$ generates $M$ as a group. In this paper, we assume $S$ satisfies this condition. This is not an essential restriction for the study of the semigroup ring $k[S]$, since we can replace $M$ by its subgroup generated by $S$.

By the above assumption, the closed convex cone $\mathbb{R}_0S$ spanned by $S$ in $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ is of dimension $r$. Let $N$ be the dual $\mathbb{Z}$-module of $M$. The natural pairing $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$ is extended to the nondegenerate bilinear map. $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ for $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. We denote by $\pi$ the dual cone $\{a \in N_{\mathbb{R}} ; \langle x, a\rangle \geq 0$ for every $x \in \mathbb{R}_0 S\}$. For the set $\{m_1', \ldots, m_s'\}$ of generators of $S$, $\pi$ is equal to $\{a \in N_{\mathbb{R}} ; \langle m_1', a\rangle, \ldots, \langle m_s', a\rangle \geq 0\}$. Since $\mathbb{R}_0 S$ is of maximal dimension by the assumption, $\pi$ is a strongly convex rational polyhedral cone. $\mathbb{R}_0 S$ is equal to the dual cone $\pi^{\vee}$ of $\pi$.

**Proposition** 1.1. The semigroup ring $k[M \cap \pi^{\vee}]$ is the normalization of $k[S]$ in its quotient field.

Proof. By our assumption, $k[M \cap \pi^{\vee}]$ is contained in the quotient field of $k[S]$. It is known that $k[M \cap \pi^{\vee}]$ is normal [TE, Chap.1, §1, Lemma 1]. Hence it is sufficient to show that $k[M \cap \pi^{\vee}]$ is integral over $k[S]$. Let $m$ be an element of $M \cap \pi^{\vee}$. By Carathéodory's theorem [Gr], $m$ is written as $a_1 m_1 + \ldots + a_r m_r$ for some linearly independent elements $m_1, \ldots, m_r$ of $S$ and real numbers $a_1, \ldots, a_r \geq 0$. Since $m$ is in $M$, $a_1, \ldots, a_r$ are rational numbers. Hence there exists a positive integer $d$ with $dm \in S$. This implies $e(m)^d = e(dm) \in k[S]$.

q. e. d.

We denote $\bar{S} = M \cap \pi^{\vee}$. The proof of the above proposition says that $\bar{S} = \{m \in M ; dm \in S$ for a positive integer $d\}$. Since $\bar{S}$ is also finitely generated [TE, Chap.1, §1, Lemma2], there exists a positive integer $\ell$ such that $\ell\bar{S} \subset S$.

We call a subset $E$ of $M$ *S-closed* if $E + S = E$. If $E$

is S-closed, then

$$k[E] := \bigoplus_{m \in E} ke(m)$$

is a $k[S]$-submodule of $k[M]$. A subset $E \subset M$ is said to be *weakly S-closed* if $(E + S) \setminus E$ is S-closed.

**Lemma** 1.2. A subset $E$ of $M$ is weakly S-closed if and only if $-E$ is weakly S-closed.

Proof. By definition, $E$ is not weakly S-closed if and only if there exist $m_0 \in E$ and $m_1, m_2 \in S$ such that $m_0, m_0 + m_1 + m_2 \in E$ and $m_0 + m_1 \notin E$. If we set $m_0' = -(m_0 + m_1 + m_2) \in -E$, then the second condition implies that $-E$ is not weakly S-closed. Actually, $m_0' + m_2 = -(m_0 + m_1) \notin -E$ and $m_0' + m_2 + m_1 = -m_0 \in -E$. The converse is proved similarly.

q. e. d.

Assume $E$ is weakly S-closed. Since $E + S$ is obviously S-closed, $k[E + S]$ and $k[(E + S) \setminus E]$ are $k[S]$-modules. We denote by $k[E]$ the quotient $k[S]$-module

$$k[E + S]/k[(E + S) \setminus E] .$$

For $m \in E$, we also denote by $e(m)$ its image in $k[E]$. Hence we write also

$$k[E] = \bigoplus_{m \in E} ke(m) ,$$

however this is not a $k[S]$-submodule of $k[M]$ in general.

We denote by $\Gamma(\pi)$ or simply $\Gamma$ the set of faces of $\pi$. The zero cone $\mathbf{0} = \{0\}$ and $\pi$ are elements of $\Gamma$. For each $\rho \in \Gamma$, $\pi^\vee \cap \rho^\perp$ is a face of $\pi^\vee$. Actually, $\{\pi^\vee \cap \rho^\perp ; \rho \in \Gamma\}$ is the set of faces of $\pi^\vee$, and $\dim \rho + \dim(\pi^\vee \cap \rho^\perp) = r$ for every $\rho \in \Gamma$ [MO, Proposition 3.1]. For a face $\sigma$ of $\pi$ or $\pi^\vee$, we denote by rel.int $\sigma$ and call it the *relative interior of* $\sigma$ the interior of $\sigma$ in the linear subspace of $N_{\mathbb{R}}$ or $M_{\mathbb{R}}$ generated by $\sigma$. We write $\operatorname{int} \pi^\vee := \operatorname{rel.int} \pi^\vee$ since $\dim \pi^\vee = r$.

For each $\rho \in \Gamma$, we set $S_\rho = S \cap \rho^\perp$. Then $S \setminus S_\rho$ is S-closed and $S_\rho$ is weakly S-closed. We denote by $P(\rho)$ the ideal $k[S \setminus S_\rho]$ of $k[S]$. We set also $\bar{S}_\rho = \bar{S} \cap \rho^\perp$ and $\bar{P}(\rho) = k[\bar{S} \setminus \bar{S}_\rho]$.

**Proposition** 1.3. $\{P(\rho)\ ;\ \rho \in \Gamma\}$ is the set of M-homogeneous prime ideals of $k[S]$.

Proof. It is known that this is true for the case $S = \bar{S}$, i.e., for the case of normal semigroup rings [MO, Remark in (5.3)]. In particular, $P(\rho) = \bar{P}(\rho) \cap k[S]$ is a prime ideal of $k[S]$ for every $\rho$. Conversely, let $E$ be a S-closed subset of $S$ such that $P = k[E]$ is a prime ideal. Then we have $P \cap k[\ell\bar{S}] = k[\ell(\bar{S} \setminus \bar{S}_\rho)]$ for an element $\rho \in \Gamma$ since $k[\ell\bar{S}]$ is a subring of $k[S]$ and is normal. This means $E \cap \ell\bar{S} = \ell\bar{S} \setminus \ell\bar{S}_\rho$. If $m \in S_\rho$, then $m \notin E$ since $m + (\ell-1)m = \ell m \notin E$ and $E$ is S-closed. If $m \in S \setminus S_\rho$, then $m \in E$, since $\ell m \in E$ and $k[E]$ is a prime ideal. Hence $E = S \setminus S_\rho$.

q. e. d.

For a nonempty subset $E$ of $S$, there exists the unique maximal element of $\rho \in \Gamma$ such that $E$ is contained in the face $\pi^\vee \cap \rho^\perp$ of $\pi^\vee$, i.e., $\pi^\vee \cap \rho^\perp$ is the minimal face of of $\pi^\vee$ which contains $E$. If furthermore $E$ is a subsemigroup of $S$, then we see easily that $E$ contains an element in rel.int$(\pi^{\vee} \cap \rho^{\perp})$ .

For a subsemigroup $U$ of $S$ , we denote by $[U]$ the subset $\{e(m) ; m \in U\}$ of $k[S]$ . Clearly, $[U]$ is a multiplicatively closed subset of $k[S]$ . It is easy to see that the localization $[U]^{-1}k[S]$ is equal to the semigroup ring $k[S - U]$ , where $S - U = \{m_1 - m_2 ; m_1 \in S , m_2 \in U\}$ .

**Lemma** 1.4. Let $U$ be a nonempty subsemigroup of $S$ . If $\rho$ is the maximal element of $\Gamma$ with $U \subset \pi^{\vee} \cap \rho^{\perp}$ , then $S - U$ is equal to $S - S_{\rho}$ .

Proof. Since $U \subset S_{\rho}$ , $S - U$ is contained in $S - S_{\rho}$ . Hence it is sufficient to show that $-S_{\rho} \subset S - U$ . Let $m$ be an element of $S_{\rho}$ . By the maximality of $\rho$ , $U$ contains an element $m_0$ in rel.int$(\pi^{\vee} \cap \rho^{\perp})$ . Hence, for a sufficiently large integer $d$ , we have $dm_0 \in m + \pi^{\vee} \cap \rho^{\perp}$ . Hence $\ell(dm_0 - m) \in \ell M \cap (\pi^{\vee} \cap \rho^{\perp}) = \ell\bar{S}_{\rho} \subset S_{\rho}$ . If we set $m_1 = \ell(dm_0 - m) \in S$ , then we have $-m = (m_1 + (\ell-1)m) - d\ell m_0$ which is an element of $S - U$ .

q. e. d.

For an ideal $A$ of $k[S]$ , we denote

$$T(A) := \{m \in S ; e(m) \in A\} .$$

**Lemma** 1.5. Let $P$ be a prime ideal of $k[S]$ . Then $k[T(P)]$ is the largest $M$-homogeneous prime ideal of $k[S]$ which is contained in $P$ .

Proof. Let $U = S \setminus T(P)$ . Since $P$ is a prime ideal, $U$ is a subsemigroup of $S$ . By Lemma 1.4, $S - U = S - S_{\rho}$ for the maximal $\rho \in \Gamma$ with $U \subset \rho^{\perp}$. Since $S_\rho - S_\rho \subset S - S_\rho$, every $e(m) \in [S_\rho]$ is a unit of $[U]^{-1}k[S]$. Hence $T(P) \cap S_\rho = \emptyset$ and $T(P) = S \setminus S_\rho$. $k[T(P)] = P(\rho)$ is largest, since $[S_\rho]$ is outside $P$.

q. e. d.

For an M-graded k[S]-modules $L = \oplus_{m \in M} L_m$ and $K$, we denote

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(L, K) = \bigoplus_{m \in M} \underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(L, K)_m$$

and

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(L, k) = \bigoplus_{m \in M} \mathrm{Hom}_k(L_m, k),$$

as in [GW] and [I1], where $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(L, K)_m$ is the k-module of M-homogeneous homomorphisms of degree $m$. These are k[S]-modules and $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(L, K)$ is isomorphic to the usual $\mathrm{Hom}_{k[S]}(L, K)$ if $L$ is finitely generated as a k[S]-module.

For a weakly S-closed subset $E$ of $M$, we see easily that $\underline{\mathrm{Hom}}_k(k[E], k)$ is equal to the k[S]-module $k[-E]$.

**Proposition** 1.6. Let $L$ be a finitely generated M-graded k[S]-module, and let $\rho$ be an element of $\Gamma$. Then we have

$$\mathrm{Ext}^p_{k[S]}(L, k[-(S - S_\rho)]) = 0 \quad \text{for} \quad p > 0 .$$

Proof. Let $\cdots \longrightarrow F^{-2} \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^0 \longrightarrow L \longrightarrow 0$ be a resolution of $L$ by M-graded free k[S]-modules of finite ranks with M-homogeneous coboundary homomoprhisms. Then we have

$$\mathrm{Hom}_{k[S]}(F^{\cdot}, k[-(S - S_\rho)])$$

$$= \underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(F^{\cdot}, k[-(S - S_\rho)])$$

$$= \underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(F^{\cdot}, \underline{\mathrm{Hom}}_k(k[S - S_\rho], k))$$

$$= \underline{\mathrm{Hom}}_k(F^{\cdot} \otimes_{k[S]} [S_\rho]^{-1}k[S], k) .$$

The proposition is proved since the functors $\otimes_{k[S]} [S_\rho]^{-1}k[S]$ and $\underline{\mathrm{Hom}}_k(\ \ , k)$ are exact.

q. e. d.

By replacing $S$ and $S_\rho$ by $\ell\bar{S}$ and $\ell\bar{S}_\rho$ , respectively, in the above proof, we have the following:

**Lemma 1.7.** Let $L$ be a finitely generated $M$-graded $k[\ell\bar{S}]$-module. Then, for each $\rho \in \Gamma$ , we have

$$\mathrm{Ext}^p_{k[\ell\bar{S}]}(L, k[-\ell(\bar{S} - \bar{S}_\rho)]) = 0 \quad \text{for} \quad p > 0 .$$

## §2. Complexes associated to an affine semigroup ring.

A subset $\Phi$ of $\Gamma = \Gamma(\pi)$ is said to be (1) *star closed* if $\sigma \in \Phi$ , $\tau \in \Gamma$ and $\sigma \prec \tau$ imply $\tau \in \Phi$ , (2) *star open* if $\tau \in \Phi$ , $\sigma \in \Gamma$ and $\sigma \prec \tau$ imply $\sigma \in \Phi$ and (3) *locally star closed* if $\sigma, \rho \in \Phi$ , $\tau \in \Gamma$ and $\sigma \prec \tau \prec \rho$ imply $\tau \in \Phi$ . By a *subcomplex of* $\Gamma$ , we mean a star open subset of $\Gamma$ .

We recall the definitions in [I2, §1] of the complexes $C^{\cdot}(\Phi, k_{1,0})$ and $C^{\cdot}(\Phi, k_{0,1})$ defined for a locally star closed subset $\Phi$ of $\Gamma$.

For each integer $p$, we set $\Gamma(p) = \{\rho \in \Gamma \,;\, \operatorname{codim} \rho = p\}$, where $\operatorname{codim} \rho = r - \dim \rho$. $\Gamma(p)$ is empty for $p > r$ or $p < \operatorname{codim} \pi$. For each $\rho \in \Gamma(p)$, we set $M[\rho] = M \cap \rho^{\perp}$ and $\mathbb{Z}(\rho) = \Lambda^{p} M[\rho]$. Since $M[\rho]$ is a free $\mathbb{Z}$-module of rank $p$, $\mathbb{Z}(\rho)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$.

For $\sigma \in \Gamma(p)$ and $\tau \in \Gamma(p-1)$ with $\sigma \prec \tau$, the isomorphism $q_{\sigma/\tau} : \mathbb{Z}(\sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}(\tau)$ is defined as follows. We choose an element $n_1 \in N$ so that $\langle m, n_1 \rangle = 0$ for every $m \in M[\tau]$ and $\langle m_0, n_1 \rangle = 1$ for some $m_0 \in M[\sigma] \cap \tau^{\vee}$. We define $q_{\sigma/\tau}(m_1 \wedge \ldots \wedge m_p) = \langle m_1, n_1 \rangle m_2 \wedge \ldots \wedge m_p$ if $m_1 \in M[\sigma]$ and $m_2, \ldots, m_p \in M[\tau]$.

For each $\sigma$ in $\Gamma$, we denote by $\mathbb{Z}(\sigma)^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\sigma), \mathbb{Z})$. For $\sigma \in \Gamma(p)$ and $\tau \in \Gamma(p-1)$ with $\sigma \prec \tau$, we set $q^{*}_{\tau/\sigma} = (-1)^{p}(q_{\sigma/\tau})^{*} : \mathbb{Z}(\tau)^{*} \longrightarrow \mathbb{Z}(\sigma)^{*}$.

Let $\Phi$ be a locally star closed subset of $\Gamma$. We set $\Phi(\rho) = \Phi \cap \Gamma(p)$ for each integer $p$. The complex $C^{\cdot}(\Phi, k_{1,0})$ is defined by

$$C^{p}(\Phi, k_{1,0}) = \bigoplus_{\rho \in \Phi(-p)} k(p) ,$$

where $k(\rho) = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(\rho)$. The coboundary homomorphism

$$d^{p} : C^{p}(\Phi, k_{1,0}) \longrightarrow C^{p+1}(\Phi, k_{0,1})$$

consists of $1_k \otimes q_{\sigma/\tau}$'s for all pairs of $\sigma \in \Phi(-p)$ and $\tau \in \Phi(-p-1)$ with $\sigma \prec \tau$. Similarly, the complex $C^{\cdot}(\Phi, k_{0,1})$ is defined by

$$C^{p}(\Phi, k_{0,1}) = \bigoplus_{\rho \in \Phi(p)} k(\rho)^{*} ,$$

where $k(\rho)^{*} = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(\rho)^{*}$. The coboundary homomorphisms are defined similarly by $1_k \otimes q^{*}_{\tau/\sigma}$'s.

For a complex $K^{\cdot}$ and a integer $d$, we denote by $K^{\cdot}[d]$ the co $C^\cdot(\Phi, k_{0,1}$ Now assume $\Phi$ is a nonempty subcomplex of $\Gamma$. In particular, $\Phi$ contains the zero cone $\mathbf{0}$. Let $H$ be the hyperplane $\{a \in N_{\mathbb{R}} ; \langle x_0, a\rangle = 1\}$ for a fixed element $x_0$ in $\operatorname{int} \pi^\vee$. Let $d = \dim \pi$. Then $P_\pi = \pi \cap H$ is a $(d-1)$-dimensional bounded convex polytope and $\{P_\rho = \rho \cap H ; \rho \in \Gamma \setminus \{\mathbf{0}\}\}$ is the set of faces of $P_\pi$. We define the *geometric realization* of $\Phi$ as the base space $|R(\Phi)|$ of the polyhedral complex

$$R(\Phi) = \{P_\rho \;\; ; \rho \in \Phi \setminus \{0\}\} .$$

**Proposition** 2.1. Let $\Phi$ be a nonempty subcomplex of $\Gamma$ and let $|R(\Phi)|$ be its geometric realization. For each integer $p$, we have isomorphisms

$$H^p(C^\cdot(\Phi, k_{1,0})) \simeq \tilde{H}^{r+p-1}(|R(\Phi)|, k) \quad \text{and}$$

$$H^p(C^\cdot(\Phi, k_{0,1})) \simeq \tilde{H}_{r-p-1}(|R(\Phi)|, k) ,$$

where the right hand sides are the reduced cohomologies and homologies of the topological space $|R(\Phi)|$.

Proof. Let $C^\cdot(\Phi, k_{1,0})[-r+1]$ and $C^\cdot(\Phi, k_{0,1})[r-1]$ be the complexes $C^\cdot(\Phi, k_{1,0})$ and $C^\cdot(\Phi, k_{0,1})$ with the degree shifts to the right and left, respectively, by $r - 1$. Since $\dim P_\rho = r - 1 - \operatorname{codim} \rho$ for every $\rho \in \Gamma \setminus \{\mathbf{0}\}$, we see that the cochain and chain complexes which give the reduced cohomologies and homologies of the polyhedral complex $R(\Phi)$ are equal to $C^\cdot(\Phi, k_{1,0})[-r+1]$ and $C.(\Phi, k_{0,1})[r-1]$, respectively, where the chain complex $C.(\Phi, k_{0,1})[r-1]$ is defined by $C_i(\Phi, k_{0,1})[r-1] = C^{-i}(\Phi, k_{0,1})[r-1]$ with the boundary maps equal to the corresponding coboundary maps of $C^{\cdot}(\Phi, k_{0,1})[r-1]$ . We get the proposition by taking the cohomologies and the homologies of these complexes.

q. e. d.

For the semigroup $S$ , we define the complexes $I^{\cdot}(S)$ and $L^{\cdot}(S)$ of M-graded $k[S]$-modules as follows:

For each integer $p$ , we set

$$I^{p}(S) = \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-p)} k[-(S - S_{\rho})] \otimes_{k} k(\rho)$$

and

$$L^{p}(S) = \bigoplus_{\rho\in\Gamma(p)} k[S - S_{\rho}] \otimes_{k} k(\rho)^{*} .$$

Here note that $S - S_{\rho}$ is S-closed and $-(S - S_{\rho})$ is weakly S-closed in $M$ . If $\sigma, \tau \in \Gamma$ and $\sigma \prec \tau$ , then $S - S_{\tau} \subset S - S_{\sigma}$ since $S_{\tau} \subset S_{\sigma}$ . Since $k[S - S_{\tau}] = [S_{\tau}]^{-1}k[S]$ and $k[S - S_{\sigma}] = [S_{\sigma}]^{-1}k[S]$ , there exists a natural inclusion $k[S - S_{\tau}] \longrightarrow k[S - S_{\sigma}]$ which we denote by $i^{*}_{\tau/\sigma}$ . We denote by $i_{\sigma/\tau}$ : $k[-(S - S_{\sigma})] \longrightarrow k[-(S - S_{\tau})]$ the dual surjection with respect to the functor $\underline{\mathrm{Hom}}_{k}(\ , k)$ . The component of the coboundary homomorphism $d^{p} : I^{p}(S) \longrightarrow I^{p+1}(S)$ with respect to the direct summands $k[-(S - S_{\sigma})] \otimes_{k} k(\sigma)$ and $k[-(S - S_{\tau})] \otimes_{k} k(\tau)$ for $\sigma \in \Gamma(-p)$ and $\tau \in \Gamma(-p-1)$ is zero map if $\sigma$ is not a face of $\tau$ and is $i_{\sigma/\tau}\otimes q_{\sigma/\tau}$ if $\sigma \prec \tau$ . Similarly, the coboundary homomorphism $d^{p} : L^{p}(S) \longrightarrow L^{p+1}(S)$ consists of $i^{*}_{\tau/\sigma} \otimes q^{*}_{\tau/\sigma}$'s for $\sigma \in \Gamma(p)$ and $\tau \in \Gamma(p-1)$ with $\sigma \prec \tau$ .

## §3. The dualizing complex and the local cohomologies.

Since $k[\bar{S}]$ is a normal semigroup ring, Spec $k[\bar{S}]$ is an affine torus embedding. It is known that $k[\bar{S}]$ is Cohen-Macaulay [Ho] and the canonical module $\omega_{k[\bar{S}]}$ of $k[\bar{S}]$ is equal to $k[\bar{S}\cap(\mathrm{int}\,\pi^{\vee})]\omega_0$, where $\omega_0$ is the r-form

$$\frac{de(m_1)}{e(m_1)}\wedge\cdots\wedge\frac{de(m_r)}{e(m_r)}$$

for a basis $\{m_1, \ldots, m_r\}$ of $M$ [TE, Chap.1, Th.14], [I2, §2]. We regard $\omega_{k[\bar{S}]}$ as an $M$-graded $k[\bar{S}]$-module with $\deg(\omega_0) = 0$.

We define an injective $k[\bar{S}]$-homomorphism

$$\lambda : \omega_{k[\bar{S}]} \longrightarrow I^{-r}(\bar{S}) = k[M] \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Lambda^r M$$

by $\lambda(f\omega_0) = f\otimes(m_1\wedge\cdots\wedge m_r)$. It is easy to see that $\lambda$ does not depend on the choice of the basis $\{m_1, \ldots, m_r\}$. The canonical module $\omega_{k[\bar{S}]}[r]$ with the degree shift to the left by $r$ as a complex represents the normalized dualizing complex of $k[\bar{S}]$ in the derived category $D_c^+(k[\bar{S}])$, where we say a dualizing complex is *normalized* if its localization at every maximal ideal is the normalized one in the sense of [RD, Chap.5, §6].

**Proposition** 3.1. The homomorphism of complexes

$$\omega_{k[\bar{S}]}[r] \longrightarrow I^{\cdot}(\bar{S})$$

induced by $\lambda$ is a quasi-isomorphism. In particular, $I^{\cdot}(\bar{S})$ also represents the normalized dualizing complex of $k[\bar{S}]$.

Proof. It is sufficient to show that $H^i(I^{\cdot}(\bar{S})) = 0$ for $i \neq -r$ and $\lambda$ induces an isomorphism $\omega_{k[\bar{S}]} \xrightarrow{\sim} H^{-r}(I^{\cdot}(\bar{S}))$.

Since each $I^i(\bar{S})$ and $\omega_{k[\bar{S}]}$ are $M$-graded modules and the coboundary maps in $I^{\cdot}(\bar{S})$ and the map $\lambda$ are M-homogeneous homomorphisms of degree zero, we can decompose the complex and $\lambda$ to the direct sum of M-homogeneous components associated to each degree in $M$. For each $m \in M$, $(\bar{S} - \bar{S}_\rho)$ contains $m$ if and only if $m \in \rho^\vee$ since $\bar{S} - \bar{S}_\rho = M \cap \rho^\vee$ by [O, Prop.1.3]. Hence the component $I^{\cdot}(\bar{S})_m$ is equal to $C^{\cdot}(\Gamma_{-m}, k_{1,0})$ where $\Gamma_x = \{\rho \in \Gamma ; \langle x, a\rangle \geq 0 , \forall a \in \rho\}$ for $x \in M_{\mathbb{R}}$.

Assume $m \notin M \cap (\mathrm{int}\ \pi^\vee)$. Then by [I1, Prop.2.3], $\Gamma_{-m}$ is homologically trivial. Hence $H^i(I^{\cdot}(\bar{S}))_m = 0$ for every $i$. Since $\omega_{k[\bar{S}]} = k[M \cap \mathrm{int}\ \pi^\vee]\omega_0$, the m-component of $\omega_{k[\bar{S}]}$ is also zero for $m \notin M \cap \mathrm{int}\ \pi^\vee$. Hence the assertion is true for this case.

When $m \in M \cap (\mathrm{int}\ \pi^\vee)$, we have $\Gamma_{-m} = \{0\}$ since $\langle m, a\rangle > 0$ for $a \in \pi \setminus \{0\}$. Hence $H^i(I^{\cdot}(\bar{S}))_m = 0$ for $i \neq -r$ is obvious for this case. On the other hand, the m-component of $\omega_{k[\bar{S}]}$ is $ke(m)\omega_0$. Since $\lambda$ is injective, we have $(\omega_{k[\bar{S}]})_m \xrightarrow{\sim} H^{-r}(I^{\cdot}(\bar{S}))_m$.

q. e. d.

**Theorem** 3.2. The complex $I^{\cdot}(S)$ represents the dualizing complex of the affine semigroup ring $k[S]$.

Proof. As in Section 1, we take a positive integer $\ell$ such that $\ell\bar{S}$ is contained in $S$. By Proposition 3.1, $I^{\cdot}(\ell\bar{S})$ represents the dualizing complex of the normal semigroup ring $k[\ell\bar{S}]$. Since $k[\bar{S}]$ is finite over $k[\ell\bar{S}]$, $k[S]$ is also a finite over ring of $k[\ell\bar{S}]$. Hence by [RD, Chap.3, §6], the dualizing complex of $k[S]$ is equal to

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{k[\ell\bar{S}]}(k[S],\ I^{\cdot}(\ell\bar{S})) .$$

Since $k[S]$ is a finitely generated M-graded $k[\bar{S}]$-module, we have $\mathrm{Ext}^p_{k[\ell\bar{S}]}(k[S], I^i(\ell\bar{S})) = 0$ for $p > 0$ and $i \in \mathbb{Z}$ by Lemma 1.7. Hence the dualizing complex is represented by the complex of $k[S]$-modules

$$\mathrm{Hom}_{k[\ell\bar{S}]}(k[S], I^{\cdot}(\ell\bar{S})) .$$

For each integer $i$, we have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{k[\ell\bar{S}]}(k[S], I^i(\ell\bar{S})) \\
&= \mathrm{Hom}_{k[\ell\bar{S}]}(k[S], \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-i)} k[-\ell(\bar{S} - \bar{S}_\rho)]) \\
&= \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-i)} \underline{\mathrm{Hom}}_k(k[S] \otimes_{k[\ell\bar{S}]} [\ell\bar{S}_\rho]^{-1}k[\ell\bar{S}], k) \\
&= \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-i)} \underline{\mathrm{Hom}}_k([\ell\bar{S}_\rho]^{-1}k[S], k) \\
&= \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-i)} \underline{\mathrm{Hom}}_k([k[S - S_\rho], k) \qquad \text{(by Lemma 1.4)} \\
&= \bigoplus_{\rho\in\Gamma(-i)} k[-(S - S_\rho)] = I^i(S) .
\end{aligned}$$

We see easily that the induced coboundary maps are equal to those of $I^{\cdot}(S)$ .

q. e. d.

If $\dim \pi = r$ , then $S_\pi = \{0\}$ and $P(\pi) = k[S \setminus \{0\}]$ is a maximal ideal of $k[S]$ .

In the rest of this section, we assume $\dim \pi = r$ . In this case, $k[-S]$ is the injective hull of the $k[S]$-module $k[S]/P(\pi)$ by [GW, Prop.3.1.3].

**Theorem** 3.3. The local cohomology $H^p_{P(\pi)}(k[S])$ is isomorphic to $H^p(L^{\cdot}(S))$ for every $p \in \mathbb{Z}$ .

Proof. By local duality [RD, Chap.5, Cor.6.3], we have

$$H^p_{P(\pi)}(k[S]) = \mathrm{Hom}_{k[S]}(H^{-p}(I^\cdot(S)),\ k[-S]) \ ,$$

since $I^\cdot(S)$ is a dualizing complex of $k[S]$ . Since $H^{-p}(I^\cdot(S))$ is a $k[S]$-module of finite type, this is isomorphic to $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(H^{-p}(I^\cdot(S)),\ k[-S])$ . Since $k[-S] = \underline{\mathrm{Hom}}_k(k[S],\ k)$ and the functor $\underline{\mathrm{Hom}}_k(\ ,\ k)$ is exact, we have

$$\begin{aligned} &\underline{\mathrm{Hom}}_{k[S]}(H^{-p}(I^\cdot(S)),\ k[-S]) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_k(H^{-p}(I^\cdot(S)),\ k) \\ &\simeq H^p(\underline{\mathrm{Hom}}_k(I^\cdot(S),\ k)) \simeq H^p(L^\cdot(S)) \ . \end{aligned}$$

q. e. d.

Since $L^\cdot(S)$ is a complex of $M$-graded modules and the coboundary maps are $M$-homogeneous of degree zero, we can consider the $M$-homogeneous composnent $L^\cdot(S)_m$ of $L^\cdot(S)$ for each $m \in M$ .

For each $m \in M$ , we set

$$\Gamma(S,\ m) = \{\rho \in \Gamma\ ;\ S \cap (m + S_\rho) \neq \emptyset\} \ .$$

Then the zero cone $\mathbf{0}$ is in $\Gamma(S,\ m)$ for every $m \in M$ , since $S - S = M$ . Since $\sigma \prec \tau$ implies $S_\tau \subset S_\sigma$ , $\Gamma(S,\ m)$ is a subcomplex of $\Gamma$ . Since $m \in S - S_\rho$ if and only if $\rho \in \Gamma(S,\ m)$ , the $M$-homogeneous component $L^\cdot(S)_m$ of $L^\cdot(S)$ is isomorphic to $C^\cdot(\Gamma(S,\ m),\ k_{0,1})$ .

By Proposition 2.1 and Theorem 3.3, the $m$-components of the local cohomologies $H^p_{P(\pi)}(k[S])$ are described by the reduced homologies of the geometric realization $|R(\Gamma(S,\ m))|$ as follows.

**Theorem** 3.4. $H^p_{P(\pi)}(k[S])_m = \tilde{H}_{r-p-1}(|R(\Gamma(S, m)|, k)$ for every $m \in M$.

## §4. On Serre's condition $(S_2)$.

Let $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ be the set of onedimensional faces of $\pi$. We denote $S_i = S_{\gamma_i}$ and $P_i = P(\gamma_i)$ for each $i = 1, \ldots, t$.

**Lemma** 4.1. The equality

$$S = \bigcap_{i=1}^{t} (S - S_i)$$

holds if and only if the ring $k[S]$ satisfies Serre's condition $(S_2)$ [EGA4, 5.7].

Proof. Since $k[S]$ is an integral domain, $k[S]$ satisfies $(S_2)$ if and only if

$$k[S] = \bigcap_{\mathrm{ht}\ P=1} k[S]_P$$

by [EGA4, Prop 5.10.14], where $P$ runs over all prime ideals of height one. Hence, it is sufficient to show that

(1) $$\bigcap_{\mathrm{ht}\ P=1} k[S]_P = \bigcap_{i=1}^{t} [S_i]^{-1}k[S] .$$

Let $P \subset k[S]$ be a prime ideal of height one. By Lemma 1.5, $k[T(P)]$ is a prime ideal contained in $P$. Hence $T(P) = \emptyset$ and $k[M] \subset k[S]_P$ if $P$ is not equal to one of $P_i$, since $P_1, \ldots, P_t$ are prime ideals of height one. Thus we see that the right hand side of (1) is contained in the left.

Since $k[\bar{S}]$ is normal and finite over $k[S]$, the left hand side of (1) is contained in $k[\bar{S}]$. The other inclusion of (1) holds since

$$k[S]_{P_i} \cap k[\bar{S}] = [S_i]^{-1}k[S]$$

for every $i$.

q. e. d.

For each element $\rho$ of $\Gamma$, we define

$$J(\rho) := \{i \ ; \ \gamma_i \prec \rho\} .$$

**Lemma** 4.2. If $k[S]$ satisfies $(S_2)$, then

$$S - S_\rho = \bigcap_{i \in J(\rho)} (S - S_i)$$

for every $\rho \in \Gamma$.

Proof. Since $k[S]$ satisfies $(S_2)$, so does the localization $[S_\rho]^{-1}k[S]$. We have $S - S_i = (S - S_\rho) - (S_i - S_\rho)$ for every $i \in J(\rho)$ since $S_\rho \subset S_i$. Since $\rho$ is the associated cone of the semigroup $S - S_\rho$, we have the equality in the lemma by applying Lemma 4.1 to the semigroup ring $k[S - S_\rho]$.

q. e. d.

We also define

$$I(m) := \{i \ ; \ m \in S - S_i\}$$

for each $m \in M$. By Lemma 4.2, we have the following:

**Proposition** 4.3. Assume $k[S]$ satisfies $(S_2)$. Let $m$ be an element of $M$. Then we have

$$\Gamma(S, m) = \{\rho \in \Gamma \ ; \ J(\rho) \subset I(m)\} .$$

Let $P_\pi$ be the $(r-1)$-dimensional convex polytope which appeared in Section 2. We denote by $v_i$ the intersection point of $P_\pi$ and $\gamma_i$. Then $\{v_1, \ldots, v_t\}$ is the set of vertices of $P_\pi$. For a subset $I$ of $\{1, \ldots, t\}$, we denote $V(I) := \{v_i \ ; \ i \in I\}$. For each element $m$ of $M$, Proposition 4.3 implies that the polyhedral complex $R(\Gamma(S, m))$ is equal to the set of the faces of $P_\pi$ with their vertices in $V(I(m))$.

Goto-watanabe [GW, Cor.3.3.7] and Trung-Hoa [TH, Th.3.3] defined a complex which gives the local cohomologies $H^p_{P(\pi)}(k[S])$ when $k[S]$ satisfies the condition $(S_2)$. By using this complex, Trung and Hoa proved the following:

**Theorem** 4.4 ([TH, Th.3.4]). Let $I(m)^c = \{1, \ldots, t\} \setminus I(m)$ and $\Delta(m)$ the simplicial complex

$$\{I \subset I(m)^c \ ; \ I \neq \emptyset \text{ and } V(I) \subset P_\rho \text{ for some } \rho \neq \pi\}$$

for each $m$ in $M$. If $k[S]$ satisfies $(S_2)$, then

$$H^p_{P(\pi)}(k[S])_m = \tilde{H}^{p-2}(\Delta(m), k) .$$

For each proper face $P_\rho$ of $P_\pi$, we denote by $\mathrm{Star}(P_\rho)$ the union of the relative interior of the proper faces of $P_\pi$ which containes $P_\rho$. Clearly, $\mathrm{Star}(P_\rho)$ is a contractable open subset of the boundary $\partial P_\pi$ if $\rho \neq \pi$. When $P_\rho = \{v_i\}$, we denote $U_i :=$

$\mathrm{Star}(P_\rho)$ . For a subset $I$ of $\{1, \ldots, t\}$ , we have $\bigcap_{i\in I} U_i =$ $\mathrm{Star}(P_\rho)$ , where $P_\rho$ is the minimal face of $P_\pi$ which contains $V(I)$ .

Let $U(m) := \bigcup_{i\in I(m)^c} U_i$ . Then we see easily that $U(m) = \partial P_\pi \setminus |R(\Gamma(S, m))|$ . The complex $C^{\cdot}(\{U_i ; i \in I(m)^c\}, k)$ associated to the covering of $U(m)$ is equal to the cochain complex $C^{\cdot}(\Delta(m), k)$ , since $\bigcap_{i\in I} U_i$ for $I \subset I(m)^c$ is not empty if and only if $I \in \Delta(m)$ . By the contractability of $\mathrm{Star}(P_\rho)$ , we have $H^p(\mathrm{Star}(P_\rho), k) = 0$ for $p > 0$ . Hence $H^p(\Delta(m), k)$ is isomorphic to the cohomology $H^p(U(m), k)$ of the open subset $U(m) \subset \partial P_\pi$ by [Go, Th.5.4.1]. It follows that the reduced cohomologies $\tilde{H}^p(\Delta(m), k)$ and $\tilde{H}^p(U(m), k)$ are also isomorphic for every $p \in \mathbb{Z}$ . Hence Theorem 4.4 is equivalent to

$$H^p_{P(\pi)}(k[S])_m \simeq \tilde{H}^{p-2}(U(m), k) .$$

Since $\partial P_\pi$ is homomeomorphic to the $(r-2)$-sphere and $U(m) = \partial P_\pi \setminus |R(\Gamma(S, m))|$ , this theorem is equivalent to our Theorem 3.4 by the Alexander duality Theorem.

## References.

[EGA4] A. Grothendieck and J. Dieudonné, Élément de géométrie algébrique, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 20, 24, 28, 32(1964-1967).

[Go] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Hermann, Paris(1958).

[Gr] B. Grünbaum, Comvex Polytopes, Interscience, New York, 1967.

[GW] S. Goto and K. Watanabe, On graded rings, II, Tokyo J. Math. 1(1978), 237-261.

[Ho] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. 96(1972), 318-337.

[I1] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. 32(1980), 111-146.

[I2] M.-N. Ishida, Torus embeddings and de Rham complexes, to appear in Commutative Algebra and Combinatorics, (M. Nagata ed.), Adv. studies in Pure Math. 11, Kinikuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987.

[MO] T. Oda, Lectures on torus embeddings and applications (Based on joint work with K. Miyake), Tata Inst. Fund. Res. 58, Bombay, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[O] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, to appear.

[TE] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[TH] N. V. Trung and L. T. Hoa, Affine semigroups and

Cohen-Macaylay rings generated by monomials, to appear in Trans. AMS.

Mathematical Institute
Tohoku University
Sendai, 980
Japan

# ROBERTS COMPLEXについて

橋本 光靖　　(京都大学・理)

## §0. 序

$k$を標数0の体として、$m \geqq n \geqq 1, t \geqq 1$ とするとき、アフィン空間 $M_{(m+t-1)\times(n+t-1)}(k)$ の subset として、rankがt未満の行列全体を考える。

これは、 $R = k[x_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n+t-1 \\ 1\leq j\leq m+t-1}}$ (polynomial ring)

とおくとき、coordinate ringが $T = R/I_t(X)$

の代数的集合となる。ここに、$I_t(X)$は、行列 $X = (x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n+t-1 \\ 1\leq j\leq m+t-1}}$

の $t\times t$ 小行列式全部で生成されるRのイデアルである。

TをR-moduleとみたときの、minimal free resolutionを具体的に構成することが、長い間問題として残されていた。P. Roberts は[1]で、Young対称子を使って、Tのmin. free resolutionの候補として、あるcomplexを構成した。ここでは、このcomplexのことをRoberts Complexとよぶことにする。

さて、EagonとHochsterは[2]で、$I_t(X)$がperfectで、高さが$mn$の素イデアルであることを示している。Roberts Complexは、

① 各成分はR上finite freeなcomplexで、
② 長さは $mn$　　(0でないtermが$mn+1$)
③ 0次のHomologyがTと一致する

ことが、[1]で示されている。しかし、このcomplexがacyclicかどうかは、残念ながら書かれていない。

Roberts Complexがacyclicかどうかが知られていることなのかは、私は知らない。ここでは Roberts Complexの定義と、特別なケース

については acyclic になることを紹介する。

尚、Tの minimal free resolution を構成するという問題自体は、Pragacz & Weyman [4] などによって解決されている。

Lascoux の [3] に書かれた 'resolution' は、容易に Roberts Complex と同形になることがわかる ([3]; (3.2) と théorème 3.3)。しかし、[4] の introduction で指摘されているように、彼の証明は不完全である。

## §1. Roberts Complex の定義

$R$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ を含む commutative ring とし、$m \geqq n \geqq 1$, $t \geqq 1$ とする。$F, G$ は $R$-free modules で、$rkF = m+t-1$, $rkG = n+t-1$ とする。$\Phi : F \longrightarrow G$ なる $R$-linear mapping を fix する。

$\lambda$ を partition of $r$ $(r \geqq 0)$ とするとき、Young tableau $\lambda^{\cdot}$ をひとつ fix して考える。

$C_{\lambda^{\cdot}}$, $R_{\lambda^{\cdot}}$ でそれぞれ $\lambda^{\cdot}$ の Column, Row stabilizer $\subset \mathfrak{S}_r$ を表す。

$$P_{\lambda^{\cdot}} \equiv \sum_{\sigma \in R_{\lambda^{\cdot}}} \sigma \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_r] \qquad Q_{\lambda^{\cdot}} \equiv \sum_{\sigma \in C_{\lambda^{\cdot}}} (-1)^{\sigma} \sigma \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_r]$$

$E_{\lambda^{\cdot}} \equiv P_{\lambda^{\cdot}} Q_{\lambda^{\cdot}}$ とおく。$\dim_{\mathbb{Q}} P_{\lambda^{\cdot}} \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_r] Q_{\lambda^{\cdot}} = 1$ となることが知られており、$\exists k_\lambda \in \mathbb{Q}^{\times}$ $E_{\lambda^{\cdot}}^2 = k_\lambda E_{\lambda^{\cdot}}$ となる。

従って、$e_{\lambda^{\cdot}} \equiv k_\lambda^{-1} E_{\lambda^{\cdot}}$, $\hat{e}_{\lambda^{\cdot}} \equiv k_\lambda^{-1} Q_{\lambda^{\cdot}} P_{\lambda^{\cdot}}$ とおくと、

$e_{\lambda^{\cdot}}$ と $\hat{e}_{\lambda^{\cdot}}$ がべき等であることがわかる。尚、$k_\lambda$ は $\lambda$ 上の Young tableaux の個数である。

$\lambda(m,n)$ によって、partition $(\overbrace{m, m, \cdots, m}^{n})$ の Young diagram の $i$ 行目に、$m(i-1)+1, m(i-1)+2, \cdots, mi$ なる numbers を入れた Young tableau を表す。

$\lambda \subset \lambda(m,n)$ につき、$\lambda_F$ は $(i,j)$ 成分が $\lambda(m,n)$ の $(m-j+1, n-i+1)$ 成分であるような shape $\tilde{\lambda}$ ($\lambda$ の transpose) の Young tableau とする。

$\lambda_G$ は $\lambda(m,n)-\lambda_F$ で定義する。

例　$m=4,\ n=3,\ \lambda=(3,2)$ のとき

$$\lambda(m,n)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline\end{array}\qquad \lambda_F=\begin{array}{|c|c|}\hline 12&8\\\hline 11&7\\\hline 10&\\\hline\end{array}\qquad \lambda_G=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&&\\\hline 9&&&\\\hline\end{array}$$

$\lambda(m,n)$ の $(i,j)$ 成分について $j-i=m-n$ のとき、$(i,j)$ 成分を diagonal という。（上の例では、12、7、2）

$\lambda(m,n)$ の各成分（square）に対して、$\lambda(m,n+t-1)$ の、one square または、$t$ squares を対応させる。方法は、
①下から順に、②diagonal でない $\lambda(m,n)$ の square には、one square を対応させる ③diagonal square of $\lambda(m,n)$ には、$\lambda(m,n+t-1)$ の $t$ 個の、縦に連続した squares を対応させる。

この対応によって、$\lambda_F$ の diagonal squares を縦にひきのばしたものを $\lambda_F(t)$ で、$\lambda(m,n+t-1)$ から、$\lambda_F(t)$ に現れる squares をとり除いたものを $\lambda_G(t)$ で、$\lambda(m,n+t-1)-\lambda_G(t)$ を $180^\circ$ 回転させたものを $\lambda_G{}^*(t)$ で表す。

例　上の例でさらに $t=3$ のとき、

$$\lambda(m,n+t-1)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 13&14&15&16\\\hline 17&18&19&20\\\hline\end{array}\qquad \lambda_F(t)=\begin{array}{|c|c|}\hline 12&8\\\hline 16&7\\\hline 20&11\\\hline 19&15\\\hline 18&\\\hline\end{array}$$

$$\lambda_G(t)=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&&\\\hline 9&10&&\\\hline 13&14&&\\\hline 17&&&\\\hline\end{array}\qquad \lambda_G{}^*(t)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 20&19&18\\\hline 16&15&\\\hline 12&11&\\\hline 8&7&\\\hline\end{array}$$

- $\lambda(m,n)$ の 4, 7, 10 にはそれぞれ $\lambda(m,n+t-1)$ の 4, $\begin{array}{|c|}\hline 7\\\hline 11\\\hline 15\\\hline\end{array}$, 18 が対応。
- diagonal に対応している部分は太ワクで囲ってある。
- $\lambda(m,n+t-1)$ の 1 と 5 に対応している $\lambda(m,n)$ の square はない。

Young tableau $\lambda'$ と、R-module $M$ について、$T^{\lambda'}M$ は、$\lambda'$ の成分によって index づけられた $M^{\otimes r}$ とする。($r$ は $\lambda$ の weight)
$T^{\lambda'}M$ には、$\mathfrak{S}_r$ が作用する。

$\sigma \in \mathfrak{S}_r$ と、$m_1, \cdots, m_r \in M$ につき、

$\sigma[m_1 \otimes \cdots \otimes m_r] = m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma^{-1}(r)}$ が、

$\mathfrak{S}_r$ の $T^{\lambda'}M$ への作用である。

以上の約束のもとで、Roberts Complex が定義できる。

<u>定義</u> $C_\lambda(\phi, t) \equiv e(\lambda_F(t)) T^{\lambda_F(t)} F \otimes e(\lambda_G(t)) T^{\lambda_G(t)} G$

$r \geqq 0$ につき、 $C_r(\phi, t) \equiv \bigoplus_{|\lambda| = r} C_\lambda(\phi, t)$

$\mu \subset \lambda$, $|\lambda/\mu| = 1$ に対して、$d'_{\mu\lambda}: C_\lambda(\phi, t) \longrightarrow C_\mu(\phi, t)$

は、

$$\begin{tikzcd}
C_\lambda(\phi,t) \arrow[r, hook, "\text{inclusion}"'] \arrow[drr, "d'_{\mu\lambda}"'] & T^{\lambda_F(t)}F \otimes T^{\lambda_G(t)}G \arrow[r, "\phi_*"'] & T^{\mu_F(t)}F \otimes T^{\mu_G(t)}G \arrow[d, "e(\mu_F(t)) \otimes e(\mu_G(t))"'] \\
 & & C_\mu(\phi,t)
\end{tikzcd}$$

によって def. する。 ($\phi_*$ は、$\phi$ と、$id_F$ と $id_G$ の適当な tensor product)

<u>定理</u> (Roberts[1]) すべての $\mu \subset \lambda$, $|\lambda/\mu| = 1$ なる組 $\mu, \lambda$ につき、ある $c_{\mu\lambda} \in \mathbb{Q}^\times$ を選ぶことにより、

$d_{\mu\lambda} = c_{\mu\lambda} d'_{\mu\lambda}$ とおくと、

$d: C_r(\phi, t) \xrightarrow{\bigoplus_{\mu,\lambda} d_{\mu\lambda}} C_{r-1}(\phi, t)$ によって、

$C_\cdot(\phi, t)$ は complex。 ($d \circ d = 0$)

この $C_\cdot(\phi, t)$ を Roberts Complex とよぶことにする。$C_\cdot(\phi, t)$ の boundary map は、上の定理の $\{c_{\mu\lambda}\}_{\mu,\lambda}$ の選び方に depend したものになっているが、実は、どのような選び方をとっても、$C_\cdot(\phi, t)$ は Complex の同型を除いて unique に決まってしまう。これは、次の lemma を使ってわかる。

補題 $C_\cdot, C'_\cdot$ が共に R-module の complex で、各 $r \geqq 0$ について、

$$C_r = \bigoplus_{|\lambda|=r} C_\lambda \qquad C'_r = \bigoplus_{|\lambda|=r} C'_\lambda$$ とする。さらに、

$d_r : C_r \longrightarrow C_{r-1}$ と $d'_r : C'_r \longrightarrow C'_{r-1}$ (boundary maps)

は、$d_r = \bigoplus_{\substack{\lambda,\mu \\ \lambda \supset \mu}} d_{\mu\lambda} \quad (d_{\mu\lambda} : C_\lambda \longrightarrow C_\mu)$

$d'_r = \bigoplus_{\substack{\lambda,\mu \\ \lambda \supset \mu}} d'_{\mu\lambda} \quad (d'_{\mu\lambda} : C'_\lambda \longrightarrow C'_\mu)$ と書けるとする。

さらに、$\forall \nu \subset \mu \subset \lambda \quad |\lambda/\mu| = |\mu/\nu| = 1$ につき、$d_{\nu\mu} \circ d_{\mu\lambda} \neq 0$ か、

$\forall \nu \subset \mu \subset \lambda \quad |\lambda/\mu| = |\mu/\nu| = 1$ につき、$d'_{\nu\mu} \circ d'_{\mu\lambda} \neq 0$ か、

どちらかが成立しているとする。このとき、$\{\varphi_\lambda\}$ なる map の family が与えられていて、

$\forall \lambda : \varphi_\lambda : C_\lambda \longrightarrow C'_\lambda$ は isomorphism で、

各 $\mu \subset \lambda$, $|\lambda/\mu| = 1$ なる $\lambda, \mu$ について $c_{\mu\lambda} \in \mathbb{Q}^\times$ があって、

$$d'_{\mu\lambda} \circ \varphi_\lambda = c_{\mu\lambda} \varphi_\lambda \circ d_{\mu\lambda}$$ だとすると、

$C_\cdot, C'_\cdot$ は Complex として同型である。——

証明は、$\nu \subset \lambda$, $|\lambda/\nu| = 2$ のとき、$\nu \subsetneqq \mu \subsetneqq \lambda$ なる $\mu$ は高々2個しかないことを用いれば、やさしい。

さて、$R = \mathbb{Q}[x_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n+t-1 \\ 1 \leq j \leq m+t-1}}$ で、$\phi : F \longrightarrow G$ を表す行列が $X = (x_{ij})$ (generic matrix) のとき、補題の条件 $d_{\nu\mu} \circ d_{\mu\lambda} \neq 0$ $(\forall \nu \subset \mu \subset \lambda)$ は満たされるのが、計算によって示される(これは省略)。そこで、この 'generic case'

に補題を適用して、$C_\cdot(\phi,t)$ の定義の一意性を得る。($R$が一般のときは ring extention するだけ)

## §2 Roberts Complex のいくつかの形

§1の補題を使うと、$C_\cdot(\phi,t)$と同形ないくつかのcomplexをつくることができる。

① $C'_\cdot(\phi,t)$ (coSchur version)

$$C'_\lambda(\phi,t) \equiv e^\wedge(\lambda_F(t))\, T^{\lambda_F(t)} F \otimes e(\lambda_G(t))\, T^{\lambda_G(t)} G$$

$$d''_{\mu\lambda} = \left[e^\wedge(\mu_F(t)) \otimes e(\mu_G(t))\right] \circ \phi_* \circ \text{inclusion}$$

とおくと、§1のRoberts[1]の定理とまったく同様のことが成立して、$C'_\cdot(\phi,t)$なるcomplexを構成することができる。

そして、$Q_{\lambda_F} \otimes id : C_\lambda(\phi,t) \longrightarrow C'_\lambda(\phi,t)$ を $\varphi_\lambda$ にして、§1の補題の条件がみたされるのが計算でわかる。つまり、$C_\cdot(\phi,t) \simeq C'_\cdot(\phi,t)$ である。

② $C'^*_\cdot(\phi,t)$, $C^*_\cdot(\phi,t)$ (dual type)

$$C'^*_\lambda(\phi,t) \equiv e^\wedge(\lambda_F(t))\, T^{\lambda_F(t)} F \otimes e^\wedge(\lambda_{G^*}(t))\, T^{\lambda_{G^*}(t)} G^*$$

とおいて、

$$\begin{tikzcd}
C'^*_\lambda(\phi,t) \arrow[r, hook, "\text{inc.}"'] \arrow[dddr, "d''^*_{\mu\lambda}"'] & T^{\lambda_F(t)} F \otimes T^{\lambda_{G^*}(t)} G^* \arrow[d, equal] \\
& T^{\mu_F(t)} F \otimes T^{\mu_{G^*}(t)} G^* \otimes (F \otimes G^*)^{(\otimes t)} \arrow[d, "\text{evaluation}"] \\
& T^{\mu_F(t)} F \otimes T^{\mu_{G^*}(t)} G^* \arrow[d, "e^\wedge(\mu_F(t)) \otimes e^\wedge(\mu_{G^*}(t))"] \\
& C'^*_\mu(\phi,t)
\end{tikzcd}$$

とすることにより、①と同じく、complex $C'^*_\cdot(\phi,t)$をつくることが出来る。やはりうまい $\varphi_\lambda : C'_\cdot(\phi,t) \xrightarrow{\simeq} C'^*_\cdot(\phi,t)$ があって、補題の条件

が、満足されるのだが、この$\varphi_\lambda$を構成するのには少し手間がかかるから略。

$C.^*(\Phi,t)$も、

$C^*_\lambda(\Phi,t)\equiv e(\lambda_F(t))T^{\lambda_F(t)}F\otimes e^\wedge(\lambda_{G^*}(t))T^{\lambda_{G^*}(t)}G^*$ で

つくられる。

これら2つも、$C.(\Phi,t)$と同形となる。

注意：$C.'^*(\Phi,t)$はLascoux [3] (3.2) の$\mathcal{K}$のJ=0の場合になっている。($\ell$はここでの$n$)

## §3 特別な場合のacyclicityなど

以下、$A\supset\mathbb{Q}$はcommutative ringで、$R=A[x_{ij}]$、$\Phi:F\to G$の行列は$X=(x_{ij})$の場合を考える。

$C.(\Phi,t)$について、比較的容易にわかることは、

(1) 各成分はfinite free R-module, 長さ$mn$

(2) $\forall r\quad d_r\otimes_R A=0$

(3) $H_0(C.(\Phi,t))\cong R/I_t(X)$

あと$C.(\Phi,t)$のacyclicityがわかれば、$C.(\Phi,t)$は$R/I_t(X)$のminimal free resolutionになるが……

### ① Eagon-Northcott case ($n=1$)

$n=1$ (つまり rank$G=t$)の場合の$T=R/I_t(X)$のminimal free resolutionは$A\not\supset\mathbb{Q}$のときも含めて、Eagon-Northcott [5]ではやくから作られていた。[6]の形で書くと、

$$(E\text{-}N):\ 0\to D_{m-1}G^*\otimes\wedge^tG^*\otimes\wedge^{m+t-1}F\to D_{m-2}G^*\otimes\wedge^tG^*\otimes\wedge^{m+t-2}F$$
$$\to\cdots\cdots\to D_1G^*\otimes\wedge^tG^*\otimes\wedge^{t+1}F\to\wedge^tG^*\otimes\wedge^tF\to R\to 0$$

なるcomplexである。$A\supset\mathbb{Q}$のときは、$DG^*=SG^*$ (Dはdivided power algebra, Sはsymmetric algebra)であることを思い出して、

計算すると、$C_\cdot^{*}(\phi,t)$ と $(E-N)$ が一致しているのがわかる。
従ってこの場合、$C_\cdot(\phi,t)$ は acyclic である。

② Koszul Complex case　$(t=1)$

$t=1$ の場合（$1\times 1$ minor は行列の成分そのもの！）の $T=R/I_t(X)$ の minimal free resolution は、$T=R/(x_{ij})=A$ だから、これは、Koszul Complex で：

$$(K):\ 0\to\Lambda^{mn}(F\otimes G^*)\to\Lambda^{mn-1}(F\otimes G^*)\to\cdots$$

$$\to F\otimes G^*\to R\to 0$$ と書かれる。

$A\supset\mathbb{Q}$ だから、$\Lambda^r(F\otimes G^*)$ は $Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)$ と思える。

ここに $\omega_r$ は、partition $(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{r})$ の Young diagram に、上から順に $1,2,\cdots,r$ と数字を入れていった Young tableau を表す。
boundary は、$Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)\xhookrightarrow{\text{inc.}}T^r(F\otimes G^*)=T^{r-1}(F\otimes G^*)\otimes F\otimes G^*\xrightarrow{ev}T^{r-1}(F\otimes G^*)$

の合成射である。
evaluation は、数字 $r$ に対応したところでとるものとする。ところで、$Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)$ は次のように直和分解する。

☆Cauchy Formula

$$Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)\xrightarrow{\ \simeq\ }\bigoplus_{|\lambda|=r}e^{\wedge}(\tilde{\lambda})T^{\tilde{\lambda}}F\otimes \hat{e}(\lambda)T^{\lambda}G^*$$
（$\tilde{\lambda}$ は、$\lambda$ の transpose）

同型射は、$Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)\xhookrightarrow{\text{inc.}}T^r(F\otimes G^*)\xrightarrow{\ \wr\ }T^rF\otimes T^rG^* = T^{\tilde{\lambda}}F\otimes T^{\lambda}G^*\xrightarrow{\hat{e}(\tilde{\lambda})\otimes\hat{e}(\lambda)}e^{\wedge}(\tilde{\lambda})T^{\tilde{\lambda}}F\otimes\hat{e}(\lambda)T^{\lambda}G^*$

の合成の直和で与えられる。逆対応は、

$$\forall\lambda:\ \hat{e}(\tilde{\lambda})T^{\tilde{\lambda}}F\otimes\hat{e}(\lambda)T^{\lambda}G^*\xhookrightarrow{\text{inc.}}T^{\tilde{\lambda}}F\otimes T^{\lambda}G^*=T^rF\otimes T^rG^*$$
$$\xrightarrow{\ \wr\ }T^r(F\otimes G^*)\xrightarrow{Q_{\omega_r}}Q_{\omega_r}T^r(F\otimes G^*)$$ の適当な有理数倍

の直和で与えられる。
この公式を§1の補題の代入にして. $C_{\cdot}^{*}(\phi, 1)$ と (K) の一致を示すことができる。
従ってこの場合にも $C_{\cdot}(\phi, t)$ は acyclic となる。

## □参考文献□


[1] P. Roberts, *A minimal free complex associated to the minors of a matrix*, preprint.

[2] M. Hochster and J. A. Eagon, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math. 93 (1971), 1020-1058.

[3] A. Lascoux, *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. in Math. 30 (1978), 202-237

[4] P. Pragacz and J. Weyman, *Complexes Associated with Trace and Evaluation. Another Approach to Lascoux's Resolution*, Adv. in math. 57 (1985), 163-207

[5] J. A. Eagon and D. Northcott, *Ideals defined by matrices and a certain complex associated to them*, Proc. Royal Soc. London Ser. A 269 (1962), 188-204

[6] D. A. Buchsbaum, *A new construction of the Eagon-Northcott complex*, Adv. in math. 34 (1979), 58-76

On seminormal local rings and multicross singularities

柳 原 弘 志・兵 庫 教 育 大 学

1．準正規局所環

E．D．Davis は論文［1］で、1次元被約局所環が準正規（seminormal）になる条件を次のように与えた。

定理　A が Krull 次元 1 の被約ネーター局所環で、e(A), emdim(A) をそれぞれ A の重複度、埋め込み次元とする。また G(A) を A の極大イデアル m に関する次数環(graded ring)とする。このとき、次は同値である。

(i)　A は準正規である。

(ii)　e(A) = emdim(A)　かつ　G(A) は被約である。

我々の第一の目的はこの結果を高い次元の場合に拡張することである。

定理 1．A が被約ネーター局所環で、m がその極大イデアルとする。$\overline{A}$ が A の全商環における整閉被とし、$\overline{A}$ は有限生成 A－加群でかつ正則環とする。更に、$\overline{A}$ の任意の極大イデアル n に対し、dim A = dim $\overline{A}_n$ が成り立ち、A の $\overline{A}$ における導手 $A:_A\overline{A}$ が m-準素イデアルとする。このとき次は同値である。

(i)　A は準正規である。

(ii)　e(A) × dim A = emdim(A) で、G(A) は被約である。

この定理の幾何学的解釈を与えるために次の準備をする。V が代数閉体 k 上の被約な代数的スキームで、A は V の閉点 P における V の局所環とする。A の極大イデアル m に対し、$T_P(V) = \mathrm{Hom}_k(m/m^2, k)$ とおき、A の P における Zariski 接空間とよぶ。また A の m に関する次数環 G(A) のスペクトル Spec(G(A)) を V の P における接錐とよぶ。$r = \dim_k m/m^2$ とするとき、T (V) は r 次元アッフィン空間と同一視され、Spec(G(A)) は自然に $T_P(V)$ の部分スキームと考えてもよい。G(A) が次数環であるから Proj(G(A)) が考えられるが、これを V の P における射影接錐とよぶ。また $\overline{A}$ が A の全商環における整閉被なら、$\overline{A}$ は準局所環で、その極大イデアルの個数が s のとき V の P における分枝

数とよぶ。更に A が準正規のとき、P は V の準正規点とよばれる。A の整閉被 $\overline{A}$ が正則環であるとき、V は P の近くで正則な正規化を持つという。

定理 2. V が代数閉体 k 上の等次元(equidimensional)代数スキームで、A が V の閉点 P の局所環であるとする。また、P は V の孤立特異点とする。このとき、P が V の準正規点でかつ V が P の近くで正則な正規化を持つ為の必要十分条件は次の (i), (ii), (iii) が成り立つことである。

(i) $e(A)$ は V の P における分枝数に等しい。

(ii) $\dim T_P(V) = e(A) \times \dim V$.

(iii) V の P における接錐 $\mathrm{Spec}(G(A))$ は被約である。

## 2. 一般化された重交差特異点

k, V, P, A, m, $\overline{A}$ 等は上と同じものとし、$n_1, \ldots, n_s$ を $\overline{A}$ の極大イデアルの全体とする。このとき

$$\phi_i : T_i = \mathrm{Hom}_k(n_i/n_i^2, k) \longrightarrow T_P(V)$$

なる線形写像が $m/m^2 \longrightarrow n_i/n_i^2$ の双対を考えることにより自然に定義される。この $\phi_i$ の像を $\overline{T}_i$ とおく。このとき、次の条件が満たされるなら、P は V の重複度 s の一般化された重交差特異点 ( s-fold generalized multicross singularity ) とよばれる。

(i) A の重複度 $e(A)$ は V の P における分枝数に等しい。

(ii) $i \neq j$ なら $\overline{T}_i \cap \overline{T}_j = \{0\}$ である。

定義から明らかなように、V が代数曲線ならこの概念は通常特異点 ( ordinary singularity ) と一致している。

次の定理は F. Orecchia の論文 [2] で代数曲線の場合に示されている結果の高い次元の場合への一般化である。

定理 3. V, P, A は上と同じものとする。更に V は等次元で、P は V の孤立特異点とする。このとき、P が V の重複度 s の一般化された重交差特異点であるための必要十分条件は次の (i), (ii) が成り立つことである。

(i) $s = e(A)$ が V の P における分枝数に等しい。

(ii) V の P における射影接錐 $\mathrm{Proj}(G(A))$ の連結成分の個数が s である。

最後にその近くで正則な正規化をもつ孤立準正規特異点が一般化された重交差特異点であることを示す次の定理を述べる。

定理 4. $V$, $P$, $T_P(V)$, $\overline{T_i}$ 等は上と同じとし、$V$ は等次元であるとする。このとき、次は同値である。

(i) $P$ は $V$ の重複度 $s$ の一般化された重交差特異点で次が成り立つ。

$$T_P(V) = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$$

(ii) $P$ は $V$ の孤立準正規特異点で、かつ $V$ は $P$ の近くで正則な正規化をもつ。

以上の結果の詳しい証明は論文[3]を参照されたい。

## 参考文献


[1] E.D.Davis, On the geometric interpretation of seminormality, Proc.Amer.Math.Soc.,68(1978), 1 - 5.

[2] F.Orecchia, Points in generic position and conductors of curves with ordimary singularities, J.London Math.Soc., 24(1981), 85 - 96.

[3] H.Yanagihara, On seminormal local rings and multicross singularities, to be submitted to J.Math.Soc.of Japan.

On $\Delta$-Genera and Sectional Genera of Commutative Rings

Akira Ooishi (Hiroshima University)

In algebraic geometry and (complex analytic) singularity theory, various "genera" are defined for algebraic varieties or singularities to classify them and to study their structure. So it is natural to consider the same problem in commutative ring theory. In [6], we introduced the notion of *genera* and *arithmetic genera* of commutative rings. Here we introduce two other genera, namely $\Delta$-*genera* and *sectional genera*, of commutative rings. The definition of these genera was inspired by the $\Delta$-genera and the sectional genera for polarized varieties introduced by T.Fujita [1], [2]. Since the case of local rings is treated in [8], here we discuss the problems for general polynomial functions and graded rings.

First, we recall some notations and terminologies from [6]. Let $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ be a *polynomial function*, i.e., there is a polynomial $P_f \in \mathbf{Q}[t]$ such that $f(n) = P_f(n)$ for all $n \gg 0$. We assume, for simplicity, that $f(n) = 0$ for all $n < 0$. Then there exist (uniquely determined) integers $d \geqq 0$ and $e_i$ $(0 \leqq i \leqq d)$, $e_0 \neq 0$ such that

$$(\nabla f)(n) := \sum_{i=0}^{n} f(i) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \dots + (-1)^d e_d,$$

for all $n \gg 0$. Put $d(f) = d$, $e_i(f) = e_i$, $e(f) = e_0$, $g(f) = e_d = (-1)^d P_{\nabla f}(-1)$ and $p_a(f) = (-1)^d(e_0 - e_1 + \dots + (-1)^d e_d - f(0)) = (-1)^d(P_{\nabla f}(0) - f(0))$. We call $d(f)$, $e_i(f)$, $e(f)$,

$g(f)$, $p_a(f)$ the *dimension*, the i-th *Hilbert coefficient*, the *multiplicity*, the *genus*, the *arithmetic genus* of $f$ respectively. Also we put $n(f) = \min\{n \mid f(m) = P_f(m)$ for all $m > n\}$ (the *postulation number* of $f$), $m(f) = n(f) + d(f)$ and $F_f(t) = \sum_{n\geqq 0} f(n)t^n$ (the *Hilbert series* of $f$). Note that $F_f(t) = \Phi_f(t)/(1-t)^d$, $d = d(f)$, for some $\Phi_f \in \mathbf{Z}[t]$ and we have $m(f) = \deg(\Phi_f)$ (cf. [6], Proposition 1.1).

Proposition 1. Put $d(f) = d$, $e_i(f) = e_i$ $(0 \leqq i \leqq d)$, $m(f) = m$ and $\Phi_f(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n$. Then

(1) $F_f(t) = e_0/(1-t)^d - e_1/(1-t)^{d-1} + \ldots + (-1)^{d-1}e_{d-1}/(1-t) + (-1)^d e_d + (1-t)Q(t)$ for some $Q \in \mathbf{Z}[t]$.

(2) $e_i(f) = \Phi_f^{(i)}(1)/i! = \sum_{i\leqq k\leqq m} a_k \binom{k}{i}$, where $\Phi_f^{(i)} = d^i\Phi_f/dt^i$. In particular, $e(f) = \Phi_f(1)$, $e_1(f) = \Phi_f'(1)$ and $e_i(f) = 0$ for all $i$, $m < i \leqq d$.

Proof. (1) Put $P_{\nabla f} = P$ and $Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\nabla f)(n) - P(n))t^n \in \mathbf{Z}[t]$. Then we have $F_f(t) = (1-t)F_{\nabla f}(t) = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} (\nabla f)(n)t^n = (1-t)\{\sum_{n=0}^{\infty} P(n)t^n + Q(t)\}$. Since $P(n) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i \binom{n+d-i}{d-i}$, we have $(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} P(n)t^n = (1-t)\sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-i}{d-i} t^n = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i/(1-t)^{d-i}$. This implies the assertion. (2) Since $\Phi_f(t) = (1-t)^d F_f(t) = e_0 - e_1(1-t) + \ldots + (-1)^d e_d(1-t)^d + (1-t)^{d+1}Q(t)$, the first equality is clear. The second equality follows from the equality $i!\Phi_f^{(i)}(t) = \sum_{i \leqq k \leqq m} a_k \binom{k}{i} t^{k-i}$, $0 \leqq i \leqq d$, which can be proved by the induction on $i$. Q.E.D.

For convenience, we put $e_i(f) = \Phi_f^{(i)}(1)/i!$ for all $i > d$. We say that $f$ is h-*positive* if all the coefficients of $\Phi_f$ are positive (i.e., $a_i > 0$ for all $i$, $0 \leqq i \leqq m(f)$).

Corollary 2. If $f$ is h-positive, then $e_i(f) > 0$ for all $i$, $0 \leqq i \leqq m(f)$.

Definition 3. We define the $\Delta$-*genus* $g_\Delta(f)$ and the *sectional genus* $g_s(f)$ of $f$ by

$$g_\Delta(f) = e_0(f) + (d(f) - 1)f(0) - f(1),$$

$$g_s(f) = e_1(f) - e_0(f) + f(0).$$

Note that if $d(f) \geqq 1$, then $g_\Delta(\Delta f) = g_\Delta(f)$ and $g_s(\Delta f) = g_s(f)$, where $(\Delta f)(n) = f(n) - f(n-1)$. If $d(f) = 1$, then $g_s(f) = p_a(f) = \sum_{n=1}^{n(f)} (e(f) - f(n))$.

Example 4. Let $M = \bigoplus_{n \geqq 0} M_n$ be a graded module over a ring $R$ and assume that $f(n) = H(M, n) := \ell_R(M_n)$ is a polynomial function. Then we write $e_i(M)$, $F(M, t)$, $\Phi_M(t)$, $n(M)$, $m(M)$, $g(M)$, $p_a(M)$, $g_\Delta(M)$, $g_s(M)$ instead of $e_i(f)$, $F_f(t)$, $\Phi_f(t)$, $n(f)$, $m(f)$, $g(f)$, $p_a(f)$, $g_\Delta(f)$, $g_s(f)$ respectively. If $f$ is h-positive, then we say that $M$ is h-positive.

(1) Let $A$ be a homogeneous algebra over an artinian local ring and $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ be a finitely generated graded $A$-module. If $a \in A_1$ is an $M$-regular element, then $\Phi_{M/aM}(t) = \Phi_M(t)$ and $g_s(M/aM) = g_s(M)$. If $M$ is Cohen-Macaulay, then $M$ is h-positive.

(2) Let $X$ be a projective variety and $D$ an ample Cartier divisor on $X$. Put $A = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$. Then $g_\Delta(A)$ and $g_s(A)$ coincide with the $\Delta$-genus $\Delta(X, D)$ and the sectional genus $g(X, D)$ of the polarized vatiety $(X, D)$ introduced by T.Fujita [1], [2].

(3) (Cf. [6], [8].) Let $(R, m)$ be a noetherian local ring and $I$ an $m$-primary ideal. Then we put $g(I) = g(G(I))$, $p_a(I) = p_a(G(I))$, $g_\Delta(I) = g_\Delta(G(I)) = e(I) + (\dim(R) - 1)\ell(R/I) - \ell(I/I^2)$ and $g_s(I) = g_s(G(I)) = e_1(I) - e(I) + \ell(R/I)$, where $G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$. If $R$ is analytically unramified, then we put $\bar{g}(I) = g(\bar{G}(I))$, $\bar{p}_a(I) = p_a(\bar{G}(I))$, $\bar{g}_\Delta(I) = g_\Delta(\bar{G}(I)) = e(I) + (\dim(R) - 1)\ell(R/\bar{I}) - \ell(\bar{I}/\overline{I^2})$, where $\bar{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n}/\overline{I^{n+1}}$ and $\bar{J}$ is the integral closure of $J$. Also we put $g(R) = g(m)$, $p_a(R) = p_a(m)$, $g_\Delta(R) = g_\Delta(m)$, $g_s(R) = g_s(m)$, etc. Hence $g_\Delta(R) = e(R) + \dim(R) - \mathrm{emb}(R) - 1$. If $x \in I$ is an $R$-regular superficial element with respect to $I$, then $e_i(I/xR) = e_i(I)$ $(0 \leq i < \dim(R))$ and $g_s(I/xR) = g_s(I)$.

(4) If $d(f) = 1$, then $f$ is h-positive if and only if $f(0) < f(1) < \ldots < f(m-1) < f(m)$ with $m = m(f)$. If $R = k[[t^5, t^8, t^{27}, t^{29}]]$, then $\Phi_{G(R)}(t) = 1 + 3t - t^2 + t^3 + t^4$. Hence $G(R)$ is not h-positive.

The following proposition follows easily from Proposition 1 and Definition 3.

Proposition 5. Put $m(f) = m$ and $\Phi_f(t) = \Phi(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n$. Then we have

$$g_\Delta(f) = a_2 + a_3 + \ldots + a_m = \Phi(1) - \Phi(0) - \Phi'(0),$$

$$g_s(f) = a_2 + 2a_3 + \ldots + (m-1)a_m = \Phi'(1) - \Phi(1) + \Phi(0),$$

and $g_s(f) - g_\Delta(f) = a_3 + 2a_4 + \ldots + (m-2)a_m$

$$= \Phi'(1) - 2\Phi(1) + 2\Phi(0) + \Phi'(0).$$

In particular, if $m(f) \leqq 1$ (resp. $m(f) \leqq 2$), then $g_s(f) = g_\Delta(f) = 0$ (resp. $g_s(f) = g_\Delta(f)$).

Corollary 6. Assume that $f$ is h-positive. Then

(1) $g_s(f) \geqq g_\Delta(f) \geqq 0$,

$$g_s(f) = 0 \iff g_\Delta(f) = 0 \iff m(f) \leqq 1,$$

and $g_s(f) = g_\Delta(f) \iff m(f) \leqq 2$.

Assume that $f(0) = 1$ and put $d(f) = d$, $f(1) = v$. Then

(2) $g_s(f) = 1 \iff g_\Delta(f) = 1 \iff \Phi_f(t) = 1 + (v-d)t + t^2$,

$$g_s(f) = 2 \iff g_\Delta(f) = m(f) = 2$$

$$\iff \Phi_f(t) = 1 + (v-d)t + 2t^2,$$

$g_s(f) = 3 \iff g_\Delta(f) = 2$, $m(f) = 3$ or $g_\Delta(f) = 3$, $m(f) = 2 \iff \Phi_f(t) = 1 + (v-d)t + t^2 + t^3$ or $\Phi_f(t) = 1 + (v-d)t + 3t^2$.

(3) $m(f) \leqq g_\Delta(f) + 1$. The equality holds if and only if $\Phi_f(t) = 1 + (v-d)t + t^2 + \ldots + t^m$, $m = m(f)$, and in this

case, we have $e_1(f) = (v - d) + m(m + 1)/2 - 1$, $e_i(f) = \binom{m+1}{i+1}$ $(2 \leqq i \leqq d)$ and $g_s(f) = \binom{m}{2}$.

Corollary 7. If $A$ is a Cohen-Macaulay homogeneous integral domain over a field with $g_s(A) = 1$, then $A$ is Gorenstein.

Example 8. (1) (Cf. [9].) Put $A = k[X, Y, Z, W]/(XZ, XW, YW)$ and $B = k[X, Y, Z, W]/(XYZ, XW, YW, ZW)$. Then $A$ is Cohen-Macaulay, $B$ is not Cohen-Macaulay and $F(A, t) = F(B, t) = (1 + 2t)/(1 - t)^2$. Hence $g = p_a = g_s = g_\Delta = 0$ for both $A$ and $B$.

(2) Let $A$ be an artinian homogeneous algebra over a field $k$. Then $g_s(A) = 0$ if and only if $A \cong k[X_1, \ldots, X_v]/(X_1, \ldots, X_v)^2$, $v = \mathrm{emb}(A)$. $g_s(A) = 1$ if and only if $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$, $A_2 = k$. Hence to give such an $A$ is equivalent to give a symmetric bilinear form on a finite dimensional $k$-vector space $V = A_1$. Therefore $A \cong k[X_1, \ldots, X_v]/((X_1, \ldots, X_v)^3, X_iX_j$ $(i \neq j)$, $X_i^2 - a_iX_r^2$ $(1 \leqq i < r)$, $X_j^2$ $(r < j \leqq v))$ with $a_i \in k$ and $r = \mathrm{emb}(A) - r(A) + 1$. $A$ is Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $A = k[X_1, \ldots, X_v]/((X_1, \ldots, X_v)^3, X_iX_j$ $(i \neq j)$, $X_1^2 - a_iX_v^2$ $(1 \leqq i < v))$. If $k$ is algebraically closed, then we may assume that $a_i = 1$.

Let $f$ be a polynomial function. Then $F_f(t) = F(A, t)$ for some homogeneous algebra $A$ over a field if and only if

$(f(0), f(1), \ldots)$ is an M-*vector* in the sense of Stanley [9], i.e., $f(0) = 1$ and $0 \leqq f(n+1) \leqq f(n)^{<n>}$ for all $n \geqq 1$ (for the notation $m^{<n>}$, see [9]). In this case if $1 \leqq f(n) \leqq n$ for some $n$, then $f(m+1) \leqq f(m)$ for all $m \geqq n$. (In fact, $m^{<n>} = m$ if $1 \leqq m \leqq n$.)

<u>Proposition</u> 9 (cf. [3], [6]). Let $A$ be a one-dimensional homogeneous algebra over a field $k$ which satisfies the following condition :

(*) $H(A, n) < e(A)$ for all $n \leqq n(A)$.

Then

(1) $m(A) \leqq e(A) - 1$, $m(A) \leqq p_a(A) + 1$,

$0 \leqq g\ (A) \leqq p_a(A) \leqq \binom{e(A) - 1}{2}$,

and $p_a(A) = g(A) - e(A) + 1 \leqq g(A)$.

(2) $g(A) = 0 \Leftrightarrow g(A) = p_a(A) \Leftrightarrow e(A) = 1 \Leftrightarrow m(A) = 0 \Leftrightarrow A \cong k[X]$.

(3) $g(A) = 1 \Leftrightarrow e(A) = 2 \Leftrightarrow A \cong k[X, Y]/(h)$ with $\deg(h) = 2$.

(4) $p_a(A) = 0 \Leftrightarrow g_\Delta(A) = 0 \Leftrightarrow m(A) \leqq 1$.

(5) $p_a(A) = 1 \Leftrightarrow g_\Delta(A) = 1$ and $A$ is h-positive $\Phi_A(t) = 1 + (v-1)t + t^2$, where $v = \mathrm{emb}(A)$.

(6) $p_a(A) = g_\Delta(A) \Leftrightarrow m(A) \leqq 2 \Leftrightarrow \Phi_A(t) = 1 + (v-1)t + g_\Delta(A)t^2$.

(7) $p_a(A) = \binom{e(A)-1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{emb}(A) \leqq 2$ (i.e., $A \cong k[X]$ or $A$ is a plane curve).

Proof. Put $f(n) = H(A, n)$, $e(A) = e$, $\mathrm{emb}(A) = v$, $m(A) = m$, $g(A) = g$, $p_a(A) = p_a$ and $g_\Delta(A) = g_\Delta$.

(1) If $m \geqq e$, then $f(e - 1) < e$ by the condition (*). Hence $e - 1 \geqq f(e - 1) \geqq f(n) = e$ for all $n \gg 0$, which is a contradiction. Therefore $m < e$. Clearly, $g_\Delta = e - f(1) \geqq 0$ and $p_a = \sum_{n=1}^{m-1} (e - f(n)) \geqq m - 1$. For all $n \gg 0$, we have $en - g = (\nabla f)(n - 1) = 1 + v + \sum_{i=2}^{n-1} f(i) \leqq 1 + v + (n - 2)e$ and $en - g = 1 + \sum_{i=1}^{e-2} f(i) + \sum_{i=e-1}^{n-1} f(i) \geqq 1 + \sum_{i=1}^{e-2} (i + 1) + (n - e + 1)e = en - e(e - 1)/2$ (note that if $i < e$, then $f(i) \geqq i + 1$). Hence $p_a - g = g - 2e + v + 1 > 0$ and $g \leqq \binom{e}{2}$, i.e., $p_a \leqq \binom{e-1}{2}$.

(2) $g = 0 \Longrightarrow g = p_a = 0 \Longrightarrow g = p_a \Longrightarrow e = 1 \Longrightarrow m = 0 \Longrightarrow v = 1 \Longrightarrow A \cong k[X] \Longrightarrow g = 0$.

(3) $g = 1 \Longrightarrow 1 = g \geqq e - 1 \geqq 1 \Longrightarrow e = 2 \Longrightarrow 1 \leqq g \leqq \binom{e}{2} = 1 \Longrightarrow g = 1$. $e = 2 \Longrightarrow m = 1$, $\Phi_f(t) = 1 + t \Longrightarrow A = k[X, Y]/(h)$ with $\deg(h) = 2 \Longrightarrow e = 2$.

(4) $p_a = 0 \Longrightarrow g_\Delta = 0 \Longrightarrow f(1) = e \Longrightarrow m \leqq 1 \Longrightarrow f(n) = e$ for all $n \geqq 1 \Longrightarrow p_a = 0$.

(6) Assume that $m \geqq 3$. Then $f(2) < e$ and $en - g = 1 + f(1) + f(2) + \sum_{i=3}^{n-1} f(i) < 1 + v + e + (n - 3)e$ for all $n \gg 0$. Therefore $p_a - g = g - 2e + v + 1 > 0$. Conversely, if $m \leqq 2$, then $p_a = \sum_{n=1}^{m-1} (e - f(n)) = e - v = g_\Delta$.

(5) $p_a = 1 \Longrightarrow 1 = p_a \geqq g_\Delta \geqq 1$ (by (1) and (4)) $\Longrightarrow p_a = g_\Delta = 1 \Longrightarrow \Phi_f(t) = 1 + (v - 1)t + t^2$ (by (6)) $\Longrightarrow g_\Delta = 1$ and $f$ is h-positive $\Longrightarrow m \leqq g_\Delta + 1 = 2$ (by Corollary 6) $\Longrightarrow p_a = g_\Delta = 1$ (by (6)).

(7) Assume that $v \geq 3$. Then, for all $n \gg 0$, we have $en - g \geq 1 + 3 + \sum_{i=2}^{e-2} f(i) + \sum_{i=e-1}^{n-1} f(i) \geq en - e(e-1)/2 + 1$ as in (1). Hence $p_a < \binom{e-1}{2}$. Conversely, assume that $v = 2$. Then for all $n < e$, we have $n + 1 \geq f(n) \geq n + 1$, i.e., $f(n) = n + 1$. Therefore $\Phi_f(t) = 1 + t + \ldots + t^{e-1}$ and it is easy to see that $A \cong k[X, Y]/(h)$ with $\deg(h) = e$. Q.E.D.

Remark. The condition (*) in Proposition 9 is satisfied if either $A$ is h-positive or $A \cong G(R)$ for a one-dimensional Cohen-Macaulay local ring.

Let $A$ be a homogeneous algebra over a field $k$. We say that $A$ is *numerically Cohen-Macaulay* (resp. *numerically Gorenstein*) if $F(A, t) = F(B, t)$ for some Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein) homogeneous $k$-algebra $B$. We say that $A$ is *numerically a complete intersection* of type $(b_1, \ldots, b_r)$, $b_i \geq 2$ if $\Phi_A(t) = \prod_{i=1}^{r} (1 + t + \ldots + t^{b_i - 1})$. Put $\Phi_A(t) = \sum_{i=0}^{m} a_n t^n$ with $m = m(A)$. Then $A$ is numerically Cohen-Mcaulay if and only if $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ is an M-vector. If $A$ is numerically Gorenstein, then $\Phi_A(t)$ is *symmetric*, i.e., $a_i = a_{m-i}$, $0 \leq i \leq m$ (or equivalently, $F(A, t^{-1}) = (-1)^d t^{-n(A)} F(A, t)$, $d = \dim(A)$) (cf. [9]). Note that $A$ is a hypersurface of degree $e \geq 2 \iff \Phi_A(t) = 1 + t + \ldots + t^{e-1} \iff A$ is numerically Cohen-Macaulay and $\mathrm{emb}(A) = \dim(A) + 1$.

Example 10. (1) Let $A$ be a hypersurface of degree $e$

with $\dim(A) = d$ and $\operatorname{emb}(A) = v$. Then $e_i(A) = \binom{e}{i+1}$, $g_\Delta(A) = e - 2$, $g_s(A) = \binom{e-1}{2}$, $g(A) = \binom{e}{v}$ and $p_a(A) = \binom{e-1}{v}$.

(2) Let $A$ be numerically a complete intersection of type $(b_1, \ldots, b_r)$. Then $e(A) = \prod_{i=1}^{r} b_i$, $m(A) = \sum_{i=1}^{r} b_i - r$ and $g_s(A) = e(A)(m(A) - 2)/2 + 1$.

<u>Proposition</u> 11. Let $A$ be a numerically Cohen-Macaulay homogeneous algebra over a field with $\dim(A) = d \geqq 1$. Then $g_s(A) \leqq \binom{e(A)-1}{2}$, and the equality holds if and only if $A$ is a hypersurface.

<u>Proof</u>. We may assume that $A$ is Cohen-Macaulay. Take an $A$-regular sequence $x_1, \ldots, x_{d-1}$ in $A_1$ assuming that the base field is an infinite field. Then applying Proposition 9 to $B = A/(x_1, \ldots, x_{d-1})$, we get the assertion. Q.E.D.

The following proposition can be proved easily by using Proposition 5 and Corollary 6. So we omit the routine proof.

<u>Proposition</u> 12. Let $A$ be a Gorenstein homogeneous algebra over a field which is not a polynomial ring, and put $\dim(A) = d \geqq 1$, $\operatorname{emb}(A) = v$, $e(A) = e$. Then

(0) $g_s(A) = 0 \iff g_\Delta(A) = 0 \iff A$ is a quadric hypersurface.

(1) $g_s(A) = 1 \iff g_\Delta(A) = 1 \iff g_s(A) = g_\Delta(A) \geqq 1$

$\Longleftrightarrow \Phi_A(t) = 1 + (v - d)t + t^2 \Longleftrightarrow$ reg(A) = 2.

(2) $g_s(A)$ is not equal to two.

(3) $g_s(A) = 3 \Longleftrightarrow g_\Delta(A) = 2 \Longleftrightarrow$ A is a quartic hypersurface.

(4) $g_s(A) = 4 \Longleftrightarrow g_\Delta(A) = 3$, $e(A) = 6 \Longleftrightarrow$ A ia a complete intersection of type (2, 3).

(5) $g_s(A) = 5 \Longleftrightarrow g_\Delta(A) = 4$, $e(A) = 8 \Longleftrightarrow$ A is numerically a complete intersection of type (2, 2, 2).

(6) $g_s(A) = 6 \Longleftrightarrow$ A is a quintic hypersurface or $\Phi_A(t) = 1 + 4t + 4t^2 + t^3$.

(7) $g_s(A) = 7 \Longleftrightarrow \Phi_A(t) = 1 + 5t + 5t^2 + t^3$.

(8) $g_s(A) = 8 \Longleftrightarrow \Phi_A(t) = 1 + 6t + 6t^2 + t^3$.

(9) $g_s(A) = 9 \Longleftrightarrow$ A is a complete intersection of type (2, 4) or $\Phi_A(t) = 1 + 7t + 7t^2 + t^3$.

(10) $g_s(A) = 10 \Longleftrightarrow$ A is a hypersurface of degree 6, a complete intersection of type (3, 3) or $\Phi_A(t) = 1 + 8t + 8t^2 + t^3$.

(1)' $g_s(A) = g_\Delta(A) + 1 \Longleftrightarrow$ reg(A) = 3 $\Longleftrightarrow v = e/2 + d - 1$

$g_s(A) = e/2 + 1 \Longleftrightarrow g_\Delta(A) = e/2 \Longleftrightarrow \Phi_A(t) = 1 + (v - d)t + (v - d)t^2 + t^3$.

(2)' $g_s(A) = g_\Delta(A) + 2$ does not hold.

(3)' $g_s(A) = g_\Delta(A) + 3 \Longleftrightarrow$ A is a quintic hypersurface.

(4)' $g_s(A) = g_\Delta(A) + 4 \Longleftrightarrow$ A is a complete intersection of type (2, 4) or (3, 3).

(Note that if A is a Cohen-Macaulay homogeneous algebra over a field, then $m(A) = \mathrm{reg}(A) := \min\{n \mid [H^i_P(A)]_j = 0$ if $i + j > n\}$, $P = A_+$ (cf. [4]).)

<u>Remark</u>. If $A$ is Gorenstein, then $g_\Delta(A) = 3$ if and only if $A$ is a quintic hypersurface or a complete intersection of type $(2, 3)$.

<u>Example</u> 13. (1) Let $C$ be a non-hyperelliptic smooth projective curve of genus $g \geqq 3$ and let $A = \bigoplus_{n\geqq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(nK))$ be its canonical ring. Then $A$ is a two-dimensional Gorenstein normal homogeneous domain with $\mathrm{reg}(A) = 3$, $\mathrm{emb}(A) = g$, $e(A) = 2g - 2$, $g_s(A) = g$ and $g_\Delta(A) = g - 1$.

(2) Put $R = k[[t^{2a}, t^{2a+1}, \ldots, t^{3a-1}]]$. Then $G(R)$ is a one-dimensional Gorenstein algebra with $\Phi_{G(R)}(t) = 1 + (a - 1)t + (a - 1)t^2 + t^3$, $\mathrm{reg}(G(R)) = 3$, $\mathrm{emb}(R) = a$, $e(R) = 2a$, $g_s(R) = a + 1$ and $g_\Delta(R) = a$.

(3) Put $R = k[[t^e, t^{e+1}, \ldots, t^{2e-r-1}]]$, $1 \leqq r \leqq (e - 1)/2$. Then $G(R)$ is a Cohen-Macaulay algebra with $\mathrm{reg}(G(R)) = 2$, $\Phi_{G(R)}(t) = 1 + (e - r - 1)t + rt^2$ and $\bar{g}_s(R) = g_s(R) = g_\Delta(R) = r$. $R$ is Gorenstein $\Leftrightarrow$ $G(R)$ is Gorenstein $\Leftrightarrow$ $r = 1$ (i.e., $R = k[[t^e, t^{e+1}, \ldots, t^{2e-2}]]$).

(4) Put $R = k[[t^{2a+1}, t^{2a+2}, \ldots, t^{3a}, t^{4a+1}]]$, $a \geqq 2$. Then $R$ is Gorenstein, $G(R)$ is Cohen-Macaulay and is not Gorenstein, $\mathrm{reg}(G(R)) = 3$, $\Phi_{G(R)}(t) = 1 + at + (a - 1)t^2 + t^3$, $\bar{g}_s(R) = g_s(R) = a + 1$, $g_\Delta(R) = a$.

## Appendix. Superficial elements in graded rings and local rings.

Let $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ be a homogeneous algebra and $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ a graded $A$-module.

Definition A.1. We say that $a \in A_1$ is a *superficial element on* $M$ (or an $M$-superficial element) if $(0 : a)_M \cap M_n = 0$ for all $n \gg 0$.

Proposition A.2. (1) Assume that $A$ is noetherian and $M$ is finitely generated. Then $a \in A_1$ is $M$-superficial if and only if the sequence $0 \to \tilde{M}(-1) \xrightarrow{a} \tilde{M} \to (M/aM)^{\sim} \to 0$ is exact on $\mathrm{Proj}(A)$.

(2) Assume that $H(M, n)$ is a polynomial function. Then $a \in A_1$ is $M$-superficial if and only if $H(M/aM, n)$ is a polynomial function and $P_{M/aM}(t) = P_M(t) - P_M(t - 1)$. In this case, if $d(M) \geq 1$, then $d(M/aM) = d(M) - 1$, $e_i(M/aM) = e_i(M)$ $(0 \leq i < d(M))$ and $g_s(M/aM) = g_s(M)$.

Proposition A.3. Assume that $A$ is noetherian, $M$ is finitely generated, $A_0 = R$ and $R/m$ is an infinite field for any $m \in \mathrm{Max}(R)$. If $V_i$ $(1 \leq i \leq r)$ is a proper $R$-submodule of $A_1$, then there exists an $M$-superficial element $a$ such that $a \notin V_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

Definition A.4. We say that $a_1, \ldots, a_r \in A_1$ is an $M$-superficial sequence if $a_{i+1}$ is $M/(a_1, \ldots, a_i)M$-superficial, $0 \leq i < r$.

Proposition A.5. Assume that $A$ is noetherian, $R = A_0$ is an artinian local ring and $M$ is finitely generated with $\dim(M) = d$. If $x_1, \ldots, x_d$ is an $M$-superficial sequence, then $B = R[x_1, \ldots, x_d]$ is a minimal $M$-reduction of $A$ in the sense of [5].

Definition A.6. Let $R$ be a noetherian local ring, $I$ an ideal of $R$ and $M$ a finitely generated $R$-module. Then we say that $a \in I$ is an $M$-*superficial element* with respect to $I$ if $a^* \in I/I^2$ is superficial on $G(I, M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M$.

Proposition A.7. $a \in I$ is $M$-superficial with respect to $I$

$\iff \exists c, \forall n > c, \quad I^n M = (I^{n+1} M : a)_M \cap I^c M$

$\iff \quad (0 : a)_M \cap I^n M = 0$ and $(I^{n+1} M : a)_M = (0 : a)_M + I^n M$

for all $n \gg 0$. If $a$ is $M$-regular, then these conditions are also equivalent to the condition $(I^{n+1} M : a)_M = I^n M$ for all $n \gg 0$.

Corollary A.8. (1) If $a \in I$ is $M$-superficial with respect to $I$, then $[G(I, M)/a^*G(I, M)]_n = [G(I, M/aM)]_n$ for all $n \gg 0$.

(2) $a_1, \ldots, a_r$ is an M-superficial sequence with respect to I $\overset{}{\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}}$ $a_1^*, \ldots, a_r^*$ is a G(I, M)-superficial sequence $\Longleftrightarrow$ $a_{i+1}$ is $M/(a_1, \ldots, a_i)M$-superficial with respect to I, $0 \leqq i < r$.

Proposition A.9. Assume that the residue field of R is infinite and M is a Cohen-Macaulay module with $\dim(M) = d \geqq 1$. If $\ell(M/IM) < \infty$, then there is an M-regular, M-superficial sequence $a_1, \ldots, a_d$ with respect to I such that $a_i \in I - m^2$. (In particular, if $S = R/(a_1, \ldots, a_{d-1})$, $N = M/(a_1, \ldots, a_{d-1})M$, $J = I/(a_1, \ldots, a_{d-1})$, then N is a Cohen-Macaulay S-module with $\dim(N) = 1$ and $e_i(I, M) = e_i(J, N)$ $(i = 0, 1)$, $g_s(I, M) = g_s(J, N) = p_a(J, N)$.

References


[1] T.Fujita, On the structure of polarized varieties with $\Delta$-genus zero, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 22 (1975), 103-115.

[2] T.Fujita, On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I, II, III, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709-725; 33 (1981), 415-434; 36 (1984), 75-89.

[3] D.Kirby, The reduction number of a one-dimensional local rings, J. London Math. Soc. 10 (1975), 471-481.

[4] A. Ooishi, Castelnuovo's regularity of graded rings and modules, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 627-644.

[5] A.Ooishi, Reductions of graded rings and pseudo-flat graded modules, unpublished manuscript (The main results are also announced in the Proceedings of the 7-th Symposium on Commutative Algebra 1985 (in Japanese)).

[6] A.Ooishi, Genera and arithmetic genera of commutative rings, to appear in Hiroshima Math. J.

[7] A.Ooishi, On the genera of commutative rings, to appear in the Proceedings of the 32nd Symposium on Algebra (in Japanese).

[8] A.Ooishi, Δ-genera and sectional genera of local rings, to appear in Lecture Notes ("Kôkyuroku") RIMS, Kyoto University.

[9] R.P.Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

(November 1986)

CANONICAL IDEALS OF COHEN-MACAULAY PARTIALLY ORDERED SETS *)

Takayuki Hibi

Department of Mathematics
Faculty of Science
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464, Japan

Summary. The concept of canonical ideals of Cohen-Macaulay posets (partially ordered sets) is presented. A fundamental problem is to classify all Cohen-Macaulay posets which possess canonical ideals. By way of a starting point of this classification problem, the distributive lattices with canonical ideals are classified.

序. 可換環論における ideal の概念は, 前世紀後半, 代数的数体の整数環が考察されるようになった時, 始めて Dedekind によって導入された.

集合 $S$ の部分集合全体 $\mathcal{P}(S)$ は, 包含関係で束(lattice)となる. 他方, $\mathcal{P}(S)$ に $A+B := (A-B)\cup(B-A)$, $A\cdot B := A\cap B$ で和と積の演算を定義すれば, $\mathcal{P}(S)$ は単位元を持つ可換環になる. 可換

*) This article is a survey of the paper [H] which was submitted to Nagoya Math. J. on the 15th December in 1986.

環 $\wp(S)$ の部分集合 $I$ が ideal となる条件は，(i) $A\in I$，$B\in\wp(S)$，$B\subset A$ ならば $B\in I$ 並びに (ii) $A, B\in I$ ならば $A\cup B\in I$ が満たされることである．

そこで，Stone [Sto] は，一般の束 $L$ において，部分集合 $I$ が $L$ の ideal であることを，(i) $a\in I$，$x\in L$，$x\leq a$ ならば $x\in I$ 並びに (ii) $a, b\in I$ ならば $a\vee b\in I$ が満たされる時と定義した．更に，Frink [Fri] は Stone の定義を半順序集合 (partially ordered set ; poset) に拡張した．

ここでは，Stone の定義の (ii) の条件は忘れて，半順序集合 $Q$ の部分集合 $I$ が，「$\alpha\in I$，$\beta\in Q$，$\beta\leq\alpha$ ならば $\beta\in I$」を満たす時，$I$ を $Q$ の (poset) ideal と呼ぶことにする．

## The What of canonical ideals

本講では，有限な半順序集合のみを考察の対象とする．全順序集合 (totally ordered set , chain) $X$ の長さ (length) を $\#(X)-1$ で定義する．半順序集合 $Q$ の階数 (rank) $\mathrm{rank}(Q)$ は，$Q$ に含まれる全順序集合の長さの最大を意味する．$Q$ に含まれる包含関係で極大な全順序集合の長さがすべて $\mathrm{rank}(Q)$ に等しい時，$Q$ を純 (pure) と呼ぶ．また，$\alpha\in Q$ の時 $\alpha$ の高さ $\mathrm{height}_Q(\alpha)$ (resp. 深さ $\mathrm{depth}_Q(\alpha)$) を，$\alpha$ から降る (resp. 昇る) 全順序集合の長さの最大と定義する．また，$\hat{Q} := Q\cup\{\hat{0}, \hat{1}\}$，$\hat{0} < x < \hat{1}$ ($\forall x\in Q$) と置く．

半順序集合 $Q$ 上の重さ (weight) とは，$Q$ から $\mathbb{N}-\{0\}$ への写像 $\omega$ のことであり，$Q$ と $\omega$ の組 $(Q, \omega)$ を加重半順序集合 (weighted poset) と呼ぶ (cf. [Wat])．$\alpha\in Q$ の時，$\omega(\alpha)$ を $\alpha$ の重さと呼び，また，$\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_p$ が $Q$ の重複全順序集合 (

multichain）の時，$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_p$ の重さを $\sum_{i=1}^{p}\omega(\alpha_i)$ で定義する．$n>0$ の時，$c_n = c_n(Q,\omega)$ で重さ $n$ の重複全順序集合の個数を表し，また，$c_0=1$ とする．そして，数列 $\{c_n\}_{n\geqq 0}$ の母関数

$$P_{(Q,\omega)}(\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \theta^n \in \mathbb{Z}[[\theta]]$$

を $(Q,\omega)$ の Poincaré級数と呼ぶ．この時，$P_{(Q,\omega)}(\theta)$ は $\theta$ の有理関数となる．他方，$I$ が $Q$ の poset ideal の時，重複全順序集合 $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_p$ が $I$ に属するとは，$\alpha_i \in I$ $({}^{\exists}i)$ である時を言う．そして，$c_n^I = c_n^I(Q,\omega)$ で $I$ に属する重さ $n$ の重複全順序集合の個数を表し，

$$P^I_{(Q,\omega)}(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n^I \theta^n$$

と定義する．

さて，$k$ を体とする時，半順序集合 $Q$ の $k$ 上の Stanley-Reisner 環とは

$$k[Q] := k[X_\alpha ; \alpha\in Q]/(X_\alpha X_\beta ; \alpha \nsim \beta)$$

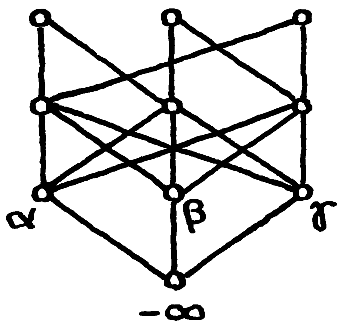
であった．ここで，$\alpha \nsim \beta$ は，$\alpha, \beta \in Q$ が $Q$ の順序で比較不可能なことを表す．そして，$Q$ が $k$ 上 Cohen-Macaulay であるとは，$k[Q]$ が Cohen-Macaulay 環である時を言うのであった．

定義([H])．$Q$ を最小元 $-\infty$ を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合，$\mathrm{rank}(Q) = d-1$ とし，$\omega$ は $Q$ 上の重さとする．この時，$Q$ の poset ideal $I\ (\neq \emptyset)$ が加重半順序集合 $(Q,\omega)$ の "canonical ideal" であるとは，次の条件が満たされる時を言う：

$$\text{(CI-1)} \quad P_{(Q,\omega)}(\theta^{-1}) = (-1)^d \theta^\lambda P^I_{(Q,\omega)}(\theta) \quad ({}^{\exists}\lambda \in \mathbb{Z})$$

(CI-2)　Q の部分半順序集合 Q−I は Cohen-Macaulay で，rank(Q−I) = d−2 である．

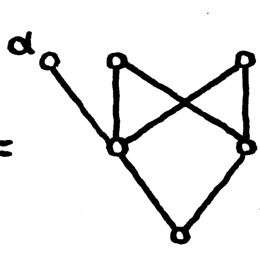
例えば，次の Cohen-Macaulay 半順序集合

$Q =$ 

において，$\omega(x) = 1$　($\forall x \in Q$)　なる重さを考え，$I_\alpha = \{-\infty, \alpha\}$　とすると，

$$P_{(Q,\omega)}(\theta) = \frac{1+6\theta+9\theta^2+2\theta^3}{(1-\theta)^4},\quad P^{I_\alpha}_{(Q,\omega)}(\theta) = \frac{2\theta+9\theta^2+6\theta^3+\theta^4}{(1-\theta)^4}$$

となるから，$I_\alpha$ は $(Q,\omega)$ の canonical ideal となる．もちろん，対称性より，$I_\beta = \{-\infty, \beta\}$ および $I_\gamma = \{-\infty, \gamma\}$ も $(Q,\omega)$ の canonical ideal だから，canonical ideal は存在しても一意的とは限らない．他方，

$Q =$ 

上の重さ $\omega$ を　$\omega(x)=1$ if $x\neq\alpha$, $\omega(\alpha)=n$（$>0$）で定義すると、

$$P_{(Q,\omega)}(\theta)=\frac{(1+\theta)^2(1+\theta+\theta^2+\cdots+\theta^{n-1})+\theta^n}{(1-\theta)^2(1-\theta^n)}$$

となり、$(Q,\omega)$ が canonical ideal を持つのは、$n=1$ の時かつその時に限る。

ところで、Cohen-Macaulay 半順序集合の canonical ideal は、存在すれば"何らかの意味で"一意的であることが望ましい。例えば、$I$, $J$ が $(Q,\omega)$ の canonical ideal ならば、重さを保つ $Q$ の自己同型写像 $\sigma$ が存在して $I^\sigma=J$ となっているということは如何であろうか。

## The Why of canonical ideals

$k$ を体、$R$ を $k$-algebra とし、$Q$ は $R$ に含まれる半順序集合とする。$R$ における $Q$ の元の積 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p$ を monomial と呼び、$\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\leqq\alpha_p$ の時、$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p$ は standard であると言う。この時、$R$ が algebra with straightening laws（略して ASL）on $Q$ over $k$ であるとは、次の条件が満たされる時を言う：

(ASL-1)　standard monomial 全体の集合は $R$ の $k$ 上の vector 空間としての基底を成す。

(ASL-2)　$\alpha\nsim\beta$ の時、$\alpha\beta$ は standard ではないから、(ASL-1) によって、

$$\alpha\beta=\sum_i r_i\gamma_{i1}\gamma_{i2}\cdots\gamma_{ip_i},$$

但し、$0\neq r_i\in k$, $\gamma_{i1}\leqq\gamma_{i2}\leqq\cdots$, と相異

なる standard monomial の一次結合として一意的に書けるが，この時，$\gamma_{i1} \leqq \alpha, \beta$ $(\forall i)$ が成立する．

さて，$R$ を ASL on $Q$ over $k$，$\omega$ を $Q$ 上の重さとする時，$R$ が ASL on $(Q, \omega)$ over $k$ であるとは，$R$ が次数付環 $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$，$R_0 = k$，の構造を持ち，更に $\alpha \in R_{\omega(\alpha)}$ $(\forall \alpha \in Q)$ が満たされる時を言う．

ASL の理論の基本定理は，$Q$ が Cohen-Macaulay ならば，$Q$ 上の任意の重さ $\omega$ に対して，$(Q, \omega)$ 上の ASL は常に Cohen-Macaulay であることを保証している．他方，$I$ が $Q$ の poset ideal で $R$ が $Q$ 上の ASL ならば，$R/I \cdot R$ は $Q - I$ 上の ASL となる．そして，我々が Cohen-Macaulay 半順序集合の canonical ideal を定義した背景は

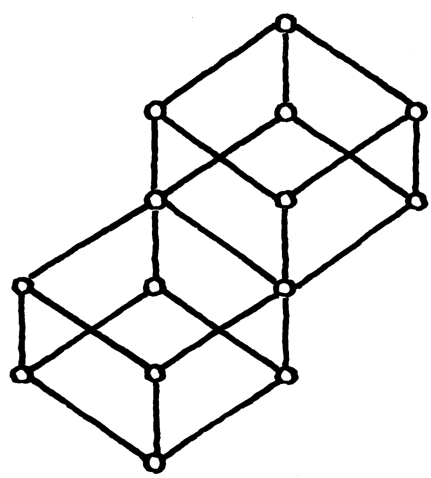
命題．$Q$ を最小元 $-\infty$ を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合，$\omega$ を $Q$ 上の重さとし，$R$ は $(Q, \omega)$ 上の ASL 整域とする．この時，$I$ が $(Q, \omega)$ の canonical ideal ならば，$R$ の canonical module $K_R$ は，$R$ の ideal $I \cdot R$ と，次数の違いを無視して，次数付 $R$ − 加群として，同型である．

にあり，それは，Cohen-Macaulay 次数付整域においては，canonical module は数値的条件，即ち，Poincaré 級数の振舞によって支配できるという [Sta] の思想の影響を深く受けている．

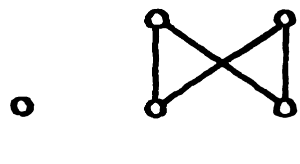
## The Where of canonical ideals

我々の目標は canonical ideal を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合を分類することである．

L を束とする時，$\alpha \in L$ が join-irreducible であるとは，$\alpha = \beta \vee \gamma$ ならば $\alpha = \beta$ または $\alpha = \gamma$ が成立する時を言う．一般に，半順序集合 $P$ が与えられた時，$P$ の poset ideal 全体が包含関係で作る束 $\mathcal{J}(P)$ は分配束（distributive lattice）となる．逆に，Birkhoff の構造定理は，任意の分配束 $D$ に対して，$D = \mathcal{J}(P)$ となる半順序集合 $P$ が一意的に存在することを主張する．そして $P$ としては，$D$ の join-irreducible な元全体の作る部分半順序集合が取れる．例えば，

$D =$ 

ならば，

$P =$ 

である．

さて，canonical ideal を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合の分類問題の出発点となる我々の結果は，

定理([H]). 分配束 $D=\mathcal{J}(P)$ 上の重さ $\omega$ が

$$\omega(\alpha)+\omega(\beta)=\omega(\alpha\wedge\beta)+\omega(\alpha\vee\beta)$$

を満たすと仮定すると、Cohen-Macaulay加重半順序集合 $(D,\omega)$ が canonical ideal を持つ為には、次の条件が満たされることが必要十分である:

i) $\forall\alpha\in P$ に対して、$P^\wedge$ の区間

$$[\alpha,\hat{1})=\{x\in P^\wedge;\ \alpha\leqq x<\hat{1}\}$$

は pure である.

ii) $\beta\in P$ が $P$ の極小元の時,

$$\mathrm{rank}(P^\wedge)-\mathrm{depth}_{P^\wedge}(\beta)\leqq 2$$

である.

更に、この時,

$$I=\left\{x\in D\ ;\ \begin{array}{l}\mathrm{rank}(P^\wedge)-\mathrm{depth}_{P^\wedge}(\beta)=1\text{ と}\\ \text{なる}\ \forall\beta\in P\text{ に対して }x\not\ni\beta\end{array}\right\}$$

が $(D,\omega)$ の canonical ideal であり、また、$(D,\omega)$ の canonical ideal は存在すれば一意的である.

# 参 考 文 献


[Fri] O.Frink, Ideals in partially ordered sets, Amer. Math. Monthly 61 (1954), 223-234.

[H] T.Hibi, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, submitted.

[Sta] R.Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. 28 (1978), 57-83.

[Sto] M.H.Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111.

[Wat] K.-i.Watanabe, Study of algebras with straightening laws of dimension 2, Algebraic and Topological Theories —— to the memory of Dr. Takehiko Miyata (M.Nagata et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, 1985, 621-639.

Stanley-Reisner ringのminimal free resolutionについて

宮崎　充弘　　京大　理　D2

a）Vを有限集合とし，Vの部分集合から成る集合 $\Delta \neq \phi$ が次の条件をみたすとする。

$$\sigma \in \Delta,\ \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$$

（通常はこれに

$$x \in V \Rightarrow \{x\} \in \Delta$$

という条件をつけるが、ここでは必ずしも要求しないことにする。）

このとき $\Delta$ を，Vをvertex setとするsimplicial complexという。

$\sigma \in \Delta$ のとき $\sigma$ を $\Delta$ のfaceといい、

$$\dim \sigma = |\sigma| - 1$$
$$\dim \Delta = \max_{\sigma \in \Delta} \dim \sigma$$

とする。

kを体とし，上のようなV，$\Delta$ に対して次のような可換環 $k[\Delta]$ を対応させる。

$V = \{x_1, \cdots, x_n\}$ とするとき，$x_1, \cdots, x_n$ をk上の不定元と思って多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ を作る。$\Delta$ に対し

$$I_\Delta := (x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid i_1 < \cdots < i_r,\ \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\} \notin \Delta)$$

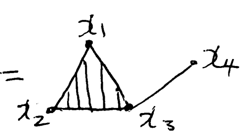
により $k[x_1, \cdots, x_n]$ のイデアル $I_\Delta$ を定め

$$k[\Delta] := k[x_1, \cdots, x_n] / I_\Delta$$

と定める。

この環 $k[\Delta]$ を $\Delta$ のk上のStanley Reisner ringという。

Example

$\Delta =$ 

$$k[\Delta] = k[x_1, x_2, x_3, x_4] / (x_1 x_4, x_2 x_4)$$

容易にわかるように

Theorem 1

$$\dim k[\Delta] = \dim \Delta + 1$$

以後 $|V| = n$，$\dim k[\Delta] = d$ とする。

$\sigma \in \Delta$ に対し

$$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \tau \cap \sigma = \phi,\ \tau \cup \sigma \in \Delta\}$$
$$\mathrm{star}_\Delta(\sigma) = \{\tau \in \Delta \mid \tau \cup \sigma \in \Delta\}$$

と定める。このとき，簡単な計算により

$$k[\mathrm{star}_\Delta(\sigma)] = k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)][x \mid x \in \sigma]$$
$$k[\Delta]_x = k[\mathrm{link}_\Delta(x)][x, x^{-1}] \qquad (x \in V)$$

となることがわかる。

$k[\Delta]$が Cohen-Macaulay ring (Gorenstein ring) であるとき$\Delta$はk上 Cohen-Macaulay (Gorenstein) であるという。

$$\mathrm{link}_\Delta(\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\})$$
$$= \mathrm{link}_{\mathrm{link}_{\cdots \mathrm{link}_{\mathrm{link}_\Delta(x_{i_1})}(x_{i_2}) \cdots (x_{i_{r-1}})}}(x_{i_r})$$

なので，

$\Delta$ がk上Cohen-Macaulay (Gorenstein)

$\Rightarrow \mathrm{link}_\Delta(\sigma), \mathrm{star}_\Delta(\sigma)$もそう。

となることがわかる。

b) $\Delta$ のCohen-Macaulaynessについては，次の定理が知られている。

<u>Theorem 2</u> (Reisner)

$\Delta$がk上C-M

$$\Longleftrightarrow \forall \sigma \in \Delta,\ \forall i < \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))\ ;\ \tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma); k) = 0$$

ただし$\tilde{H}_i$はsimplicial complexのreduced homology groupを表す。

上の定理は，$\sigma = \phi$の場合も含むので，$\Delta$がC-M ならば，

$$\tilde{H}_i(\Delta; k) = 0 \qquad (i < d)$$

定理２から，

<u>Proposition</u>

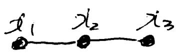
$\Delta$の幾何学的実現$|\Delta|$をXとすると，次は同値。

(1) $\Delta$ はk上C-M

(2) $\forall i < \dim X$

$$\tilde{H}_i(X;k)=0,\ \forall p\in X;\ H_i(X, X-p;k)=0$$

これから，simplicial complexのCohen-Macaulaynessはtopological な性質であることがわかる。

一方 $\Delta_1 =$  ， $\Delta_2 =$ 

とすれば，

$$k[\Delta_1] = k[x_1, x_2, x_3]/(x_1x_3)$$

$$k[\Delta_2] = k[y_1, y_2, y_3, y_4]/(y_1y_3, y_1y_4, y_2y_4)$$

なので、$\Delta_1$はｋ上Gor.であるが$\Delta_2$はそうでない。

ｃ）$A = k[x_1, \cdots, x_n]$とする。一般にＭを有限生成 $\mathbb{Z}^n$-gradedＡ-module とすると、Ｍのhomogeneous minimal generator は同型をのぞいて一意的なので、Ｍのminimal free resolution が定まる。

$$\cdots \to G_i \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to M \to 0$$

Ａのglobal dimensionはｎなので、上のresolutionは有限でとまり

$$\operatorname{depth}(\mathfrak{m}, M) + \mathrm{hd}_A M = \operatorname{depth}(\mathfrak{m}, A) = n$$

（ただし、$\mathfrak{m} = (x_1, \cdots x_n)$））

従って $\dim M = t$ とすれば

ＭがC-M $\Longleftrightarrow G_{n-t+1} = 0$

となる。そこでＭがC-M のとき、

$$\operatorname{type} M := \operatorname{rank} G_{n-t}$$

と定める。

また一般に、ＭのＡ-module としてのminimal free resolution が

$$G_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であるとき、ＭのＡ$[y_1, \cdots, y_m]$-module （$y_1, \cdots, y_m$は不定元）としてのminimal free resolution は

$$G_\bullet \otimes_A K_\bullet(\underline{y}, A[y_1, \cdots, y_m]) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

（$K_\bullet(\underline{y}, A[y_1, \cdots, y_m])$はkozul complex ）となる。

今

$$\cdots\cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow k[\Delta] \longrightarrow 0$$

を k $[\Delta]$ の $\mathbb{Z}^n$-graded A-module としての minimal free resolution とし、今後ことわらずにこの記号を使うことにする。このとき、$\Delta$ が k 上 C-M であれば

$\Delta$ が k 上 Gor.

$\Leftrightarrow \mathrm{type}(k[\Delta]) = 1$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, F_{n-d} = 1$

$\Leftrightarrow \dim_k F_{n-d} \otimes_A A/m = 1$

各 i に対し

$$F_i \otimes_A A/m = \mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta], A/m)$$

なので

$$\mathrm{type}(k[\Delta]) = \dim_k \mathrm{Tor}_{n-d}^A(k[\Delta], A/m)$$

今、simplicial complex $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ に対して

$$0 \longrightarrow k[\Delta_1](\alpha) \longrightarrow k[\Delta_2] \longrightarrow k[\Delta_3](\beta) \to 0$$

という $\mathbb{Z}^n$-graded A-module としての exact sequence があったとする。

($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ のとき，$M(\alpha)_\beta = M_{\alpha+\beta}$ により degree をずらす）このとき

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta_1], A/m)(\alpha) \to \mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta_2], A/m) \to \mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta_3], A/m)(\beta)$$
$$\to \mathrm{Tor}_{i-1}^A(k[\Delta_1], A/m)(\alpha) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^A(k[\Delta_2], A/m) \to \cdots$$

という $\mathbb{Z}^n$-graded module としての long exact sequence 得られるので、各 $\gamma \in \mathbb{Z}^n$ に対して上の exact sequence の degree $\gamma$ の部分だけを考えても exact sequence になる。

従って $F_{n-d+1}$, $F_{n-d}$, $F_{n-d-1}$ 等を、generator の degree まで込めて知ることが、意味のあることになる。

d）一般に M を有限生成 $\mathbb{Z}^n$-graded A-module とするとき、

$$F(M, \lambda) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (\dim_k M_\alpha) \lambda^\alpha$$

とおき、M の Poincaré series という。（ただし $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ の時 $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$）

このとき、$\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta], A/m)$ について次のことが知られている。

Theorem 3 (Hochster's formula)

$$F(\mathrm{Tor}_i^A(k[\Delta], A/m), \lambda) = \sum_{W \subseteq V} (\dim_k \tilde{H}_{|W|-i-1}(\Delta_W)) \prod_{x_j \in W} \lambda_j$$

ただし

$$\Delta_W = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subseteq W\}$$

これにより、原理的には $F_i$ がわかるはずであるが、具体的な場合について必ずしも計算できるわけではない。

e）Simplicial complex $\Delta$ に対し、

$$\mathrm{core}\,V := \{x \in V \mid \mathrm{star}_\Delta(x) \neq \Delta\}$$

$$\mathrm{core}\,\Delta := \Delta_{\mathrm{core}\,V}$$

と定義する。このとき、

$$k[\Delta] = k[\mathrm{core}\,\Delta][x \mid x \in V - \mathrm{core}\,V]$$

なので、$\Delta$ の大部分の性質は $\mathrm{core}\,\Delta$ で論じてよいことになる。

$x \in V$ とするとき、$k[\Delta]$ の minimal free resolution

$$\cdots \to F_i \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to k[\Delta] \to 0$$

を $x$ で localize すれば、exact sequence

$$\cdots \to (F_i)_x \to \cdots \to (F_1)_x \to (F_0)_x \to k[\Delta]_x = k[\mathrm{link}_\Delta(x)][x, x^{-1}] \to 0$$

が得られる。この exact sequence の、$x$ に関する degree が 0 の部分を考えれば、$k[\mathrm{link}_\Delta(x)]$ の $A/(x)$-module としての（必ずしも minimal でない）free resolution になる。この論法をくりかえすことにより $\sigma = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\}$ とすれば、

$$\cdots \to G_i \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)] \to 0$$

（$G_i$ は $F_i$ の $x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}$ に関する degree が 1 の部分）という $k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)]$ の $A/(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})$-module としての free resolution が得られる。

$x \in \mathrm{core}\,V$ に対し、$\Delta$ の maximal face $\sigma = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\}$ で $\sigma \not\ni x$ となるものをとり、

$$\cdots \to G_i \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)] \to 0$$

を上のようにして得られる free resolution とすれば、complex $G_\bullet$ は $k[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)]$ の $k[x \mid x \notin \sigma]$-module としての minimal free resolution を直和因

子として含む。ここで $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)=\{\phi\}$ なので、k $[\mathrm{link}_\Delta(\sigma)]$ のminimal free resolutionは、k $[x \mid x \notin \sigma]$ の $y_1,\cdots,y_{n-r}$（$y_1,\cdots,y_{n-r}$ は $x_1,\cdots,x_n$ から $x_{i_1},\cdots,x_{i_r}$ を除いたもの）によるKoszul complex。従って各 j に対し、

$$G_j \oplus K_j(y, k[x \mid x \notin \sigma])$$

r $\leqq$ d なので x = $x_1$ とすれば、

$$\forall j \leqq n-d,\ \exists \alpha \in \mathbb{Z}^n\ ;\ A(\alpha) \oplus F_j\ ,\ \alpha_1=-1$$

一方、x $\notin$ coreV とすれば、

$$\cdots \to H_i \to \cdots \to H_1 \to H_0 \longrightarrow k[\mathrm{core}\Delta] \longrightarrow 0$$

を k $[\mathrm{core}\Delta]$ の k $[x \mid x \in \mathrm{core}V]$ module としてのminimal free resolution とすれば、これに k $[x \mid x \notin \mathrm{core}V]$ を tensorしたものが k $[\Delta]$ = k $[\mathrm{core}\Delta][x \mid x \notin \mathrm{core}V]$ の minimal free resolution なので、x = $x_1$ とすると

$$\forall j, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n\ ;\ A(\alpha) \oplus F_j \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

従って、特に $\Delta$ がGor. であるとすれば、rank $F_{n-d}$ = 1 なので、

$$F_{n-d} = A(\alpha)\ ,\quad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\quad \alpha_i = \begin{cases} -1 & x_i \in \mathrm{core}V \\ 0 & x_i \notin \mathrm{core}V \end{cases}$$

f）Gorenstein complexについて、次の定理が知られている。

<u>Theorem 4</u>

$\Delta$ = core$\Delta$ のとき、次の３条件は同値。

（１）$\Delta$ は k 上Gor.

（２）$\forall \sigma \in \Delta$，

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma); k) = \begin{cases} 0 & i < \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) \\ k & i = \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) \end{cases}$$

（３）$|\Delta|$ = X とするとき、

$$\tilde{H}_i(X; k) = \begin{cases} 0 & i < d \\ k & i = d \end{cases}$$

$$\forall p \in X\ ;\ H_i(X, X-p; k) = \begin{cases} 0 & i < d \\ k & i = d \end{cases}$$

（ e）で述べたこととHochster's formulaにより、上の定理の（１）$\Longrightarrow$（２）はわかる。）

$x_i \in$ V に対し、A-module のhomomorphism

$$A \xrightarrow{x_i} k[\Delta]$$

のKernelは

$$I_{\mathrm{star}_\Delta(x_i)}$$

また

$$I_\Delta + (x_i) = I_{\Delta'} \qquad (\Delta' = \Delta_{V-\{x_i\}})$$

なので

$$0 \to k[\mathrm{star}_\Delta(x_i)](0,\cdots,0,\overset{i}{-1},0,\cdots,0) \to k[\Delta] \to k[\Delta'] \to 0 \qquad (\text{☆})$$

というexact sequenceが得られる。これから得られるlong exact sequence により、

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\mathrm{star}_\Delta(x_i)], A/m)(0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0) \to \mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\Delta], A/m) \to \mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\Delta'], A/m)$$
$$\to \mathrm{Tor}^A_{n-d-1}(k[\mathrm{star}_\Delta(x_i)], A/m)(0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0) \qquad (\text{☆☆})$$

というexact sequenceが得られる。

g）次の条件をみたすような$\Delta$について考えてみよう。

$$\forall x \in V \ ; \ \mathrm{link}_\Delta(x) \text{ は Gor. }, \ \tilde{H}_{d-2}(\mathrm{link}_\Delta(x)) \neq 0$$

今

$$F_{n-d} \ni A(0,-1,\cdots,-1), \quad F_{n-d} \ni A(-1,\cdots,-1,0)$$

であるとすると、仮定から

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\mathrm{link}_\Delta(x_j)], A/m) = A/m(-1,\cdots,-1) \qquad (\forall j)$$

なので、$x_i = x_n$としてexact sequence（☆）を作り、（☆☆）のdegreeが（0,1,⋯,1）の部分を見ると、

$$0 \longrightarrow (A/m)^t \longrightarrow * \qquad (t>0)$$
$$\longrightarrow *$$

となるので、

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\Delta_{V-\{x_n\}}]; A/m) \ni A/m(0,-1,\cdots,-1)$$

したがってHochster's formulaから

$$\tilde{H}_{d-2}(\Delta_{V-\{x_1,x_n\}}; k) \neq 0$$

がわかる。よって再びHochster's formulaから

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(k[\Delta_{V-\{x_1\}}]; A/m) \ni A/m(-1,\cdots,-1,0)$$

従って$x_i = x_1$として（☆）を作り、（☆☆）のdegreeが(1,⋯,1,0)の部分を見れば、

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow (A/m)^t \longrightarrow * \qquad (t>0)$$

というexact sequenceが得られる。よって

$$\mathrm{Tor}^{A}_{n-d-1}(k[\mathrm{star}_\Delta(x_1)];A/m)(-1,0,\cdots,0) \ni A/m(-1,\cdots,-1,0)$$

ここで、$k[\mathrm{star}_\Delta(x_1)] = k[\mathrm{link}_\Delta(x_1)][x_1]$なので、$k[\mathrm{star}_\Delta(x_1)]$のA-module としてのminimal free resolution は$k[\mathrm{link}_\Delta(x_1)]$のA／（$x_1$）-module としてのminimal free resolution にAをtensorしたものであることがわかる。よって

$$\mathrm{Tor}^{A/(x_1)}_{n-d-1}(k[\mathrm{link}_\Delta(x_1)];A/m) \ni A/m(\underbrace{-1,\cdots,-1}_{n-2\text{個}},0)$$

したがってGorenstein ring のminimal free resolution のself dualityにより、

$$\mathrm{Tor}^{A/(x_1)}_{1}(k[\mathrm{link}_\Delta(x_1)];A/m) \ni A/m(0,\cdots,0,-1)$$

これは、$x_n \in I_{\mathrm{link}_\Delta(x_1)}$すなわち

$$\{x_1,\ x_n\} \notin \Delta$$

となることを意味している。

以上の論法を他の$x_j$, $x_i$に対しても使うと、$x_j$, $x_i$が同じconnected component に含まれていれば、

$$F_{n-d} \ni A(-1,\cdots,-1,\overset{j}{0},-1,\cdots,-1)$$
$$\Longleftrightarrow F_{n-d} \ni A(-1,\cdots,-1,\overset{i}{0},-1,\cdots,-1)$$

となることがわかる。

h）このようにTor のlong exact sequence をしらべて、$F_{n-d}$等の情報を得ることができないかどうか考えてみたが、あまりうまくいかないようです。うまい方法があったら、教えていただきたいと思います。

# 2次形式とその多元環の表現への応用

岩永恭雄　信州大・教育

2次形式を多元環の表現に利用した最初の仕事は Gabriel [5] である．それは，多元環，Quiver，2次形式の3つを関連させることによってなされ，後に [1] においてその議論が簡易化された．[1] における議論は大へん elegant なもので興味深く，一読をお薦めする．

この報告では，まず2次形式について後に利用される概念，定理等について述べ，次の§で2次形式と多元環の表現を緊ぐ役割を果たす Quiver（又は，Graph）について必要最小限の知識を取り上げ，最後の§で2次形式がどのように多元環の表現に応用されたかを解説する．

## §1．2次形式

最初に幾つか必要な定義を述べる．

DEFINITIONS

1) $\mathbb{Z}^{(n)}$ 上の2次形式 $q$ は

$$q(x_1,\cdots,x_n) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 + \Sigma_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} x_i x_j$$

($a_{ij}\in\mathbb{Z}$)という形をしているとき，integralといわれる．

2) $\mathbb{Z}^{(n)} \ni \underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ が positiveとは，

$$\underline{x}\neq 0 \quad \text{かつ} \quad \text{各 } x_i \geq 0 \quad (i=1,\cdots,n)$$

のときをいい，$\underline{x}>0$ と表す．更に，$\underline{x}$, $\underline{x}'\in\mathbb{Z}^{(n)}$ について，$\underline{x}-\underline{x}'>0$ のとき，$\underline{x}>\underline{x}'$ と定める．

3) $\mathbb{Z}^{(n)}$ 上の integral quadratic form $q$ について，

$q$ が positive definiteとは，

$$q(\underline{x})>0 \text{ for } 0\neq\forall\,\underline{x}\in\mathbb{Z}^{(n)};$$

$q$ が positive semi-definiteとは，

$$q(\underline{x})\geq 0 \text{ for } \forall\,\underline{x}\in\mathbb{Z}^{(n)};$$

$\{1, \cdots, n\}$ を頂点の集合とし，

$1 \leqq i < j \leqq n$ について，

$a_{ij} < 0$ なら $i$ と $j$ を $-a_{ij}$ 本の solid edges で結び，

$a_{ij} > 0$ なら $i$ と $j$ を $a_{ij}$ 本の dotted edges で結ぶ．

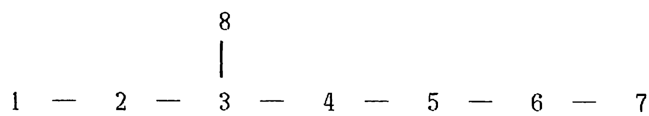
このように，２種の edges を持つ graph を特に <u>bigraph</u> と呼ぶ． integral quadratic form から得られる bigraph は multiple edges を持つが，loop を持たない．

<u>e.g.</u>

①  は

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 3x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 + x_2x_4$$

と対応している．

②  は Dynkin graph $E_8$ で上の EXAMPLE を与えている．

5) $\mathbb{Z}^{(n)}$ 上の positive semi-definite integral quadratic form $q$ について，

$$\{\underline{x} \in \mathbb{Z}^{(n)};\ q(\underline{x}) = 0\} = \mathrm{rad}\ q \ (\text{say})$$

は $\mathbb{Z}^{(n)}$ の部分群になる，これを $q$ の <u>radical</u>, rad $q$ の元を <u>radical</u> <u>vector</u> といい，更に rad $q$ の rank を $q$ の <u>radical</u> <u>rank</u> ( or <u>corank</u>) という．

<u>$\mathrm{rad}\ q \leqq \mathbb{Z}^{(n)}$ の証明</u>：

$\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathrm{rad}\ q$ とすると，

$q(\underline{x}+\underline{y}) + q(\underline{x}-\underline{y}) = 0$

ここで，$q$ は positive semi-definite なので，

$q(\underline{x}+\underline{y}),\ q(\underline{x}-\underline{y}) \geqq 0$．

$\therefore\ q(\underline{x}+\underline{y}) = 0 = q(\underline{x}-\underline{y})$

6) $\mathbb{Z}^{(n)} \ni (x_1, \cdots, x_n)$ は全ての $x_i \neq 0$ のとき，<u>sincere</u> といわれる．

２次形式に関する２つ目の結果は

<u>THEOREM 2</u> (Ovsienko [8])

critical integral quadratic form は，radical rank 1 で positive semi-definite，かつ sincere positive radical vector を持つか，あるいは $n = 2$ である．

ここで，$n=2$ の場合２次形式：

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

は critical である．

次ぎに，integral quadratic form：

$$q(\underline{x}) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 + \Sigma_{1 \leqq i<j \leqq n} a_{ij}x_ix_j$$

において，全ての $a_{ij} \leqq 0$ $(1 \leqq i<j \leqq n)$ と仮定すると，q に対応する graph G は solid edges のみとなる．このとき，q を <u>graph G の quadratic form</u> といい，$q^G$ で表す．

<u>THEOREM 4</u> (Gabriel [5], Dlab-Ringel [3])

connected graph G の quadratic form $q^G$ は，positive definite か critical か又は indefinite であり，

$q^G$ が positive definite $\Leftrightarrow$ G は Dynkin graph

$q^G$ が critical $\Leftrightarrow$ G は Euclidean graph

更に，

$q^G$ が positive definite なら，$\exists$ unique maximal root of $q^G$,

$q^G$ が critical なら，$\exists$ unique minimal positive radical vector of $q^G$,

$q^G$ が indefinite なら，$\exists$ $\underline{x} > 0$ with $q^G(\underline{x}) < 0$ が成立する．

$q$ が <u>weakly positive</u> とは，

$q(\underline{x})>0$ for any positive $\underline{x}\in Z^{(n)}$;

$q$ が <u>critical</u> とは，

$q$ は weakly positive ではないが，

$q^{i}(\underline{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} q(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$

が全て weakly positive

とそれぞれ定義する．

4) $Z^{(n)}\ni\underline{x}$ が integral quadratic form $q$ の <u>root</u> とは，$q(\underline{x})=1$ とする．

最初の驚くべき，かつ魅力ある定理は，

<u>THEOREM 1</u> (Ovsienko [8])

$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in Z^{(n)}$ が weakly positive な integral quadratic form の positive root なら，各 $x_i\leqq 6$ $(i=1,\cdots,n)$.

この定理において6という値は実際に起こる：

<u>EXAMPLE</u>

$q(\underline{x})$ を $Z^{(8)}$ 上の integral quadratic form で，

$$q(\underline{x}) = \Sigma_{i=1}^{8} x_i^2 - \Sigma_{i=1}^{6} x_i x_{i+1} - x_3 x_8$$

とすると，$q$ は positive definite（従って，weakly positive）で，

$$\underline{x}=(2,4,6,5,4,3,2,3)\in Z^{(8)}$$

は $q$ の positive root である． 特に，これは $q$ の unique maximal positive root になっている．

integral quadratic forms の分類，あるいは定理1の証明，更に表現への応用のために，integral quadratic form に対して，graph を対応させる．

$$q(\underline{x}) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 + \Sigma_{1\leqq i<j\leqq n} a_{ij}x_i x_j$$

に対して，graph を次のように定める：

Dynkin graphsとそのquadratic formsのunique maximal positive roots，及びEuclidean graphsとそのquadratic formsのunique minimal positive radical vectorsを以下に書いておく．

Dynkin graphs

$A_n$ : $1 - 1 - \cdots - 1$

$D_n$ : $\begin{array}{l} 1 \searrow \\ \qquad 2 - \cdots - 2 - 1 \\ 1 \nearrow \end{array}$

$$E_6 : \begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$E_7 : \begin{array}{ccccccccccc} & & & & 2 & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ 2 & - & 3 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & 3 & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ 2 & - & 4 & - & 6 & - & 5 & - & 4 & - & 3 & - & 2 \end{array}$$

各頂点の数字はunique maximal positive rootのそれぞれの頂点に対応する成分である．

Euclidean graphs

$\tilde{A}_n$ : $\begin{array}{l} \qquad 1 - \cdots - 1 \\ 1 \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \qquad\qquad\quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} 1 \\ \qquad 1 - \cdots - 1 \end{array}$

$\tilde{D}_n$ : $\begin{array}{l} 1 \searrow \qquad\qquad\qquad \nearrow 1 \\ \qquad 2 - \cdots - 2 \\ 1 \nearrow \qquad\qquad\qquad \searrow 1 \end{array}$

$$\tilde{E}_6 : \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$\tilde{E}_7 : \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 2 & & & & & & \\ & & & & & & | & & & & & & \\ 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & & & & & & 3 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & | & & & & & & & & & & \\ \tilde{E}_8 : & 2 & — & 4 & — & 6 & — & 5 & — & 4 & — & 3 & — & 2 & — & 1 \end{array}$$

各頂点の数字は今度はunique minimal positive radical vectorの成分を表す．

## §2. Quivers

$Q=(Q_0, Q_1, s, e)$が<u>quiver</u>とは，頂点の集合$Q_0$，矢(arrow)の集合$Q_1$と２つの写像$s, e: Q_1 \to Q_0$から成るもので，各$\alpha \in Q_1$に対して，$s(\alpha)$は始点，$e(\alpha)$は終点と呼ばれ，$x=s(\alpha)$，$y=e(\alpha)$のとき，$x \xrightarrow{\alpha} y$と書かれる．

以下に考えるquiverは全て$Q_0$及び$Q_1$が有限集合であるものとする．

<u>path</u>：quiver $Q$において，頂点$x$から$y$への長さ$\ell \geqq 1$の<u>path</u>とは，$(x|\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell|y)$という形のもので，$e(\alpha_i)=s(\alpha_{i+1})$，$1 \leqq i \leqq \ell-1$を満たし，$x$が$\alpha_1$の始点，$y$が$\alpha_\ell$の終点となっている，i.e.

$$x \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \xrightarrow{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot \xrightarrow{\alpha_\ell} y$$

又，各頂点$x$について，$x$から$x$への長さ0のpathを$(x|x)$で表す． 更に，ある頂点$x$について，$x$から$x$への長さが1以上のpathをcyclic pathという．

<u>多元環からquiverへの対応</u>

これから考える多元環は全て代数的閉体K上で有限次元なものとし，与えられた多元環Aに対して，次のように<u>Aのquiver</u> $Q=Q_A$を定める：

$Q_0$ はAの直交する原始巾等元の完全系$\{e_1,\cdots,e_n\}$

$\dim_K e_j \mathfrak{J} e_i / e_j \mathfrak{J}^2 e_i = n_{ij}$ のとき，$Q_1$において頂点iからjへ$n_{ij}$本の矢を引く． ここで，$\mathfrak{J}$=Rad A（Aのradical）である．

<u>Quiverから多元環への対応</u>

逆に，与えられたquiver Qから多元環K[Q]を次のように構成する：

K[Q]はQにおける全てのpathsを基底とするK上のベクトル空間で，基底の間に

$(w|\alpha_1,\cdots,\alpha_m|x)(y|\beta_1,\cdots,\beta_n|z)$

$= (w|\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n|z)$ if $x=y$

$= 0$ (otherwise)

と積を定めることによりできる（多元）環である． これを<u>path algebra</u>という．

この環はK上有限次元とは限らないが，Qにcyclic pathがないとき，かつそのときに限り，K[Q]は有限次元となる． このとき，$\Sigma_{x\in Q_0}(x|x)$がK[Q]の単位元，$\{(x|x);\ x\in Q_0\}$がK[Q]の直交する原始巾等元の完全系となっている．

さて，多元環とquiverとの間の対応がついたが，大事なことは，基本的にはどんな多元環もあるquiverの準同型像としてあらわされるということで，それを次に述べる．

quiver Qに対して，

$K[Q]^+$ = Qの全ての矢によって生成された両側ideal

$(K[Q]^+)^n$ = 長さn以上の全てのpathsによって生成された両側ideal

とおく．

K-多元環Aは，A/Rad A がKのcopiesの直積と同型なとき，<u>basic</u>といわれる． どんな多元環もbasicなもの

に森田同値である．（注：Kが代数的閉体でないときは，A/Rad A がK上のdivision rings の直積と修正されなければならない．）

THEOREM 5.（Gabriel [6]）

代数的閉体K上のbasicな有限次元多元環は，ある（一意的にさだまる）quiver Qとpath algebra K[Q]のideal $\mathbf{I}$によってK[Q]/$\mathbf{I}$という形をしており，更に$\mathbf{I}$は$(K[Q]^+)^n \subsetneq \mathbf{I} \subsetneq (K[Q]^+)^2$，$n \geq 2$となるように取れる．

ここで，定理におけるイデアルをquiver上で視覚化するために，次の概念を導入する：quiver Qの２つの頂点x，yに対して，有限な線型結合$\Sigma_w c_w w$（wはxからyへの長さ２以上のpath，$c_w \in K$）をQ上の<u>relation</u>という．

任意のイデアル$\mathbf{I} \subsetneq (K[Q]^+)^2$は（両側）イデアルとして幾つかのrelationsによって生成される．

<u>e.g.</u>

w−w'（w，w'は同じ始点，終点を持つpaths）という形のrelationは<u>commutativity relation</u>，唯１個のpath wで与えられるrelationは<u>zero relation</u>と呼ばれる．

<u>EXAMPLES</u>

(1) $A=\begin{bmatrix} K & & & 0 \\ K & K & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ K & K & \cdots & K \end{bmatrix}$ のとき，$Q_A$：$1 \to 2 \to \cdots \to n$．

(2) A=K[X]のとき，$Q_A$：$1 \circlearrowright \alpha$

又，$A=K[X]/(X^n)$ $(n \geq 1)$のとき，$Q_A$：$1 \circlearrowright \alpha$ with the zero relation $\alpha^n=0$．

(3) $A=K[X, Y]/(X^2, Y^2)$のとき，$Q_A$：$\alpha \circlearrowleft 1 \circlearrowright \beta$

with $\alpha^2=\beta^2=\alpha\beta\alpha=\beta\alpha\beta=0$ and $\alpha\beta=\beta\alpha$．

## §3. Finite dimensional algebra

既にことわってあるように，考える多元環は全て代数的閉体K上の有限次元多元環であるとする．　又，環Rに対して，（左）R-加群のcategoryをMod-Rで表すことにする．

DEFINITION（Drozd [4]）

K-多元環Aについて，

（1）　Aが finite type とは，非同型な直既約A-加群が有限個しかない；

（2）　Aが tame type とは，Aはfinite typeでなく，各$d \geq 1$について，Mod-K[T]からMod-Aへの embedding functors $F_i$が有限個存在し，任意のd次元直既約A-加群は，有限個の場合を除いて，ある直既約K[T]-加群Xとあるiによって，$F_i(X)$という形をしている；

（3）　Aが wild type とは，Qを  なるquiverとするとき，Mod-Aのfull subcategoryと‘表現同値’を与えるexact embedding functor Mod-K[Q]→Mod-Aが存在する，

とそれぞれ定義する．

（2）のとき，直既約A-加群の分類は可能であるが，（3）のときは，部分加群への直和分解ができない加群やcancelationの成立しない直既約加群が存在したり，更には，任意のK-多元環に対して，それを準同型環とするA-加群が存在して，直既約A-加群の分類は不可能である．

以上の定義に基づき，

THEOREM 6.（Drozd [4]）

代数的閉体上の多元環はfinite type，tame type又はwild typeのいずれかである．

さて，多元環→Quiver→2次形式という対応をつけるために，

Quiver with relationsからBigraphへの対応

relationを持つquiver Qに対してbigraph Gを次のように定める：

Gにおける頂点はQの頂点と同じ；

Qの頂点xからyへの各矢に対して，Gの頂点xからyへのsolid edgeを引く；

Qの頂点xからyへのrelation Iがあるとき，Iの両側イデアルとしてのminimal generatorsの個数（Iによって一意に決まる）だけGの頂点xからyへdotted edgesを引く．

これにより，K-多元環Aが与えられたとき，Aのquiver $Q_A$(with or without relation)が定まり，更に$Q_A$からbigraphが定まるので，このbigraphと対応する2次形式を$q^A$で表す． この2次形式はいわゆる$Q_A$のTits formと呼ばれているものである．

以下に§1で定義した4種の2次形式と対応する多元環の表現に関する結果を紹介する．

その前に，K-多元環をA，非同型な単純A-加群を$S_1, \cdots, S_n$とするとき，有限次元A-加群Mに対して，Mの組成列に現れる$S_i$の個数を$x_i$とするとき，ベクトル$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{Z}^{(n)}$をMのdimension typeといい，$\underline{\dim}\ M = (x_1, \cdots, x_n)$と表す．

THEOREM 7 (Dlab-Ringel [3])

Aをbasicかつconnected（i.e. $Q=Q_A$がconnected）なhereditary K-algebra， Gをquiver Q と対応するbigraphとするとき，

(1) Aがfinite type

$\Leftrightarrow$ GはDynkin graph

$\Leftrightarrow$ $q^A$はpositive definite

このとき，直既約A-加群Mについて，$\underline{\dim}\ M$が$q^A$のunique maximal positive rootならば，全ての直既約

A-加群はMのsubquotient（i.e.Mの部分加群の準同型像）となる．

(2)　Aがtame type

$\Leftrightarrow$　GはEuclidean graph

$\Leftrightarrow$　$q^A$はpositive semi-definite

<u>THEOREM 8</u>（Bongartz [2]）

Aがfinite typeのbasic,connected K-algebraで，$Q_A$がcyclic pathを含まないと仮定すると，$q^A$はweakly positiveであり，直既約A-加群Mに対して，<u>dim</u> Mを対応させる写像は{直既約A-加群の同型類}と{$q^A$のpositive roots}の間のbijectionを与える．

最後に，criticalな2次形式を用いることにより，次のような多元環の分類が完成する．

K-多元環Aは，finite typeではないが，任意の零でないイデアルIに対してA/Iがfinite typeとなるとき，<u>minimal</u> <u>infinite</u> <u>type</u>といわれる．

<u>THEOREM 9</u>（Happel-Vossieck [7]）

Aをbasic,connectedなK-多元環で，minimal infinite typeとし，AのAuslander-Reiten quiverがpreprojective componentを含むと仮定すると，$q^A$はcriticalである．

ここで，Auslander-Reiten quiverの（connected）component Cは，AのAuslander-Reiten translationを$\tau$とするとき，Cにおける各$\tau$-orbitが必ずprojective A-moduleを含むとき，<u>preprojective</u>といわれる．

（Auslander-Reiten quiver, Auslander-Reiten translationについては，[9]を参照．）

EXAMPLE（OvsienkoとBongartzの定理の応用例）

Aを代数的閉体K上の多元環で次のquiverによって与えられているとする：

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9$$

ここで，２つの点線はzero relationsを示す．

このAに対して，

$$R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \mathrm{Hom}_K(A, K) & A \end{bmatrix}$$

なるK-多元環がfinite typeであるかどうかを判定する．

Rのquiver $Q_R$ は

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] & 7 \arrow[l] & 8 \arrow[l] & 9 \arrow[l] & & & & & & \\
& & & & & & 10 \arrow[u] & 11 \arrow[l] \arrow[u] & 12 \arrow[l] \arrow[u] & 13 \arrow[l] & 14 \arrow[l] & 15 \arrow[l] & 16 \arrow[l] & 17 \arrow[l] & 18 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

with 8 zero relations and 2 commutativity relations at 2 squares となり，Rの２次形式は

$$q^R(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{18} x_i^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 9}}^{17} x_i x_{i+1} - \sum_{i=7}^{9} x_i x_{i+3}$$

$$+ x_1 x_8 + x_2 x_9 + x_{10} x_{17} + x_{11} x_{18} + x_7 x_{11} + x_8 x_{12}$$

で与えられる．　ここで，

$$\underline{x} = (0,0,2,4,5,6,7,5,2,\ 4,1,0,0,0,0,0,0,0)$$

は$q^R$のpositive rootであるので，Bongartz及びOvsienkoの定理によって，Rはfinite typeでないことがわかる．

## Open problems

(1)　Ovsienkoの定理1を

$$q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} a_{ij} x_i x_j$$

$(a_i, a_{ij} \in \mathbb{Z})$なる2次形式に対して拡張できないか？

(2)　多元環Aがfinite typeで$Q_A$がcyclic pathを含まないなら，nを非同型な単純A-加群の個数とすると，Ovsienkoの定理1によって，

sup{composition length of MIMは直既約A-加群}

は高々6nであるが，これをもっと良い小さな値にとれないか？

(3)　定理8より，多元環Aがfinite typeで$Q_A$がcyclic pathを持たなければ，全ての直既約A-加群はそのdimension typeで決定されるが，逆にこのような多元環を特徴付けることは興味ある問題と思う．（少なくともfinite typeであることは，Brauer-Thrall予想・Roiterの定理によりわかる．）

## Appendix

ここでは，2つの非同型な多元環が同じ2次形式を持ち，その2次形式がweakly positiveではあるが，positive definiteではない例を紹介する．

quiver Qを次のものとする：

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
2 \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\varepsilon"'] & & 3 \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dd, "\eta"] \\
 & 4 \arrow[dd, "\zeta"'] & \\
5 \arrow[dr, "\iota"'] & & 6 \arrow[dl, "\kappa"] \\
 & 7 &
\end{tikzcd}$$

$I_1, I_2$をそれぞれ次のrelations $R_1, R_2$で生成される

K[Q]の両側イデアルとするとき：

$$R_1 = \{\gamma\alpha - \delta\beta,\ \iota\varepsilon - \zeta\gamma,\ \zeta\delta - \kappa\eta\},$$

$$R_2 = \{\gamma\alpha - \delta\beta,\ \iota\varepsilon,\ \kappa\eta\},$$

2つの多元環 $A_i = K[Q]/I_i\ (i=1,2)$ は非同型で，同じ2次形式：

$$q(\underline{x}) = \Sigma_{i=1}^{7} x_i^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_2x_5 - x_3x_4$$
$$- x_3x_6 - x_4x_7 - x_5x_7 - x_6x_7 + x_1x_4 + x_2x_7 + x_3x_7$$

を持つ．　この2次形式は

$$q(\underline{x}) = \{x_5 - 1/2(x_2 + x_7)\}^2 + \{x_6 - 1/2(x_3 + x_7)\}^2$$
$$+ \{x_4 + 1/2(x_1 - x_7 - x_2 - x_3)\}^2 + 1/4(x_1 + x_7)^2$$
$$+ 1/2\{x_1 - 1/2(x_2 + x_3)\}^2 + 3/8(x_2 - x_3)^2$$

より，weakly positiveであるが，

$$\underline{r} = (1,1,1,0,0,0,-1)$$

は $q(\underline{x})$ の radical vectorであって，rad $q = \langle \underline{r} \rangle$ なので，$q(\underline{x})$ は positive definiteではない．

## References


1. Bernstein, I.N., Gelfand, I.M. and Ponomarev, V.A.: Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Math. Surveys 28, 1973, 17-32.
2. Bongartz, K.: Algebras and quadratic forms, J. London Math. Soc. 28, 1983, 461-469.
3. Dlab, V. and Ringel, C.M.: Indecomposable representations of graphs and algebras, Memoir AMS 173, 1976.
4. Drozd, Ju.A.: Tame and wild matrix problems, Proc. of ICRA II, Lect. Notes in Math. Vol. 832, Springer, 1980, 242-258.
5. Gabriel, P.: Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math. 6, 1972, 71-103.

6. Gabriel, P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Proc. of ICRA II, Lect. Notes in Math. Vol.831, Springer, 1980, 1-71.
7. Happel, D. and Vossieck, D.: Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component, Manuscripta Math. 42, 1983, 221-243.
8. Ovsienko, S.A.: Integral weakly positive forms, In: Schur matrix problems and quadratic forms, Kiev, 1978, 3-17.
9. Ringel, C.M.: Tame algebras and quadratic forms, Lect. Notes in Math. Vol.1099, Springer, 1984.

付記

(1) このノートの内容は主として［８］から取りました． Ovsienkoの定理を含む２次形式の表現論への応用に関しては［８］を読まれるとよいと思います．

(2) Quiver with relationsからBigraphへの対応を与える所で，relation Iに対して，Iの両側イデアルとしてのminimal generatorsの個数が一意に決まると述べてある部分は大へん重要なことです． その証明はBongartz ［２］にあり，代数群を用いてなされています．

# Hensel環上のMaximal Cohen－Macaulay加群の理論

吉野雄二（名古屋大学理学部）

今回のお話しは、吉野［20］の解説です。詳しい証明などはそちらを読んでいただきたいと思います。

## §１．可換環論で表現論を考えよう

そもそも環論には、２つの大きな柱があることは、環論を少しでも学んだものならば感ずるはずである。即ち、「イデアル論」と「表現論」である。イデアル論が主に可換環論において、その力を発揮するのに対して、表現論は非可換環論において取り扱われている。そして、そのどちらをも考えるということは、よほど簡単な場合を除いては行われないようである。例えば、有理整数環$\mathbb{Z}$について言えば、「$\mathbb{Z}$はユークリド環である」という主張はイデアル論そのものである。一方、この場合の表現論とは、いわゆる「有限生成アーベル群の基本定理」のことである。ここで注意したいことは、有限生成アーベル群の基本定理は、$\mathbb{Z}$がユークリド環であるという事実なしには証明することができないということである。言わば表現論はイデアル論が余程良く分らない限りは不可能ではないかということを暗示している。実際、次のような問題を例として考えてみよう。

<u>例題</u>：ｋを代数閉体として、ｋ上の多元環$R=k(x,y)/(x^2,y^2)$を考える。この環Ｒ上の全ての有限生成加群を求めよ。

このＲに関する限りイデアル論は全く自明である。それにもかかわらず上の問題に完全な解答を与えることは、そう容易ではない。参考のために、一応この例題の答を書いておこう。

<u>答</u>：Ｒ上の加群には直既約分解の一意性が成立するので、直既約Ｒ加群の分類をすれば良い。そこで、$\Gamma=$｛有限生成直既約Ｒ加群の同型類｝と置く。$\Gamma$

の部分集合$\Gamma^0$＝｛kのシジジー達とその双対達｝∪｛R｝を考える。$\Gamma^0$は互いに同型でない可算無限個の直既約R加群から成る集合である。そして、集合$\Gamma-\Gamma^0$は次のような集合と１対１の対応がある：

$\mathbb{P}_k{}^1\times\mathbb{N}$　（但し、$\mathbb{P}_k{}^1$はk上の射影直線、$\mathbb{N}$は自然数の集合である。）

この解答は、可換環論の専門家には余り知られていない。（少なくとも、私自身は計算をしてみるまで知らなかった。）一方、多元環の表現論（⊊非可換環論）の専門家には既に良く知られたことなのである。

我々はこれから可換環上で表現論を考えていこうと思う。上で述べたように対象とする環はイデアル論が良く分っているようなものでなければいけないであろう。また、その場合にも全ての加群を分類するなどということは容易ではないに違いない。そこで可換環上のある特殊な加群についてのみ考えることが望ましいであろう。それでも、解答がなかなか得られないときには、多元環の表現論の中に少なからず参考になることがあるであろう。

## §２．なぜMaximal CM加群なのか

体k上の多元環A（非可換）が与えられたとき、このAの表現とは、k代数としての写像$\phi: A\to \mathrm{End}_k(V)$を考えることに他ならない。（但し、Vはk上n次元のベクトル空間である。）これと同じことを高次元の可換ネータ環で行うにはどうするのが一番自然だろうか。今のところ、体kを正則局所環で置き換えるのが最も良いということになっている。（他に考えることもできるであろうが、良い結果が出るかどうか知らない。）ここでは、一般の正則局所環を考えるのではなしに、体上の形式的巾級数環$T=k[\![x_1,..,x_n]\!]$を考えることにしよう。このとき、k上の多元環に対応するものとしては、T上の有限代数で、T加群と見たときに自由になっているものが良いであろう。これを、Rとしよう。そして、考えるべきRの表現としては、T代数としての写像$\phi: R\to \mathrm{End}_T(T^n)$が良いであろう。すると、可換環では馴染のものが現われたことになる。というのは、次の等号または同値があるからである。

「巾級数環上有限自由な局所環」＝「体を含む完備CM局所環」

「T代数としての写像：$R\to \mathrm{End}_T(T^n)$を与える」

　$\rightleftarrows$「R上の加群Mで$\mathrm{depth}(M)=\dim(M)$が成立するものを与える」

　$\rightleftarrows$「MはR上のMaximal CM加群」

こうして我々は完備CM局所環上のMaximal CM加群を考えることが多元環

の表現論の最も自然な類似であると分った。（ここでは簡単の為に完備性を仮定するが、この仮定は「Hensel環」で置換えることもできる。但し、後の議論では前節の例題の答のように直既約分解の一意性定理があって欲しい。そのために、Hensel環であるという仮定は欠くことができない。）

考える対象がはっきり定まった以上、記号と言葉を整えておこう。

以下では、（R，m，k）はいつでも完備ＣＭ局所環で、ｋを含むものとする。但し、簡単の為にｋは標数０の代数閉体であると仮定しておく。さらに、$\mathfrak{C}$(R)をＲ上のMaximal ＣＭ加群の成す圏とする。多元環の表現論の場合にならうとすると、次の概念は重要である。

定義：$\mathfrak{C}$(R)が有限表現型であるとは、$\mathfrak{C}$(R)に含まれる直既約な加群の同型類が有限個しかないときを言う。

多元環の表現論との類似を追求する立場からすれば、次のような問題が最も重要である。

問題(A)　どのような環Ｒに対して$\mathfrak{C}$(R)は有限表現型となりうるか？

問題(B)　与えられた環Ｒに対して、$\mathfrak{C}$(R)に含まれる直既約な加群の同型類全部を分類せよ。

この２つの問題について考えようとするのが、これからの主題である。

## §３．何が既に分っているのか

我々は前節で、完備ＣＭ局所環Ｒとその上のMaximal ＣＭ加群の圏$\mathfrak{C}$(R)を考えることが表現論をやるうえで最も適当な題材であろうということになった。このような考えは、実は以前からあった考え方なのである。それは、特に整環の表現論と言われているものである。整環(order)の表現を考えるということは、大体その整環上のラティスの圏を考察することに等しい。すると、このラティスの圏について、§２で与えたと同じ問題を考えることが出来る。どのようなことが一般論として既に知られているのか、私は知らない。しかし、少なくとも問題(A)に関する限り、既に論文［26］［27］［30］において、取りあつかわれている。そこでは、可換な整環上のラティスの圏について、それ

が有限表現型であるための整環の条件（＝イデアル論的条件）が得られているのである。（ここで、「可換な」という条件が付くことに着目して欲しい。可換でないと、難し過ぎて手に負えないのである。）完備な整環とは、そもそも１次元の被約局所環のことであり、また、その上のラティスの圏は正にMaximal ＣＭ加群の圏のことであるから、上記の論文で得られた事はそのまま我々の状況のもとで書き下すことが出来る。それを、現実に実行したのが、Greuel-Knoerrer [12] であった。彼等の結果を、簡単の為に環がGorensteinの場合に話しを限って、引用してみよう。

<u>定理A</u>（[12]）：Ｒが１次元の被約Gorenstein環のとき、次の２つの条件は同値である。（Ｒが完備であるとか、標数０の代数閉体を含むなどということは以前の通り仮定することにする。）

(i)　$\mathfrak{C}(R)$が有限表現型である。

(ii)　$R \simeq k[\![x, y]\!]/(f)$である。ここで、ｆは次のような多項式のどれかである。

($A_n$)　$x^{n+1}+y^2$

($D_n$)　$x^{n-1}+xy^2$

($E_6$)　$x^3+y^4$

($E_7$)　$x^3+xy^3$

($E_8$)　$x^3+y^5$

ここで出てきた多項式達は既に代数幾何あるいは特異点の専門家には良く知られているものであって、１次元の単純特異点と呼ばれているものである。一般次元での単純特異点の定義を記しておこう。

<u>定義</u>：ｄ次元の超曲面$R=k[\![x, y, z_2, ..., z_d]\!]/(g)$が<u>単純特異点</u>であるとは、$g=f(x, y)+z_2^2+...+z_d^2$（ｆは上記の（Ａ）（Ｄ）（Ｅ）型の何れかの方程式）と書けるときを言う。

<u>注意</u>：２次元の単純特異点は、<u>Klein特異点</u>とも呼ばれている。その理由は次の通りである。今、ＧをSL(2, k)の有限部分群であるとする。このようなＧは共役を除いて、次の群のどれかと一致する。

($A_n$)　位数(n+1)の巡回群

($D_n$)　位数4(n-1)のBinary Dihedral Group

($E_6$)　位数24のBinary Tetrahedral Group

($E_7$)　位数48のBinary Octahedral Group

($E_8$)　位数120のBinary Icosahedral Group

これらの群をKlein群と言う。これらのGはSL(2, k)の部分群として、巾級数環S＝k⟦x, y⟧に作用する。この作用による、不変式環R＝$S^G$を考えると、このRが上で定義した2次元の単純特異点と一致しているのである。

こう定義してみると、1次元の場合に成立したことが高次元でも成り立たないかという期待が出てくる。それは実際に証明できるのである。

<u>定理B</u>：Rが2次元Gorenstein環とする。このとき次の2つの条件は同値である。

(i)　$\mathfrak{C}$(R)は有限表現型である。

(ii)　RはKlein特異点である。

この定理の(ii)⇒(i)はHerzog [13] によって、(i)⇒(ii)はAuslander [2] によって証明せられた。Auslanderは、この定理を示す前に更に次のことをも示している。

<u>定理C</u>（[3]）：任意の完備CM局所環Rについて、$\mathfrak{C}$(R)が有限表現型であるならば、Rは孤立特異点である。

即ち、環が有限表現型であるための条件を求めようなどとするときには、その環は孤立特異点であると仮定して構わないことを言っているのである。

さて、最近、環がGorensteinであるときには、$\mathfrak{C}$が有限表現型であるための必要十分条件が完全に得られてしまった。

<u>定理D</u>：Rが完備Gorenstein局所環のとき、次の2条件は同値である。

(i)　$\mathfrak{C}$(R)は有限表現型である。

(ii)　Rは上で定義した単純特異点の1つである。

この定理の(ii)⇒(i)はKnoerrer [14] によって、(i)⇒(ii)はBuchweitz-Greuel-Schreyer [8] によって証明された。

このようにGorenstein環に話しを限れば、有限表現型であるような環は全て分ってしまうと言ってもよい。即ち、§2の問題(A)は完全に答が得られている。（但し、環がGorensteinでないときには、まだ分らないことが多い。）

しかし、問題(B)については、今までの所では何も触れていない。それを次の節で考えてみよう。

## §4. Auslander-Reiten Quiverを考えよう

問題（B）は、「$\mathfrak{C}$(R)に属する直既約な加群の同型類を全部書き出せ」、ということであった。このような問題の難しさは次のようなところにあると言って良いと思う。即ち、幾つかの直既約Maximal CM加群の族を書き出した後で、はたして、それで全ての直既約Maximal CM加群の同型類を尽しているかどうかを判定することである。このような事は一般には非常に難しくて不可能と言わざるえない場合が多い。しかし、多元環の表現論では、このような事を示すのに非常に有効であると思われている道具がある。それが、標題のAuslander-Reiten Quiverである。我々はこれをMaximal CM加群の圏$\mathfrak{C}$(R)で考えてみよう。

天下り式ではあるが、次の定義をしよう。

<u>定義</u>：$\mathfrak{C}$(R)の中の短完全列；

$$\sigma : 0 \to N \to E \xrightarrow{p} M \to 0$$

が<u>Auslander-Reiten列</u>（または、almost split sequence)であるとは、次の3条件が満足されているときを言う。

(a)　MもNも直既約である。

(b)　$\sigma$は分裂しない完全列である。

(c)　$X \in \mathfrak{C}(R)$と$f \in \mathrm{Hom}_R(X, M)$が与えられた場合に、もし、fが分裂全射でなければ、$g \in \mathrm{Hom}_R(X, E)$が存在して、$f = p \cdot g$となる。

上の$\sigma$がAuslander-Reiten列であるときに、$\sigma$はMで終るAuslander-Reiten列、または、Nから始まるAuslander-Reiten列であるとも言う。

<u>注意</u>：(i)任意に直既約Maximal CM加群M（またはN）が与えられたとき、Mで終る（またはNから始まる）Auslander-Reiten列は必ずしも存在するとは限らない。しかし、存在する場合には一意的であることが知られている。
(ii)特に、Mで終るAuslander-Reiten列$\sigma$が存在するときには、直既約加群NはMによって、一意的に決る。このようなときに、$N = \tau(M)$と書く。（$\tau$はAuslander-Reiten変換等と呼ばれることもある。）

一般の局所環上の直既約Maximal CM加群Mについては、上で注意したように、Mで終るAuslander-Reiten列は存在しないかもしれない。いつも、Auslander-Reiten列が存在するための条件が知られている。

<u>定理E</u>（[3]）：完備局所環Rについて、次の3条件は同値である。

(a) Rは孤立特異点である。

(b) 任意の直既約Maximal CM加群M（$\not\cong$R）に対して、Mで終るAuslander-Reiten列が存在する。

(c) 任意の直既約Maximal CM加群N（$\not\cong$K、但しKはRの正準加群）に対して、Nから始まるAuslander-Reiten列が存在する。

更に、$\tau$については次の事も分っている。

<u>補題F</u>（[23]）：Rが孤立特異点であるとき、$\tau$は次の式で与えられる。直既約Maximal CM加群M（$\not\cong$R）に対して、

$$\tau(M) = (\mathrm{Syz}^d \mathrm{tr}(M))^{\vee}$$

ここで、$\mathrm{Syz}^d$はd番目のシジジー（$d=\dim(R)$）を、$^{\vee}$は正準加群Kによる双対を表している。また、tr(M)は次のようにして、定義される。

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \to M \to 0$$

がMの自由分解の最初の2つであるとするとき、これのRによる双対を取って得られる完全列；$0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to \mathrm{tr}(M) \to 0$によってtr(M)は定義される。

もう一つ天下りの定義をしよう。

<u>定義</u>：M、N∈$\mathfrak{C}$(R)と正整数nについて、$\mathrm{Hom}_R(M,N)$の部分集合$(M,N)_n$を次のように定義する。

$(M,N)_n = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid X_i \in \mathfrak{C}(R)\ (0 \leq i \leq n)$と

$g_i \in \mathrm{Hom}_R(X_{i-1}, X_i)$が存在して、

(i) $X_0 = M$、$X_n = N$

(ii) $f = g_n \cdot g_{n-1} \cdots g_1$

(iii) 各$g_i$は条件(*)を充たす$\}$

ここで、R準同型$g: X \to Y$が条件(*)を充たすとは次のことである。

(*) XとYをそれぞれ直既約分解して、$X = \oplus_i X_i$、$Y = \oplus_j Y_j$と書く。このとき、$g = (g_{ij})$と書き表すことができる。但し、$g_{ij}: X_i \to Y_j$で

ある。このとき、どの$g_{ij}$も同型写像ではない。
定義によって、各$(M,N)_n$は$\mathrm{Hom}_R(M,N)$のR部分加群であり、$(M,N)_0=\mathrm{Hom}_R(M,N)$である。R部分加群の列；

$$(M,N)_0\supset(M,N)_1\supset(M,N)_2\supset\ldots\supset(M,N)_n\supset\ldots$$

が得られる。また、MとNが共に直既約であるときには、$(M,N)_1$はMからNへの分裂しない準同型の全体であることを注意しておこう。また、定義によって、$\mathfrak{m}(M,N)_n\subset(M,N)_{n+1}$となることも明らかであろう。特に、任意のnについて、$(M,N)_n/(M,N)_{n+1}$はkベクトル空間である。そこで、次のような数を考えよう。

$$\mathrm{irr}(M,N)=\dim_k(M,N)_1/(M,N)_2$$

このような定義をしたとき、一般論として次のようなことが証明できる。

補題G：$\sigma$：$0\to N\to E\to M\to 0$がAuslander-Reiten列であるとき、任意の直既約Maximal CM加群Lについて、次の等式が成立する。

$$\mathrm{irr}(L,M)=\mathrm{irr}(N,L)$$
$$=\text{直和因子としてEに含まれるLの個数}$$

さて、いよいよAuslander-Reiten Quiverの定義を述べよう。

定義：　RのAuslander-Reiten Quiver$\Gamma$は次のようにして定義される点線付きの有向グラフである。先ず、$\Gamma$の頂点集合は、R上の直既約Maximal CM加群の同型類全部から成る。$\Gamma$の2頂点[M]と[N]について、もし、$n=\mathrm{irr}(M,N)$が正であるときには、[M]から[N]に向かうn本の矢印を引く。更に、$\tau(M)=N$または$\tau(N)=M$であるときに、[M]と[N]を点線で結ぶのである。

Rが孤立特異点であるときには、定理Eによって、Auslander-Reiten列がいつでも存在する。補題Gによれば、$\sigma$：$0\to N\to E=\oplus E_i\to M\to 0$がAuslander-Reiten列のときには、Auslander-Reiten Quiverは局所的に次のようなグラフになることが知れるであろう。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & [E_1] & & \\
 & \nearrow & \vdots & \searrow & \\
[N] & & \text{--------} & & [M] \\
 & \searrow & \vdots & \nearrow & \\
 & & [E_n] & &
\end{array}
$$

いわばAuslander-Reiten Quiverは、Auslander-Reiten列がどのように存在しているかを指し示すグラフである。

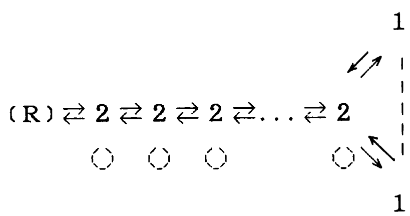
Rが１次元及び２次元の単純特異点であるときには、そのAuslander-Reiten Quiverを描くことができ、その具体的な形は次に示す通りである。

<u>図H</u>：（Ｉ）１次元の単純特異点のAuslander-Reiten Quiver（但し、数字はその頂点に対応する直既約ＭＣＭ加群の重複度を表わしている。）

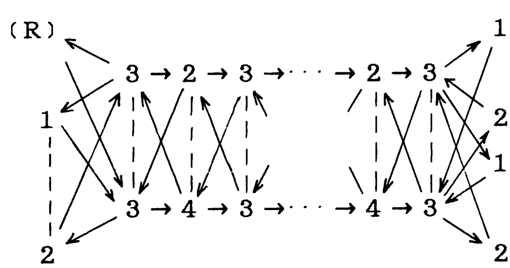
$A_n$型（ｎは偶数）；

$$(R) \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 2 \circlearrowleft$$

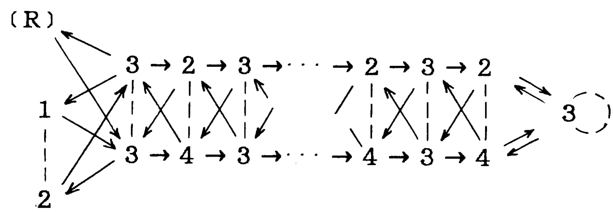
$A_n$型（ｎは奇数）；



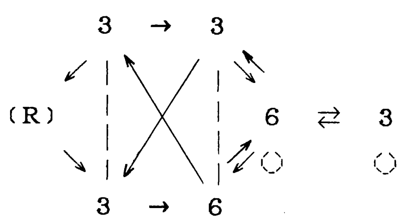

$D_n$型（ｎは偶数）；



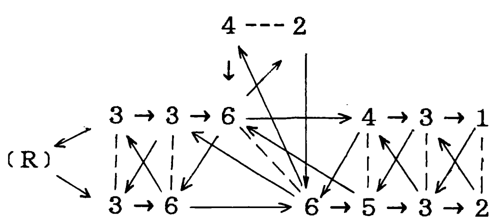
$D_n$型（nは奇数）；



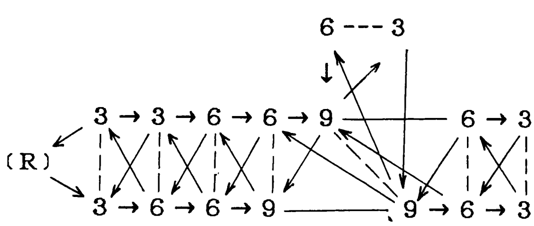
$E_6$型；



$E_7$型；



$E_8$型；



（ＩＩ）Ｋlein特異点のＡuslander-Ｒeiten Ｑuiver（各頂点の数字は対応する直既約Maximal ＣＭ加群の階数を表している。）

$A_n$型；

(R)

1 ⇄ 1 ⇄ 1 ⇄. . . ⇄ 1 ⇄ 1 ⇄ 1

$D_n$型；

(R)             1

2 ⇄ 2 ⇄. . . ⇄ 2 ⇄ 2

1              1

$E_6$型；

(R)

⇅

2

⇅

1 ⇄ 2 ⇄ 3 ⇄ 2 ⇄ 1

$E_7$型；

2

⇅

(R) ⇄ 2 ⇄ 3 ⇄ 4 ⇄ 3 ⇄ 2 ⇄ 1

$E_8$型；

3

⇅

(R) ⇄ 2 ⇄ 3 ⇄ 4 ⇄ 5 ⇄ 6 ⇄ 4 ⇄ 2

注意：２次元の単純特異点（Klein特異点）の場合には、Auslander-Reiten Quiverは対応する有限群のマッカイ・グラフと一致していることが知られている。特に、上のグラフで頂点の各数字は、その群の既約表現の次数と一致している。

このように、１次元及び２次元の単純特異点のAuslander-Reiten Quiverを描くことができた。高次元の場合には、次の定理によって、１次元または２次元の場合に帰着せられてしまうのである。

定理Ｉ（クネーラの周期性定理［14］）Ｒが超局面$S/(f)$であるとする。但し、Ｓはｋ上の形式的巾級数環、ｆはＳの非単元である。このとき、新たな環$R^{\#}$を次で定義する。

$$R^{\#}=S[\![y]\!]/(f+y^2)$$

すると、次のことが成立する。
(i) Ｒが有限表現型であることと$R^{\#}$が有限表現型であることは同値である。
(ii) ＲのAuslander-Reiten Quiverと$R^{\#\#}$のそれは一致している。
特に、Ｒが偶数次元の単純特異点であるときにはＲのAuslander-Reiten Quiverは２次元の場合のそれに、Ｒが奇数次元の単純特異点であるときには１次元の場合のそれと一致している。

## §５．Auslander-Reiten Quiverは何の役に立つのか

Auslander-Reiten Quiverを考える最大の効用は、先の問題(B)の解答がある程度得られることによる。基本的な定理は次に示すものである。

定理Ｊ（［17］）：Ｒを孤立特異点、ΓをＲのAuslander-Reiten Quiverとする。更に、$\Gamma^0$をΓのグラフとしての連結成分の１つとする。このとき、もし$\Gamma^0$の各頂点に対応する加群の階数（または重複度）らに上限があると仮定する。すると、$\Gamma=\Gamma^0$であって、Γは有限グラフでなくてはならない。特にこのときＲは有限表現型である。

この定理によってＲが有限表現型であるときには、問題(B)の解答が完全な形で得られることが分る。即ち、次が成立する。

系K：定理と同じ仮定のもとで更に$\Gamma^0$が有限グラフであると仮定する。このとき、$\Gamma=\Gamma^0$である。即ち、R上の直既約Maximal CM加群は$\Gamma^0$の頂点に対応する加群達で全部尽されている。

この系の応用を簡単な例で考えてみよう。

例L：3変数の巾級数環$S=k[[x,y,z]]$の2次のベロネーゼ部分環$R=k[[x^2,xy,y^2,yz,z^2,zx]]$を考えよう。Rは3次元のCM環であってGorensteinではないことを注意しておく。R上の直既約Maximal CM加群を全部求めるには、どうしたら良いであろうか。先ず、R上の直既約Maximal CM加群として、次の3個の同型でないものがあることは容易に分る。

{R、K＝Rの正準加群、M＝Kのfirst syzygy}

実は、これで全部なのである。問題は、それをどのように示すかにある。

次のように考えると良い。巾級数環Sの自己同型$\sigma$を、$\sigma(x)=-x$、$\sigma(y)=-y$、$\sigma(z)=-z$と定義し、この$\sigma$で生成される位数2の群をGと書くことにしよう。RはSのGによる不変式環$S^G$に一致していることに注意する。S上でKoszul複体を考える。

$$\kappa : 0\to\Lambda^3S^3\to\Lambda^2S^3\to S^3\to S\to k\to 0$$

これは、G加群としての複体でもある。そこで、Gのdeterminantで与えられるcharacterに対応するsemi-invariantを取ると、次の完全列が得られる。

$$0\to R\to K^3\to R^3\to K\to 0$$

これを2つの短完全列に分けて、

(+) $\qquad 0\to R\to K^3\to M\to 0,\quad 0\to M\to R^3\to K\to 0$

が得られる。この2つの完全列(+)がAuslander-Reiten列であることを見るのは、それほど難しくない。従って、RのAuslander-Reiten Quiverの1部分が描くことができて、それは次に示すようになる。

(L1)

$$\begin{tikzcd}
 & \lbrack R\rbrack \arrow[dl, shift left=2] \arrow[dl] \arrow[dl, shift right=2] \arrow[dr, dashed, dash, bend left] & \\
\lbrack K\rbrack \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[rr, dashed, dash, bend right] & & \lbrack M\rbrack \arrow[ul, shift left=2] \arrow[ul] \arrow[ul, shift right=2]
\end{tikzcd}$$

実は、これがAuslander-Reiten Quiverの1つの連結成分であることを示すのも容易なことである。そこで、系Kを使うと、これらの加群でR上の直既約Maximal CM加群は全て尽されていることが分るのである。

更に、定理Ｊによると、多元環の表現論で言われるところのブラウアー・スロール１型定理が、Maximal ＣＭ加群の圏においても成立することが分る。
<u>定理Ｍ</u>（［17］）：Ｒが孤立特異点であると仮定する。もし、ＭがＲ上の直既約Maximal ＣＭ加群の全部を動くときrank(Ｍ)（またはｅ(Ｍ)）に上限が存在するならば、Ｒは有限表現型である。

別の観点から、Auslander-Reiten Quiverを考える意味について考えてみよう。

$\mathfrak{M}$をＲ上の有限生成加群全部の成す圏とする。前に定義したMaximal ＣＭ加群の圏$\mathfrak{C}(R)$は$\mathfrak{M}$の充満部分圏である。$\mathfrak{M}$の任意の対象の十分後ろのシジジーは必ずMaximal ＣＭ加群であることから、$\mathfrak{M}$のグロタンディク群と$\mathfrak{C}(R)$のそれとは同型であることが容易に従う。

$$K_0(\mathfrak{M}) \simeq K_0(\mathfrak{C}(R))$$

実は多元環の場合のバトラーの定理が$\mathfrak{C}(R)$では成立することが確かめられ、$K_0(\mathfrak{C}(R))$がAuslander-Reiten Quiverから容易に計算できるのである。
<u>定理Ｎ</u>（［25］）：もしＲが有限表現型であるならば、$K_0(\mathfrak{C}(R))$は次のように計算することができる。Ｒ上の直既約Maximal ＣＭ加群でＲと同型でないものの同型類の全部を$\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$とする。そして、

$$0 \to M_{t(i)} \to \oplus_j M_{ij} \to M_i \to 0$$

を$M_i$で終るAuslander-Reiten列であるとする（$1 \leqq i \leqq n$）。
このとき、$K_0(R)$は、$\{[M_i] \mid 1 \leqq i \leqq n\} \cup \{[R]\}$で生成される自由アーベル群を次のような関係式で生成される部分群で割ったものである。

$$\{[M_i] + [M_{t(i)}] - \Sigma_j [M_{ij}] \mid 1 \leqq i \leqq n\}$$

<u>例Ｏ</u>：この定理を使って例Ｌの場合のグロタンディク群を計算してみよう。
この場合のAuslander-Reiten Quiverは図（Ｌ１）に示された通りである。
従って、この場合のAuslander-Reiten列は次のもので全てであることが、このグラフから読み取ることができる。

$$0 \to R \to K^3 \to M \to 0,\quad 0 \to M \to R^3 \to K \to 0$$

従って上記の定理によれば$K_0(\mathfrak{C}(R))$は３個の元$\{[R], [K], [M]\}$で生成される自由アーベル群を次の２つの関係式で割ったものであることが分る。

$$3[K] = [R] + [M],\ 3[R] = [K] + [M]$$

結局、$K_0(\mathfrak{C}(R))$は、$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$と同型であると結論することができるのである。

この例と同様にして、図Hで示された単純特異点についても、それらのグロタンディク群を計算することは容易である。各自試みられたい。

注意：(1)簡単な議論によって、Rが1次元の被約局所環のときには、$K_0(\mathfrak{M}) \simeq \mathbb{Z}^n$であることが分る。但し、nはRの極小素イデアルの個数を表わす。
(2)Rが2次元の正規整域ならば、

$$K_0(\mathfrak{M}) \simeq \mathbb{Z} \oplus Cl(R)$$

が成立する。ここで、Cl(R)はRの因子類群である。これを使って、2次元のGorenstein環で有限表現型であるような場合のAuslander-Reiten Quiverの純組み合わせ的な分類も可能である。

## §6．今後の問題は沢山あった方が良い

今後どのような問題が考えられるであろうか。問題点を箇条書にしてみる。

$\boxed{\text{問題点1}}$：3次元の有限表現型局所環であってGorensteinでない環の特徴付け：

環RがGorenstein環であるときには、有限表現型であることと単純特異点であることは同値であった。RがGorenstein環でなくても、1次元又は2次元の環のときには有限表現型であるための必要十分条件は既に分っている。しかし、3次元以上ではそのような条件は未だ知られていない。例Lで述べた$k[[x, y, z]]$の2次のVeronese部分環；

$$R = k[[x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx]]$$

が、今のところ、Gorensteinでない3次元の環で有限表現型であるような唯一の例である。

一般の3次元以上の環でその表現型を決めることは難しい。次のような問題を考えることも無駄ではなかろう。

問題：3次元の環はいつ有限表現型になるか。あるいは、3次元の有限表現型局所環でGorensteinでないものを全て求めよ。

$\boxed{\text{問題点2}}$：ブラウアー・スロール2型定理：

一般にR上のMCM加群の圏$\mathfrak{C}(R)$において、次の性質が成立するとき、多

元環の場合にならって、$\mathfrak{C}$(R)でブラウアー・スロール２型定理が成立するという。

(*)もし$\mathfrak{C}$(R)が有限表現型でなければ、無限個の正整数ｎに対して、

{Ｍの同型類｜Ｍは直既約ＭＣＭ加群でｅ(Ｍ)＝ｎ}は無限集合である。

ブラウアー・スロール２型定理が成立すれば、ブラウアー・スロール１型定理（定理Ｍ）も成立することは明らかである。一般の孤立特異点においてこの定理が成立すると思われるが、今のところ、次のようなクラスの環についてのみ正しいことが検証されているに過ぎない。

（ａ）１次元の完備被約局所環で剰余体が無限体であるようなもの。

（Greuel-Knoerrer [12]）

（ｂ）２次元のGorenstein正規局所環で、剰余体が標数０の場合。

（吉野 [19]）

（ｃ）一般次元の超曲面。（Dieterich [9]）

これ以外の環のクラスについては何も分っていないのが現状である。一応、予想をきちんと書いておこう。

予想 [ブラウアー・スロール２型予想]：無限な完全体上の局所解析代数Ｒが Cohen-Macaulay環で、孤立特異点を持つものとする。このとき、Ｒ上のＭＣＭ加群の圏$\mathfrak{C}$(R)について、ブラウアー・スロール２型定理が成立するであろう。

問題点３：maximal Buchsbaum加群について：

ＭＣＭ加群とともに興味深い対象としてmaximal Buchsbaum加群がある。局所環Ｒが正則局所環であるときには、Ｒ上の直既約なmaximal Buchsbaum加群は有限個しかないことが、後藤四郎氏によって証明されている。逆に、直既約なmaximal Buchsbaum加群の同型類が有限個しかないような環はどのようなものであろうか。実は次の定理が最近証明された。

定理（Goto-Nishida [38]）：Ｒが２次元以上の完備Cohen-Macaulay局所環で、Ｒの剰余体は標数が２ではない代数閉体であるとする。このとき、もしＲ上の直既約maximal Buchsbaum加群の同型類が有限個しかなければＲは正則局所環でなくてはならない。

このようにある種の加群のクラスについて、それが有限表現型かどうかを問題にするとき、それから環Ｒの構造が決ってしまうようなものが（ＭＣＭ加群

とmaximal Buchsbaum加群以外に）他にあるであろうか。これは、興味深い問題である。

$\boxed{\text{問題点4}}$：<u>２次元の有理２重点とＭＣＭ加群</u>：

標数０の代数閉体上の２次元完備局所環Ｒを考える。Ｒが単純特異点であるとき、Ｒは有理２重点であるともいう。$X = \mathrm{Spec}(R)$とおいて、このＸのminimal resolution $\pi : Y \to X$を取る。Ｘの閉点のファイバーを$E = \cup E_i$（$E_i$は既約）と書く。Ｒが有理２重点であるときには、各$E_i$は有理曲線である。このとき、Ｒ上の直既約ＭＣＭ加群の集合とこの$\{E_i\}$の間には次のような意味で１対１の対応がある。（Artin-Verdier [1]）

Ｒ上のＭＣＭ加群Ｍに対して、

$$M^{\sim} = \pi^* M / m\text{-torsion}$$

と置く。$M^{\sim}$はＹ上のベクトル束である。この$M^{\sim}$のチャーン類$c_1(M^{\sim})$を考える。Ｍ（$\not\cong R$）が直既約であるときには、次の条件を満たす$E_i$が一意的に定まる。

$$(c_1(M^{\sim}) \cdot E_i) = 1$$

この対応$M \to E_i$によって、直既約ＭＣＭ加群（$\not\cong R$）の同型類の集合と$\{E_i\}$の間の全単射が得られるのである。もっと詳しく、ＲのAuslander-Reiten Quiverの安定部分と$\{E_i\}$の双対グラフは同型であることが分る。（どちらもディンキン図形である。）ＲをKlein群Ｇの不変式環と見たときには、図Ｈの後で注意したように、Ｇのマッカイ・グラフとＲのAuslander-Reiten Quiverとの対応は分っている。これと上のことと合せて、いわゆるMcKay observationというものの説明が与えられる。（詳しくはArtin-Verdier [1] を参照せよ。）

Ｒが有理２重点のときには、このようにＲのAuslander-Reiten Quiverには十分な幾何学的意味が与えられる。一般の単純特異点ではどうであろうか。もっと一般に、任意の孤立特異点の上のAuslander-Reiten Quiverに幾何学的意味を持たせることが可能であろうか。

## REFERENCES

### Maximal CM加群についての参考文献


[ 1] M. Artin and J.-L. Verdier; Reflexive modules over rational double points, Math. Ann. 270(1985), 79-82.

[ 2] M. Auslander; Rational singularities and almost split sequences, Trans. AMS 293, no. 2(1986), 511-531.

[ 3] M. Auslander; Isolated singularities and existence of almost split sequences, Proc. ICRA IV, Springer Lecture Notes in Math. 1178(1986), 194-241.

[ 4] M. Auslander and I. Reiten; Almost split sequences for rational double points, preprint(1986).

[ 5] M. Auslander and I. Reiten; Almost split sequences for Cohen-Macaulay modules, preprint(1986).

[ 6] M. Auslander and I. Reiten; Almost split sequences for $\mathbb{Z}$-graded rings, preprint(1986).

[ 7] M. Auslander and I. Reiten; Almost split sequences for abelian group graded rings, preprint(1986).

[ 8] R. Buchweitz, G. M. Greuel and F.-O. Schreyer; Cohen-Macaulay modules over hypersurface singularities II, preprint, Universitat Kaiserslautern(1986).

[ 9] E. Dieterich; Reduction of isolated singularities, preprint, Brandeis University(1986).

[10] E. Dieterich and A. Wiedemann; The Auslander-Reiten Quiver of a simple curve singularity, Trans. AMS 294, no. 2, (1986), 455-475.

[11] D. Eisenbud; Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations, Trans. AMS 260 (1980), 35-64.

[12] G.-M. Greuel and H. Knoerrer; Einfach Kurvensingularitaten und torsionfreie Moduln, Math. Ann. 270(1985), 417-425.

[13] J. Herzog; Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen unzerlegbaren Cohen-Macaulay Moduln, Math. Ann. 233 (1978), 21-34.

[14] H. Knoerrer; Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I, preprint(1985).

[15] K. Kiyek and G. Steinke; Einfach Kurvesingularitaten in beliebiger Characterstik, Arch. Math. 45(1985), 565-573.

[16] I. Reiten; Cohen-Macaulay modules over isolated singularities, preprint(1985).

[17] Y. Yoshino; Brauer-Thrall type theorem for maximal Cohen-Macaulay modules, preprint, Nagoya Univ. (1986).

[18] 吉野雄二；多元環の表現論におけるsingularity及びCohen-Macaulay加群Ｉ，多元環の表現論シンポジウム報告集(1986), 58-76.

[19] 吉野雄二；Maximal Cohen-Macaulay moduleに対するBrauer-Thrall型定理，第３２回代数学シンポジウム報告集(1986).

[20] 吉野雄二；Hensel環上のMaximal CM加群、東京都立大学講義録(1986).

[21] Y. Yoshino and T. Kawamoto; The di-canonical module of a normal local domain of dimension 2, preprint, Nagoya Univ. (1986).

## 多元環の表現論からの文献

[22] M. Auslander; Representation theory of artin algebras I; II, Comm. Alg. 1(1974) 177-268; Comm. Alg. 2(1974), 269-310.

[23] M. Auslander; Functors and morphisms determined by objects, Proc. Conf. Representation Theory, Philadelphia 1976, Marcel Dekker(1978), 1-244.

[24] M. Auslander and I. Reiten; Representation theory of artin algebras III; IV, Comm. Alg. 3(1975), 239-294; Comm. Alg. 5(1977), 443-518.

[25] M. C. R. Butler; Grothendieck groups and almost split sequences, Springer Lecture Notes in Math. 882(1981), 357-368.

[26] J. A. Drozd and A. V. Roiter; Commutative rings with a finite number of indecomposable integral representations(Russian),

Izv. Akad. Nauk. SSSR 31(1967),783-798.

[27] E. L. Green and I. Reiner; Integral representations and diagrams, Michigan Math. J. 25(1978),53-84.

[28] M. Harada and Y. Sai; On categories of indecomposable modules I, Osaka J. Math. 8(1971),309-321.

[29] G. Hochschild; Cohomology groups of an associative algebra, Ann. Math. 46(1945),58-67.

[30] H. Jacobinsky; Sur les ordres commutatifs avecun nombre fini de reseaux indecomposables, Acta Math. 118(1976),1-31.

[31] R. S. Pierce; Associative algebras, Graduate Texts in Math. no. 88, Springer-Verlag, 1982.

[32] C. M. Ringel; Report on the Brauer-Thrall conjectures, Proc. ICRA I, Ottawa, Springer Lecture Notes in Math. 831(1980), 104-136.

[33] A. V. Roiter; Unbounded dimensionality of indecomposable representations of an algebra with an infinite number of indecomposable representations, Izv. Acad. Nauk SSSR, 32 (1968), 1275-1282.

[34] K. Yamagata; On artin rings of finite representation type, J. Alg. 50(1978),276-283.

## その他の文献

シジジーについて；

[35] M. Auslander and M. Bridger; Stable module theory, Mem. Amer. Math. Soc., no. 94, 1969.

[36] E. G. Evans and P. Griffith; Syzygies, London Math. Soc. Lecture Notes Series no. 106, Cambridge Univ. Press, 1985.

単純特異点について；

[37] W. Barth, C. Peters and A. Van De Ven; Compact complex surfaces, Erg. d. Math. Band 4, Springer-Verlag, 1984.

Maximal Buschsbaum加群について；

[38] S. Goto and K. Nishida; On the number of isomorphic classes of indecomposable maximal Buchsbaum modules, preprint(1986).

# 2次元完備正規局所整域の di-canonical module

川本　琢二　　　名大理
吉野　雄二　　　名大理

$(R,m)$ を２次元完備正規局所整域とする。canonical module を $K$ とし、有限生成 reflexive ( maximal Cohen-Macaulay ) $R$-modules 全体の category を $C(R)$ と書く。$C(R)$ の直既約な objects の同型類が有限個であるとき、$C(R)$ は有限表現型であるといわれる。

**定義**　$\mathrm{Ext}^1_R(m,K) \cong R/m$ だから、分裂しない完全系列

$$0 \to K \to E \to m \to 0$$

が同型の違いを除いて唯一つ存在する。従って $E$ は $R$ に対して一意に定まるので、この $E$ を $R$ の di-canonical module と呼ぶ。

完全系列が分裂しない事から、$E$ は $C(R)$ の object であることがわかる。また、rank $E = 2$ であるから、次の２つの場合がある。

1) $E$ は、直既約。

2) $E$ は、２つの $R$ の reflexive ideals の 直和に同型。

さて、$C(R)$ における AR-理論 [1] によれば、$R$ へ入る $C(R)$ の既約な準同型射の数は、1) 2) それぞれ １本、２本 となる。ここでは次の条件、

*) $C(R)$ が有限表現型であって、$R$ へ入る $C(R)$ の既約な準同型射がちょうど２本ある。

の必要十分条件を２つの場合について述べよう。

その前に、AR-quiver 等の定義と、key lemma ( 定理 0 ) について述べる。

AR-quiver とは点線付きのグラフ $\Gamma$ であって、頂点の集合は $C(R)$ の直既約な objects の同型類全体、$M$ から $N$ へ既約な準同型射があるとき $M$ の類から $N$ の類に矢印を引く、そして $N = \tau(M)$ のとき $M$ の類と $N$ の類を点線で結ぶ。ここで、準同型射 $f : M \to N$ が既約であるとは、$C(R)$ の可換図形

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

があるとき $g$ が分裂単射または $h$ が分裂全射となることである。また、$\tau : C(R) \to C(R)$ は AR-translation と呼ばれるもので $\tau(M) = (M^*)^\vee$ で与えられる。ここで $(\ )^*$, $(\ )^\vee$ はそれぞれ $R$, $K$ による dualization である。

次に、AR-sequence の定義をする。それは、$C(R)$ の完全系列

$$0 \to \tau(M) \to N \to M \to 0 \qquad ( M \not\cong R\ ,\ \tau(M) \not\cong K )$$

で、M が直既約 ( 従って $\tau(M)$ もそう ) なものであって、次の性質を満たすものである。すなわち、C(R) の object X と、分裂全射でない準同型射 $f: X \to M$ に対し、

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \tau(M) & \to & N & \to & M & \to & 0 \\
 & & & & {}^{g}\nwarrow & & \nearrow{}_{f} & & \\
 & & & & & X & & &
\end{array}
$$

を可換にする $g: X \to N$ が存在する。

R が正規であると、AR-sequence は M に対して一意に存在する。この sequence を、Mに終る AR-sequence と呼ぶ。また、$N = \oplus N_i$ を直既約な C(R) の objects への直和分解とすると、M へ入る既約な準同型射は、$N_i \to M$ 達に ( 同様に、$\tau(M)$ から出る既約な準同型射は、$\tau(M) \to N_i$ 達に ) 限る事が知られている。([1]) すなわち、すべての AR-sequence が分かれば、AR-quiver が書ける事になる。ただ例外があり、R の同型類に入る矢印 ( 及び、K の類から出る矢印 ) を決める手段がない。その為の情報として di-canonical module E が重要になってくるのである。次の定理が key lemma となる。

定理 0 [3] (R, m) を完備な2次元正規局所整域とし、その di-canonical module を E とおく。もし E が直和分解するなら、C(R) は有限表現型である。

証明 maximal Cohen-Macaulay module に関する Brauer-Thrall 型定理 [2; Th(1.1)] によれば、Γ を R の AR-quiver、$\Gamma^\circ$ を R の類を含む Γ の連結成分とする時、もし、

$$\sup\{\operatorname{rank} M \mid M \text{ は } \Gamma^\circ \text{ の 頂点}\} < \infty$$

なら、$\Gamma = \Gamma^\circ$ で、C(R) は有限表現型となる。そこで証明としては、$\Gamma^\circ$ を具体的に書く事が必要になる。初めの完全系列を少し変えた完全系列

$$0 \to K \to E \to R$$

を考える。実はこれが、Rに終わる AR-sequence の様なものになる。すなわち X を C(R) の object で R を直和因子に含まないものとすると、次の完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(X, K) \to \mathrm{Hom}_R(X, E) \to \mathrm{Hom}_R(X, R) \to 0$$

を得る。すなわち X から R への分裂全射でない準同型射は、E までもち上がるのである。従って、 di-canonical module が2つの reflexive ideals に直和分解 $E = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ したとすると、R へ入る既約な準同型射は、$\mathfrak{a}$ 及び $\mathfrak{b}$ からのちょうど2本あることになる。次に、M を C(R) の直既約な object で、R と同型でないものとすると、

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M^*, K) \to \mathrm{Hom}_R(M^*, E) \to \mathrm{Hom}_R(M^*, R) \to 0$$

すなわち、

$$0 \to \tau(M) \to \mathrm{Hom}_R(M^*, \mathfrak{a}) \oplus \mathrm{Hom}_R(M^*, \mathfrak{b}) \to M \to 0$$

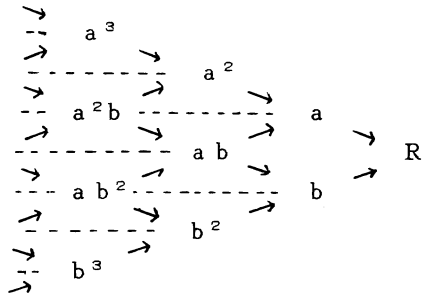
を得るが、これが M に終る AR-sequence になることもわかる。ここでもし rank M = 1 なら真中の直和分解は、これ以上分解できない。$\mathfrak{c} = M$ と書いて記号的に、

0-1) $$0 \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \to \mathfrak{a}\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{b}\mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \to 0$$

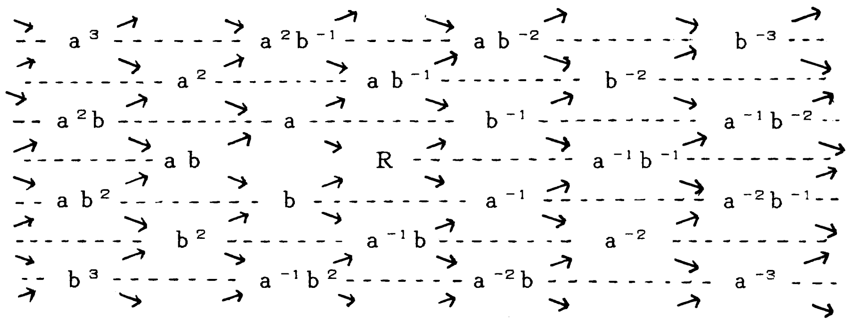
と書いておく。( 実際 reflexive ideals I, J に対して、$\mathrm{Hom}_R(I^*, J) = (IJ)^{**}$ 。また、$K = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{**}$。) 同様に、

0-2) $$0 \to \mathfrak{a}\mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to R$$

以上で C(R) の任意の直既約な object に対してそこへ入る(そこから出る)既約な準同型射がわかった。$\Gamma^{0}$ を書いてみよう。まず、R に入る矢印は 0-2) より a と b からで合計2本ある。次にaに入る矢印は 0-1) において c = a と置くと $a^2$ と ab からの2本である。c = $a^2$ 或いはc = ab について同様にしてこれを続ける。b についても a と同様にして続けると次のグラフ



が得られる。次に R から出る矢印は、0-2') において、$c = (ab)^* = a^{-1}b^{-1}$ とおけば $a^{-1}$ と $b^{-1}$ への2本であることがわかる。これを続けて $\Gamma^{\circ}$



を得る。これらはすべて rank 1 だから、証明の最初にある通りこれが AR-quiver Γ でありしかも有限グラフとなり、従って C(R) は有限表現型である。　　証明終り

<u>I) R/m ≅ $\mathbb{C}$ の場合</u>

C(R) の有限表現性については、Auslander によって次の命題が示された。

<u>命題</u> [1;Th(4.9)]　(R, m, $\mathbb{C}$) を完備な2次元正規局所整域とすると、C(R)が有限表現型であるためには、R が quotient singularity であることが必要十分である。

<u>定理 1</u> [3;THEOREM(2.1)]　(R, m, $\mathbb{C}$) を完備な2次元正規局所整域とする。E を R の di-canonical module とすると、条件 *) 及び、次の各条件 (i),(ii) は同値である。

(i) E は、直和分解する。

(ii) R は、cyclic quotient singularity。

注意　$R$ が Gorenstein の場合は、$A_n$ の rational double point として知られている。

証明　まず、$R$ が quotient singularity の時の $E$ を決定する。

$G \hookrightarrow GL(V)$ を 有限群 $G$ の $\mathbb{C}$ 上2次の線形表現とする。この表現を、$S = S(V)^\wedge$（但し $^\wedge$ は $S$ の斉次な極大 ideal による完備化を表わす。）に自然に拡張し、$R = S^G$ と書いて、$(R, m)$ を quotient singularity と呼ぶ。さらに、$G$ は pseudo reflection を含まないとして良い。

さて、$V$ の basis を $X, Y$（すなわち $S = \mathbb{C}[\![X,Y]\!]$）と書く時、$S$ 上の Koszul Complex

$$0 \to S\,dX\wedge dY \to S\,dX \oplus S\,dY \to S \to \mathbb{C} \to 0$$

に $G$ の作用が自然に次のように定義される。

$$\begin{aligned}(s\,dX\wedge dY)^g &= (\det g)\, s^g dX\wedge dY \\ (s\,dX)^g &= s^g d(X^g) \qquad\qquad s \in S \quad g \in G \\ (s\,dY)^g &= s^g d(Y^g)\end{aligned}$$

$G$ で invariant をとる作用は完全だから $(S\,dX\wedge dY)^G = K$, $S^G = R$ に注意して次の完全系列

$$0 \to K \to E' \to m \to 0$$

を得る。$E'$ は free $S$-module の直和因子として MCM $R$-module になるから、この完全系列は分裂しない。よって di-canonical module $E$ は

$$E = (S\,dX \oplus S\,dY)^G$$

で与えられる。定理の証明に移ろう。

(ii) → (i)　$G$ が cyclic なら作用を対角化できる。すなわち

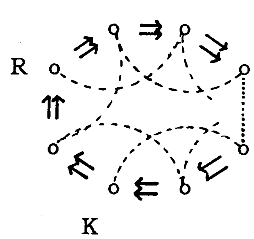
$$E = (S\,dX \oplus S\,dY)^G = (S\,dX)^G \oplus (S\,dY)^G$$

と直和分解する。

(i) → (ii)　定理 0 及び命題によって $R$ は quotient singularity である。さらに定理 0 は、$R = S^G$ と書く時 $G$ の既約表現は皆次数1であることもいっている。すなわち $G$ は アーベル群である。さらに $G$ が pseudo reflection を含まないなら $G$ は cyclic となる。　証明終り

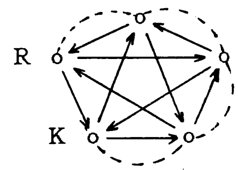
定理 1 の状況では AR-quiver を簡単に書くことが出来る。

例 1　[3; (3.2)]　$R = \mathbb{C}[\![X^n, X^{n-1}Y, \cdots, Y^n]\!]$（$\mathbb{C}[\![X,Y]\!]$ の $n$ 次の Veronese 部分環）の場合の AR-quiver は次の通り。

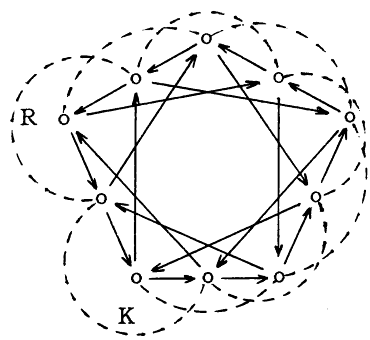



（ n個の頂点 ）

例 2 〔3;(3.3)〕 $R = \mathbb{C}[\![X^5, X^3Y, XY^2, Y^5]\!]$ の場合の AR-quiver は次の通り。




例 3 〔3;(3.4)〕 $R = \mathbb{C}[\![X^{10}, X^7Y, X^4Y^2, XY^3, Y^{10}]\!]$ の場合の AR-quiver は次の通り。




II) R が Gorenstein の場合

補題 R を Gorenstein とする。C(R) が有限表現型なら R は hypersurfaceである。

以下 R は等標数で R の剰余体 $k$ は代数閉体であるとする。

記号 $F(X,Y,Z)$ を $k[\![X,Y,Z]\!]$ の元で2次以上とする。適当な変数変換を行なうと、

$$F = O(3)\ ,\ X^2 + O(3)\ ,\ XY + O(3)\ ,\ XY + Z^2 + O(3)$$

の四つの場合に分けられる。ここで $O(3)$ は、3次以上の部分を表わす。それぞれ、 $\mathrm{rank}(F) = 0$, 1,2,3 と書く。( これは、$k$ の標数が2でなければ、$F = G + O(3)$ ( $G$ は2次の斉次部分 ) と書くときの $G$ の Hesse matrix の rank に他ならない。 )

定理 2 〔3;THEOREM(4.1)〕 $(R, m, k)$ を、完備な2次元正規局所整域で等標数であり、$k$ は代数閉体であるとし、E を R の di-canonical module とする。さらに、R が Gorenstein なら、条件 *) 及び、次の各条件 (i),(ii) は同値である。

(i) E は、直和分解する。

(ii) R は、正則環。或いは、$R = k[\![X,Y,Z]\!]/(F(X,Y,Z))$ で、$\mathrm{rank}(F) = 2$ または 3。

証明 R が正則環なら $E = R \oplus R$ である。逆に E が R を直和因子に持ったとし、例えば $a \cong R$ なら、今 $K \cong R$ だから $b \cong (a^*K)^{**} \cong R$ である。すなわち 0-2) は、

$$0 \to R \to R \oplus R \to m \to 0 \qquad (\text{完全})$$

となるから R は正則環である。よって条件 (i) においては E は R を直和因子に持たない、また条件 (ii) においては R は正則環でないという仮定をして良い。

まず、R が 正則でない hypersurface の時の E を決定する。$R = k[[X,Y,Z]]/(F(X,Y,Z))$ とおく。R が正則でないから F は2次以上である。適当に $F_X$ , $F_Y$ , $F_Z \in k[[X,Y,Z]]$ をとって、

$$F = XF_X + YF_Y + ZF_Z$$

と書く。$X,Y,Z,F_X,F_Y,F_Z$ の R における image をそれぞれ $x,y,z,f_x,f_y,f_z$ と小文字で表わす。すると R 上 $k$ の minimal free resolution は、

$$\cdots \xrightarrow{D} R^4 \xrightarrow{C} R^4 \xrightarrow{D} R^4 \xrightarrow{C} R^4 \xrightarrow{B} R^3 \xrightarrow{A} R \to k \to 0$$

となる。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & f_z & -f_y & x \\ -f_z & 0 & f_x & y \\ f_y & -f_x & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -f_x \\ z & 0 & -x & -f_y \\ -y & x & 0 & -f_z \\ f_x & f_y & f_z & -0 \end{pmatrix}$$

である。但し、$R^n$ の元は横 vector とみなす。

この時、E は $k$ の 3rd syzygy すなわち E = Coker D である ([3;LEMMA(1.6)]) 。ところで、先の仮定より、E が直和分解する事と、行列 D が二つの 2 X 2 行列に分解する事が同値になる事を注意しよう。従って行列 D の左右に $GL(4,R)$ の元を施して二つの 2 X 2 行列に分解するかどうかを見ればよい。以上のことを念頭において証明に入ることにしよう。

(i) の仮定のもとで定理 0 及び補題を適用すると、R は hypersurface になることがわかるので、はじめから $R = k[[X,Y,Z]]/(F(X,Y,Z))$ を正則でないとし、rank(F) で場合分けする。

rank(F) = 2 または 3 の場合。

定義より $F = XY + cZ^2 + O(3)$ ( c = 0 または 1 ) とおき、

$$f_x = y + O(2)\ ,\ f_y = O(2)\ ,\ f_z = cz + O(2)$$

とする。すると行列 D は、

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -y+O(2) \\ z & 0 & -x & O(2) \\ -y & x & 0 & -cz+O(2) \\ y+O(2) & O(2) & cz+O(2) & 0 \end{pmatrix}$$

となる。D が反対称行列であること及び R が完備であることに注意してうまく $Q \in GL(4,R)$ をとれば、

$$QD^tQ = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

と変形出来る。よって di-canonical module E が分解する。

rank(F) = 0 の場合。

定義より $F = O(3)$ であるから当然 $f_x = O(2)$ , $f_y = O(2)$ , $f_z = O(2)$。$R/m^2$ に reduce して考えると D は、3 X 3 と 1 X 1 の行列に分解している。もし最初から D も分解していたと

すればやはり 3 X 3 と 1 X 1 の行列であり、先の注意に矛盾する。よって di-canonical module E は直和分解しない。

rank(F) = 1 の場合。

初めに幾つか記号の定義をする。

R の任意の元 r に対し、$k[\![X,Y,Z]\!]$ における原像の0次（1次）の部分を $I_0(r)$（$I_1(r)$）と書く。deg(F) = 2 だからこれらは r に対して一意に決まる。そして、$M = (r_{ij})$ を R 係数の p X q 行列とする時、$M_k = (I_k(r_{ij}))$（$k = 0,1$）と置いてそれぞれ M の0次（1次）の原像と呼ぶ。次に、M を R 係数の p X q 行列で、各成分が m の元だとする。$V_t(M)$（$1 \leqq t \leqq \min(p,q)$）で M の1次の原像 $M_1$ の t 次の小行列式で生成される $k$-vector space を表わす。形式的に $V_0(M) = k$, $V_t(M) = 0$（$t > \min(p,q)$, $t < 0$）と置いてやれば、$M = N \oplus L$ なら $V_t(M) = \Sigma_i V_i(N)V_{t-i}(L)$ が成り立つ。ただし積は $k[\![X,Y,Z]\!]$ で考えることとする。また、二つの行列 M, N に $N = PMQ$（P, Q は可逆行列）の関係があれば、$V_t(M) = V_t(N)$ である。なぜならそれぞれの原像をとると $N_1 = P_0M_1Q_0$ が成り立ち、$P_0$, $Q_0$ はやはり $k$ 係数の可逆行列だからである。

証明は次のようにする。定義より $F = X^2 + O(3)$ だから、$f_x = x + O(2)$, $f_y = O(2)$, $f_z = O(2)$ である。このことから、$V_i(D)$ を具体的に書く。また二つの 2 X 2 行列 F, G の直和 $E = F \oplus G$ になったとして $V_i(F \oplus G)$ をも具体的に書く。すると矛盾がでてくるのである。よって、di-canonical module E は直和分解しない。詳しくは、参考文献 [3] を見てほしい。

以上の三つの場合によって定理の証明が完結する。

例 4 [3;EXAMPLE(4.4)]　$f = x^2 + y^2 + x^3 + y^3 + z^3 + z^4$ とする。$R = k[\![x,y,z]\!]/(f)$ は $k$ の標数 p に関係なく正規である。もし p = 2 なら E は直既約であり、p ≠ 2 なら E は直和分解する。

## 参考文献


[1] M. Auslander, Rational singularities and almost splitsequences, Trans. A.M.S. 293, no.2 (1986), 511-531.

[2] Y. Yoshino, Brauer-Thrall type theorem for maximal Cohen-Macaulay modules, in preprint(1986).

[3] Y. Yoshino and T. Kawamoto, The di-canonical module of a normal local domain of dimension 2, in preprint(1986).

# 局所環の微分加群について

五十川 読 （広大 理）

Herzog と Waldi による次の結果の紹介です。

「R が complete intersection の linkage class にはいれば，Berger 予想は正しい。」

Berger予想というのは，$k$：体，ch $k=0$，$\mathcal{C}(k)=\{R \cong k[[X_1,\dots,X_n]]/I\}$ としたとき，$R\in\mathcal{C}(k)$：dim $R=1$，reduced であれば，

"$R$ : regular $\Leftrightarrow \Omega_{R/k}$ : torsion free"

というものです。ここで，$\Omega_{R/k}$ は universally finite module of differentials のことです。又，R が regular であれば，$\Omega_{R/k}\cong R$ となることはよく知られています。

羅列になりますが，記号を導入しておきます。

$R\in\mathcal{C}(k)$ : dim $R=1$, reduced. $A\subset R$ : a noetherian normalization.
$Q(R)$ : total ring of fractions. $\bar{R}$ : integral closure of $R$ in $Q(R)$.
$\Omega_{R/A}$, $\Omega_{R/k}$ : universally finite module of differentials.
$\tau\Omega_{R/k}$ : torsion part of $\Omega_{R/k}$. tr : $Q(R)\to Q(A)$ natural trace map.
$\mathfrak{C}(R/A) := \{y\in Q(R) \mid \mathrm{tr}(ry)\in A$, for all $r\in R\}$ : complementary module.
$\bar{d} : \bar{R}\longrightarrow \Omega_{\bar{R}/k}$ : universal $k$-derivation
$\omega_{R/k} := \mathfrak{C}(R/A)\bar{d}x \subseteq \Omega_{\bar{R}/k}\otimes Q(R)$ ($A=k[[x]]$, $x\in R$) : module of regular differential forms. ($\omega_{R/k}$ は $A\subset R$ : noetherian normalization のとり方によらない。). $c_R : \Omega_{R/k}\to\omega_{R/k}$ cannonical map (fundamental class).

$\ell$ で module の長さを表わすことにすると，$\Omega_{R/k}$ の torsion part の長さに関して，次が成立します。

$$
\text{“}\ \ell(\tau\Omega_{R/k}) = \ell(\Omega_{R/A}) - \ell(\mathfrak{C}(R/A)/R) + \ell(\mathrm{coker}\, c_R)
$$
$$
\ell(\mathrm{coker}\, c_R) \geq \ell(\bar{R}/R)\ \text{”}
$$

又，R が complete intersection なら，$\ell(\tau\Omega_{R/k}) = \ell(\mathrm{coker}\, c_R)$ となることが知られています。

$\varphi : B \to C$ $k$-algebra hom in $\mathcal{C}(k)$ に対して, $C \simeq B[\![x_1, \dots, x_m]\!]/I$ のとき, $I \subset B[\![x_1, \dots, x_m]\!]$ に関するTate-resolutionを利用して, cotangent complexと呼ばれる有限生成自由$C$-加群のcomplex $(L_\cdot, \partial)$ が定義されます。(くわしくは, HerzogとWaldiの論文によって下さい。) ここで, $M$を$C$-moduleとして, $T_i(C/B, M) := H_i(L_\cdot \otimes_C M)$, $T^i(C/B, M) := H^i(\mathrm{Hom}_C(L_\cdot, M))$ とすると次が成立します。($T_i, T^i$は$C$の表現のしかたすなわち$I$のとり方や, Tate-resolutionのとり方にはよらないことがわかっています。)

"$T_0(C/B, M) \simeq \Omega_{C/B} \otimes_C M \quad , \quad T^0(C/B, M) \simeq \mathrm{Der}_B(C, M)$"

さらに$\varphi$:全射のとき, $\ker\varphi = I$とおくと,

"$T_1(C/B, M) \simeq I/I^2 \otimes_C M \quad , \quad T^1(C/B, M) \simeq \mathrm{Hom}_C(I/I^2, M)$"

又, $B \to C \to D$ : $k$-algebra hom in $\mathcal{C}(k)$, $M$: $D$-moduleとすると, $T_i, T^i$に関する次のexact sequenceが存在します。

"$\to T_{i+1}(D/C, M) \to T_i(C/B, M) \to T_i(D/B, M) \to T_i(D/C, M) \to$ (exact) $(i = 0, 1, 2, \dots)$,

$\to T^i(D/C, M) \to T^i(D/B, M) \to T^i(C/B, M) \to T^{i+1}(D/C, M) \to$ (exact) $(i = 0, 1, 2, \dots)$"

<u>定義</u> $R \in \mathcal{C}(k)$ : $\dim R = 1$, reducedに対して,

$R$ : smoothable curve singularity $\overset{\text{def}}{\iff}$ $R \simeq S/(z_1, \dots, z_n)S$ for some $S \in \mathcal{C}(k)$ : normal
$z_1, \dots, z_n \in S$ : regular seq.

(ここで, $S$がregularにとれれば, complete intersectionとなりますから, 'smoothable'というのはcomplete intersectionの一般化と思うことができます。)

次に, 主定理を述べます。

<u>定理</u> $R$ : smoothable curve singularityのとき, 次が成立。

$$(-1)^j \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \ell(T_i(R/A, R)) \geq (-1)^j \ell(\Gamma(R/A)/R) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

($T_{j+1}(R/A, R) = 0$ ならば等号成立。)

ここで, $A \subset R$ : noetherian normalizationで, 各$i$について, $\ell(T_i(R/A, R)) < \infty$ となっていることに注意します。

Rがcomplete intersectionのlinkage classにはいれば，$T_2(B/A, R)=0$で，さらにsmoothableなので，'定理'において，$j=1$として，$\Omega_{B/k}$のtorsion partの長さに関する等式'$\ell(\tau\Omega_{B/k})=\ell(\Omega_{B/A})-\ell(I(B/A)/R)+\ell(\mathrm{coker}\,C_R)$'とくらべてやることにより，'$\ell(\tau\Omega_{B/k})=\ell(\mathrm{coker}\,C_R)+\ell(T_1(B/A,R))$'がわかる。
又，$R\simeq P/I$ ($P=k[[X_1,\cdots,X_n]]$)のとき，$k\to P\to R$にassociateしたexact sequenceを書いて，rankを見ることによって，$T_1(R/k,R)\simeq\tau I/I^2$がわかり，さらに，$k\to A\to R$ ($A\subset R$: noetherian normalization)にassociateしたexact sequenceを書くことによって，$T_1(R/k,R)\subset T_1(B/A,R)$がわかる。したがって次の系が得られた。

系. R: complete intersectionのlinkage classにはいれば，

$$\ell(\tau\Omega_{B/k})=\ell(\mathrm{coker}\,C_R)+\ell(\tau I/I^2)$$

ここで，$\ell(\mathrm{coker}\,C_R)\geq\ell(\bar{R}/R)$に注意すれば，$\tau\Omega_{B/k}=0$であれば，$\bar{R}=R$，すなわち，Rがregularであることがわかる。

最後に，順番が前後しましたが，linkageに関する定義と注意を与えておきます。
P: Gorenstein local ring，$P\supset I, J, K$をperfect ideal，same gradeとして，$I\cap J\supsetneq K$，$K:I=J$，$K:J=I$が成り立って，さらにKがregular sequenceで生成されているとき，IとJはKによってlinkedするといいます。又，$R=P/I$と表わされていて，Pのideal $I_0,\cdots,I_{n-1}, I_n=I\subset P$が存在して，$I_0$はregular sequenceで生成され，$I_i$と$I_{i+1}$ ($0\leq i\leq n-1$)がlinkedしているとき，Rはcomplete intersectionのlinkage classにはいるといいます。
例としては，embedding dimension 3のlocal ringや，embedding dimension 4のGorenstein local ringなどがあります。

以上次の論文の紹介でした。


○ Herzog and Waldi, Cotangent functors of curve singularities, manuscripta math 55. (1986) P307〜341

# $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ の root closedness について

谷本 洋・宮崎大，教育

第6回の可換環論シンポジウムで，$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ の normality, seminormality と quasinormality について述べた。今回は，同じ型の環がいつ root closed になるかを $m$ と $n$ の言葉で表すことについて述べる。これは，金光さんと吉田さんが，$n=2$ のときに考えられたことに端を発している。

以下，$n$ は2以上の自然数，$m$ は整数とする。また，多項式 $X^n-m$ が $\mathbb{Q}$ 上既約のとき，方程式 $X^n-m=0$ の根のうちどれでもよいから1つとり，それを $\sqrt[n]{m}$ とおく。

定義　$R$ が整域で『$x\in Q(R)$, $\exists k\in\mathbb{N}$, $x^k\in R \Longrightarrow x\in R$』が成り立つとき，$R$ は root closed であるという。

定理1　$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ : root closed

$$\Longleftrightarrow\ m:\text{square-free},\ \text{かつ}\ \begin{cases} ① & m^p\not\equiv m \pmod{p^2}\ \text{for}\ {}^\forall p\mid n:\text{素数},\ \text{又は}, \\ ② & n=2,\ m\equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$$

注意　上の条件①は，$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$ が normal ということに同値である。(cf. [1] Theorem 2、3)

証明のために，次の補題を用意する。

補題2 ([1] Proposition 3、3)　$m$ は必ずしも square-free ではない整数，$p$ は素数とし，ある自然数 $e$ に対し $\sqrt[p^e]{m}$ が存在するとする。さらに，$s$ を2以上の自然数とし，$p^s$ が $m^{p^{e-1}}-1$ をきっかり割っているとする。(すなわち，$p^s \mid m^{p^{e-1}}-1$ かつ $p^{s+1}\nmid m^{p^{e-1}}-1$.) このとき，$\theta=\sqrt[p^e]{m}$, $\delta=\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p^e-1} m^{p^e-1-i}\theta^i$ とおくと，$\delta\in\mathbb{Z}[\theta]^\sim\setminus\mathbb{Z}[\theta]$ ($\mathbb{Z}[\theta]^\sim$ は $\mathbb{Q}(\theta)$ における $\mathbb{Z}[\theta]$ の整閉包) であり，

① $e\geqq 2 \Longrightarrow \delta^2,\ \delta^3\in\mathbb{Z}[\theta]$,

② $e=1,\ p\geqq 3$ 又は $e=1,\ p=2,\ s\geqq 3 \Longrightarrow \delta^2-\delta,\ \delta^3-\delta^2\in\mathbb{Z}[\theta]$,
③ $e=1,\ p=2,\ s=2 \Longrightarrow \delta^2-\delta,\ \delta^3\in\mathbb{Z}[\theta]$.

補題 3 (cf. [1] Proposition 3.4)　$n$ は 2 以上の自然数，$m$ は整数で $\sqrt[n]{m}$ が存在するとする。$t$ は 1 でない自然数とし，$\theta=\sqrt[n]{m}$，$x=\theta^{n-1}/t$ とおけば，$x\in\mathbb{Q}(\theta)\setminus\mathbb{Z}[\theta]$．しかも，
① $t^2|m \Longrightarrow x^2\in\mathbb{Z}[\theta]$,
② $n\geqq 3,\ t^2|m \Longrightarrow x^3\in\mathbb{Z}[\theta]$,
③ $n=2,\ t^3|m \Longrightarrow x^3\in\mathbb{Z}[\theta]$.

定理 1 の証明　$\theta=\sqrt[n]{m}$ とおく。補題 3 より，$m$：square-free としてよい。
(I)　$n=p^e$（$p$：素数，$e\in\mathbb{N}$）のとき：$p^s$（$s\in\mathbb{N}$）が $m^{n-1}-1$ をきっかり割っているとする。
(i)　$s=1$ のとき：[1] Theorem 2.3 より $\mathbb{Z}[\theta]$：normal.
(ii)　$s\geqq 2,\ e\geqq 2$ のとき：補題 2 より $\mathbb{Z}[\theta]$ は root closed ではない。
(iii)　$s\geqq 2,\ e=1,\ p$：奇数のとき：$^\exists a\in\mathbb{N}$ s.t. $p=2a+1$．さて，補題 2 の $\delta$ について，$a+\delta\in\mathbb{Z}[\theta]^\sim\setminus\mathbb{Z}[\theta]$ であり，

$$\begin{aligned}(a+\delta)^2 &\equiv (2a+1)\delta \pmod{\mathbb{Z}[\theta]}\\ &= p\delta\in\mathbb{Z}[\theta]\end{aligned}$$

よって $\mathbb{Z}[\theta]$ は root closed ではない。
(iv)　$s=2,\ e=1,\ p=2$ のとき：補題 2 より $\mathbb{Z}[\theta]$ は root closed ではない。
(v)　$s\geqq 3,\ e=1,\ p=2$ のとき：補題 2 の $\delta$ について，

$$\mathbb{Z}[\theta]^\sim=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\delta,\quad \delta^{t+1}-\delta^t\in\mathbb{Z}[\theta]\ \text{for}\ ^\forall t\geqq 1.$$

従って，$x=a+b\delta$（$a,b\in\mathbb{Z}$）について，$x^n\in\mathbb{Z}[\theta]$ for $^\exists n\in\mathbb{Z}$ であるとすれば，

$$\begin{aligned}x^n &\equiv \left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i\right)\delta \pmod{\mathbb{Z}[\theta]}\\ &= \left((a+b)^n-a^n\right)\delta\end{aligned}$$

より，$(a+b)^n-a^n$：偶数 $\Rightarrow$ $b$：偶数 $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{Z}[\theta]$．よって $\mathbb{Z}[\theta]$ は root closed.
(II)　一般の場合：$n=p_1^{e_1}\cdots p_t^{e_t}$ と素因数分解し，$\mathbb{Z}[\theta]$ は normal ではないとする。$8|n$ なら，$\mathbb{Z}[\theta]$ は $\mathbb{Z}[\sqrt[8]{m}]$ 上 free ゆえに，$\mathbb{Z}[\theta]$：root closed $\Longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt[8]{m}]$：root closed．従って (I) より，$p_1=2,\ e_1=1,\ m\equiv 1 \pmod 8$，$\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]$：normal for $^\forall i\neq 1$ としてよい。このとき，$m$：square-free ゆえに，[1] Lemma 2.6 より，$\delta=(m+\sqrt{m})/2$ に対し，

$$\mathbb{Z}[\theta]^{\sim} = \mathbb{Z}[\theta] + \mathbb{Z}[\theta]\delta.$$

そこで，$t \geqq 2$ とし $n = 2r$ $(r \neq 1)$ とする。さて，$x = 1 + (\theta^2 - 1)\delta$ について，まず，$x \notin \mathbb{Z}[\theta]$．次に，

$$x^r \equiv \left(\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}(\theta^2-1)^i\right)\delta \quad (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}[\theta])$$
$$= \left(\left((\theta^2-1)+1\right)^r - 1\right)\delta = (m-1)\delta \in \mathbb{Z}[\theta].$$

よって，$\mathbb{Z}[\theta]$ は root closed ではない。

以上より，定理が従う。■

<u>例</u>　root closedness は，regular homomorphism では持ち上がらない。例えば，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt{17}]$ は root closed で，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt[6]{17}]$ は $\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt{17}]$ 上 etale，特に regular だが，$\mathbb{Z}_{(2)}[\sqrt[6]{17}]$ は root closed ではない。

次に，2-closedness，3-closedness について扱う．

<u>定義</u>　$R$：整域，$k$ を一つの固定された自然数とする．『$x \in Q(R)$ について，$x^k \in R \Rightarrow x \in R$』が成り立つとき，$R$ は $k$-closed である，という。

<u>2-closedness について</u>　$n = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ と素因数分解しておく。

<u>命題 4</u>　$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：2-closed

$\Longleftrightarrow$ $m$：square-free，かつ各 $i$ について次のいずれかが成立する．

$$\begin{cases} ① & m^{p_i} \not\equiv m \ (\mathrm{mod}\ p_i^2)，\text{又は}, \\ ② & p_i = 2,\ e_i = 1 \end{cases}$$

<u>証明</u>　$\theta = \sqrt[n]{m}$ とおき，$\mathbb{Z}[\theta]$ は normal ではない，とする。補題 3 より，$m$：square-free としてよい．

(I)　$n = p^e$ のとき：　定理 1 の証明の (I) より，$\mathbb{Z}[\theta]$：2-closed となるのは，$p = 2$，$e = 1$，$m \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ のときのみ．

(II)　一般の場合：(I) と定理 1 の証明の (II) より，$p_1 = 2$，$e_1 = 1$，$m \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$，かつ $\forall i \neq 1$ について $\mathbb{Z}[\sqrt[p_i^{e_i}]{m}]$：normal としてよく，この時，

$$\mathbb{Z}[\theta]^{\sim} = \mathbb{Z}[\theta] + \mathbb{Z}[\theta]\delta \quad \left(\delta = \frac{m + \sqrt{m}}{2}\right).$$

そこで，$x = a + b\delta \in \mathbb{Z}[\theta]^{\sim}$ $(a, b \in \mathbb{Z}[\theta])$ について，$x^2 \in \mathbb{Z}[\theta] \Longrightarrow b^2\delta \in \mathbb{Z}[\theta] \Longrightarrow b^2 \in (2, \theta^{\frac{n}{2}} - 1)\mathbb{Z}[\theta]$．$(2, \theta^{\frac{n}{2}} - 1)$ は reduced ideal ゆえ，$b \in (2, \theta^{\frac{n}{2}} - 1)$． ∴ $x \in \mathbb{Z}[\theta]$．よって $\mathbb{Z}[\theta]$：2-closed. ∎

3-closedness について　ここでも $n = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ と素因数分解しておく。

命題 5　$\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$：3-closed

⇔ ① $m$：square-free のとき，各 $i$ について次のいずれかが成立：

ⓐ $m^{p_i} \not\equiv m \pmod{p_i^2}$，又は，

ⓑ $e_i = 1$，$m^{p_i - 1} \equiv 1 \pmod{p_i^2}$ かつ $X^{\frac{n}{p_i}} - m$ は $\mathbb{F}_{p_i}$ 上偶数次の既約因子を持たず，しかも $p_i = 2$，$m \equiv 1 \pmod 8$；$p_i = 3$；$p_i = 6k + 5$ の形の素数のいずれかを満たす．

② $m$：square-free でないとき，$\exists a, b \in \mathbb{Z}$：square-free について，$m = ab^2$，$(a, b) = 1$，$a \not\equiv 5 \pmod 8$ であって，しかも，$p \neq 3$ であるような $a$ の任意の素因数 $p$ について，$\left(\frac{-3b}{p}\right) = -1$ である．

証明　$\theta = \sqrt[n]{m}$ とおく。

(I) $m$：square-free のとき． $m^{p_i - 1} \equiv 1 \pmod{p_i^2}$ であるような $p_i$ について，$e_i \geqq 2$ ならば，補題 2 より $\mathbb{Z}[\theta]$ は 3-closed ではない．よって，このような $p_i$ については $e_i = 1$ としてよい．従って，[1] Lemma 2.1，Lemma 2.6，Corollary 3.2 より，

$$\mathbb{Z}[\theta]\text{：3-closed} \Leftrightarrow \forall i \text{ について } \mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta]\text{：3-closed}$$

ゆえに，$\mathbb{Z}_{(p_i)}[\theta]$ がいつ 3-closed になるかを調べればよい． $p = p_i$，$e = e_i$ とおく．もし，$m^p \not\equiv m \pmod{p^2}$ なら $\mathbb{Z}_{(p)}[\theta]$：normal. 従って，$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$，$e = 1$ としてよい。又，補題 2 より，$p \geqq 3$ 又は $p = 2$，$8 \mid m - 1$ としてよい．すると，$\delta = \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} m^{p-1-\ell} (\theta^{\frac{n}{p}})^{\ell}\right) / p$ とおけば，[1] Lemma 2.6，Corollary 3.2，Proposition 3.3 より，

$$\mathbb{Z}_{(p)}[\theta]^{\sim} = \mathbb{Z}_{(p)}[\theta] + \mathbb{Z}_{(p)}[\theta]\delta.$$

$x = a + b\delta$ $(a, b \in \mathbb{Z}_{(p)}[\theta])$ について，補題 2 より，

$$\begin{cases} x^3 \in \mathbb{Z}_{(p)}[\theta] \\ x \notin \mathbb{Z}_{(p)}[\theta] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a^2b + 3ab^2 + b^3)\delta \in \mathbb{Z}[\theta] \\ b\delta \notin \mathbb{Z}[\theta] \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

$\mathbb{Z}_{(p)}[\theta] : \mathbb{Z}_{(p)}[\theta, \delta] = (p, \theta^{\frac{n}{p}} - m)$ ゆえに，

$$(*) \iff \begin{cases} 3a^2b+3ab^2+b^3 \in (p,\ \theta^{\frac{n}{p}}-m) \\ b \notin (p,\ \theta^{\frac{n}{p}}-m) \end{cases} \quad \cdots\cdots (**)$$

$\mathbb{Z}_{(p)}[\theta]/(p,\ \theta^{\frac{n}{p}}-m) \cong \mathbb{F}_p[X]/(X^{\frac{n}{p}}-m)$ であり, $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ より $(m,\ p)=1$ ゆえ, これは reduced. よって,

$$(**) \iff \begin{cases} \exists f(x) \mid X^{\frac{n}{p}}-m : 既約,\ \exists t \in \mathbb{F}_p[X]/(f(X)) \\ \text{s.t.}\ \ 3t^2+3t+1=0 \end{cases}$$

従って, $\mathbb{Z}_{(p)}[\theta]$ : 3-closed $\iff \begin{cases} 3X^2+3X+1 \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上既約で, } X^{\frac{n}{p}}-m \\ \text{は } \mathbb{F}_p \text{ 上偶数次の既約因子を持たない.} \end{cases}$

さらに, $3X^2+3X+1$ は $\mathbb{F}_p$ 上既約 $\iff \begin{cases} p=2,\ 8 \mid m-1\ ;\ p=3\ ;\ \text{又は} \\ p=6k+5 \text{ の形の素数} \end{cases}$

(II) $m$ : square-free でないとき, 補題3より, $n=2$, $m=ab^2$ ($a$, $b \in \mathbb{Z}$, $a, b$ : square-free, $(a,\ b)=1$) としてよい. さて, $a \equiv 5 \pmod 8$ なら $\mathbb{Z}[\theta]$ は 3-closed ではない。なぜなら, $\delta = (a+\sqrt{a})/2$ について $b\delta \notin \mathbb{Z}[\theta]$, しかも補題2より $(b\delta)^3 \in \mathbb{Z}[\theta]$. 従って, $a \not\equiv 5 \pmod 8$ としてよい. このとき, $(\alpha+\beta\sqrt{a})/2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ : ともに奇数) について, $((\alpha+\beta\sqrt{a})/2)^3 \notin \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$. 従って, $\mathbb{Z}[\theta]$ の 3-closedness は, $\mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ の中で考えればよい。そこで, $x=\alpha+\beta\sqrt{a}$ ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}$) について,

$$\begin{cases} x^3 \in \mathbb{Z}[\theta] \\ x \notin \mathbb{Z}[\theta] \end{cases} \iff \begin{cases} b \mid 3\alpha^2\beta+\beta^3 a \\ b \nmid \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \exists p \mid b : \text{素数について,} \\ p \mid 3\alpha^2\beta+\beta^3 a,\ \ p \nmid \beta \end{cases}$$

従って, $\mathbb{Z}[\theta]$ : 3-closed $\iff \begin{cases} p \neq 3 \text{ であるような } b \text{ の任意の素因数 } p \text{ について,} \\ \left(\dfrac{-3a}{p}\right) = -1. \end{cases}$ ∎

前に述べた「例」, または, 命題5を用いることにより, 3-closedness が regular homomorphism で持ち上がらないことが分かる。

## 参考文献

[1] H. Tanimoto, Normality, seminormality and quasinormality of $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{m}]$, to appear in Hiroshima Math. J.

# The first syzygies of determinantal ideals

蔵野 和彦, 京大, 理

## §0、序

Aを可換環とする。$x_{ij}$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ を不定元とし、A上にこの $m\cdot n$ 個の不定元をつけた多項式環をSとする。$X=(x_{ij})$ を、この不定元の $m\times n$-行列とする。Xの $p$-minor 全体が生成する ideal を $I_p$ と書く。Eagon と Hochster は、$S/I_p$ の射影次元が、$(m-p+1)\cdot(n-p+1)$ であることを証明した([4])。また、Cauchy formula により、$S/I_p$ は、自由A-加群となることがわかる([2])。このことより、$A=\mathbb{Z}$(整数の環)のときに、$S/I_p$ のS上の minimal free resolution (各 boundary map に対応する matrix の各成分は定数項を持たない) が存在すれば、任意の可換環A上で minimal free resolution が存在することがわかる。$p=1$ のときは、Koszul complex, $p=\min(m,n)$ のときは、Eagon-Northcott complex [5], $p=\min(m,n)-1$ のときは、Akin-Buchsbaum-Weyman complex [1] がそのような resolution となる。しかし、一般の $p$ に対しては、存在するかどうかわかっていない。Aが、有理数体を含む場合

は、Lascouxが、任意のpに対して、minimal free resolutionをつくった。([6]) 彼の構成法では、GLの多項式表現が重要な役割を果している。しかし、$\mathbb{Z}$上では、GLの多項式表現は、一般には完全可約でなく、Lascoux complexのようにうまく構成することができない。そのために、Akin や Buchsbaum 等により、GLの characteristic free な表現論が研究されている。

D. W. Sharpe は、p=2のとき、各minorのrelationが一次のrelationで生成されることを示した。([7]) ここでは、一般のm, n, pに対して、p-minorのrelationが一次のrelationで生成されることを示す。(任意の可換環A上で)

可換環論シンポジウムの時、青山先生や後藤先生からXが対称行列のときも考えてみなさいという御指導を受けました。その後、同じようなアイディアで、Xが対称行列のときも、p-minorのrelationは、一次のrelationで生成されることがわかりました。(ただし、p-minorが生成するidealの生成元として、p-minor全体をとると、0次のrelationが出てしまいます。だから、p-minorの一部だけを生成元

としてとらなければいけません。)

§1. The first syzygies of determinantal ideals

$X=(x_{ij})$ を、$m\cdot n$ 個の不定元による $m\times n$-行列とする。$q=\binom{m}{p}\cdot\binom{n}{p}$ とする。$X$ は、$q$ 個の p-minor を持つことがわかる。$X$ の p-minor を、$b_1,\cdots,b_q$ とする。$\bigoplus_{k=1}^{q} SB_k$ を、$B_1,\cdots B_q$ が生成する階数 $q$ の自由 $S$-加群とする。

$$\psi:\ \bigoplus_{k=1}^{q} SB_k \longrightarrow S$$

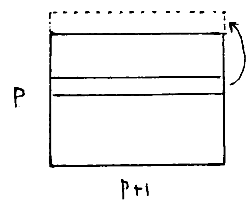
これを、$\psi(B_k)=b_k$ $(k=1,2,\cdots,q)$ で定まる $S$-線形写像とする。このとき、$\mathrm{Im}(\psi)=I_p$ となる。つまり、$\mathrm{Ker}(\psi)$ が、$I_p$ の first syzygy となるわけである。各 $x_{ij}$ を次数1とみて、$S$ に grade を入れる。$S=\bigoplus_{r\geq 0} S_r$ とする。$\psi$ は、この grade で、homogeneous な射である。$\psi$ の直和因子を $\psi_r$ と書く。つまり、

$$\psi_r=\psi|_{\bigoplus_k S_rB_k}:\ \bigoplus_{k=1}^{q} S_rB_k \longrightarrow S_{p+r}$$

このとき、$\mathrm{Ker}(\psi_r)$ は、$X$ の p-minor の $r$ 次の relation となる。また、$\mathrm{Ker}(\psi)=\bigoplus_{r\geq 1}\mathrm{Ker}(\psi_r)$ となる。($X$ の p-minor は、$A$ 上一次独立。故に $\mathrm{Ker}(\psi_0)=0$ ) $\mathrm{Ker}(\psi_1)$ が、$S$-加群として、$\mathrm{Ker}(\psi)$ 全体を生成することを示したい。

Ker($\psi_1$) の中の次のような元を、type I 又は type II と呼ぶことにする。

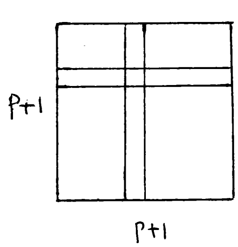
(type I)　　$Y$ を $X$ の submatrix である $p\times(p+1)$-行列とする。$Y$ の中からてきとうに一つの行を選び出し、その行をもう一ついちばん上につける。こうして得られた $(p+1)$-正方行列を



$Z$ とする。このとき、$\det(Z)=0$ となる。そして、$\det(Z)$ を、第一行で余因子展開する。$\det(Z)=\sum_{t=1}^{p+1} a_t\cdot b_{k_t}$

$b_{k_t}$ は、$X$ の p-minor，$a_t\in S_1$ となる。このとき、$\sum_{t=1}^{p+1} a_t B_{k_t}\in \mathrm{Ker}(\psi_1)$ となることがわかる。行と列の役割を入れかえて同じ操作をしてやっても、Ker($\psi_1$) の元を得ることができる。このようにして得られた Ker($\psi_1$) の元を type I と呼ぶことにする。

(type II)　　$Z$ を $X$ の submatrix であるような $(p+1)$-正方行列とする。$Z$ のある行を選び、そこで余因子展開したものを、$\det(Z)=\sum_{t=1}^{p+1} a_t\cdot b_{k_t}$ とし、



$Z$ のある列を選んで余因子展開したものを $\det(Z)=\sum_{t=1}^{p+1} c_t\cdot b_{k'_t}$ とする。ここで、$b_{k_t}$，$b_{k'_t}$ は、$X$ の p-minor を表わし、$a_t$、$c_t$ は、$S_1$ の元を表わす。この

とき、$\sum_{t=1}^{p+1} a_t B_{k_t} - \sum_{t=1}^{p+1} c_t B_{k'_t} \in \mathrm{Ker}(\psi_1)$ となることがわかる。このようにして得られた元を type II と呼ぶことにする。

定理.　$\mathrm{Ker}(\psi)$ は S-加群として、$\mathrm{Ker}(\psi_1)$ の中の type I と type II の元で生成される。

$I_p$ が、perfect ideal であること([4])と、perfect ideal の resolution の depth sensitivity ([3]) から、直ちに次の系を得る。

系、　R を可換環、$(r_{ij})$ を R 上の $m \times n$-行列とする。I を、$(r_{ij})$ の p-minor が生成する R の ideal とする。このとき、$\mathrm{depth}(I) \geq (m-p+1)\cdot(n-p+1)$ であれば、p-minor の relation は、上の type I や type II の relation で生成される。

上の定理の証明の概略を述べるために、characteristic free な GL の表現論からの準備を行なう。

§2、characteristic free representation theory of GL

定義1、 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_g)$ を正整数の列とし、$\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_g$ を満たすとき、partitionという。$|\lambda|=\lambda_1+\cdots+\lambda_g$ を、partition $\lambda$ の weightという。partition $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_g)$ に対して、$\tilde{\lambda}_i:=\#\{k \mid \lambda_k\geqq i\}$ とおくと、$\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_{\lambda_1})$ は partition となる。これを、$\lambda$ の transposeという。$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_g)$ を、$(\lambda_1,\cdots,\lambda_g,0,0,\cdots)$ と同一視することにより、partition 全体に辞書式順序が導入される。

定義2、 Aを可換環、Fを有限生成自由A-加群、$k$を非負整数とする。$\wedge^k F$, $S_k F$ をそれぞれ$k$番目の exterior加群、symmetric 加群とする。$\wedge F=\bigoplus_{k\geqq0}\wedge^k F$、$SF=\bigoplus_{k\geqq0}S_k F$ は、それぞれHopf代数の構造を持つ。それぞれの積を $m_\wedge, m_S$ と書き、それぞれの余積を $\Delta_\wedge$, $\Delta_S$ と書くことにする。($\wedge^k F$ や $S_k F$ は、polynomial GL(F)-加群の構造を持ち、$m_\wedge$、$m_S$、$\Delta_\wedge$、$\Delta_S$ は、GL(F)-加群の射となることに注意する。) $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_g)$ を非負整数の列とするとき、$\wedge_\alpha F=\wedge^{\alpha_1}F\otimes\cdots\otimes\wedge^{\alpha_g}F$, $S_\alpha F=S_{\alpha_1}F\otimes\cdots\otimes S_{\alpha_g}F$ と定める。

partition $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_q)$ に対して、$\mathbb{Z}$ 上の $q\times\lambda_1$-行列 $(a_{ij})$ を次のように定める。

$$
\begin{cases}
a_{ij}=1 & \text{when} \quad j\le\lambda_i \\
a_{ij}=0 & \text{when} \quad j>\lambda_i
\end{cases}
$$

そして、次のような GL(F)-加群の射を考える。

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda_\lambda F = \Lambda^{\lambda_1}F\otimes\cdots\otimes\Lambda^{\lambda_q}F \arrow[d, "\Delta_\Lambda\otimes\cdots\otimes\Delta_\Lambda"] \\
(\Lambda^{a_{11}}F\otimes\cdots\otimes\Lambda^{a_{1\lambda_1}}F)\otimes\cdots\otimes(\Lambda^{a_{q1}}F\otimes\cdots\otimes\Lambda^{a_{q\lambda_1}}F) \arrow[d, "\wr"'] \\
(S_{a_{11}}F\otimes\cdots\otimes S_{a_{1\lambda_1}}F)\otimes\cdots\otimes(S_{a_{q1}}F\otimes\cdots\otimes S_{a_{q\lambda_1}}F) \arrow[d, "\wr"'] \\
(S_{a_{11}}F\otimes\cdots\otimes S_{a_{q1}}F)\otimes\cdots\otimes(S_{a_{1\lambda_1}}F\otimes\cdots\otimes S_{a_{q\lambda_1}}F) \arrow[d, "m_S\otimes\cdots\otimes m_S"] \\
S_{\tilde\lambda}F = S_{\tilde\lambda_1}F\otimes\cdots\otimes S_{\tilde\lambda_{\lambda_1}}F
\end{tikzcd}
$$

二番目の射は、$\Lambda^{a_{ij}}F\simeq S_{a_{ij}}F$ ( $a_{ij}=0$ or $1$ ) から誘導される同型射。三番目の射は、index $a_{ij}$ に対応した並べかえとする。この合成射を $d_\lambda(F)$ と書く。

定義 3. ( Schur functor)

$\mathrm{Im}(d_\lambda(F))$ を、$L_\lambda F$ と書き、これを partition $\lambda$ に対応する Schur functor という。( $A\supseteq\mathbb{Q}$ のときは、$L_\lambda F$ は、

partition $\lambda$ に対応する既約な $GL(F)$-加群と一致する。)

**命題 4.** ( Universal freeness of Schur functor [2] )

$L_\lambda F$ は、自由 $A$-加群となる。また、$S$ を $A$-代数としたとき、$(L_\lambda F)\otimes_A S = L_\lambda(F\otimes_A S)$ が成立する。

**定義 5.** $s_1$, $s_2$, $k$ を正整数で、$k \leq s_2$ を満たすものとする。このとき、次の合成射を $\square_k$ と書く。

$$\bigwedge^{s_1+k} F \otimes \bigwedge^{s_2-k} F \xrightarrow{\Delta_\wedge \otimes 1} \bigwedge^{s_1} F \otimes \bigwedge^{k} F \otimes \bigwedge^{s_2-k} F \xrightarrow{1 \otimes m_\wedge} \bigwedge^{s_1} F \otimes \bigwedge^{s_2} F$$

さらに、$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_g)$ を正整数の列としたとき、次の写像を $\square_\alpha(F)$ と書く。

$$\sum_{t=1}^{g-1}\sum_{u=1}^{\alpha_{t+1}} \bigwedge^{\alpha_1} F \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\alpha_{t-1}} F \otimes \bigwedge^{\alpha_t+u} F \otimes \bigwedge^{\alpha_{t+1}-u} F \otimes \bigwedge^{\alpha_{t+2}} F \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{\alpha_g} F \xrightarrow{\sum_t \sum_u 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \square_u \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1} \Lambda_\alpha F,$$

**命題 6.** ([2]) 任意の partition $\lambda$ に対して、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\square_\lambda(F)) \longrightarrow \Lambda_\lambda F \xrightarrow{d_\lambda(F)} L_\lambda F \longrightarrow 0$$

は完全列となる。

$F$ と $G$ を有限生成自由 $A$-加群、$k$ を非負整数とする。このとき、$S_k(F\otimes G)$ は、polynomial $GL(F)\times GL(G)$-加群となる。

$A \supseteq \mathbb{Q}$ のとき、これは完全可約で、実際に、

$$S_k(F \otimes G) = \sum_{\substack{\lambda:\text{partition} \\ |\lambda| = k}} L_\lambda F \otimes L_\lambda G$$

と分解する。しかし、一般の環 $A$ 上では、上のような分解は得られない。しかし、$S_k(F\otimes G)$ の $GL(F)\times GL(G)$-加群としての filtration で、ass. graded module が上の右辺のようなものになるものが存在する。これを Cauchy formula という。この section ののこりで、それを構成する。

定義 7、$\{f_1, \cdots, f_m\}$, $\{g_1, \cdots, g_n\}$ を、$F$ と $G$ の自由基底とする。正整数 $t$ に対して、$d_t$ を次のように定める。

$$\begin{array}{cccc} d_t: & \Lambda^t F \otimes \Lambda^t G & \longrightarrow & S_t(F\otimes G) \\ & \cup\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\shortmid \\ & f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_t}\otimes g_{j_1}\wedge\cdots\wedge g_{j_t} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in \mathfrak{S}_t} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot(f_{i_{\sigma(1)}}\otimes g_{j_1})\cdot\cdots\cdots\cdot(f_{i_{\sigma(t)}}\otimes g_{j_t}) \end{array}$$

（$\mathfrak{S}_t$ は、$t$ 次対称群）

これは、well-defined であり、また $GL(F)\times GL(G)$-加群の射であることが簡単に確かめられる。

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_g)$ を正整数の列で、$\alpha_1 + \cdots + \alpha_g = n$ を満たすとする。このとき、次のような合成写像を、$\phi_\alpha$ と書くことにする。

$$\Lambda_\alpha F \otimes \Lambda_\alpha G \simeq (\Lambda^{\alpha_1} F \otimes \Lambda^{\alpha_1} G) \otimes \cdots\cdots \otimes (\Lambda^{\alpha_q} F \otimes \Lambda^{\alpha_q} G)$$

$$\xrightarrow{d_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes d_{\alpha_q}} S_{\alpha_1}(F\otimes G) \otimes \cdots\cdots \otimes S_{\alpha_q}(F\otimes G) \xrightarrow{m_S} S_n(F\otimes G)$$

（最初の射は、並べかえである。並べかえで符号は全く出てこないとする。）

**定義 8.（Cauchy formula）**

$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ を、weight $k$ の partition とする。

$S_k(F\otimes G)$ の $GL(F)\times GL(G)$-部分加群 $M_\lambda$, $\dot{M}_\lambda$ を次のように定める。

$$M_\lambda = \sum_{\substack{\mu:\text{partition} \\ |\mu| = k \\ \mu \geqq \lambda}} \mathrm{Im}(\phi_\mu) \quad , \quad \dot{M}_\lambda = \sum_{\substack{\mu:\text{partition} \\ |\mu| = k \\ \mu > \lambda}} \mathrm{Im}(\phi_\mu)$$

（$\geqq$, $>$ は、partition の辞書式順序）

$M_\lambda \supseteq \dot{M}_\lambda$, $M_{(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k})} = S_k(F\otimes G)$ などが成立することがわかる。つまり、

$$0 \subseteq M_{(k)} \subseteq \cdots\cdots \subseteq \dot{M}_\lambda \subseteq M_\lambda \subseteq \cdots\cdots \subseteq M_{(1,1,\cdots,1)} = S_k(F\otimes G)$$

は、weight $k$ の partition の辞書式順序により誘導された $S_k(F\otimes G)$ の、$GL(F)\times GL(G)$-加群としての filtration となる。

**命題 9.（[2]）** $p_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M_\lambda / \dot{M}_\lambda$ を projection とする。

このとき、任意のpartition $\lambda$ に対して、

$$\mathrm{Ker}(\rho_\lambda \circ \phi_\lambda) = \mathrm{Im}(\square_\lambda(F)) \otimes \Lambda_\lambda G + \Lambda_\lambda F \otimes \mathrm{Im}(\square_\lambda(G))$$

が成立する。

注. 命題4と命題6により、

$$0 \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathrm{Im}(\square_\lambda(F)) \otimes \Lambda_\lambda G \\ + \\ \Lambda_\lambda F \otimes \mathrm{Im}(\square_\lambda(G)) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \Lambda_\lambda F \otimes \Lambda_\lambda G \xrightarrow{d_\lambda(F) \otimes d_\lambda(G)} L_\lambda F \otimes L_\lambda G \longrightarrow 0$$

が完全列となる。さらに、$\rho_\lambda \circ \phi_\lambda$ が全射であることに注意すれば、命題9より、$L_\lambda F \otimes L_\lambda G \simeq M_\lambda / \dot{M}_\lambda$ という同型が存在して、次の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd} \Lambda_\lambda F \otimes \Lambda_\lambda G \arrow[r, "\phi_\lambda"] \arrow[d, "d_\lambda(F) \otimes d_\lambda(G)"'] & M_\lambda \arrow[d, "\rho_\lambda"] \\ L_\lambda F \otimes L_\lambda G \arrow[r, "\sim"] & M_\lambda / \dot{M}_\lambda \end{tikzcd}$$

## §3. 定理の証明の概略

$F$ と $G$ をそれぞれ、階数 $m$, $n$ の自由A-加群とする。$\{f_1, \cdots, f_m\}$, $\{g_1, \cdots, g_n\}$ を、それぞれの自由基底とする。$S$ を $S(F \otimes G)$, $X = (x_{ij})$ を $(f_i \otimes g_j)$ で置きかえて議論する。

section 1で定めた $\psi : \bigoplus_{k=1}^{s} SB_k \longrightarrow S$ という射は、

$$(\Lambda^p F \otimes \Lambda^p G) \otimes S(F \otimes G) \xrightarrow{M_p} S(F \otimes G)$$

$$(\text{ただし.}\quad M_p = m_S \circ (d_p \otimes 1)\ )$$

という射に置きかえられる。また、その直和因子である $\Psi_r$ は、

$$(\Lambda^p F \otimes \Lambda^p G) \otimes S_r(F \otimes G) \xrightarrow{M_{p,r}} S_{p+r}(F \otimes G)$$

$$(\text{ただし、}\quad M_{p,r} = m_S \circ (d_p \otimes 1)\ )$$

となる。各 $r$ に対して、$\mathrm{Ker}(M_{p,r})$ が、type I、type II に対応する $\mathrm{Ker}(M_{p,1})$ の元が生成する $S(F \otimes G)$-加群に含まれることを示せばよい。

定義、　$\lambda = (p+s_1, s_2, \cdots, s_t)$ を、weight $(p+r)$ の partition で、$s_1 \geq 0$ とする。このとき、$\theta'_\lambda$、$L_{p,s_1}$，$\theta''_{p,s_1,r}$，$\theta_\lambda$ を次のように定める。

(1)　$\theta'_\lambda$ : $\Lambda_\lambda F \otimes \Lambda_\lambda G \longrightarrow (\Lambda^{p+s_1} F \otimes \Lambda^{p+s_1} G) \otimes S_{r-s_1}(F \otimes G)$

$a_1 \in \Lambda^{p+s_1} F$，　$a_i \in \Lambda^{s_i} F$　$(i = 2, \cdots, t)$

$b_1 \in \Lambda^{p+s_1} G$，　$b_i \in \Lambda^{s_i} G$　$(i = 2, \cdots, t)$　に対して、

$$\theta'_\lambda(a_1 \otimes \cdots \otimes a_t \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_t) = (a_1 \otimes b_1) \otimes [d_{s_2}(a_2 \otimes b_2) \cdot \cdots \cdot d_{s_t}(a_t \otimes b_t)]$$

と定める。

(2) $L_{p,s_1} : \bigwedge^{p+s_1} F \otimes \bigwedge^{p+s_1} G \longrightarrow (\bigwedge^p F \otimes \bigwedge^p G) \otimes S_{s_1}(F \otimes G)$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{p+s_1} F \otimes \bigwedge^{p+s_1} G & \longrightarrow & (\bigwedge^p F \otimes \bigwedge^p G) \otimes S_{s_1}(F \otimes G) \\ \cup & & \cup \\ f_{c_1} \wedge \cdots \wedge f_{c_{p+s_1}} \otimes g_{e_1} \wedge \cdots \wedge g_{e_{p+s_1}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+s_1} \\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+s_1)}} (f_{c_1} \wedge \cdots \wedge f_{c_p} \otimes g_{e_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge g_{e_{\sigma(p)}}) \\ (c_1 < \cdots < c_{p+s_1},\ e_1 < \cdots < e_{p+s_1}) & & \otimes (\mathrm{sgn}\,\sigma) \cdot d_{s_1}(f_{c_{p+1}} \wedge \cdots \wedge f_{c_{p+s_1}} \otimes g_{e_{\sigma(p+1)}} \wedge \cdots \wedge g_{e_{\sigma(p+s_1)}}) \end{array}$$

(3) $\theta''_{p,s_1,r} : (\bigwedge^{p+s_1} F \otimes \bigwedge^{p+s_1} G) \otimes S_{r-s_1}(F \otimes G) \longrightarrow (\bigwedge^p F \otimes \bigwedge^p G) \otimes S_r(F \otimes G)$

$$\theta''_{p,s_1,r} = (1 \otimes m_s) \circ (L_{p,s_1} \otimes 1)$$

(4) $\theta_\lambda : \Lambda_\lambda F \otimes \Lambda_\lambda G \longrightarrow (\bigwedge^p F \otimes \bigwedge^p G) \otimes S_r(F \otimes G)$

$$\theta_\lambda = \theta''_{p,s_1,r} \circ \theta'_\lambda$$

( $\theta'_\lambda$ は、$GL(F) \times GL(G)$-加群の射であるが、$L_{p,s_1}$, $\theta''_{p,s_1,r}$, $\theta_\lambda$ は、F、G の自由基底のとり方に依存している。)

注、 $M_{p,r} \circ \theta_\lambda = \phi_\lambda$ が成立する。

ここで、$\sum X \otimes a \in \mathrm{Ker}(M_{p,r})$ を、与えられた $r$ 次 relation とする。$\lambda_0 = (p, \overbrace{1, \cdots, 1}^{r})$ とする。$\theta_{\lambda_0} : \Lambda_{\lambda_0} F \otimes \Lambda_{\lambda_0} G \to (\bigwedge^p F \otimes \bigwedge^p G) \otimes S_r(F \otimes G)$ は全射。故に、$T \in \Lambda_{\lambda_0} F \otimes \Lambda_{\lambda_0} G$ で、$\theta_{\lambda_0}(T) = \sum X \otimes a$ をみたすものが存在する。

$\sum X \otimes a$ に、type I、type II が生成する $r$ 次 relation を加えながら、すこしづつ辞書式順序のより高い weight $(p+r)$ の partition からの image に書きなおす。($\lambda_0$ より辞書式順序が高

い partition は、定義の条件をみたす。)

(Case I) 上の操作が最後まで続いたとする。つまり、次の式を満たす $T' \in \Lambda_{(p+r)}F \otimes \Lambda_{(p+r)}G$ が存在すると仮定する。

$\Theta_{(p+r)}(T') \equiv \sum x \otimes a$ (modulo type I, type II が生成する r次 relation)

次の可換な図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{(p+r)}F \otimes \Lambda_{(p+r)}G \arrow[rr, "\theta_{(p+r)}"] \arrow[dr, "\phi_{(p+r)}"] \arrow[dd, "d_{(p+r)}(F)\otimes d_{(p+r)}(G)"'] & & (\Lambda^p F \otimes \Lambda^p G) \otimes S_r(F\otimes G) \arrow[d, "M_{p,r}"] \\
& M_{(p+r)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "P_{(p+r)}"] & S_{p+r}(F\otimes G) \\
L_{(p+r)}F \otimes L_{(p+r)}G \arrow[r, "\sim"] & M_{(p+r)}/\dot{M}_{(p+r)} &
\end{tikzcd}$$

$(p+r)$ は、weight $p+r$ の partition の中で、辞書式順序が最大。故に、$\dot{M}_{(p+r)} = 0$ となる。すなわち、$L_{(p+r)}F \otimes L_{(p+r)}G \simeq M_{(p+r)}$

$\theta_{(p+r)}(T')$ は、r次 relation であるから、$M_{p,r} \circ \theta_{(p+r)}(T') = 0$。だから、$\phi_{(p+r)}(T') = 0$。これより、$(d_{(p+r)}(F) \otimes d_{(p+r)}(G))(T') = 0$。しかし、$d_{(p+r)}(F) \otimes d_{(p+r)}(G)$ は単射であるから、$T' = 0$ となる。故に、$\sum x \otimes a$ は、type I, type II で生成される。

(Case II) 上の操作が、途中で止まったとする。すなわち、

$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を weight $p+r$ の partition (辞書式順序で $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$) とし、各 $\lambda_i$ に対して、$T'_{\lambda_i} \in \Lambda_{\lambda_i}F \otimes \Lambda_{\lambda_i}G$ という元が存在して、次の式を満たすとする。

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_{\lambda_i}(T'_{\lambda_i}) \equiv \sum x \otimes a \quad (\text{modulo type I と type II が生成する } r \text{ 次 relation})$$

$\lambda_k > \lambda_0 = (p, \overbrace{1, \cdots, 1}^{r})$ かつ、$\lambda_k < (p+r)$ に注意する。($\lambda_k = (p+r)$ のときは、Case I の状態が起こっている。)

次の可換な図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{\lambda_k}F \otimes \Lambda_{\lambda_k}G \arrow[rr, "\theta_{\lambda_k}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_k}"] \arrow[dd, "d_{\lambda_k}(F) \otimes d_{\lambda_k}(G)"'] & & (\Lambda^pF \otimes \Lambda^pG) \otimes S_r(F \otimes G) \arrow[d, "M_{p,r}"] \\
& M_{\lambda_k} \arrow[r, hook] \arrow[d, "P_{\lambda_k}"] & S_{p+r}(F \otimes G) \\
L_{\lambda_k}F \otimes L_{\lambda_k}G \arrow[r, "\sim"] & M_{\lambda_k}/\dot{M}_{\lambda_k} &
\end{tikzcd}$$

$\sum_{i=1}^{k} \theta_{\lambda_i}(T'_{\lambda_i})$ は、次数 $r$ の relation だから、$M_{p,r}(\sum_{i=1}^{k} \theta_{\lambda_i}(T'_{\lambda_i})) = 0$

故に、$\sum_{i=1}^{k} \phi_{\lambda_i}(T'_{\lambda_i}) = 0$。$\lambda_k$ が、$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ の中で辞書式順序が最小だから、$\sum_{i=1}^{k-1} \phi_{\lambda_i}(T'_{\lambda_i}) \in \dot{M}_{\lambda_k}$。だから、$\phi_{\lambda_k}(T'_{\lambda_k}) \in \dot{M}_{\lambda_k}$

故に、$P_{\lambda_k} \circ \phi_{\lambda_k}(T'_{\lambda_k}) = (d_{\lambda_k}(F) \otimes d_{\lambda_k}(G))(T'_{\lambda_k}) = 0$ が成立する。

このことから、$T'_{\lambda_k} \in \operatorname{Ker}(d_{\lambda_k}(F) \otimes d_{\lambda_k}(G)) = \operatorname{Im}(\square_{\lambda_k}(F)) \otimes \Lambda_{\lambda_k}G + \Lambda_{\lambda_k}F \otimes \operatorname{Im}(\square_{\lambda_k}(G))$

$T'_{\lambda_k}$ を、$\operatorname{Im}(\square_{\lambda_k}(F)) \otimes \Lambda_{\lambda_k}G + \Lambda_{\lambda_k}F \otimes \operatorname{Im}(\square_{\lambda_k}(G))$ の元の形に書きなおす。そして、$T'_{\lambda_k} = \sum_{\beta} T_{\beta}$ が得られたとする。

$\lambda_\beta=(p+s_1, s_2, \cdots, s_q)$ とする。

$$T_\beta \in \operatorname{Im}(\wedge^{p+s_1}F \otimes \wedge^{s_2+\nu}F \otimes \wedge^{s_3-\nu}F \otimes \wedge^{s_4}F \otimes \cdots \otimes \wedge^{s_q}F \longrightarrow \wedge_{\lambda_\beta}F) \otimes \wedge_{\lambda_\beta}G$$

とする。(ただし、$1 \leq \nu \leq s_3$。また、$p+s_1 \geqq s_2+\nu$ を仮定する。)

$\mu_1=(p+s_1, s_2, s_3)$, $\mu_2=(s_4, \cdots, s_q)$ とする。このとき、$I_1$, $I_2$, $J_1$, $J_2$ を次のように定める。

$$I_1=(f_{a_1}\wedge\cdots\wedge f_{a_{p+s_1}})\otimes(f_{b_1}\wedge\cdots\wedge f_{b_{s_2+\nu}})\otimes(f_{c_{\nu+1}}\wedge\cdots\wedge f_{c_{s_3}})\in \wedge^{p+s_1}F\otimes\wedge^{s_2+\nu}F\otimes\wedge^{s_3-\nu}F$$

$$J_1=(g_{d_1}\wedge\cdots\wedge g_{d_{p+s_1}})\otimes(g_{e_1}\wedge\cdots\wedge g_{e_{s_2}})\otimes(g_{h_1}\wedge\cdots\wedge g_{h_{s_3}})\in \wedge_{\mu_1}G$$

$$I_2\in\wedge_{\mu_2}F, \quad J_2\in\wedge_{\mu_2}G$$

(ただし、$a_1<\cdots<a_{p+s_1}$, $d_1<\cdots<d_{p+s_1}$)

必要ならば、$T_\beta$ をさらに細かく分解することにより、

$$T_\beta=(\square_\mu(F))(I_1\otimes I_2)\otimes J_1\otimes J_2\in\wedge_{\lambda_\beta}F\otimes\wedge_{\lambda_\beta}G$$ としてよい。

このとき、

$$\theta'_{\lambda_\beta}(T_\beta)$$

$$=(f_{a_1}\wedge\cdots\wedge f_{a_{p+s_1}}\otimes g_{d_1}\wedge\cdots\wedge g_{d_{p+s_1}})$$

$$\otimes\Big\{\sum_{\substack{\pi\in\mathfrak{S}_{s_2+\nu}\\ \pi(1)<\cdots<\pi(s_2)\\ \pi(s_2+1)<\cdots<\pi(s_2+\nu)}}(\operatorname{sgn}\pi)\cdot d_{s_2}(f_{b_{\pi(1)}}\wedge\cdots\wedge f_{b_{\pi(s_2)}}\otimes g_{e_1}\wedge\cdots\wedge g_{e_{s_2}})$$

$$\cdot d_{s_3}(f_{b_{\pi(s_2+1)}}\wedge\cdots\wedge f_{b_{\pi(s_2+\nu)}}\wedge f_{c_{\nu+1}}\wedge\cdots\wedge f_{c_{s_3}}\otimes g_{h_1}\wedge\cdots\wedge g_{h_{s_3}})\cdot\phi_{\mu_2}(I_2\otimes J_2)\Big\}$$

$$=(f_{a_1}\wedge\cdots\wedge f_{a_{p+s_1}}\otimes g_{d_1}\wedge\cdots\wedge g_{d_{p+s_1}})$$

$$\otimes\Big\{\sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_{s_3}\\ \tau(1)<\cdots<\tau(\nu)\\ \tau(\nu+1)<\cdots<\tau(s_3)}}(\operatorname{sgn}\tau)\cdot d_{s_2+\nu}(f_{b_1}\wedge\cdots\wedge f_{b_{s_2+\nu}}\otimes g_{e_1}\wedge\cdots\wedge g_{e_{s_2}}\wedge g_{h_{\tau(1)}}\wedge\cdots\wedge g_{h_{\tau(\nu)}})$$

$$\cdot d_{s_3-\nu}(f_{c_{\nu+1}}\wedge\cdots\wedge f_{c_{s_3}}\otimes g_{h_{\tau(\nu+1)}}\wedge\cdots\wedge g_{h_{\tau(s_3)}})\cdot\phi_{\mu_2}(I_2\otimes J_2)\Big\}$$

$\mu' = (p+s_1, s_2+m, s_3-m, s_4, \cdots, s_q)$ とする。(これは partition であるとは限らない。) $I'$、$J'$ を次のように定める。

$$I' = I_1 \otimes I_2 \in \Lambda_{\mu'} F$$

$$J' = \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{s_3} \\ \tau(1) < \cdots < \tau(m) \\ \tau(m+1) < \cdots < \tau(s_3)}} (\operatorname{sgn} \tau) \cdot (g_{d_1} \wedge \cdots \wedge g_{d_{p+s_1}}) \otimes (g_{e_1} \wedge \cdots \wedge g_{e_{s_2}} \wedge g_{h_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge g_{h_{\tau(m)}}) \otimes (g_{h_{\tau(m+1)}} \wedge \cdots \wedge g_{h_{\tau(s_3)}}) \otimes J_2 \in \Lambda_{\mu'} G$$

このとき、$\theta'_{\lambda_R}(T_\beta) = \theta'_{\mu'}(I' \otimes J')$ が成立する。このことから、$\theta_{\lambda_R}(T_\beta) = \theta_{\mu'}(I' \otimes J')$ がいえる。($\theta_{\lambda_R} = \theta''_{p, s_1, r} \circ \theta'_{\lambda_R}$, $\theta_{\mu'} = \theta''_{\mu', s_1, r} \circ \theta'_{\mu'}$ ) $\mu'$ の元を並べかえて partition にするときは、最初の元を動かす必要はない。($p+s_1 \geqq s_2+m$ より) 最初の元を動かさずに $\mu'$ を並べかえた partition を $\mu$ とする。このとき、$\mu > \lambda_R$ 。また、$T_\beta' \in \Lambda_\mu F \otimes \Lambda_\mu G$ という元が存在して、$\theta_{\lambda_R}(T_\beta) = \theta_\mu(T_\beta')$ が成立することがわかる。($\mu'$ の元の並べかえに応じて、$I'$ や $J'$ の元を並べかえればよい。)

こうして、$T_\beta$ を、$\lambda_R$ より辞書式順序が高い weight $p+r$ の partition $\mu$ からの image でとりかえることができた。

上で、$s_2+m > p+s_1$ となる場合や、$m$ の受けわたしが $p+s_1$ と $s_2$ の間で行なわれる場合は、もっと複雑な操作が必要である。

References.

[1] K. Akin, D. A. Buchsbaum & J. Weyman : Resolution of determinantal ideals, The submaximal minors, Advan. in Math. 39 (1981), 1~30

[2] K. Akin, D. A. Buchsbaum & J. Weyman : Schur functors and Schur complexes, Advan. in Math. 44 (1982) 207~278

[3] D. A. Buchsbaum & D. Rim : A generalized Koszul complexes II. "Depth and multiplicity", Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1969) 197~224

[4] J. A. Eagon & M. Hochster : Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, Amer. J. Math. 93 (1991) 1020~1058

[5] J. A. Eagon & D. G. Northcott : Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, Proc. Roy. Soc. Ser. A 269 (1962), 188~204

[6] A. Lascoux : Syzygies des variétés déterminantales, Advan. in Math. 30 (1978), 202~237

[7] D. W. Sharpe : The syzygies and semi-regularity of

certain ideals defined by matrices, Proc. Lon. Math. Soc. (3) 15 (1965), 645~679

# A note on the Jacobian problem

馬場　清・大分大.教育

複素数体$\mathbb{C}$上の$n$変数多項式環$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$の$n$個の元$f_1, \ldots, f_n$に対して，$J(f_1, \ldots, f_n)$で$f_1, \ldots, f_n$のJacobi行列式を表す。

Jacobian problemとは，$J(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{C}^*$であれば$\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$が成立するかという問題である。$n=1$については肯定的であることは容易にわかるが，$n \geq 2$については未解決である。本稿では，$n=2$の場合のJacobian problemに関する次の論文の簡単な紹介を行う。


[1] H. Appelgate and H. Onishi: The Jacobian conjecture in two variables, Journal of Pure and Applied Algebra, 37 (1985), 215-227.

[2] A. Nowicki: On the Jacobian conjecture in two variables, preprint.

[3] A. Nowicki and Y. Nakai:

On Appelgate-Onishi's lemmas, preprint.

以下, $x = X_1$, $y = X_2$, $f = f_1$, $g = f_2$ とおく。
[1] では 次の部分的解決が与えられている。

<u>定理</u> $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ について, $f$ または $g$ の次数が高々2つの素数の積のとき, $J(f, g) \in \mathbb{C}^*$ ならば $\mathbb{C}[f, g] = \mathbb{C}[x, y]$ が成立する。

証明は $(p, q)$-form と basic web という2つの概念を用いる。以下, 順に定義を述べる。

<u>定義</u> (1) $p > 0$ or $q > 0$ で $GCD(p, q) = 1$ をみたす整数 $p, q$ の組 $(p, q)$ を direction という。

(2) $(p, q)$ を direction とする。$\mathbb{C}[x, y]$ の元 $f$ が次数 $n$ の $(p, q)$-斉次多項式とは, $t$ を不定元として $\mathbb{C}[x, y, t]$ において $f(t^p x, t^q y) = t^n f(x, y)$ が成立するときをいう。

(3) 0 でない $(p, q)$-斉次多項式を $(p, q)$-form

という。

(4) $\mathbb{C}[x,y]$ の元は，$(p,q)$-斉次多項式の和として一意的に分解できる。$\mathbb{C}[x,y]$ の元 $f$ の最高次の $(p,q)$-form を $f_{pq}^*$ と書く。

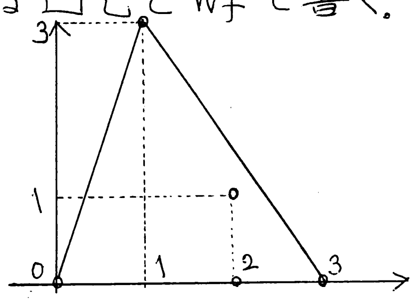
(5) $\mathbb{C}[x,y]$ の2元 $f, g$ が同伴のとき，すなわち，$f = cg$ となる $\mathbb{C}^*$ の元 $c$ が存在するとき $f \sim g$ と書くことにする。

補題A　$\mathbb{C}[x,y]$ の2元 $f, g$ について，$\deg f = dm$，$\deg g = dn$，$GCD(m,n) = 1$ とおき，$J(f,g) \in \mathbb{C}^*$，$dm > 1$，$dn > 1$ と仮定する。このとき，任意の direction $(p,q)$ に対して，$f_{pq}^* \sim h^m$，$g_{pq}^* \sim h^n$ となる正次数の $(p,q)$-form $h$ が存在する。

定義　(1) $\mathbb{C}[x,y]$ の元 $f$ について，

$S_f = \{(i,j) \mid x^i y^j$ が $0$ でない係数で $f$ の項として現われる$\}$

とおき，$S_f \cup \{(0,0)\}$ の $\mathbb{R}^2$ における凸包を $W_f$ と書く。




例　$f = x^2 + x^3 + x^2 y + x y^3$

のとき，$W_f$ は $(0,0)$，$(1,3)$，$(3,0)$ を頂点とする三角形の

周及び内部である。

(2) $W \subset \mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して,

$mW = \{(ma, mb) \mid (a, b) \in W\}$ とおく.

<u>補題B</u> $f, g, m, n, d$ は補題Aの通りとするとき, $W_f = mW$, $W_g = nW$ となる凸多角形(内部も含む) $W$ で頂点が格子点であるものが存在する。

補題Bでの $W$ を $(f, g)$ の $(x, y)$ に関する basic web という。

上の補題A, Bが定理の証明に際して本質的となるが, [1] での補題Aの証明は不完全である。[3] では, 補題A, Bの別証明が与えられている。

[2] では, Jacobian problem が肯定的であることと同値な命題がいくつか述べられ, その同値性が証明されている。例えば, 次は同値である。

(i) Jacobian problem が肯定的である。

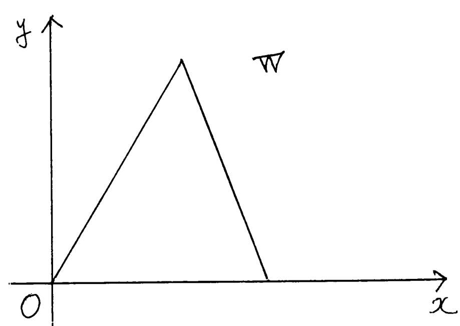
(ii) $J(f, g) \in \mathbb{C}^*$ ならば, $\deg f \mid \deg g$ または, $\deg g \mid \deg f$ が成り立つ。

(iii) $J(f, g) \in \mathbb{C}^*$で，$\min(\deg f, \deg g) > 1$ならば，補題Bでの$W$が三角形（内部も含む）となる。

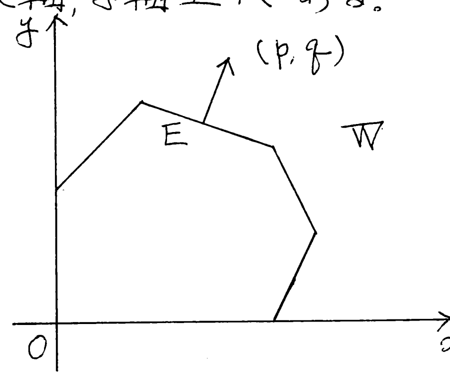
定理の証明のためには，次が成立すればよいことが[1]において示されている。

<u>命題</u>　$f, g \in \mathbb{C}[x, y]$について，$\deg f = dm$，$\deg g = dn$，$GCD(m, n) = 1$とおき，$J(f, g) \in \mathbb{C}^*$，$dm > 1$，$dn > 1$と仮定する。$d$が1または素数ならば，補題Bの$W$は三角形（内部も含む．以下，同様）である。

<u>注意</u>　$J(f, g) \in \mathbb{C}^*$より，$(0, 1), (1, 0) \in S_f \cup S_g$が言えるので右図のような場合は起こらない。$W$が三角形であれば，$W$の2辺は$x$軸，$y$軸上にある。




basic web $W$の辺$E$の法線ベクトルを，directionとなるようにとり$(p, q)$とおく。$(p, q)$について



補題Aでの$h$を考えれば，$S_h$の点は辺E上に並んでいる。このことから，$W$の辺について調べるためには補題Aでの$h$の形を調べることが重要となる。$h$の形を調べるために次の補題が役に立つ。

<u>補題C</u>　direction $(p, q)$に対して，$h$を補題Aでの$h$とする。$p+q>0$ならば，$J(h, w)=h$となる$(p, q)$-form $w$が存在する。

この補題から例えば，

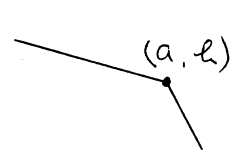
(1)　$p>1,\ q>1$のとき，$h \sim x^a y^b$ $\cdots\cdots$ (*)

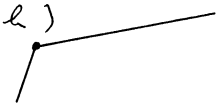
(2)　$p>1,\ q=1$のとき，$h \sim (x+\alpha y^p)^a y^b$

$(\alpha \in \mathbb{C}$; $a, b$は0以上の整数で$a \neq b$)がわかる。

命題の証明の概略を述べるために，さらに2つ補題を用意する。

<u>定義</u>　basic web $W$の頂点$(a, b)$がpositive vertexであるとは，$p>0,\ q>0$をみたすdirection $(p, q)$で，$(a, b)$が$W$の$(p, q)$-leading pointとなるものが存在するときをいう。例えば，



は positive vertex であるが、 $(a, b)$  は、positive vertex ではない。

<u>補題D</u>　$f, g, m, n, d, W$ は補題Bの通りとする。$(a, b)$ を $W$ の positive vertex で $ab > 0$ なるものとし、$E$ を $W$ の $(a, b)$ の左側の辺とし、$(p, q)$ を $E$ の direction とする。$p > 0$, $q > 0$ ならば、$q = 1$ で $E$ の他の端点は $(0, pa + b)$ となる。さらに、$(p, q)$ に関する補題Aでの $h$ は、$h \sim (x + \alpha y^p)^a y^b$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$ と書ける。

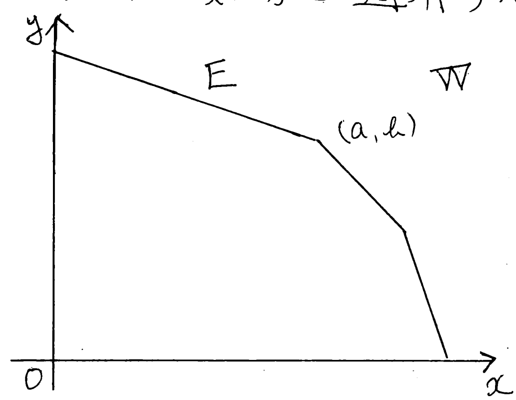
<u>補題E</u>　$f, g, m, n, d, W, (a, b), (p, q)$ を補題Dでの通りとする。$a > b > 0$, $GCD(a, b) = 1$ ならば、$p > 0$ となる。

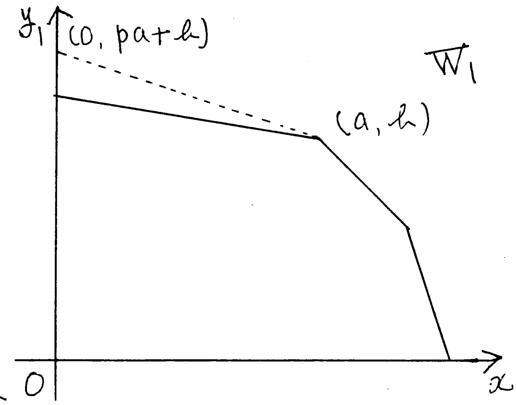
以下、命題の証明の概略を述べる。

$d = 1$ ならば、明らかに basic web は三角形となる。

$d$ を素数とし、$(f, g)$ の $(x, y)$ に関する basic web $W$ が三角形でないと仮定する。このとき、$a > 0$, $b > 0$, $a + b = d$ をみたす $W$ の頂点 $(a, b)$

が存在する。(例えば, $(d, 0)$ が $W$ の $(1\ 1)$-leading point であるとすると, $d$ が素数であることより, $(d, 0)$ の左側の辺の direction は $(d-i, d)$ の形となるが (*) での (すなわち, [1] での補題3.3 (i) での) $h$ の形が単項式であることから, $d-i=1$ となる。これより, この場合, $W$ は $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(0, 1)$ を三頂点とする三角形となる。) さらに, $a > b$ と仮定してよい。($(a, b)$ は positive vertex にとれているので, $a \neq b$ となる。$a < b$ であれば, $x' = y$, $y' = x$ と変数変換して, 以下の議論を適用すればよい。)




$(a, b)$ の左側の辺を $E$ とし, $E$ の directionを $(p, q)$ とする。$(p, q)$ に対して補題Aでの $h$ を考える。このとき, 補題D より, $h \sim (x+\alpha y^p)^a y^b$ $(\alpha \in \mathbb{C}^*)$ と書ける。

$x_1 = x + \alpha y^p$, $y_1 = y$ と変数変換すれば, 変換

後の $(x_1, y_1)$ に関する basic web $W_1$ は前頁の右下図のようになる。これをくりかえせば $(a, b)$ の左側の辺の direction $(p_1, q_1)$ について $p_1 \leq 0$ となる。ところが，$d$ が素数であるから $GCD(a, b) = 1$。ここで，補題Eを使えば，$(a, b)$ の左側の辺の direction $(p', q')$ について常に $p' > 0$ であるので矛盾が導かれる。

<u>補足</u> (1) $d$ が素数でなくとも $d \leq 8$ であれば，$W$ が三角形になると [1] 49 に記されている。これを見るには，[1] での補題36を次の形に直しておくと便利である。（証明は，補題36の証明が使える。）

<u>補題</u> $(p, q)$ を direction とし，$h, w$ を $(p, q)$-forms で $J(h, w) = h$ をみたすものとする。$p < 0$ で，かつ，$x^a y^b$ が $h$ の $(1, 1)$-leading term であるとする。次の (I), (II) のいずれかの条件がみたされれば，$h \sim x^a y^b$ となる。

(I) $a=b$, $(p,q)\neq(-1,1)$。

(II) $\dfrac{a-b}{ap+bq}\notin\mathbb{N}$, $(p,q)\neq(-1,1)$。

これによって $d\leq 8$ のとき, positive vertex $(a,b)$ について, $(a,b)$ の左側の辺で $p<0$ となる direction $(p,q)$ を持つものが存在しないことがわかる。ただし, 筆者には, $d=6$, $(a,b)=(4,2)$ ; $d=8$, $(a,b)=(6,2)$ の各場合について, $(a,b)$ の左側の辺で, direction $(p,q)=(0,1)$ をもつものの非存在の証明が不明である。例えば, $d=6$, $(a,b)=(4,2)$, $(p,q)=(0,1)$ の場合, $J(h,w)=h$ をみたす $(p,q)$-forms $h, w$ については, 次の3通りの可能性がある。

(イ) $\begin{cases} h\sim y^2(A+x)^4 \\ w=\frac{1}{2}y(A+x) \end{cases}$

(ロ) $\begin{cases} h\sim y^2\left(\frac{2B-1}{4C}+x\right)^4 \\ w=Cy\left(\frac{2B-1}{4C}+x\right)\left(\frac{2B+1}{4C}+x\right) \end{cases}$

(ハ) $\begin{cases} h \sim y^2\left(\dfrac{B-1}{2C}+x\right)^3\left(\dfrac{B+1}{2C}+x\right) \\ w = Cy\left(\dfrac{B-1}{2C}+x\right)\left(\dfrac{B+1}{2C}+x\right) \end{cases}$

ただし，$A, B, C \in \mathbb{C}$，$C \neq 0$ である。

(2) [1] での最後に $d=9$ の場合についてのコメントが付けられている。$(a, b)=(6, 3)$ の場合，$J(h, w)=h$ をみたす $(-1, 3)$-forms $h, w$ は次の3通りある。

(イ) $\begin{cases} h \sim y(1+\alpha x^3 y)^2, \\ w = -xy(1+\alpha x^3 y). \end{cases}$ $\alpha \neq 0$.

(ロ) $\begin{cases} h \sim x^3 y^2(1+\beta x^3 y), \\ w = xy(1+\beta x^3 y). \end{cases}$ $\beta \neq 0$.

(ハ) $\begin{cases} h \sim x^6 y^3, \\ w = xy\left(\frac{1}{3}+\gamma x^3 y\right). \end{cases}$ $\gamma \neq 0$.

これより，$h$ が単項式でないことも起こりうる。

Topics of Commutative Semigroup Rings: *-Operations on Semigroups and M-Semigroup Rings

Kôjirô Satô (Tôhoku Institute of Technology) and
Ryûki Matsuda (Faculty of Science, Ibaraki University)

§0. Introduction.

Let $S$ be a subsemigroup of a totally ordered abelian group. We assume that $S$ is an additive semigroup and that $S \supsetneq \{0\}$. Let $A$ be a (commutative) ring. We denote the semigroup ring of $S$ over $A$ by $A[X;S]$;

$$A[X;S] = \left\{ \sum_{\text{finite}} a_i X^{s_i} \; ; \; a_i \in A \text{ and } s_i \in S \right\}.$$

$A[X;S]$ may be studied for their own sake or as a tool or as an example for other problems. One of the first applications was a theorem of W. Krull([7]) which states that any totally ordered abelian group is the value group of a valuation.

Let $n$ be a natural number, and let $Z_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. If $S$ is the direct sum of $n$ copies of $Z_0$, then $A[X;S]$ is the polynomial ring of $n$ variables over $A$. Moreover if $S$ is a subsemigroup of the direct sum of $n$ copies of $Z_0$, we have also works by Professor S. Goto and Professor K. Watanabe.

But the theory of commutative semigroup rings for general $S$ and $A$ as an independent area of study has developed in relatively recent times. One of the beginning of the theory was R. Gilmer-T. Parker([5]).

[4] and [6] are general references on $A[X;S]$.

As results of study of $A[X;S]$ we have, for example, the followings:

Theorem (0. 1)(R. Gilmer [3]). Let $n$ be a natural number greater than 1, and $p$ a prime number or zero. Then there exists a unique factorization domain which is of (Krull) dimension n, of characteristic p and which is not a Noetherian domain. (The answer to David's question)

Theorem (0. 2) (D. F. Anderson [1]-L. Chouinard [2]). Let G be an abelian group. Then there exists a quasi-local Krull domain the class group of which is isomorphic to G. (The answer to a question of Fossum)

What we studied this time are the following two:

(1) We developed a theory of *-operations on semigroups analogously to that of *-operations on rings;

(2) We obtained a necessary and sufficient condition for a semigroup ring to be an M-ring.

In §1 we report (1), and in §2 we report (2).

§1. *-operations on semigroups.

We reported the results on *-operations on rings on the last Symposium of Commutative Ring Theory ([8]). In this section we develope an analogue theory for semigroups. We see that almost all analogue results hold for semigroups. Details of this section will appear in [9].

We denote the quotient group of S by G; $G = \{ s - s';\ s, s' \in S \}$. A non-empty subset $\mathfrak{a}$ of G is called a fractional ideal of S if $S + \mathfrak{a} \subset S$ and if $s + \mathfrak{a} \subset S$ for some $s \in S$. If F(S) is the set of fractional ideals of S, a mapping $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^*$ of F(S) into F(S) is called a *-operation on S if the following conditions hold for each $\alpha \in G$ and all $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ in F(S):

(1) $(\alpha)^* = (\alpha)$; $(\alpha + \mathfrak{a})^* = \alpha + \mathfrak{a}^*$, where $(\alpha)$ denotes $\alpha + S$;

(2) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^*$; if $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, then $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{b}^*$;

(3) $(\mathfrak{a}^*)^* = \mathfrak{a}^*$.

If $\mathfrak{a} \in F(S)$, we denote the fractional ideal $\{\alpha \in G;$ $\alpha + \mathfrak{a} \subset S\}$ by $\mathfrak{a}^{-1}$, and denote $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$ by $\mathfrak{a}^{v}$. Then the mapping $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^{v}$ is a *-operation. If $n\alpha \in S$ ($n \in N$ and $\alpha \in G$) implies $\alpha \in S$, then $S$ is called integrally closed. A group homomorphism $v$ of $G$ into a totally ordered abelian group is called a valuation on $G$. Then $\{\alpha \in G;\ v(\alpha) \geqq 0\}$ is called the valuation semigroup associated with $v$. A subsemigroup of $G$ containing $S$ is called an oversemigroup of $S$. Assume that $S$ is integrally closed. Let $\{V_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ be the set of valuation oversemigroups of $S$. Then we have $\bigcap_\Lambda V_\lambda = S$. We set $\mathfrak{a}^b = \bigcap_\Lambda \mathfrak{a}V_\lambda$ for each ideal $\mathfrak{a}$ of $S$. Thus we have a *-operation $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^b$ on $S$. If $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^* \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})^*$ implies $\mathfrak{b}^* \subset \mathfrak{c}^*$ for each finitely generated fractional ideals $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ of $S$, then $*$ is called an e. a. b. *-operation. The operation $b$ is e. a. b. If $f = \sum a_s X^s$ is an element of $A[X;S]$, then the ideal of $S$ generated by the set $\{s \in S;$ $a_s \neq 0\}$ is denoted by $e(f)$.

Lemma (1. 1)(cf. [5, Proposition 6. 2]). Let $D$ be a domain, and $f, g \in D[X;S] \setminus \{0\}$. Then there exists a natural number $m$ such that $(m + 1)e(f) + e(g) = me(f) + e(fg)$.

Let $k$ be a field and $*$ an e. a. b. *-operation on $S$. We set

$$S_*^k = \{f/g;\ f, g \in k[X;S] \setminus \{0\},\ e(f)^* \subset e(g)^*\} \cup \{0\}.$$

By Lemma (1. 1) we see that $S_*^k$ is a subring of the quotient field of $k[X;S]$. We call $S_*^k$ the Kronecker function ring of $S$ with respect to $*$(and $k$).

Remark (1. 2). (1) If we replace $D$ by a ring $A$ in Lemma (1. 1), the statement is false.(cf. [5, p. 75]).

(2) If we replace $k$ by a domain $D$ in the definition of the Kronecker function ring, we have $S_*^D = S_*^{q(D)}$, where $q(D)$

is the quotient field of $D$.

(3) For an e. a. b. $*$-operation $*$ on $S$, $S_*{}^k$ is a Bezout ring(that is, each fi nitely generated ideal is a principal ideal) for each(finite or infinite) field $k$.

A subring of $q(D)$ containing a domain $D$ is called an overring of $D$. There is the canonical one-to-one correspondence between valuation oversemigroups of an integrally closed semigroup $S$ and valuation overrings of $S_b{}^k$. And the set of valuation overrings of $S_b{}^k$ is in one-to-one correspondence with the set of prime ideals of $S_b{}^k$.

Let $*$ be a $*$-operation on $S$. If we set $\{f \in k[X;S]\setminus\{0\}\,;\ e(f)^* = S\} = U^*$, then $U^*$ is a multiplicative system of $k[X;S]$. If the set $\{\mathfrak{a}^*;\ \mathfrak{a} \in F(S)$ and $\mathfrak{a}$ is finitely generated $\}$ is a group under $(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*) \longmapsto (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^*$, then $S$ is called a Prüfer $*$-multiplication semigroup. A domain $D$ is called a Prüfer ring if each finitely generated nonzero ideal is invertible. If we identify an element $s \in S$ with $X^s \in A[X;S]$, then $S$ is a multiplicative system of $A[X;S]$. A valuation oversemigroup of $S$ of the form $S_P$ is called essential for $S$, where $P$ is a prime ideal of $S$ and $S_P$ denotes $\{s - s';\ s \in S$ and $s' \in S\setminus P\}$. Similarly a valuation overring of $D$ of the form $D_P$ is called essential for $D$.

Theorem (1. 3). Let $k$ be any field and $*$ an e.a.b. $*$-operation on $S$. We consider the following conditions(cf. [8, Theorem 7]):

(1) $S$ is a Prüfer $*$-multiplication semigroup;

(2) $k[X;S]_{U^*} = S_*{}^k$;

(3) $k[X;S]_{U^*}$ is a Prüfer ring;

(4) $S_*{}^k$ is a quotient ring of $k[X;S]$;

(5) Each prime ideal of $k[X;S]_{U^*}$ is the contraction of a

prime ideal of $S_*^k$;

(6) Each prime ideal of $k[X;S]_U*$ is the extension of a prime ideal of $S$;

(7) Each valuation overring of $S_*^k$ is of the form $k[X;S]_{Pk[X;S]}$, where $P$ is a prime ideal of $S$ such that $S_P$ is a valuation oversemigroup of $S$;

(8) $S_*^k$ is a flat $k[X;S]$-module.

Then each of (1), (2), (3), (4), (7) and (8) are equivalent. (1) implies (5), and (5) implies (6).

Remark (1. 4). (1) Let $k$ be a field and $*$ a $*$-operation on $S$. If $k[X;S]_U*$ is a Prüfer ring, then $*$ is e.a.b.

(2) Let $*$ be an e.a.b. $*$-operation on $S$. If the operation $v$ on $S$ is e.a.b. and if $S_*^k$ is a flat $k[X;S]$-module, then we have $S_*^k = S_v^k$.

Are eight conditions of Theorem (1. 3) equivalent each other ? (How about operations $b$ and $v$?) Conditions (5) and (6) are equivalent for the operation $b$ in Theorem (1. 3).

Proposition (1. 5). If $S$ is integrally closed, the followings are equivalent:

(1) $S$ is a $Z$-valued valuation semigroup;

(2) $S_b^k$ is a $Z$-valued valuation ring;

(3) $S_b^k$ is a Noetherian ring;

(4) $S_b^k$ is a Krull ring.

If $G$ has a family $\{V_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ of $Z$-valued valuation semigroups such that $\bigcap_\Lambda V_\lambda = S$ and for each $s \in S$, $s$ is a unit of $V_\lambda$ for all $\lambda$ but a finite number, then $S$ is called a Krull semigroup.

Proposition (1. 6). If the operation $v$ is e.a.b. on $S$, the followings are equivalent:

(1) $S$ is a Krull semigroup;

(2) $S_v{}^k$ is a principal ideal domain;

(3) $S_v{}^k$ is a Noetherian ring;

(4) $S_v{}^k$ is a Krull ring.

## § 2. M-semigroup rings.

For a fractional ideal $\mathfrak{a}$ of a domain $D$ we set $\mathfrak{a}^{-1} = \{ a \in K;\ a\mathfrak{a} \subset D \}$, where $K$ is the quotient field of $D$. We set $(\mathfrak{a}^{-1})^{-1} = \mathfrak{a}^v$. If $\mathfrak{a}$ is an ideal of a domain $D$(resp. a semigroup $S$) such that $\mathfrak{a}^v = \mathfrak{a}$, then $\mathfrak{a}$ is called a divisorial ideal of $D$(resp. $S$). If $D$ satisfies the ascending chain condition for divisorial ideals and if each ideal $(a, b)$ generated by two nonzero elements $a, b$ of $D$ is a divisorial ideal, then $D$ is called an M-ring. In this section we get a necessary and sufficient condition for a semigroup ring $D[X;S]$ to be an M-ring. Details of this section will appear on [11].

We know that the dimension of an M-ring $D$ is less than 2 (Querre [10]). It follows that if $D[X;S]$ is an M-ring, then $D$ is a field and $S$ is isomorphic either to $Z$ or to a subsemigroup of $Z_0$. If $k$ is a field, then clearly $k[X;Z]$ is an M-ring. Therefore it is sufficient for us to treat a semigroup ring of a subsemigroup $S$ of $Z_0$ over a field. Then we may assume that the quotient group $q(S)$ of $S$ is $Z$. Then the least natural number $d$ contained in $S$ is called order of $S$. If $S$ has order 1, then $S = Z_0$ and $k[X;S]$ is clearly an M-ring.

Henceforth in this section $S$ will denote a subsemigroup of $Z_0$ such that $q(S) = Z$ and the order $d$ of which is greater than 1.

We set as follows:

$h = \min \{ s \in S;\ s + Z_0 \subset S \}$;

$p_i = \min \{ n \in Z;\ nd + i \in S \}$ $(i \in Z)$;

$M(S) = \{ s \in S;\ 0 < s \leq h \}$;

$N(S) = \{1, 2, \ldots, h\} \setminus M(S)$.

We have $h = md + e$ $(m, e \in Z)$ with $e = 0$ or $2 \leq e \leq d - 1$.

Proposition (2. 1). The followings are equivalent:

(1) $|N(S)| = |M(S)|$ ;

(2) $N(S) = \{ h - 1 - s;\ 0 \leq s < h,\ s \in S \}$;

(3) $p_i + p_{e-1-i} = m + 1$ $(i \in Z)$.

For an ideal $\mathfrak{a}$ of $S$ we set as follows:

$\rho_j(\mathfrak{a}) = \min \{ n \in Z;\ nd + j \in \mathfrak{a} \}$ ;

$\tau_j(\mathfrak{a}) = \max \{ n \in Z;\ \mathfrak{a} \subset (nd - j) \}$ , $(0 \leq j \leq d - 1)$, where $(nd - j)$ denotes $nd - j + S$.

Lemma (2. 2). We have the followings:

(1) $\mathfrak{a}^v = \mathfrak{a}$ if and only if $\rho_j(\mathfrak{a}) \leq \rho_j(\mathfrak{a}^v)$ $(0 \leq j \leq d - 1)$;

(2) $\rho_j(\mathfrak{a}^v) = \max \{ \tau_i(\mathfrak{a}) + p_{i+j};\ 0 \leq i \leq d - 1 \}$ ;

(3) $\tau_j(\mathfrak{a}) = \min \{ \rho_\ell(\mathfrak{a}) - p_{j+\ell}\ ;\ 0 \leq \ell \leq d - 1 \}$ .

The proof follows from the definitions of the $\rho_i$, $\tau_j$ and $p_k$.

If $S$ satisfies the ascending chain condition for divisorial (integral) ideals and if each ideal $(s, t)$ generated by two elements $s, t$ of $S$ is a divisorial ideal, then $S$ is called an M-semigroup. If $k[X;S]$ is an M-ring, then $S$ is an M-semigroup.

Theorem (2. 3). The followings are equivalent:

(1) $p_j + p_{e-1-j} = m + 1$ for each $j \in Z$;

(2) $S$ is an M-semigroup.

Sketch of Proof. We will prove the case $e = 0$. The proof of the case $2 \leq e \leq d-1$ is similar. Suppose (1). Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of $S$. We set $j^* = d - j - 1$ for each $j$. Then we have

$(\rho_i(\mathfrak{a}) - p_{j^*+i} + p_{j^*+j})d + j \in \mathfrak{a}$.

It follows $\rho_j(\mathfrak{a}) \leq \rho_i(\mathfrak{a}) - p_{j^*+i} + p_{j^*+j}$ for each $i$. Lemma

(2. 2) implies $\rho_j(\mathfrak{a}) \leq \tau_{j*}(\mathfrak{a}) + p_{j*+j}$ ; and hence $\mathfrak{a}^v = \mathfrak{a}$.

Next if (1) is false, we have $p_r + p_{d-r-1} > m$ for some $r$ $(1 \leq r \leq d-1)$. We set $\ell = m + 1 - p_r$ and $\mathfrak{a} = (\ell d, md + r)$. Then it follows $\rho_{d-1}(\mathfrak{a}^v) < \rho_{d-1}(\mathfrak{a})$, hence $\mathfrak{a}^v \neq \mathfrak{a}$.

We set as follows:

$$N_j(S) = \{ z \in N(S);\ dj \leq z \leq dj + (d-1) \};$$

$$I(j) = \{ dj + (d-1) - z;\ z \in N_j(S) \} \quad (j \in Z_0).$$

Lemma (2. 4). Let $S$ be an M-semigroup. We have:

(1) $N_j(S) = \{ dj + (d-1) - i(j);\ i(j) \in I(j) \}$;

(2) $\{ dj + i(m-j-1) + e;\ i(m-j-1) \in I(m-j-1) \} \subset S \quad (0 \leq j \leq m-1)$.

Proof of (2). We have $i(m-j-1) = d(m-j-1) + d-1-z$ for some $z \in N_{m-j-1}(S)$. It follows $dj + i(m-j-1) + e = h - 1 - z$. By Proposition (2. 1) we have $dj + i(m-j-1) + e \in S$.

Theorem (2. 5). $k[X;S]$ is an M-ring if and only if $S$ is an M-semigroup.

Sketch of Proof. The case $e = 0$. (The case $2 \leq e \leq d-1$ is similar). Suppose that $S$ is an M-semigroup. Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of $k[X;S]$ generated by two nonzero elements $f(X)$, $g(X)$ of $k[X;S]$. We may assume that

$$\mathfrak{a} = (f(X),\ g(X),\ X^{2h},\ X^{2h+1}, \ldots,\ X^{2h+d-1}),$$

where $f(X) = X^h(\sum_{i=0}^{h-1} a_i X^i)$ and $g(X) = X^h(\sum_{i=0}^{h-1} b_i X^i)$ with $a_0 \neq 0$.

We employ the following vector notations:

$$A_j = (a_{dj}, a_{dj+1}, \ldots, a_{dj+d-1});$$

$$\mathfrak{X}_j = (X^{dj}, X^{dj+1}, \ldots, X^{dj+d-1});$$

$$A_j^{-\varepsilon} = (a_{dj-\varepsilon}, a_{dj+1-\varepsilon}, \ldots, a_{dj+d-1-\varepsilon}) \quad (j, \varepsilon \in Z_0),$$

where $a_{h+i} = 0$ $(i \in Z_0)$ and $a_{-p} = 0$ $(p > 0)$. The notations $B_j$, $B_j^{-\varepsilon}$ are defined similarly. For n-tuples $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ and $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ of $k^n$ we denote $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$ by

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\cdot(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. If we set $U = \{ \varphi(X) \in k(X);$ $\mathfrak{a} \subset \varphi(X)k[X;S]\}$, then $\mathfrak{a}^{v} = \bigcap_{U} \varphi(X)k[X;S]$. An element $\varphi(X)$ of $U$ is of the form $X^h/(\sum_{i=0} c_i X^i)$, where the $C_j =$ $(c_{dj+d-1}, c_{dj+d-2}, \ldots, c_{dj})$ satisfy

$$\sum_{j=0}^{k} A_j^{-i(k)}\cdot C_{k-j} = 0;$$

$$\sum_{j=0}^{k} B_j^{-i(k)}\cdot C_{k-j} = 0 \quad (0 \le k \le m-1,\ i(k) \in I(k)).$$

An element $G(X)$ of $\mathfrak{a}^{v}$ is of the form $X^h(\sum_{i=0} \gamma_i X^i)$ with

$$\sum_{j=0}^{k} \Gamma_j^{-i(k)}\cdot C_{k-j} = 0 \quad (0 \le k \le m-1,\ i(k) \in I(k)),$$

where the $\Gamma_j$ and $\Gamma_j^{-\varepsilon}$ are defined similarly with $A_j$ and $A_j^{-\varepsilon}$. It follows that the element $(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1})$ of $k^{md}$ is a linear combination of the following vectors:

$$(A_0^{-i(m-1)}, A_1^{-i(m-1)}, \ldots, A_{m-1}^{-i(m-1)}),$$
$$(B_0^{-i(m-1)}, B_1^{-i(m-1)}, \ldots, B_{m-1}^{-i(m-1)}),$$
$$(0, A_0^{-i(m-2)}, \ldots, A_{m-2}^{-i(m-2)}),$$
$$(0, B_0^{-i(m-2)}, \ldots, B_{m-2}^{-i(m-2)}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(0, 0, \ldots, 0, A_0^{-i(1)}, A_1^{-i(1)}),$$
$$(0, 0, \ldots, 0, B_0^{-i(1)}, B_1^{-i(1)}),$$
$$(0, 0, \ldots\ldots, 0, A_0^{-i(0)}),$$
$$(0, 0, \ldots\ldots, 0, B_0^{-i(0)}) \quad (0 \le j \le m-1,\ i(j) \in I(j)).$$

Hence $\Gamma_j$ $(0 \le j \le m-1)$ is of the form:

$$\sum_{n=0}^{j} \sum_{i(m-1-n)\in I(m-1-n)} \left\{ k_{n,i(m-1-n)} A_{j-n}^{-i(m-1-n)} + \ell_{n,i(m-1-n)} B_{j-n}^{-i(m-1-n)} \right\}$$

$(k_{n,i}, \ell_{n,i} \in k)$.

Therefore we have

$$G(X) = X^h\left(\sum_{j=0} \Gamma_j \cdot \mathfrak{X}_j\right)$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i(m-j-1)\in I(m-j-1)} X^{h+dj+i(m-j-1)}\left\{k_{j,i(m-j-1)}\left(\sum_{i=0}^{m-j-1} A_i \cdot \mathfrak{X}_i\right)\right.$$

$$\left.+ \ell_{j,i(m-j-1)}\left(\sum_{i=0}^{m-j-1} B_i \cdot \mathfrak{X}_i\right)\right\}$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i(m-j-1)\in I(m-j-1)} X^{dj+i(m-j-1)}\left\{k_{j,i(m-j-1)}f(X) + \ell_{j,i(m-j-1)}g(X)\right\}$$

$$\mathrm{mod.}(X^{2h}, X^{2h+1}, \ldots, X^{2h+d-1}).$$

We have shown that $G(X) \in \mathfrak{a}$ and hence $\mathfrak{a}^v = \mathfrak{a}$.

## References


[1] D. F. Anderson, The divisor class group of a semigroup ring, Comm. Algebra 8(1980), 467-476.

[2] L. Chouinard, Krull semigroups and divisor class groups, Canad. J. Math. 33(1981), 1459-1468.

[3] R. Gilmer, A two-dimensional non-Noetherian factorial ring, Proc. Amer. Math. Soc. 44(1974), 25-30.

[4] R. Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ. of Chicago Press, 1984.

[5] R. Gilmer and T. Parker, Divisibility properties in semigroup rings, Michigan Math. J. 21(1974), 65-86.

[6] G. Karpilovsky, Commutative Group Algebras, Marcel Dekker, 1983.

[7] W. Krull, Algemeine Bewertungstheorie, J. Reine Angew. Math. 167(1932), 160-196.

[8] R. Matsuda, On some open questions and related results in ideal theory, Proc.7-th Sympos. on Comm. Ring Theory(1985), 34-41.

[9] R. Matsuda and K. Satô, Bull. Fac. Sci., Ibaraki Univ. 19(1987), to appear.

[10] J. Querre, Sur les anneaux reflexifs, Canad. J. Math. 27(1975), 1222-1228.

[11] K. Satô, Notes on semigroup rings as M-rings, Memoirs of

Tôhoku Inst. of Tech. 7(1987), to appear.

# Faltings の CM化と Sharp予想の特別な場合

青山陽一　愛媛大・理
後藤四郎　日大・文理

Sharp予想：dualizing complex を持てば，Gorenstein環の準同型像である。

について考える。局所環に対し，次の場合に予想が肯定的であることが判っている（[1]，[2]）：1°（FLC）の場合．　2° 次元4以下の場合．　3° 環が $(S_{d-2})$（$d$は環の次元）で，環の depth $\geq d-1$，canonical module の depth $\geq 3$，の場合．。

ここでは，局所環に対し non CM locus が1次元以下の場合 及び 環の次元が5以下の場合に予想が肯定的であることが判ったので，報告する。まず，Sharp予想に関係したことを少し述べておこう。なお，dualizing complex，canonical module，Gorenstein module 及びその rank 等の定義については，[3]と[8, pp. 202〜203]を見て頂くことにして，ここでは省略することにする。

Gorenstein環の準同型像として表わされる環は，色々と良い性質を持っている。例えば，formal fibre は Gorenstein，universally catenary，CM-locus 及び Gorenstein-locus は open，acceptable，local duality 等々である。そして，有限次元Gorenstein環の準同型像となる環は dualizing complex を持ち，dualizing complex を持つ環は，上記の性質を持つことが知られている。

では，Gorenstein環の準同型像としては表わされないが，dulizing complexを持つ環が存在するかと言うと，現在までの所 その様な例は知られていない。その様なものは存在しないだろうというのが，Sharp予想である。環がCohen-Macaulayのときは，Sharp予想は肯定的である。（[14, 4.3]）それは本質的にFoxbyとReitenによる次の結果である。

（[9], [12]）Cohen-Macaulay局所環Aがcanonical module Kを持つとする。このとき，A⋉K（イデアル化）はGorenstein環である。

ところで，Cohen-Macaulay局所環上では，canonical moduleとGorenstein module of rank oneとは同じことである。局所環がGorenstein moduleを持てば，Cohen-Macaulayである。Gorenstein moduleの概念が定義された頭初より，「Gorenstein moduleが存在すれば，rank oneのものが存在するか」と言うのが問題となっていたが，これには反例が存在することがWestonによって示された。この問題について，知られている結果を少し述べておこう。

（[8, 4.6]）Gorenstein moduleが存在すれば，minimal rankのものが存在し同型を除いて一意的である。そして，任意のGorenstein moduleはその何個かの直和に同型となる。

（[8, 4.9]）odd rankのGorenstein moduleが存在すれば，rank oneのものが存在する。

以上より，minimalなものはrankがoneかevenであることが判るが，

さらに,

([11]) minimalなGorenstein moduleのrankは2のベキである。

そして,

([15, §3]) There exists a two-dimensional, local, analytically normal, non-Gorenstein, unique factorization domain with Gorenstein module of rank two.

Sharp予想について知られていること, canonical moduleの存在, formal fibreのGorenstein性等の関係については, [3, §3の最初]を参照して頂くことにして, 本論に入ろう。報告したいことは, 次である。

定理1. 局所環Aがdualizing complexを持ち, $\dim \mathrm{nonCM}(A) \leqq 1$ ならば, AはGorenstein環の準同型像である。

系. 局所環Aがdualizing complexを持ち, $(S_{d-2})$ $(d=\dim A)$ であれば, AはGorenstein環の準同型像である。

定理2. 局所環Aがdualizing complexを持ち, $\dim A \leqq 5$ ならば, AはGorenstein環の準同型像である。

[2, §3]と同様の手法により, 定理2は系を使って示される。その詳細は, [4]に書いてあるので, ここでは定理1についてのみ記すことにする。定理1の証明は, [5] or [10] or [13]による(FLC)局所環の理論(必要なことは, 定義も含め, [2, §1後半]にまとめてあります)とFaltings

の CM 化（[7]）を合わせることによって得られる。

（$A, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$）を半局所環，$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \cdots \mathfrak{n}_s$ とする。次を仮定する：

a）A は dualizing complex $D^\bullet = 0 \to D^0 \to \cdots \to D^{d+1} \to 0$ such that $D^0 \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})$, $D^{d+1} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} E_A(A/\mathfrak{n}_i)$ を持つ。

b）$\dim \mathrm{nonCM}(A) = 1$。

$\mathrm{nonCM}(A) = V(\mathfrak{a})$ なる ideal $\mathfrak{a}$ をとる。$\dim A/\mathfrak{a} = 1$ $\therefore \mathrm{ht}\, \mathfrak{a} = d$。$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}$ の元 $x_1, \ldots, x_d$ を $\mathrm{ht}(x_1, \ldots, x_d)A = d$ となる様にとる。$I = (x_1, \ldots, x_d)A$ とおく。$I$ の min. prime $\mathfrak{p}$ に対し，$A_\mathfrak{p}$ は (FLC) となる。([2, 1.17]) 必要なら $x_i$ の適当なベキをとり，各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A/I)$ に対し，$x_1, \ldots, x_d$ は $A_\mathfrak{p}$ において [2, 1.18 (b)] に述べられている様な $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primary ideal に属するとしてよい。$\mathfrak{p} \not\supseteq I$ に対し $A_\mathfrak{p}$ は C.-M. だから，$H^i(D^\bullet)_\mathfrak{p} = 0$ for $i > 0$。従って，$\exists t$ s.t. $I^t H^i_\mathfrak{n}(A) = 0$ for $i \leqq d$。$\mathfrak{p} \not\supseteq I$, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p} + I$ に対し，$A_\mathfrak{p}$ は C.-M. で $\mathrm{ht}\, \mathfrak{q} \geqq d$ であるから，$\mathrm{depth}\, A_\mathfrak{p} + \dim A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{q} = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{q} = \dim A_\mathfrak{q} \geqq d$。従って [6] より，$\exists u$ s.t. $I^u H^i_I(A) = 0$ for $i < d$。$x_i$ の充分高いベキをとり，各 $x_i \in \prod_{j \leqq d} (\mathrm{Ann}\, H^j_\mathfrak{n}(A))^{2^{d-1}}$, $\in \prod_{j < d} (\mathrm{Ann}\, H^j_I(A))^{2^{d-1}}$ としてよい。($H^j_{(x_1, \ldots, x_d)}(A) = H^j_{(x_1^n, \ldots, x_d^n)}(A)$ for $n \geqq 1$) $C = \bigoplus_{n \geqq 0} I^{(d-1)n} \cong A[I^{d-1}T] \subset A[T]$ とおく。極大でない prime $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p} \not\supseteq I$ なら $C_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}[T]$ C.-M, $\mathfrak{p} \supseteq I$ なら $C_\mathfrak{p} = \bigoplus_{n \geqq 0} (I_\mathfrak{p}^{d-1})^n$ C.-M. ([2, 1.19])，即ち $C_\mathfrak{p}$ C.-M. である。$i = 1, \ldots, d$ に対し，$C_i = A[x/x_i \mid x \in I]$ とおく。$C_i = C[1/x_i^{d-1}T]_0$ である。

$C_i$ の素イデアル $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{n}C_i$, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p} + \mathfrak{n}C_i$ をとる。$\mathfrak{p}$ が minimal のとき、$\dim C_i/\mathfrak{n}C_i \leqq d-1$, $\dim C_i/\mathfrak{p} = d+1$ だから、$\dim C_{i\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}C_{i\mathfrak{q}} \geqq 2$。$\mathfrak{p}$ が min でないとき、$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap A$ とおくと、$\mathfrak{p}'$ は極大でないから $C_{\mathfrak{p}'}$ は C.-M. で、従って $C_{i\mathfrak{p}}$ も C.-M. である。$\therefore$ $\operatorname{depth} C_{i\mathfrak{p}} + \dim C_{i\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}C_{i\mathfrak{q}} \geqq 1+1=2$。よって、[6] より、$\exists\, r \geqq d$ s.t. $\mathfrak{n}^r \cdot H^1_{\mathfrak{n}}(C_i) = 0$ for $i=1,\dots,d$。$y \in \mathfrak{n}^r$ を $\operatorname{ht}(x_1, \dots, x_d, y) = d+1$ となる様にとる。$J = I^r(I^r + yA)$ とおき、$R = \bigoplus_{n \geqq 0} J^n \cong A[JT] \subset A[T]$ とする。

主張：任意の極大でない斉次素イデアル $P$ に対し、$R_P$ は C.-M. である。(i.e. 任意の素 ideal $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{n}_1R+R_+, \dots, \mathfrak{n}_sR+R_+$ に対し、$R_{\mathfrak{P}}$ C.-M.)

$\mathfrak{p} = P \cap A$ とおく。$\mathfrak{p}$ が極大でないとき。$\mathfrak{p} \not\supseteq I$ なら、$A_{\mathfrak{p}}$ C.-M. だから、$R_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}[T]$ C.-M.。$\mathfrak{p} \supseteq I$ なら、$R_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus_{n \geqq 0} (I_{\mathfrak{p}}^r)^n$ は $x_1, \dots, x_d$ のとり方より C.-M. ([2, 1.19])。$\mathfrak{p}$ が極大のとき。$A_{\mathfrak{p}}$, $R_{\mathfrak{p}}$ で考えて、$A$ は local としてよい。$J^r = (x_1^{2r}, \dots, x_d^{2r}, yx_1^r, \dots, yx_d^r)J^{r-1}$ であり、$P \not\supseteq R_+$ だから、$P \not\ni x_i^{2r}T$ $(\exists i)$ or $P \not\ni yx_j^rT$ $(\exists j)$。$P \not\ni x_d^{2r}T$ のとき、$U = x_d^{2r}T$, $S = R[1/U]$, $B = S_0$, $Q = PS \cap B$ $(\supseteq \mathfrak{n}B)$ とおく。$S = B[U, 1/U]$ で、$U$ は $B$ 上代数的独立であるから、$S_{PS}$ C.-M. $\Leftrightarrow$ $B_Q$ C.-M.。従って、$B_M$ C.-M. for every max. ideal $M \supseteq \mathfrak{n}B$ を言えばよい。ところで、$B = S_0 = A[x/x_d^{2r} \mid x \in J] = A[x_1/x_d, \dots, x_{d-1}/x_d, y/x_d^r]$ であり、$x_1, \dots, x_d$ は [7, Satz 3] の条件を満たしているから C.-M. である。

$P \not\ni yx_d^rT$ のときも全く同様である。(但し、$B = A[x_1/x_d, \dots, x_{d-1}/x_d, x_d^r/y]$)

さて 定理1の証明をしよう。 $\mathrm{Ass}(A)=\mathrm{Assh}(A)$ のときは，今示したことにより，ある ideal $J$ が存在して，$R=\bigoplus_{n\geq 0}J^n$，$N=\mathfrak{m}R+R_+$（$\mathfrak{m}$ は $A$ の極大イデアル）としたとき，$R_N$ は (FLC) である。(cf. [2, 1.17]) $R_N$ は有限生成 $A$ 代数の局所化だから，dualizing complex を持つ。従って，[2, 2.1] より $R_N$ は Gorenstein 環の準同型像であり，$A$ もそうである。$d=\dim A$ についての帰納法により証明する。$A\supset(0)=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ を準素イデアルによる最短表示で，$\dim A/\mathfrak{q}_i=d\Leftrightarrow i\leq s$ $(1\leq s<t)$ なるものとする。$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_s$，$\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_{s+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ とおく。$\dim A/\mathfrak{p}>1$ なる prime $\mathfrak{p}$ をとる。$A_\mathfrak{p}$ は C.-M.，特に $\mathrm{Ass}(A_\mathfrak{p})=\mathrm{Assh}(A_\mathfrak{p})$。 $\therefore\ \mathfrak{p}\not\supseteq\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ $\therefore\ \dim A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\leq 1$。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ のとき，$(A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}\cong A_\mathfrak{p}$ C.-M.。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{b}$ のとき，$(A/\mathfrak{b})_\mathfrak{p}\cong A_\mathfrak{p}$ C.-M.。従って，$\dim \mathrm{nonCM}(A/\mathfrak{a})\leq 1$，$\dim\mathrm{nonCM}(A/\mathfrak{b})\leq 1$ である。$\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})=\mathrm{Assh}(A/\mathfrak{a})$ だから，$A/\mathfrak{a}$ は Gorenstein 局所環 $R$ の準同型像である。$\dim A/\mathfrak{b}<d$ だから，帰納法により，$A/\mathfrak{b}$ は Gorenstein 局所環 $S$ の準同型像である。$\dim R=\dim S=d$ としてよい。$f$ を $R\oplus S$ から $A/\mathfrak{a}\oplus A/\mathfrak{b}$ への全射準同型とし，$B=f^{-1}(A)$ とおく。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & R\oplus S & \longrightarrow & R\oplus S/B & \longrightarrow & 0 \quad (\text{完全})\\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\wr & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}\oplus A/\mathfrak{b} & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}+\mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{完全})
\end{array}$$

[2, Proof of 2.7 (d)$\Rightarrow$(a)] と同様にして，$B$ は dualizing complex を持つ $d$ 次元局所環であることが判る。また，$\mathrm{Ass}(B)=\mathrm{Assh}(B)$ である。$\dim R\oplus S/B\leq 1$ であるから，$\dim\mathrm{nonCM}(B)\leq 1$ となり，$B$ は Gorenstein 環の準同型

像となり，Aもそうである。

（ある種の半局所環に対しても考察出来るが，ここでは省略する。）

## References


[1] 青山－後藤：Sharp予想の特別な場合，京大数理研講究録543 (1985) 13～52.

[2] Aoyama－Goto：*Some special cases of a conjecture of Sharp*，J. Math. Kyoto Univ. 26-4 (1986).

[3] Aoyama－Goto：*A brief summary of the elements of the theory of dualizing complexes and Sharp's conjecture*，The Curves Seminar at Queen's vol. IV, Queen's Papers in Pure and Appl. Math..

[4] Aoyama－Goto：*Sharp's conjecture —— the case of local rings with dim nonCM ≦ 1 or dim ≦ 5*，京大数理研講究録「短期共同研究 Graded ringsと可換環上のfiltrationの研究」.

[5] Brodmann：*Local cohomology of certain Rees- and form-rings* I，J. Algebra 81 (1983) 29～57.

[6] Faltings：*Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen*，Arch. Math. 30 (1978) 473～476.

[7] Faltings：*Über Macaulayfizierung*，Math. Ann. 238 (1978) 175～192.

[8] Fossum－Foxby－Griffith－Reiten：*Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*，I. H. E. S. Publ. Math. 45 (1975) 193～215.

[9] Foxby：*Gorenstein modules and related modules*，Math. Scand. 31 (1972) 367～384.

[10] Goto－Yamagishi：*The theory of unconditioned strong d-sequences*

*and modules of finite local cohomology*, to appear.

[11] Khinich: *On Gorenstein modules of a ring of invariants*, Russian Math. Surveys 33 (1978) 195 ~ 196.

[12] Reiten: *The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules*, Proc. A. M. S. 32 (1972) 417 ~ 420.

[13] Schenzel: *Standard systems of parameters and their blowing-up rings*, J. reine u. angew. Math. 344 (1983) 201 ~ 220.

[14] Sharp: *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Sém. Algèbre P. Dubreil 1977/78, Lect. Notes in Math. 740, Springer Verlag 1979, 213 ~ 229.

[15] Weston: *On descent in dimension two and non-split Gorenstein modules*, Thesis at Univ. of Illinois 1986.

# Some Examples of Local Rings

西村純一（京大・理）

ネター環の素イデアル鎖に関する話題は、ネター環論の基礎の一部分であり、なかなかおもしろいので、少し考えてみたい。まず、ネター環、素イデアル、局所環、等の定義から始めるのがものの順序かもしれないが、略。

さて、ネター環 A の素イデアル $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ で、$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ かつ、$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ との間に他の素イデアルが存在しない——すなわち、素イデアル $\mathfrak{p}'$ で、$\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q}$ となるものは、ない——とき、$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ は、長さ1の飽和素イデアル鎖（saturated prime ideal chain）といい、$n+1$ 個の素イデアル $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ に関し、$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ で、各 $i$ について、$\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ が（長さ1の）saturated（chain）であれば、この素イデアル鎖を、長さ $n$ の飽和素イデアル鎖と呼ぶ。（注、$\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_n$ を固定した時、$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}$ の選び方は、必ずしも unique ではないし、長さ $n$ も、一意的に定まるかどうかも、わからない。）

ところで、よく知られているように、ネター環 $A$ の2つの素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ で、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ をとると、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}$ であるような有限saturated鎖が必ず存在する。

そこで、「与えられた $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$) について、あらゆるsaturated chainを考えたとき、その長さが一定であろうか?」

ネター環論の歴史をふり返ってみれば、上の問(の解決)に対する多くの人々の努力のあとをたどることができるであろう。例えば、体上有限生成環(の局所化)、完備局所環において、肯定的回答が得られている。そして、多くのネター環論の専門家が、すべてのネター環においてこの問は肯定的に解決されるものと信じて研究していたらしい。

しかし、残念(?)なことに、この期待は、永田先生による、かの非常に重要な論文(M. Nagata, On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. J. 10 (1956), 51-64)で、打ちくだかれた。すなわち、

Example　3次元局所整域 $A$ で、極大素イデアル鎖

(maximal prime ideal chain — つまり、(0) と A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ についての saturated chain —) で、長さ 2 のものも、同時に存在するもの、を構成した。

よって、ネター環で、その任意の素イデアル $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ($\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$) に対し、どの saturated chain の長さも等しいものは、一般のネター環より、素イデアル鎖(の構造)において、明らかに"よい"性質(構造)をもっているのだから、catenary 環と呼ぶ。

さて、catenary 環は、どの程度、"よい"環なのだろうか? 例えば、catenary 環の有限拡大環は、また、catenary 環だろうか? しかし、上述の永田論文は、このようなことも期待できない、という例も含んでいる。

<u>Example</u>. 2次元局所整域 A (これは catenary) で、A[X] (= A 上、1変数多項式環) が、catenary でないもの、も与えた。

そのようなわけで、ネター環で、そのすべての有限拡大環が catenary であるものは、chain condition に関し、非常によい性質をもっているのだから、universally catenary と呼ぶ。

ところで、この永田論文は、局所整域が universally catenary である十分条件をも、命題の1つとして含んでいる。

<u>Proposition</u>. 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ が quasi-unmixed (つまり、Aの完備化 $\hat{A}$ のすべての極小素イデアル $\hat{\mathfrak{p}}$ について、$\dim \hat{A}/\hat{\mathfrak{p}} = \dim A$) であれば、A は、universally catenary。

この命題は、特に、CM環(の準同型像)は、いつも universally catenary であることを示す。

その後、Ratliff は、上述の命題の逆を示した。(cf. L. J. Ratliff, Jr., On quasi-unmixed local domains, the altitude formula, and the chain condition for prime ideals, I, II, Amer. J. Math., <u>91</u> (1969), 508-528, <u>92</u> (1970), 99-144.)

<u>Theorem</u> (Nagata - Ratliff) 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ が、universally catenary である必要十分条件は、A が quasi-unmixed であること。

この定理の系として、例えば、

<u>Corollary</u>. ネター環 A が universally catenary

ならば、A上形式的巾級数環 A[[X]] も、universally catenary。

<u>Corollary.</u> 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ が universally catenary である必要十分条件は、A のヘンゼル化 $({}^{h}A, {}^{h}\mathfrak{m})$ が universally catenary であること。

が導かれる。

さて、永田先生の例をよくながめてみると、それらの整閉包は、常に、universally catenary であり、論文中には、次の命題も提示されている。(注、証明は、略。)

$\boxed{\text{Proposition}}$ $(A, \mathfrak{m})$ が正規 catenary 局所整域なら、A は、universally catenary。

そこで、Ratliff は、永田論文以降20年以上にわたり、catenary 環、universally catenary 環を、詳しく研究し、次のような命題を得るとともに、数々の予想をたて、上の $\boxed{\text{Proposition}}$ を解こうと努力した。(cf. L. J. Ratliff, Jr., Characterizations of catenary rings, Amer. J. Math., 93 (1971), 1070–1108, etc., ...)

<u>Proposition.</u> ネーター環 A が universally catenary である必要十分条件は、A[X] が catenary であること。

Proposition. 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ が catenary である必要十分条件は、Aのすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ について、

$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$。

Proposition. 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ が universally catenary である必要十分条件は、Aのヘンゼル化 $({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$ が catenary であること。

Proposition. catenary 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ の極大イデアルと異るすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ について、$\mathfrak{p}$ における局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ は universally catenary。

Ratliffの予想（注. これらの予想、およびそれらの関係の詳細は、L. J. Ratliff, Jr., Chain Conjectures in Ring Theory, SLN 647 を参照。）

Chain Conjecture (CC) すべての正規局所整域は、catenary。

Avoidance Conjecture (AVC) ネター環 A の素イデアル、$P, Q, M, M_1, \ldots, M_n$ について、$P \subset Q \subset M$ が長さ2の saturated chain で、$M \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ なら、素イデアル $Q'$ で、$P \subset Q' \subset M$ が saturated、かつ、

$Q' \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ であるものが存在する。

T-L Conjecture（TLC） $(A, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n)$ が半局所整域で、すべての素イデアル $\mathfrak{p}$ について、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ なら、A は catenary。

Upper Conjecture（UPC） 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ で、$B = A[X]_{(\mathfrak{m}, X)}$ に、長さ $n+1$ の maximal chain があれば、A に、長さ $n$ の maximal chain が存在するか。$n = 1$。

Depth Conjecture（DC） 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ で、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} > 1$ なら、素イデアル $\mathfrak{p}$ で、$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$、かつ、$\dim A/\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{q} + 1$ であるものが存在する。

H Conjecture（HC） ネーター環 A で、すべての高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ について、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ なら、A は catenary。

Catenary Conjecture（CTC） catenary 局所整域の整閉包は、universally catenary。

GB Conjecture（GBC） ネーター整域 A の整閉包 $\bar{A}$ は次の性質をみたす。$\bar{A}$ の任意の整拡大 B において、P

$\subset Q$ が長さ1の saturated chain なら $\bar{\mathfrak{p}} = P \cap \bar{A} \subset \bar{\mathfrak{q}} = Q \cap \bar{A}$ も長さ1の saturated chain。

<u>Normal Chain Conjecture</u> (NCC) 局所整域 $(A, \mathfrak{m})$ の整閉包 $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{m}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{m}}_r)$ が catenary かつ $\dim \bar{A}_{\bar{\mathfrak{m}}_i} = \dim A$ $(i=1,2,\dots,r)$ なら $A$ は universally catenary。

<u>予想の関係</u> (矢印→の元が正しければ、先の予想も正しい。)

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\mathrm{CC}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] & & & \\
\boxed{\mathrm{GBC}} \arrow[ddddr] & \boxed{\mathrm{DC}} \arrow[d] & & \boxed{\mathrm{AVC}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{\mathrm{HC}} \arrow[d] & \boxed{\mathrm{TLC}} \arrow[dl] & & \boxed{\mathrm{UPC}} \arrow[ddlll] \\
 & \boxed{\mathrm{CTC}} \arrow[d] & & & \\
 & \boxed{\mathrm{NCC}} \arrow[d] & & & \\
 & \boxed{\mathrm{Prop}} & & &
\end{tikzcd}$$

さて、これら予想の現状なのだが、まず小駒氏により Chain Conjecture が否定的に解かれた。つまり、小駒氏は、次のような例を、C. Rotthaus の方法を改良して作った。(T. Ogoma, Non-catenary pseudo-geometric normal rings. Japan. J. Math., 6 (1980), 147-163.)

Example. 3次元正規nagata局所整域で、catenaryでないものがある。

次に、A. M. de Souza Doering は、小駒氏の例をもとに、Depth Conjecture の反例を与え (cf. A. M. de Souza Doering, The Depth Conjecture: A Counterexample, J. of Alg. 77 (1982), 443-448.), Ratliff も、小駒氏の例から、GB Conjecture の反例を導いた (らしい)。(cf. L. J. Ratliff, Jr., A Brief History and Survey of the Catenary Chain Conjectures, Amer. Math. Monthly 88 (1981), 169-178).

ところで、筆者は最近次のような例を作ることを試みた。

Example. 3次元UFDで、universally catenaryでないもの。(注. これは $\boxed{\text{Prop}}$ の反例になっている。)

作り方は Rotthaus, Ogoma, R. Heitmann の手法、ideaを有効に利用するが、記述がかなりめんどうなので、興味(と根気)のある方は、標題のpreprintを読んでください。　以上.　13/01/87 J.

# Integral－valued polynomial ring について

柴田　房男

吉田　憲一

## 0．序文

Rを可換環、特に整域とし、R上の多項式全体のなす環をR［x］で表わす。R［x］の元　f（x）は、2面性を持つ、すなわち、形式的な多項式としてと、RからRへの写像を与える多項式と。ここで、RからRへの写像を与えるという意味では、例えば、R＝Z（整数環）で、$f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)$ もこの性質を有する。一方、f（x）は、Q上の多項式であるが、Z上の多項式ではない。そこでKをRの商体としK［x］の元でRからRへの写像を与えるものをIntegral－valued polynomial（特に、R＝ZのときはInteger－valued polynomial）と呼び、それら全体をD（R）で表わすことにする。D（R）は、明かにK［x］の部分環を成す。

Rが無限体を含むときには、D（R）＝R［x］であることが分かるので、ここでは整数論に表われる環、及び、有限体上の曲線に対応する環が、もっぱら、中心的役割を果たす。

前半では、Integral－valued polynomial ring について、今まで調べられて来た結果についてまとめ、後半では新らたに分かった結果、及び、今後の問題等を記す。

## 1. Skolem ring

Integral-valued polynomial ring に関する論文は、分かったところでも２０編あり、その内一番古いものは、Th. Skolem [19] の論文であろう。他の論文もすべて、この論文からの派生であると言って過言ではあるまい。

### 定義

D（R）が、Skolem ring であるとは、

D（R）の元 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ で、今、Rの勝手な元 a に対して、

$(f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a))R=R$ であれば、元々

$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))D(R)=D(R)$

Th. Skolemの論文では、D（Z）が、Skolem ringである事が示されている。

D. Brizolis [3] は、更に、この結果を拡張し

### 定理

Rは、1)Dedekind domain 2)Rの任意の Prime ideal P に対して R／Pが、Finite field となる Ringとし、任意のNon constant polynomial $f(x) \in R[x]$ に対して $f(x) \equiv 0 \pmod{P}$ が、Rの中に根をもつような Prime ideal Pが無限個存在すると仮定する。

このとき、K をRの商体で完全体であると仮定する。 $k=0, 1, 2, \ldots$ に対し $R^k = \{f(x) \in K[x] \mid f^{(j)}(x) \in R^{\circ}, 0 \leq j \leq k\}$ ここで、$f^{(j)}(x)$ は、f（x）の j 回微分である。

$R^{\infty} = \bigcap_k R^k$ とすれば、$k=0, 1, 2, \ldots$ に対して、$R^k$ は、Skolem ringである。

という結果を得ている。

注意　（2）の条件の必要性

$R=Z_{(3)}$ ，Prime ideal （3） によるLocalization，とする。Rは、Dedekind domainで、その商体は、Qである。$f(x)=x^2+1$ とすれば、$f(x)\in D(R)$ で、Z の全ての元aに対して、$f(a)\not\equiv 0 \pmod{m}$ mは、Rの唯一のPrime idealである。任意のZ の元aに対して、$(f(a))=(1)$ であるが、$(f(x))\neq 1$となり、D（R）は、Skolem ring でない。

そこで、この性質をもつRingをD＊－domainと呼び次の様に定義する。

**定義**　D＊－domain

ここで、D＊－domainとは、次の条件を満たすdomainである。

1）Rは、Dedekind domainである。

2）Rの商体kの標数は、0である。

3）Rの全てのPrime ideal Pに対してR／Pは、Finite fieldである。

4）R［x］のNon constant polynomial f（x）に対して、$f(x)\equiv 0 \pmod{P}$が、Rの中で解をもつようなprime ideal Pが、無限個存在する。

**定理**

Rが、D＊－domainならば、D（R）は、Skolem ring である。

RをDedekind domainとし、D（R）の部分環が、Skolem ringとなるための条件は、そのMaximal ideal によって特徴づけられる。

## 定義

ＲをＤｅｄｅｋｉｎｄ　ｄｏｍａｉｎとし、その商体をｋ、ｋの有限拡大体をＬ、Ｌの中のＲの整閉包をＢとする。ＰＢ＝$D_1^{e_1}\cdots D_n^{e_n}$となるＲのＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌをＰとする。ここで、$D_i$は、ＢのＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌとする。

このとき、$e_1=e_2=\cdots=e_n$であるとき、Ｐは、Ｂの中でＵｎｒａｍｉｆｉｅｄであると言う。

また、$e_i$を$D_i$に関するＰのＲａｍｉｆｉｃａｔｉｏｎ　ｉｎｄｅｘと呼ぶ。

## 定理

Ｒは、Ｄｅｄｅｋｉｎｄ　ｄｏｍａｉｎで次の条件を満たす。

Ｒの全てのＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌ　Ｐ　に対してＲ／Ｐが、有限体である。

このとき、

Ｒ［ｘ］を含むＤ（Ｒ）の部分環　Ｓが、Ｓｋｏｌｅｍ　ｒｉｎｇ　である必要十分条件は、Ｓの各Ｍａｘｉｍａｌ　ｉｄｅａｌ　Ｍ　は、ＲのＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌ　Ｐ　と$\alpha\in\overline{R}_P$　に対応して、$M=M_{\alpha,P}=\{f\in S \mid |f(\alpha)|_P<1\}$と表わされる。

ここで、$|f(\alpha)|_P$は、Ｐ進付値を表わす。$\overline{R}_P$は、ＲのＰ－ａｉｄｉｃ　ｃｌｏｓｕｒｅを表わす。

その上、$k<\infty$　に対して、$R^k$が、Ｓｋｏｌｅｍ　ｒｉｎｇならば、Ｒの与えられたＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌ　Ｐを含むＲ　のＭａｘｉｍａｌ　ｉｄｅａｌは、２個存在する。

Ｒ　が、Ｓｋｏｌｅｍ　ｒｉｎｇで、ＰをＲのＰｒｉｍｅ　ｉｄｅａｌとし、ｐをＰに含まれるＲａｔｉｏｎａｌ　ｐｒｉｍｅとし、Ｎをｍｏｄ　Ｐ　によるＰのＮｏｒｍとする。（Ｎは、Ｒの異なる剰余類の数）このとき、ｐより小さいＰに関するｐのＲａｍｉｆｉｃａｔｉｏｎ　ｉｎｄｅｘに対して、Ｐを含むＲ　のＭａｘｉｍａｌ　ｉｄｅａｌは、Ｎ個存在する。特に、ｐが、Ｒの中で、Ｕｎｒａｍｉｆｉｅｄ　ｉｄｅａｌならば、Ｐを含むＭａｘｉｍａｌ　ｉｄｅａｌは、Ｎ個存在する。

## 定理

Rを体でないDedekind domainとし、その商体をkとし、kは完全体とする。このとき、次は同値である。

1）全てのPositive integer nと全ての（m）$\in \hat{Z}$に対して
　D（R，n，（m））は、Skolem ringである。

2）Positive integer nに対して、
$R[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subseteq S \subseteq D(R)$となるSkolem ring Sが存在する。

3）Rが、各RのPrime ideal Pに対して、剰余体R／Pは、Finite fieldであるか、または、Algebraically closedである。そして、Rは、Property Sと言われる次の三つの同値条件を満たす。

1）$SOL(f) = \{m \mid m$は、RのMaximal ideal，$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$が、Rの中で根をもつ。$f(x) \in R[x]\}$とするとき、
全てのNon constant polynomial $f(x) \in R[x]$に対して、　$SOL(f) \neq \phi$

2）全てのNon constant polynomial $f(x) \in R[x]$に対して、　$SOL(f) = \{0\}$

3）全てのMonic non constant polynomial $f(x) \in R[x]$に対して、　$SOL(f) = \{0\}$

ここで、$\hat{Z} = Z^{+} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$

## 定理

R、kは、上の定理と同様とする。

$R[x_1, \ldots, x_n] \subseteq S \subseteq D(R)$ とする。このとき、次は、同値である。

1）Sは、Skolem ringである。

2）RのPrime idal Pと$\alpha \in (\bar{R}_P)^n$に対して、全てのSのMaximal ideal は、$M(S, \alpha, P) = \{ f \in S \mid v_P(f(\alpha)) < 1 \}$ の形で表わされる。

3）Sの全てのIdeal I に対して、$V_{I,P} \neq \phi$ となるRのPrime ideal P が、存在する。

4）全ての真のSの有限生成Ideal I に対して、$R^n \cap V_{I,P} \neq \phi$ となるPrime ideal P が、存在する。

ここで、$V_{I,P} = \{ \alpha \in (\bar{R}_P)^n \mid v_P(f(\alpha)) < 1$ for every f I$\}$ $v_P$ は、RのPrime ideal P に対するNormalized valuationである。$(\bar{R}_P)$ は、Pに関するRのCompletionである。

このSkolem ringは、HilbertのNullstellensatzと関連深いRingである。

## 2. D−ring

多項式環Z［x］に対して、$Z[x] \ni f(x), g(x)$ が、全ての$n \in Z$に対して $f(n) \mid g(n)$ を満たすならば、Z［x］の中で $f(x) \mid g(x)$ であるか？

という問題があり、これを肯定的にD．A．Lind［12］が解き次の結果を得た。

$f(x), g(x) \in D(R)$ が、全ての$n \in Z$に対して $f(n) \mid g(n)$ を満たすならば、$D(Z)$の中で $f(x) \mid g(x)$ である。

ただし、$Z[x]$は、この性質を有しない事は簡単に分かる。

更に、この結果をD．Brizolis［1］が、拡張し

**定理**

KをAlgebraic number fieldとし、そのIntegers ringをRとする。

このとき

任意の$a \in R$に対して $f(a) \mid g(a)$ ならば、$D(R)$の中で、$f(x) \mid g(x)$ である。

という結果を出した。

そこで、このようなDivisibility propertyをもつRingをD－ringと呼び、次の様に定義する。

**定義**

RをRingとし、その商体をkとする。

この時、Rが、ほとんど全ての$a \in R$に対して、 $f(x), g(x) \in D(R)$ $f(a) \mid g(a)$ ならば、$k[x]$の中で、$f(x) \mid g(x)$ を満たすRingであるとき、Rを、D－ringと呼ぶ。

**定理**

Rが、D＊－domainならば、$D(R)$は、D－ringである。

D．L．McQuillan ［11］が、次の結果を出している。

**定理**

1）SをR上整なRのOver－ring とする。

このとき、

Rが、D－ringであるならば、SもまたD－ringである。

2）Sを環としてR上有限生成なRのOver－ring　とする。

このとき、

Sが、D－ringならば、Rは、D－ringである。または、Sは、R上超越的である元を一つは含む。

## 定理

Rは、Char（R）＝0であるDedekind　ring　とし、Rの商体をkとする。

このとき、

Rが、D－ringである必要十分条件は、kの有限Galois拡大体Lが存在して、Rの全ての、Prime　idealは、Lの中で、完全に分離する。

更に、Skolem　ringと関連して、次の結果が分かっている。

## 定理

Rは、体でない整域とし、その剰余体は、すべて有限体とする。

このとき、

Rが、D－ringである必要十分条件は、D（R，1）が、Skolem　ringを含む。

## 定理

RをDedekind　domainとする。

このとき、次は同値である。

1）D（R）は、（Strong）Skolem　propertyを持つ。

2）D（R）は、（Strong）Hilbert　propertyを持ち、D－ringである。

ここで、

D（R）の2つのIdeal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が、Rの全ての元aに対して、

$\mathfrak{a}(a) = \mathfrak{b}(a)$　ならば、$\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$は、同値であるといい$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$で表わす。

$\mathfrak{a}(a) = \{f(a) \mid f(x) \in \mathfrak{a}\}$

Skolem propertyとは、

$\mathfrak{a} \sim (1)$ ならば、$\mathfrak{a} = (1)$

Strong skolem propertyとは、

$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ならば、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

Hilbert propertyとは、

$\mathfrak{a} \cap R \neq \phi$, $\mathfrak{a} \sim (1)$ ならば、$\mathfrak{a} = (1)$

Strong hilbert propertyとは、

$\mathfrak{a} \cap R \neq \phi$, $\mathfrak{b} \cap R \neq \phi$, $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ ならば、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$

以後、D（R）のIdealで、Rの元を含むIdealをUnitary idealとよぶことにする。

## 3. Prufer domain

一般に、ここで、考えられている環D（R）は、ネーター環ではないが、Prufer domain と呼ばれる、大変、面白い性質を有する。

Prufer domain とは、有限生成idealが、Invertible ideal になるというもので、ネーター環が、Prufer domain であれば、Dedekind domain である。D（R）が、ある条件のもとでPrufer domain になるという結果はD．Brizolis［5］に出ていて、次である。

**定理**

Rが、Dedekind domainであるとき、

D（R）が、Hilbert propertyをもつ必要十分条件は、Rの各剰余体が、有限体であるか、または、代数的閉体である。

**定理**

RをDedekind ringとする。このとき、次は、同値である。

1） D（R）は、Prufer domainである。

2） D（R）は、Strong hilbert propertyをもつ。

3） Rの各剰余体が、有限体である。

## 定理

Rが、D*－domainであるとき、D（R，1）は、Prufer domainである。

ここで、D（R，1）は、1変数のIntegral－valyed polynomial ringを表わす。

更に、

D（R）の有限生成idealについて、D．E．Rush［17］とD．L．McQuillan［14］が、次の結果を出している。

## 定理

Rが、Dedekind domainで、その剰余体が、有限体であるとき、

1）D（R）は、Prufer domainでStrong hilbert propertyをもつ。

2）$\mathfrak{a}$ は、D（R）のUnitary finite generating idealとする。

$a \in \mathfrak{a} \cap R$ とD（R）のある元f（x）に対して $\mathfrak{a}$ ＝（a，f（x））

特に、D（R）は、2－generator propertyをもつ。

## 定理

RをDedekind ringとするとき、次は、同値である。

1）D（R）は、Prufer domainである。

2）D（R）は、Strong hilbert propertyを持つ。

3）各 R の剰余体は、有限体である。

## 4．

この章では、我々の得た新しい結果について記す。まず、Integral－valued polynomial ringについて基本的な次の問題提起から始めよう。

## 問題

D（R）がR［X］を真に含むための条件は何か？

確かに、Zなどの、各剰余体が、有限体となるものはR［X］を真に含む事がわかっている。ここでは、この問題に対する同値条件が与えられた。

## 定理

Rは、ネーター環とする。このとき、次は、同値である。

1）$R[X] \neq D(R)$

2）R／Pが、有限体となるようなDepth one prime ideal Pが存在する。

3）$D(R_{\mathfrak{p}}) \neq R_{\mathfrak{p}}[X]$となるようなDepth one prime ideal Pが存在する。

4）$D(R_{\mathfrak{p}}) \neq R_{\mathfrak{p}}[X]$となるようなPrime ideal Pが存在する。

次にD（R）のR［X］上の生成元を決定する事を考えよう。

$D(Z) = Z[X][\varphi_n(x),\ n \in N]$

ここで、$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)\ldots(x-n+1)$

であることが知られている［3］。この結果の一般化も研究されているが、ここでは、まず次の結果を証明した。

## 定理

Pが、RのMaximal idealでHeight one peimeならば、$D(R_{\mathfrak{p}}) = (D(R))_{\mathfrak{p}}$である。特に、Rが、一次元ならば、全てのPrime ideal Pに対して、$D(R_{\mathfrak{p}}) = (D(R))_{\mathfrak{p}}$ である。

論文［6］では述べていないが、$D(R) = \cap D(R_{\mathfrak{p}})$、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}R$、である事からD（R）の生成元を各$D(R_{\mathfrak{p}})$の生成元を集めて来ることによって得られる事が分かり、McQuillan［15］の論文では、（R，m）がDiscrete valuation ringでR／m が、Finite fieldの時のD（R）

の生成元が論じられており、これらの結果からD（R）の生成元を決定することが出来る。

## 5. 今後の課題

以上、述べて来たことは、1章から3章までは、D（R）$\subsetneq$ R［x］の場合についての考察である。そして、4章でD（R）$\subsetneq$ R［x］の同値条件を与えたが、基礎的な（Rが、k－affine ringであるとき等）部分についての考察が、不足している。今後の課題としては、その研究とそれに関連した以下に、述べるようないくつかの問題がある。

ここで扱ったRing（Skolem ring，D－ring）について、k－affine ring上での存在性の問題及び、多項式環R［x］が、Skolem ring，D－ringとなるものが存在するか？

Skolem ringに関する今後の問題としては、

**問題**

全てのa∈Rに対して、f（x）∈R［x］が、f（a）が、Rのunitであれば、f（x）は、R［x］でunitか？

D－ringに関する今後の問題

Rが、k上のn次Affine ringであるときは、Rは、D－ringであるであることが、分かっている。最初にかえって、どのようなRingが、D－ringとなるか？

## R e f e r e n c e s


1 On the Ratios of Integer-Valued Polynomials over any Algrbraic Number Field
D.Brizolis. Amer.Math.Monthly 81.997-999(1974)

2 Hilbert Rings of Integral-Valued Polynomials
D.Brizolis. Comm Alg. 3(12). 1051-1081 (1975)

3 Ideals in Rings of Integer- Valued Polynomials
D.Brizolis. J.Reine Angew.Math 285. 28-52 (1976)

4 A Basis for the Ring of Doubly Integer-Valued Polynomials
D.Brizolis. E.G.Straus. J.Reine Angew.Math 286/287.187-195 (1976)

5 A Theorem on Ideals in Prufer Rings of Integral-Valued Polynomials
D.Brizolis. Comm.Alg 7. 1065-1077(1979)

6 Coefficients et Valuers d'un Polynome
P.J.Cahen . J.L.Chabert. Bull.Sci.Math 95.(1971).295-304

7 Anneaux de Polynome A Valeus Entieres et Anneaux de Fatou
J.L.Chabert. Bull.Soc.Math.France 99. 273-263(1971)

8 On the Number of Generators of an Invertible Ideal
R.Gilmer. W.Heinzer. J.Alg 14. 139-151(1970)

9 Finitely Generated Ideals of the Ring of Integer-Valued Polynomials
R.Gilmer. W.W.Smith. J.Alg 81.150-164(1983)

10 Integer-Valued Polynomials and The Strong Two-Generator Property
R.Gilmer. W.W.Smith. Houston J.Math 11. (1985)

11 On Rings with a Certain Divisibility Property
H.Gunji.D.L.McQuillan. Michigan Math.J.22.289-299(1975)

12 Which Polynomials oover an Algebraic Number Field Map
the Algrbraic Integers into themselves?
D.A.Lind. Amer.Math.Monthly 78. 179-181(1971)

13 ON the Coefficients and Valueds of Polynomial Rings
D.L.McQuillan, Arch.Math 30, 8-13 (1978)

14 On Prufer Domains of Polynomials
D.L.McQuillan, J.Reine Angew. Math 358, 162-178 (1985)

15 Rings of Integer-Valued Polynomials Determined by Finite Sets
D.L.McQuillan, Proc.R.Ir.Acad Vol 85A No2, 177-184 (1985)

16 On Ideals in Prufer Domains of Polynomials
D.L.McQuillan, Arch.Math Vol.45,517-527(1985)

17 Generating Ideals in Rings of Integer-Valued Polynomials
D.E.Rush, J.Alg 92,389-394(1985)

18 Stable Rings
J.Sally , W.Vasconcelous, J.Pure and Applied Alg 4, 319-336(1974)

19 Ein Satz uber Ganzwertige Polynome
Th.Skolem, Norske Vid.Selsk(Trondheim) 9, 111-113 (1936)

Some examples of Buchsbaum local integral domains with $d = e \geqq 3$

Shiro Goto (Nihon University)

1. Introduction.

As is announced in my note [5], the purpose of my lecture is to construct examples of certain Buchsbaum local integral domains with $d = e \geqq 3$ . The original idea of the method of construction is due to Amasaki and the explicit result is stated as follows:

Theorem (1.1) (Amasaki-Goto). *Let $d \geqq 3$ be a given integer. Then there exists a Buchsbaum local integral domain $A$ of minimal multiplicity such that*

$$\dim A = e(A) = d \quad \text{and} \quad \operatorname{depth} A = 2 .$$

*(Here $e(A)$ denotes the multiplicity of $A$ .)*

Before going ahead let me recall some basic definitions. Let $A$ be a Noetherian local ring with maximal ideal $m$ and $\dim A = d$. Then $A$ is said to be a Buchsbaum ring, if the difference

$$I(A) = l_A(A/q) - e_q(A)$$

is an invariant of $A$ which does not depend on the particular choice of a parameter ideal $q$ for $A$ (here $l_A(A/q)$ and $e_q(A)$ respectively denote the length of the A-module $A/q$ and the multiplicity of $A$ relative to $q$ ). Hence $A$ is a Cohen-Macaulay ring if and only if $A$ is a Buchsbaum ring of $I(A) = 0$ . In this sense the concept of Buchsbaum ring that was introduced by Vogel [6] is a natural generalization of Cohen-Macaulay rings. Nowadays the readers may consult the monumental book [9] of Stückrad and Vogel for the general reference on Buchsbaum rings where the recent developments of the theory are also referred to. So let me give here only a brief survey, which we need in the sequel.

Suppose now that $A$ is a Buchsbaum local ring and let $v(A)$

denote the embedding dimension of $A$. Then the local cohomology modules $H^i_m(A)$ ($i \neq d$) are vector spaces over $A/m$, that is $m.H^i_m(A) = (0)$ for all $i \neq d$ and the equality

$$I(A) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} . 1_A(H^i_m(A))$$

holds ([7]). Furthermore we have two inequalities

$$\text{(a)} \quad v(A) \leqq e(A) + I(A) + d - 1,$$

$$\text{(b)} \quad e(A) \geqq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} . 1_A(H^i_m(A))$$

for any Buchsbaum rings $A$. I would like to say that $A$ has maximal embedding dimension (resp. minimal multiplicity), if the equality is the case in (a) (resp. (b)). Note that $A$ has maximal embedding dimension, once it has minimal multiplicity (see [2], [3] and [4], where the further properties of such Buchsbaum rings are discussed, too). In case the multiplicity $e = e(A)$ of $A$ is (absolutely or relatively) small, e.g., if $d \geqq e$ or $e \leqq 3$, then the inequality (b) forces almost all the local cohomology modules $H^i_m(A)$ to vanish and there is some hope to determine the structure of rings in such a case. For example, the Buchsbaum rings $A$ of $e(A) = 2$ and depth $A > 0$ that are completely classified by [1] always have minimal multiplicity. So the next target should be the case $e = 3$ and the general theory on Buchsbaum rings of minimal multiplicity is expected to be helpful in the research of the case, too.

However, in spite of our eager interest in the exploration of ceratin Buchsbaum rings with minimal multiplicity, the lack of enough examples, especially the crucial lack of examples of Buchsbaum <u>integral domains</u> of minimal multiplicity has been preventing us from going too far. (As far as I know, the original example (3.2) given by Amasaki is the first known Buchsbaum local integral domain of multiplicity 3 and depth 2.) By this reason our construction seems quite important and could be a new starting point toward a further theory of Buchsbaum local rings.

## 2. The construction.

Let $S$ be a Cohen-Macaulay complete local ring of $\dim S = e(S) = d \geq 3$. Assume that the maximal ideal $J$ of $S$ contains elements $X_1, X_2, \ldots, X_d$ such that

$$J^{r+1} = (X_1, X_2, \ldots, X_d).J^r$$

for some $r \geq 1$. Let $k$ be a coefficient field of $S$ and put $R = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]]$ in $S$. Then $S$ is a finitely generated free $R$-module of $\mathrm{rank}_R S = d$. We choose an $R$-free basis $w_1, w_2, \ldots, w_d$ of $S$ so that $w_1 = 1$ and put

$$f_i = X_1^2 w_i \quad \text{and} \quad g_i = X_1 w_i$$

for $2 \leq i \leq d$. Then one easily checks that

$$(2.1) \qquad g_i g_j \in RX_1^2 + \sum_{k=2}^{d} Rf_k \quad \textit{for all} \quad 2 \leq i, j \leq d .$$

Let $F = S^d$ and let $T_1, T_2, \ldots, T_d$ be the canonical basis of $F$. We consider the Koszul complex $(\Lambda F, \partial) = K.(\underline{x};S)$

$$\cdots \to \overset{d-1}{\Lambda} F \xrightarrow{\partial_{d-1}} \overset{d-2}{\Lambda} F \xrightarrow{\partial_{d-2}} \overset{d-3}{\Lambda} F \to \cdots$$

of $S$ generated by the sequence $\underline{X} = X_1, X_2, \ldots, X_d$. For each $0 \leq p \leq d$ let $\underline{F}_p$ denote the set of all the subsets of $N = \{1, 2, \ldots, d\}$ with $\# I = p$. For each $I \in \underline{F}_p$ we put

$$T_I = T_{i_1} \wedge T_{i_2} \wedge \cdots \wedge T_{i_p} ,$$

where $I = \{ i_1 < i_2 < \ldots < i_p \}$. Let

$$u = \sum_{k=2}^{d} g_k T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_k \wedge \cdots \wedge T_d \quad \text{and} \quad v = \partial_{d-1}(u) .$$

Then as $\{T_I\}_{I \in \underline{F}_{d-2}}$ is an $S$-free basis of $\overset{d-2}{\Lambda} F$, we may write

$$v = \sum_{I \in \underline{F}_{d-2}} f_I T_I$$

with $f_I \in S$. Define

$$A = R[\, f_I \mid I \in \underline{F}_{d-2}] \,.$$

Then we have the following

Theorem (2.2). (1) *$A$ is a Buchsbaum local ring of minimal multiplicity.*

(2) *$\dim A = e(A) = d$.*

(3) *$H^i_m(A) = (0)$ $(\, i \neq 2,\ d\,)$ and $l_A(H^2_m(A)) = 1$.*

*Proof.* Let $L = \sum_{I \in \underline{F}_{d-2}} Rf_I$. For each $2 \leqq k \leqq d$, we write

$$\partial_{d-1}(T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_k \wedge \cdots \wedge T_d) = X_1 T_2 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_k \wedge \cdots \wedge T_d \;+$$
$$\sum_{2 \leqq i,\ j \leqq d} a_{ijk} T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_i \wedge \cdots \wedge \hat{T}_j \wedge \cdots \wedge T_d$$

with $a_{ijk} \in R$. Then as $v = \partial_{d-1}(u)$, we have that

$$\sum_{I \in \underline{F}_{d-2}} f_I T_I = \sum_{k=2}^{d} f_k T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_k \wedge \cdots \wedge T_d \;+$$
$$\sum_{2 \leqq i,j \leqq d} \Big( \sum_{k=2}^{d} a_{ijk} g_k \Big) T_1 \wedge \cdots \wedge \hat{T}_i \wedge \cdots \wedge \hat{T}_j \wedge \cdots \wedge T_d$$

Hence $f_k \in L$ for all $2 \leqq k \leqq d$ and $f_I \in \sum_{k=2}^{d} Rg_k$ for each $I \in \underline{F}_{d-2}$. Consequently, as

$$f_I f_J \in \sum_{2 \leqq i,j \leqq d} Rg_i g_j \quad \text{and} \quad f_k \in L \,,$$

we get by (2.1) that $f_I f_J \in R + L$ for all $I, J \in \underline{F}_{d-2}$ —— thus $A = R + L$.

Let $K$ (resp. $Q$) denote the quotient field of $R$ (resp. the total quotient ring of $S$). Then as $w_i \in KA$ for any $1 \leqq i \leqq d$, we see that $Q = KA$ whence

$$\operatorname{rank}_R L \geqq d - 1$$

because $A = R + L$ and $\mathrm{rank}_R A = d$ .

In what follows I would like to show that $A = R \oplus L$ and $L \cong E_2$ , the second syzygy module of the R-module $R/(X_1, X_2, \ldots, X_d)R$. Note that $A = R \oplus L$ , if $\mathrm{rank}_R L = d - 1$ . Hence it suffices to get $L \cong E_2$ . For this purpose, let $f : S \to \overset{d-2}{\Lambda} F$ be the S-linear map defined by $f(1) = v$ and take the S-dual $[.]^*$ of the complex

$$S \xrightarrow{f} \overset{d-2}{\Lambda} F \xrightarrow{\partial_{d-2}} \overset{d-3}{\Lambda} F .$$

Then identifying $\overset{3}{\Lambda} F = (\overset{d-3}{\Lambda} F)^*$ , $\overset{2}{\Lambda} F = (\overset{d-2}{\Lambda} F)^*$ and $S = S^*$ , we get a complex

$$\overset{3}{\Lambda} F \xrightarrow{\partial_3} \overset{2}{\Lambda} F \xrightarrow{f^*} S$$

of S-modules. Notice that

$$f^*(T_I) = \pm f_{\{1,2,\ldots,d\} - I}$$

for each $I \in \underline{F}_2$ . Let $G = R^d$ and let me consider the Koszul complex $(\Lambda G, \partial) = K.(X_1, X_2, \ldots, X_d; R)$ to be a subcomplex of $(\Lambda F, \partial) = K.(X_1, X_2, \ldots, X_d; S)$ . Then by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \overset{3}{\Lambda} F & \xrightarrow{\partial_3} & \overset{2}{\Lambda} F & \xrightarrow{f^*} & S , \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \overset{3}{\Lambda} G & \xrightarrow{\partial_3} & \overset{2}{\Lambda} G & & \end{array}$$

we have an R-linear map $g : \overset{2}{\Lambda} G \to S$ whose image coincides with $L$ and such that the composite $\overset{3}{\Lambda} G \xrightarrow{\partial_3} \overset{2}{\Lambda} G \xrightarrow{g} S$ is zero. Consequently, $L$ is a homomorphic image of

$$E_2 = \mathrm{Coker}\ (\overset{3}{\Lambda} G \xrightarrow{\partial_3} \overset{2}{\Lambda} G) ,$$

from which it immediately follows that $L \cong E_2$ because $\mathrm{rank}_R L \geq d-1$ —— thus $A \cong R \oplus E_2$ .

As $A \cong R \oplus E_2$ , we get that $l_A(H^2_m(A)) = 1$ and $H^i_m(A) = (0)$ ( $i \neq 2, d$ ) and therefore by [8, Corallary 1]) $A$ is a Buchsbaum ring. Because

$$\operatorname{rank}_R A \geq e(A) \geq 1 + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \cdot l_A(H_m^i(A)) ,$$

we readily find that $\dim A = e(A) = d$ and that $A$ has minimal multiplicity. This completes the proof of (2.2).

Remark (2.3). When a Buchsbaum local domain $A$ has minimal multiplicity and $\dim A = e(A) \geq 3$, the possible value of depth $A$ is 1, 2 and $\dim A - 1$. Similarly as in the proof of Theorem (2.2) we can construct, starting from the ring $S$, a Buchsbaum local ring $A$ of minimal multiplicity such that

(1) $\dim A = e(A) = d$,

(2) depth $A = d - 1$ (resp. depth $A = 1$ ),

(3) $Q(S) = Q(A)$.

The detail will appear elsewhere.

## 3. Examples.

Let $d \geq 3$ be an integer and let $P = k[[X_1, X_2, \ldots, X_d]]$ be a formal power series ring over a field $k$. We put

$R = k[[X_1, \ldots, X_{d-1}, X_d^d]]$ and $S = R[X_1X_d^i \mid 1 \leq i \leq d-1]$.

Let $J$ be the maximal ideal of $S$. Then we easily check the following

Example (3.1). (1) *$S$ is a Cohen-Macaulay complete local integral domain of $\dim S = e(S) = d$.*

(2) $J^2 = (X_1, \ldots, X_{d-1}, X_d^d).J$.

(3) $1, X_1X_d, \ldots, X_1X_d^{d-1}$ *is an $R$-free basis of $S$.*

Therefore starting from this ring $S$, we get an example required in Theorem (1.1). Amasaki's original example is essentially the same as the example obtained from $P = k[[X,Y,Z]]$ :

Example (3.2). $A = k[[X, Y, Z^3, X^2YZ + X^2Z^5, X^3Z, X^3Z^2]]$.

## References


1 S. Goto, Buchsbaum rings with multiplicity 2, J. Algebra, 74 (1982), 494-508.

2 S. Goto, Buchsbaum rings of maximal embedding dimension, ibid., 76 (1982), 383-399.

3 S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, ibid., 85 (1983), 490-534.

4 S. Goto, Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings, ibid., 86 (1984), 336-384.

5 S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings, the Proceedings of the seventh Symposium on Commutative Algebra in Japan, 82-89, 1985.

6 W. Vogel, Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, J. Algebra, 25 (1973), 106-112.

7 B. Renschuch, J. Stückrad and W. Vogel, Weitere Bemerkungen zu einem der Schnittheorie und über ein Maß von A. Seidenberg für die Imperfektheit, ibid., 37 (1975), 447-471.

8 J. Stückrad and W. Vogel, Toward a theory of Buchsbaum singularities, Amer. J. Math., 100 (1978), 727-746.

9 J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1987.