第９回

可換環論シンポジウム報告集

昭和62年度科学研究費総合Ａ

（課題番号　61302001．代表　小田 忠雄）

1987年10月29日～11月１日

於 日本大学軽井沢研修所

序

この報告集は、１９８７年１０月２９日から１１月１日にかけて、日本大学軽井沢研修所で行われた第９回可換環論シンポジウムの記録です。

このシンポジウムは、講演者の旅費と報告集の出版費を、東北大学の小田忠雄氏の科研費でまかないました。 講演総数は２３、参加者数は７０名余の、有意義で充実したセミナーをもてましたことを、参加下さった方々に代り深く感謝致します。

１９８８年２月

後藤四郎

参加登録者名簿

氏名	所属
青山陽一	愛媛大学理学部
秋葉知温	京都大学教養部
浅沼照雄	富山大学教育学部
尼崎睦実	京都大学数理解析研究所
飯尾力	関東学院大学工学部
池田信	岐阜教育大学
石川武志	東京都立大学理学部
石田正典	東北大学理学部
石橋康徳	広島大学校教育学部
五十川読	広島大学理学部研究生
伊藤史朗	広島大学理学部
岩井斉良	京都大学教養部
岩田恵司	岐阜大学教育学部
岩永恭雄	信州大学教育学部
宇田廣文	宮崎大学教育学部
絵畑暢之	茨城大学大学院
大石彰	広島大学理学部
大塚香代	京都大学教養部
岡部章	小山工業高専
奥山廣	徳島大学総合科学部
小駒哲司	高知大学理学部
小野田信春	福井大学教育学部
楫元	早稲田大学理工学部
加藤良也	埼玉大学大学院
金光三男	愛知教育大学
河合秀泰	石川高専
川本琢二	名古屋大学大学院
神蔵正	早稲田実業
菊池徹平	奈良教育大教育学部
蔵野和彦	京都大学理学部
河野明	京都大学理学部数学教
後藤四郎	日本大学文理学部
小林joy治	徳島大学総合科学部
小松弘明	岡山大学理学部
小山陽一	金沢工業大学
近藤庄一	早稲田大学教育学部
佐久間元敬	広島大学総合科学部
佐藤淳郎	岡山理科大学理学部
佐藤耕次郎	東北工業大学
清水池有治	広島工業大学
下田保博	
菅谷孝	富山大学理学部
鈴木直義	静岡県立大学教養科
鈴木敏	京都大学理学部
竹内康滋	神戸大学教養部
谷本洋	宮崎大学教育学部
泊昌孝	筑波大学数学系
成瀬弘	岡山大学教育学部
西三重雄	広島大学理学部
西田康二	千葉大学大学院
西村純一	京都大学理学部
橋本光靖	京都大学大学院
日高文夫	専修大北海道短期大学
日比孝之	名古屋大学理学部
広森勝久	神戸大学教養部
松田隆輝	茨城大学理学部
松村英之	名古屋大学理学部
宮崎誓	早稲田大学理工学部
宮崎充弘	京都大学大学院
森脇淳	京都大学理学部数学教
柳原弘志	兵庫教育大学
山形邦夫	筑波大学数学系
山岸規久道	姫路独協大学一般教育
山田浩	名古屋工業大学
山内紀夫	岐阜教育大学
吉田憲一	岡山理科大学理学部
吉田暁民	茨城大学大学院
吉野雄二	名古屋大学理学部
渡辺敬一	東海大学理学部情報数理
渡辺純三	名古屋大学理学部

目次

Two-dimensional local rings of finite Buchsbaum-representation type

日大文理　後藤四郎

1. Introduction

$(R, \mathfrak{m})$ はNoether局所環とし、M を有限生成R－加群とせよ。

$$I(M) = e_q(M) - l_R(M/qM)$$

が M のパラメーターイデアル q のとりかたによらず一定のとき、M をBuchsbaum R－加群といい、さらに $\dim_R M = \dim R$ のときはmaximalであるという。ここで $e_q(\cdot)$ と $l_R(\cdot)$ はそれぞれ重複度と長さを表わす。$n_B(R)$ ($n_B^+(R)$) は直既約maximal Buchsbaum R－加群（でかつ depth>0 のもの）の同型類の個数を表わす。R が有限Buchsbaum－表現型を持つとは $n_B(R) < \infty$ のことである。

本稿では次の定理を証明する。

定理（1．1）　$(R, \mathfrak{m})$は Noetherian local ring で $\dim R = 2$ とし、$R = \widehat{R}$ で $R/\mathfrak{m}$ は代数閉体とする。このとき次の三つの条件は同値である。

（1）　R は有限Buchsbaum－表現型である。

（2）　$e(R) = 1$ で $v(R) \leqq 3$

（3）　$R \cong P/XI$ とかける。但し$(P, \mathfrak{n})$は3次元の完備正則局所環で $X \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$, IはPのイデアルで $\mathrm{ht}_P I \geqq 2$ のものである。

したがって

系（1．2）　上の定理と同じ仮定のもとに、R が正則であることと R がunmixedでかつ有限Buchsbaum－表現型を持つことは同値である。

2.　（3）⇒（1）の証明

（2）と（3）の同値性はexerciseなので（1）⇒（2）と（3）⇒（1）のみ触れることにする。まずやさしい方の（3）⇒（1）は次を証明すれば十分である。

定理（2．1）　$(P, \mathfrak{n})$を3次元正則局所環とし、$X \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$, IはPのイデアルで $\mathrm{ht}_P I \geqq 2$ とする。このとき $R = P/XI$, $\mathfrak{p} = XR$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R$ とおくと $n_B(R) = 3$ であって

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{p}, \quad R/\mathfrak{m}\mathfrak{p}, \quad R/\mathfrak{p}$$

が直既約max. Buchsbaum R－加群の一組の代表系である。

証明．　$R/\mathfrak{p}$ は2次元正則局所環で $\mathfrak{m}/\mathfrak{p} = J(R/\mathfrak{p})$ であるから、$R/\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ は直既約max. Buchsbaum R－加群である。さらに $0 \to \mathfrak{p}/\mathfrak{m}\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{m}\mathfrak{p} \to R/\mathfrak{p} \to 0$（完全）より $R/\mathfrak{m}\mathfrak{p}$ も直既約max. Buchsbaum R－加群である。depthを調べると $R/\mathfrak{m}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$, $R/\mathfrak{p}$ はそれぞれ0，1，2なので、これらは同型ではない。

逆に M を直既約max. Buchsbaum R－加群とし $\overline{M} = M/H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ とおく。$\overline{M}$ は

max. Buchsbaum R－加群で $\mathfrak{p}\bar{M}=0$ である。よって $\bar{M}$ はmax. Buchsbaum $R/\mathfrak{p}$－加群であって、$R/\mathfrak{p}$ は2次元正則局所環だから［3］により直既約分解

$$\bar{M}=M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)\cong(R/\mathfrak{p})^{\alpha}\oplus(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})^{\beta}\qquad(\alpha,\ \beta\geqq 0)$$

が得られる。いま P のregular sop X, Y, Z を Y, Z が R に対してsopとなるようにとり、x, y, z をそれぞれ X, Y, Z mod XI を表わすものときめ、$\bar{\ }$ を mod $\mathfrak{p}$ とすると $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}=(\bar{y},\bar{z})$ in $R/\mathfrak{p}$ であるから

$$R^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & z \end{bmatrix}} R^2 \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{m}/\mathfrak{p} \longrightarrow 0\quad\text{（完全）},\qquad \varepsilon\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\overline{az-by}$$

となる。$\operatorname{Ker}\varepsilon=R\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}+R\begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}+R\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\subset R^2$ を L とおくと $\bar{M}$ の直既約分解によって

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & W & & & & 0 & & \\
 & & \| & & & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathfrak{p}^{\alpha}\oplus L^{\beta} & \to & R^{\alpha}\oplus(R^2)^{\beta} & \to & \bar{M} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \| & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & & & H^0_{\mathfrak{m}}(M) & & \\
 & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

が得られる。ここで $(0)\oplus L^{\beta}\subset N$ が示せる。よって $N=N_1\oplus L^{\beta}$ となる $\mathfrak{p}^{\alpha}$ のR－部分加群 N_1 がある。

$$M\cong F/N\cong(R^{\alpha}/N_1)\oplus(R^{\alpha}/L)^{\beta}\cong(R^{\alpha}/N_1)\oplus(\mathfrak{m}/\mathfrak{p})^{\beta}$$

M は直既約だから $\beta\geqq 1$ なら $M\cong\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. $\beta=0$ のときは $N\subset\mathfrak{p}^{\alpha}$ を $M\cong R^{\alpha}/N$, $\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{\alpha}\subset N$ となるようにとる。いま $V=(\mathfrak{p}/\mathfrak{m}\mathfrak{p})^{\alpha}$ とおき、$\tau:\mathfrak{p}^{\alpha}\to V$ を自然な写像とし $U=\tau(N)$, $r=\dim_k U$ $(k=R/\mathfrak{m})$ とおく。もし $r=0$ なら $N=\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{\alpha}$ で $M\cong(R/\mathfrak{m}\mathfrak{p})^{\alpha}$ よって $M\cong R/\mathfrak{m}\mathfrak{p}$. $r\geqq 1$ のときは U のk-basis $u_1,\cdots,u_r$をとり行列 $C=(u_1,\cdots,u_r)$ を考えると $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}\mathfrak{p}\cong k$ (as $\mathfrak{p}=xR$) より C は行と列の基本変形により

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{x} \\ \hline & 0 & \end{bmatrix}$$

になる。つまり $\psi\in\operatorname{Aut}_R R^{\alpha}$ によって $\psi(N)=\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{\alpha}+T$ となる。但し T は$\alpha\times r$行列

$$\begin{bmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \\ \hline & 0 & \end{bmatrix}$$

の列で生成された R^{α} のR－部分加群をあらわす。よって $M\cong R^{\alpha}/N\cong R^{\alpha}/(\mathfrak{m}\mathfrak{p}^{\alpha}+T)$.
M は直既約で $r\geqq 1$ より $M\cong R/\mathfrak{p}$ (as $\mathfrak{p}=xR$) を得る。

3．（1）⇒（2）の証明

定理（3．1）（R，$\mathfrak{m}$）はNother局所整域で $\#(R/\mathfrak{m})=\infty$，$d=\dim R\geqq 2$ とする。$\bar{R}$で商体 $Q(R)$ の中での R の整閉包を表わし、$\bar{R}\in \underline{\underline{M}}(R)$ で $\bar{R}$ は正則局所環とし、さらに $R/\mathfrak{m}\cong \bar{R}/\mathfrak{n}$（ここで $\mathfrak{n}$ は $\bar{R}$ の極大イデアルを表わす）とする。このとき $n_B(R)<\infty$ ならば R はabstract hypersurface で $e(R)\leqq 3$.

この定理の証明はいくつかのstepにわける。

補題（3．2）$l_{\bar{R}}(\mathfrak{m}\bar{R}+\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^2)\geqq d-1$

証明．もし $l_{\bar{R}}(\mathfrak{m}\bar{R}+\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^2)\leqq d-2$ なら $l_{\bar{R}}(\mathfrak{n}/\mathfrak{m}\bar{R}+\mathfrak{n}^2)\geqq 2$．よって $\Sigma=\{I \mid I$は$\bar{R}$のイデアルで $\mathfrak{m}\bar{R}+\mathfrak{n}^2\subset I\subset \mathfrak{n}\}$ とおくと Σ はinfinite．任意の $I\in\Sigma$ は直既約max．Buchsbaum R－加群である。よって I，$J\in\Sigma$ で $I\neq J$，$I\cong J$ as R－mod． となるものがある。すると $\theta\in Q(R)$ をとって $I=\theta J$ とできる。$\mathrm{ht}_{\bar{R}}I\geqq 2$，$\mathrm{ht}_{\bar{R}}J\geqq 2$ であるので $\theta\in\bar{R}$．したがって $I=J$ となり矛盾である。

系（3．3）$S_1,\cdots,S_{d-1}\in\mathfrak{m}$ と $t\in\mathfrak{n}$ をとって

$$\mathfrak{n}=(S_1,\cdots,S_{d-1},t)\bar{R} \text{ かつ } \mathfrak{m}\bar{R}=(S_1,\cdots,S_{d-1},t^e)\bar{R}$$

とできる。但し $e=e(R)$ である。したがって $\mu_R(\bar{R})=e$ で $1,t,\cdots,t^{e-1}$ は $\bar{R}$ の minimal basis である。

命題（3．4）（3．3）において $e\leqq 3$

証明．$e\geqq 4$ とせよ。$S_1,\cdots,S_{d-1},t$ を（3．3）のようにとり、任意の $\lambda\in R/\mathfrak{m}$ に対し $c_\lambda\in R$ を $\lambda=c_\lambda \mod \mathfrak{m}$ となるようにとる。このとき

$$M_\lambda=R+R(t+t^2+c_\lambda t^3)+\mathfrak{m}\bar{R}$$

とおくと M_λ は直既約max．Buchsbaum R－加群 となり、さらに $\lambda\neq\mu$ ならば $M_\lambda\ncong M_\mu$ である。よって $n_B(R)=\infty$ となり矛盾。

$I=(S_1,\cdots,S_{d-1})R$，$P=I\bar{R}$，$\mathfrak{p}=P\cap R$ とおく。$P\in\mathrm{Spec}\bar{R}$ より $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}R$ で $\dim R/\mathfrak{p}=1$ となる。このとき次が成立つ。

補題（3．5）$S_1,\cdots,S_{d-1}$は $\bar{R}/P$ が $R/\mathfrak{p}$ の normalization となるように選べる。

証明．$R\neq\bar{R}$ としてよいから $\mathfrak{c}=R:\bar{R}$ とすると $\dim R/\mathfrak{c}=r<d$．$S_1,\cdots,S_{d-1}$ は $S_1,\cdots,S_r$ が $R/\mathfrak{c}$ のsopになるようにとれる。このときは $\mathfrak{c}\not\subset\mathfrak{p}$ よって $R/\mathfrak{p}\to\bar{R}/P$ は birational になる。

次に、$0 \to M \to R^e \xrightarrow{\varepsilon} \overline{R} \to 0$ を $\overline{R}$ の R 上の min. free resol. のはじめの部分とする。$S_1, \cdots, S_{d-1}$は $\overline{R}$−正則列であるから

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M/IM & \to & (R/I)^e & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} & \overline{R}/P & \to & 0 \quad \text{(完全)} \\
 & & & & \downarrow \sigma & & \| & & \\
 & & & & (R/\wp)^e & \xrightarrow[\overline{\tau}]{} & \overline{R}/P & \to & 0
\end{array}
$$

をつくれる。但し σ は自然な写像とする。$M' = \mathrm{Ker}\,\tau$ とおくと $\mu_{R/\wp}(M') \leqq \mu_R(M)$ かつ $\mu_{R/\wp}(\overline{R}/P) = e$.

補題(3.6) $\mu_R(M) \leqq e$

証明. $F = R^e$ として $\rho \in \mathrm{End}_R(F)$ を $\varepsilon \cdot \rho = t1_{\overline{R}} \cdot \varepsilon$ になるようにとる。すると $\rho^e(M) \subset \mathfrak{m}M$ である。$k = R/\mathfrak{m}$, $V = M/\mathfrak{m}M$ とし $\xi : V \to V$ を ρ からinduceされる V のk−endomorphismとする。$\rho^e(M) \subset \mathfrak{m}M$ より $\xi^e = 0$ である。もし $\mu_R(M) > e$ なら $\dim_k V > e$ だから $f, g \in M$ を $\xi(\overline{f}) = \xi(\overline{g}) = 0$ かつ $\overline{f}, \overline{g}$ は V 内で k 上1次独立になるようにとれる。任意の $\lambda \in k$ について $c_\lambda \in R$ を $\lambda = c_\lambda \mod \mathfrak{m}$ にとって $N_\lambda = \mathfrak{m}M + R(f + c_\lambda g) \subset M$ とおくと、$0 \to M/N_\lambda \to F/N_\lambda \to \overline{R} \to 0$ (完全) より F/N_λ が直既約max. Buchsbaum R−加群であることがわかる。さらに $\lambda \neq \mu$ なら $M_\lambda \not\cong M_\mu$ が示せ、したがって $n_B(R) = \infty$ となって矛盾である。

それでは(3. 1)の証明に入る。

(3. 5)より $\overline{R}/P$ は $R/\wp$ のnormalizationとしてよい。よって $\mathrm{rank}_{R/\wp}(M') = e - 1 \leqq \mu_{R/\wp}(M') \leqq \mu_R(M) \leqq e$. もし $\mu_{R/\wp}(M') \leqq e - 1$ なら M' は$R/\wp$−free. よって $\mathrm{hd}_{R/\wp}\overline{R}/P < \infty$ より $\overline{R}/P$ は$R/\wp$−free. すると $R/\wp = \overline{R}/P$ だから $e = 1$. したがって R は正則である。$\mu_{R/\wp}(M') \geqq e$ とすると $\mu_{R/\wp}(M') = \mu_R(M) = e$. ここで

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M/IM & \to & (R/I)^e & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} & \overline{R}/P & \to & 0 \\
 & & & & \sigma \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & M' & \to & (R/\wp)^e & \xrightarrow[\tau]{} & \overline{R}/P & \to & 0
\end{array}
$$

をみると、$M' = \sigma(M/IM)$ で $\mathrm{Ker}\,\sigma = \wp(R/I)^e \subset M/IM$. $\mu_{R/\wp}(M') = \mu_{R/I}(M/IM)$ より $\wp(R/I)^e \subset \mathfrak{m}(M/IM) \subset \mathfrak{m}^2(R/I)^e$ なので $\wp \subset \mathfrak{m}^2 + I$ である。よって $\mathfrak{m}^2 + \wp = \mathfrak{m}^2 + I$. したがって $v(R/\wp) = v(R/I) = v(R) - (d-1)$ これから $v(R) = v(R/\wp) + (d-1)$ を得る。

今から　$v(R/\wp)\leqq 2$　を示す。$v(R/\wp)\geqq 3$　とすると　$3\leqq v(R/\wp)\leqq e(R/\wp)=\mu_{R/\wp}(\bar{R}/P)=e\leqq 3$　より　$v(R/\wp)=e(R/\wp)=e=3$　を得る。よって　$X\in\bar{\mathfrak{m}}=J(R/\wp)$　を　$\bar{\mathfrak{m}}^2=X\bar{\mathfrak{m}}$　にとれる。そこで

$$0\to M^{\sim}/XM^{\sim}\to[(R/\wp)/X(R/\wp)]^3\to(R/\bar{P})/X(R/\bar{P})\to 0\quad(\text{完全})$$

をつくると　$l_{R/\wp}((R/\wp)/X(R/\wp))=l_{R/\wp}((\bar{R}/P)/X(\bar{R}/P))=3$.

よって　$l_{R/\wp}(M^{\sim}/XM^{\sim})=6$. 一方で　$\bar{\mathfrak{m}}(M^{\sim}/XM^{\sim})=0$　より　$l_{R/\wp}(M^{\sim}/XM^{\sim})=\mu_{R/\wp}(M^{\sim})=3$. これは矛盾である。したがって　$v(R)\leqq d+1$　となる。

定理(3．7)　$(R,\mathfrak{m})$　はC－M完備局所環で　$\dim R=2$　とし、$R/\mathfrak{m}$　は代数閉体とする。もし　$n_B^+(R)<\infty$　なら　R　は正則である。

証明．　この定理は　$R/\mathfrak{m}\subset R$　で　$ch(R/\mathfrak{m})\neq 2$　のときは[5]のなかで既にしめされている。まずAuslanderの定理で　R　がnormalであることを導き、次に　R　がUFDであることを示した後で、J．Lipmanによる2次元UFDの分類を使って、もし　R　が正則でないならば　$R/\mathfrak{m}$　のsecond　syzygyを用いて　$n_B^+(R)=\infty$　となることを示す。

さて、(3．1)と(3．7)を用いると定理(1．1)(1)⇒(2)は次のようにしめせる。

まず　R　が整域のときは　$\bar{R}$　はC－M完備局所環であって、$M, M^{\sim}$　を$\bar{R}$上の直既約maximal Buchsbaum　加群とすると、$M, M^{\sim}$　はR上のmax．Buchsbaum　加群でもあり、$\mathrm{Hom}_R(M,M^{\sim})=\mathrm{Hom}_{\bar{R}}(M,M^{\sim})$　となる。とくに　$\mathrm{End}_R M=\mathrm{End}_{\bar{R}} M$　より　M　はR上でも直既約で、$M\cong M^{\sim}$ as R－mod．⇒　$M\cong M^{\sim}$ as $\bar{R}$－mod．である。

このことより　$n_B^+(\bar{R})<\infty$　となるから　$\bar{R}$　は正則。よって　R　も正則である。

一般の場合では　$\wp\in\mathrm{Spec}R$　を　$\dim R/\wp=2$　にとると、　$n_B(R/\wp)\leqq n_B(R)<\infty$　より　$R/\wp$　は正則になる。一方で　$0\to\wp\to R\to R/\wp\to 0$　を使うと　$\mu_R(\wp)\leqq 1$　がわかる。

よって　$v(R)\leqq 3$. いま

$R\cong P/J$　（$(P,\mathfrak{n})$は3次元完備正則局所環でJはPのイデアル）

と書くと　$ht_P J=1$　より　$J=XI$ $(ht_P I\geqq 2)$　と表わせるが、P/XP　は　$R\cong P/XI$　の像だから　$n_B(R)<\infty$. よって　P/XP　は正則である。すると、$0\to P/I\to P/XI\to P/XP\to 0$　をみて　$e(R)=e(P/XI)=1$　をうる。

References

[1] Auslander, M., Rational singularities and almost split sequences, Trans.A.M.S., 293(1986), 511-531

[2] Goto, S., Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay modules, to appear in the Proceedings of Japan-U.S. Joint seminor on Commutative Algebra and Combinatrics"(Japan, 1985)

[3] Goto, S., Curve singularities of finite Buchsbaum representation type, preprint 1987.

[4] Goto, S., Surface singularities of finite Buchsbaum representation type, preprint 1987

[5] Goto, S., and Nishida, K., Rings with only finitely many isomorphism classes of indecomposable maximal Buchsbaum modules, preprint 1987.

[6] Lipman, J., Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, IHES Publ.Math., 36 (1969), 195-279.

[7] Stuckrad, J. and Vogel, W., Buchsbaum rings and applications, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,1987.

Paul Robertsによる New Intersection Conjectureの解決

吉野雄二（名大・理）

§１．序

この度Paul Roberts（Utah大学）によって、永年の懸案であったNew Intersection Conjectureが肯定的に解決せられたので、ここにそれを紹介したい。

（１．１）先ず、彼が証明したことは次のように述べることができる。

New Intersection Theorem（以下ＮＩＴと略す）

（Ｒ，m，ｋ）をNoether局所環とする。Ｒ上の有限生成自由加群からなる長さ有限のcomplex　$F.$　を考える。

$$F. : 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \dots \to F_1 \to F_0 \to 0$$

このとき、次のことを仮定する。

（ａ）　$F.$は完全列ではない。

（ｂ）　$F.$のhomology加群は全て長さ有限である。

この仮定のもとで、不等式；$\dim(R) \leqq n$ が成立する。

この定理の内容は、Peskine-Szpiroによって1974年に予想されたものであった。それがこの度、Paul Robertsによって完全な証明がつけられたのである。また、このＮＩＴの解決によって、幾つかのopen problemsもまた肯定的に解決せられることになった。

（１．２）この定理の意味を説明するために、次のような例を考えてみよう。

（Ｒ、m）を正則局所環として、ＩとＪをそのイデアルとする。Ｉ、Ｊで定義されるSpec(Ｒ)の閉部分集合V(Ｉ)、V(Ｊ)が閉点のみで交わるという状況を考える。Ｒは正則なので、Ｒ／Ｉの長さ有限の自由分解$F. : 0 \to F_n \to \dots \to F_1 \to F_0 \to R/I \to 0$が取れる。但し、$n = \mathrm{pd}_R(R/I)$である。このとき、Ｒ／Ｊ上の自由加群の複体$G. = F. \otimes R/J$を考

える。G. のホモロジー加群は定義によって $\mathrm{Tor}^R_*(R/I, R/J)$ であり、$V(I) \cap V(J) = \{m\}$ であることから、これは長さ有限である。この複体G. に、上のＮＩＴを使ってみると、次の不等式を得ることになる。

(1.2.1) $$\mathrm{pd}_R(R/I) \leqq \dim(R/J)$$

ここで、この左辺は、$\mathrm{pd}_R(R/I) = \dim(R) - \mathrm{depth}(R/I)$ と書くことができるので、次の様に言っても良い。

(1.2.2) $$\dim(R/J) + \mathrm{depth}(R/I) \leqq \dim(R)$$

更に、R／ＩがＣＭであると仮定すると、この式は次のようにもなる。

(1.2.3) $$\dim(R/J) + \dim(R/I) \leqq \dim(R)$$

ここまで来ると殆ど当然の事を言っているに過ぎない。事実、(1.2.3)は良く知られているし、また、自明のことでもある。しかし、ここで重要なのは、(1.2.1)の証明においては、Ｒが正則であるということは、必ずしも必要でないということである。実際、$\mathrm{pd}_R(R/I)$ が有限であれば、(1.2.1)が成立する。即ち、ＮＩＴの系として、次の定理を得る。

<u>Old Intersection Theorem</u>（ＯＩＴと略す）

（Ｒ，ｍ，ｋ）がNoether局所環とする。ＭとＮが有限生成Ｒ加群で、$M \otimes_R N$ は長さ有限の加群であると仮定する。このとき、不等式；$\dim(M) \leqq \mathrm{pd}(N)$ が成り立つ。

この定理の内容は、1973年にPeskine-Szpiroによって予想されていたものである。このＯＩＴが正しいことによって、古典的にホモロジカル予想として知られていた次の２つの予想が、正しいことが導かれるのである。

<u>Auslander予想</u> (conjectured by Auslander in 1962)

ＭがNoether環Ｒ上の有限生成加群で、pd(M)が有限であるとする。このとき、Ｒの元ｘがＭ上非零因子であれば、それはＲ上でも非零因子である。

<u>Bass予想</u> (conjectured by Bass in 1963)

Noether局所環Ｒがinjective dimension有限な有限生成加群を持てば、ＲはＣＭである。

（１．３）ＮＩＴもＯＩＴもある意味でKrullの単項イデアル定理の拡張であると考えられている。実際、単項イデアル定理を書いてみると、ＮＩＴやＯＩＴと同様な不等式を与えていることに気が付く。

単項イデアル定理；ＲがNoether環で、ＩがＲのｎ個の元で生成されるイデアルであるとすると、$ht(I) \leqq n$である。

ＮＩＴ、ＯＩＴ及び単項イデアル定理において結論に現われる不等式は、全て、ある種の（余）次元がある種のホモロジー的量よりも大きくは成り得ないことをいっている。実際、ＮＩＴによって、次の様な形の単項イデアル定理の一般化が得られることが知られている。

Homological Height Conjecture (conjectured by Hochster in 1974)

$R \to S$を環の準同型写像であるとする。ＩがＲのイデアルであるとき、次の不等式が成立する。

$$ht(IS) \leqq pd_R(R/I)$$

（１．４）ＮＩＴの証明に関して、その歴史を少し述べておこう。

先ず、ＮＩＴは環ＲがＣＭであるときには、明らかに正しい。そのことから、環ＲがMaximal ＣＭ加群をもつときにも、ＮＩＴは正しい事が分る。更に、Maximal ＣＭ加群は有限生成でなくても、良いことが分る。有限生成でないかもしれないMaximal ＣＭ加群は、big ＣＭ加群と言われる。そして、Hochsterの大定理によれば、局所環Ｒが体を含みさえすれば、Ｒ上にbig ＣＭ加群が存在することが知られている。結局、Ｒが体を含む局所環であればＮＩＴは正しいことが、（Roberts以前に）知られていた。今回、Robertsが示したのは、Ｒが体を含まない局所環の場合について、ＮＩＴがやはり正しいということである。

Paul RobertsによるＮＩＴの証明には、FultonのIntersection Theoryなるものが不可欠である。それを次の章で説明しよう。

§２．Riemann-Roch定理

（２．１）以下では、$S=\mathrm{Spec}(k)$、kは体またはexcellentな正則局所環とする。また、S上のスキームXは、いつもS上有限生成でseparatedである。varityまたはsub-varietyというときには、既約かつ被約なスキームを意味するものとする。

X上のn-cycleとは、有限和$\Sigma n_i(V_i)$（$n_i\in\mathbb{Z}$、V_iはXのn次元のsubvariety）のことである。Xのn-cycle全体の成す群をZ_nXと書く。WがXの$(n+1)$次元のsubvarietyであるとき、$r\in R(W)^*$（＝nonzero rational functions on W）に対して、

$$[\mathrm{div}(r)]=\Sigma\,\mathrm{ord}_V(r)[V]\ \ (V\text{は}W\text{の}n\text{次元subvarietyを走る})\in Z_nX$$

と定義する。ここで、$\mathrm{ord}_V(r)=\mathrm{length}(\mathcal{O}_{V,W}/(r))$である。$\alpha\in Z_nX$が、rationally equivalent to zero（記号で$\alpha\sim 0$と書く）とは、次の条件が満たされるときである。

(2.1.1)　Xの$(n+1)$次元subvarieties W_i と、その上のrational functions $r_i\in R(W_i)^*$が存在して、$\alpha=\Sigma[\mathrm{div}(r_i)]$と書ける。

$A_nX=Z_nX/\sim$、また、$A_*X=\oplus_nA_nX$と定義する。A_*XをChow群と言う。Xが適当な条件を充たすときには、A_*Xは群であるばかりでなく、intersection productを積とする環になることが知られている。

（２．２）暫くの間、Xは体k上のnonsingularなスキームであるとしよう。EがX上のrank$(r+1)$のlocally free sheafであるとき、X上のprojective space bundle π：$\mathbb{P}(E)\to X$を考える。πによって、導かれるChow環の準同型$\pi^*:A_*X\to A_*\mathbb{P}(E)$によって、$A_*\mathbb{P}(E)$は$A_*X$上のrank r のfree moduleであり、

$$A_*\mathbb{P}(E)=A_*X[\zeta]/(\zeta^{r+1}+\pi^*c_1\cdot\zeta^r+\ldots+\pi^*c_r\cdot\zeta+\pi^*c_{r+1})$$

と書ける。ここで、$\zeta=\mathcal{O}_{P(E)}(1)$、$c_i\in A_{d-i}X$である。この$c_i$は、$c_i(E)$と書いて$E$の$i$-th Chern classである。（但し、$c_0(E)=1$。）$E$のtotal Chern classは、次で定義される。

$$c(E)=\Sigma_{i=0}^{r+1}c_i(E)$$

LがX上のline bundleであるときには、$c(L)=1+c_1(L)$である。また、完全列；$0\to E'\to E\to E''\to 0$があるときには、$c(E)=c(E')\cdot c(E'')$であることなどが知られている。更に、$c(E)=\Pi_{i=0}^{r}(1+\alpha_i)$と書けることも知られている。ここで、$\{\alpha_i\}$は

ＥのChern rootsと呼ばれるものである。このとき、ＥのChern character ch(Ｅ) とTodd class tod(Ｅ)が次のように定義される。

$$\mathrm{ch}(E)=\Sigma_i \exp(\alpha_i)、\quad \mathrm{tod}(E)=\Pi_i(\alpha_i/1-\exp(-\alpha_i))$$

これらを、ＥのChern class $c_i(E)$で書くとつぎのようである。

$$\mathrm{ch}(E)=(r+1)+c_1+1/2(c_1{}^2-2c_2)+1/6(c_1{}^3-3c_1c_2+c_3)+\ldots$$

$$\mathrm{tod}(E)=1+1/2c_1+1/12(c_1{}^2+c_2)+1/24(c_1c_2)+\ldots$$

（２．３）HirzeburchのRiemann-Roch定理を思い出そう。

Hirzeburch-ＲＲ定理

Ｘが$\mathbb{C}$上のnonsingular complete varietyであるとき、Ｘ上のvector bundle Ｅに対して、次の等式が成立する。

(2.3.1) $$\Sigma_i(-1)^i\dim H^i(X,E)=\int_X \mathrm{ch}(E)\cdot\mathrm{tod}(T_X)$$

ここで、$\int_X$ はdegree map：$A_*X\to\mathbb{Z}$を意味する。即ち、$\alpha_i\in A_iX$のとき、$\int_X\Sigma\alpha_i=$ degree(α_0)である。

この定理が、curveやsurfaceの場合の普通のＲＲ定理を導くことを確かめることは、読者に委ねよう。ＮＩＴの証明にはこの定理は使えない。もっと、一般化されたものが必要である。そこで、次に、GrothendieckのＲＲ定理を思い出そう。

Grothendieck-ＲＲ定理

ｆ：Ｘ→Ｙが、体ｋ上のnonsingular quasi-projective varietiesの間のproper mapであるとき、Ｘ上のvector bundle Ｅ に対して、次の等式が成立する。

(2.3.2) $$\mathrm{ch}(f_*E)\cdot\mathrm{tod}(T_Y)=f_*(\mathrm{ch}(E)\cdot\mathrm{tod}(T_X))$$

ここで、両辺のf_*の意味を説明しておこう。左辺のf_*は、Ｘ上のvector bundleの圏のGrothendieck群K_0XからＹ上のK_0Yへのmapで、次のように定義される。

(2.3.3) $$f_*(E)=\Sigma_i(-1)^i(R^if_*E)$$

(2.3.2)の右辺のf_*はChow環の間のmap $A_*X\to A_*Y$で、Ｘ上のcycle Ｖ に対して、

(2.3.4) $$f_*(V)=\Sigma\deg(V/W)(W)$$ （Ｗは$f(V)$のcomponentを走る）

で定義される。ここで、$\deg(V/W)=(R(V):R(W))$ (if $\dim(V)=\dim(W)$)、０ (if $\dim(V)\neq\dim(W)$) である。

この定理において、$Y=\mathrm{Spec}(k)$と置くと、前述のHirzeburchのＲＲ定理が出ることは、明らかであろう。ＮＩＴの証明には、これを更にsingularの場合に拡張したものが必要である。そこで、そもそもＲＲ定理とは何かということを考えてみよう。

Grothendieck-ＲＲ定理において、$\tau_X(E)=\mathrm{ch}(E)\cdot\mathrm{tod}(T_X)$と置いてみると、

$$\tau_X : K_0X \to A_*X$$

であって、ＲＲ定理の内容は、任意の proper map $f : X \to Y$ に対して、$f_* \cdot \tau_X = \tau_X \cdot f_*$となることに他ならない。このような$\tau_X$を構成することが、ＲＲ定理であると解釈することが出来る。以上の様な要請を満足するようなτ_X（Todd写像）とch（Chern character）がsingularな場合にも構成できるというのが、次に述べるFultonのＲＲ定理である。

（２．４）Fulton-ＲＲ定理

Ｘをexcellent regular ring上finite typeなschemeであるとする。Ｘ上の locally free sheavesのcomplex $E_. : 0 \to E_n \to E_{n-1} \to \ldots \to E_0 \to 0$を考える。Ｙを$E_.$のnon-exact locusとする。ＹはＸのclosed subschemeである。このとき、Chow群の間の準同型 $\mathrm{ch}(E_.)=\mathrm{ch}_Y{}^X(E_.) : A_*X \to A_*Y$が定義せられて、次の条件を満足する。

(2.4.1)　$\mathrm{ch}(E_.)=\Sigma\,\mathrm{ch}_k(E_.)$、$\mathrm{ch}_k(E_.) : A_*X \to A_{*-k}Y$

(2.4.2)　$i : Y \to X$を埋め込み写像とするとき、

$$i_*(\mathrm{ch}(E_.)(\alpha)) = \Sigma(-1)^i\,\mathrm{ch}(E_i)(\alpha)$$

(2.4.3)　ＤがＸのCartier因子であるとき、次の可換図式が出来る。

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{ch}(E_.) & \\ A_*X & \to & A_*Y \\ \cap D \downarrow & & \downarrow \cap D \\ A_*D & \to & A_*(D\cap Y) \\ & \mathrm{ch}(j^*E_.) & \end{array}$$

この$\mathrm{ch}(E_.)$を$E_.$のChern characterという。

次にＸ上のcoherent sheavesの圏のGrothendieck群をK_0Xと書く。このとき、ＲＲ写像（またはTodd class）$\tau_X : K_0X \to A_*X$が次の条件を充たすように構成できる。

(2.4.4)　τ はproper morphismとcovariantである。即ち、$f: X \to Y$ がproper morphismであるとき、$f_* \cdot \tau_X = \tau_Y \cdot f_*$ となる。

(2.4.5)　$\tau_X(\mathcal{O}_X) = [X] + $(terms of lower dimension)

(2.4.6)　locally free sheaf E とcoherent $\mathcal{O}_X$加群 N に対して、

$$\tau_X(E \otimes N) = ch(E)(\tau_X(N))$$

以上のＲＲ定理を認めた上で、次にＮＩＴの証明に移ろう。

§３．ＮＩＴの証明

（３．１）ＮＩＴは、Ｒが整域である場合について証明すれば充分であることは容易に確かめることができる。更に既に(1.4)で述べたように、ＮＩＴはＲが体を含む局所環の時には正しいことが分っている。そこで、以下ではＲは体を含まないものとする。結局、Ｒは整域で、Ｒの標数は０、ｋの標数はｐ＞０としてよい。また、ｋは完全体として構わない。更に、$F_.$ はminimal complexとしてもよい。$S = R/pR$、$G_. = F_. \otimes_R S$ と置く。Ｒ上ではＮＩＴが正しくないものとして、$F_.$ がその反例を与えるようなcomplexであるとしてみよう。このとき、Ｓ上ではＮＩＴが正しいのだから、$G_.$ のcomplexとしての長さ＝$n = \dim(S)$ である。以下では、この仮定のもとで矛盾が生じることを見よう。

（３．２）$X = \mathrm{Spec}(R) \supset Y = \mathrm{Spec}(S) \supset x = \mathrm{Spec}(k)$ と置くとき、(2.4.3)によって、$ch_n(G_.)([Y]) = 0$ である。実際、次の可換図式において、ｘは０次元なので、$A_1 x = 0$ だからである。

$$\begin{array}{ccc} & ch_n(F_.) & \\ A_{n+1}X & \rightarrow & A_1 x \\ \cap Y \downarrow & & \downarrow \cap Y \\ A_n Y & \rightarrow & A_0 x \\ & ch_n(G_.) & \end{array}$$

そこで、次に $n = \dim(Y)$ であるときに、$ch_n(G_.)([Y]) \neq 0$ であることを示せば、矛盾が得られることになる。以下では、そのことを示そう。

（３．３）さて、FultonのＲＲ定理(2.4.6)によって、任意のＳ加群Ｎにたいして、次の等式が成立する。

$$\tau_Y(G_i \otimes N) = ch(G_i)(\tau_Y(N)) \qquad (i \geqq 0)$$

特に、A_*Yの元として次の等式が成り立つ。

(3.3.1) $$\Sigma_i(-1)^i \tau_Y(G_i \otimes N) = \Sigma_i(-1)^i ch(G_i)(\tau_Y(N))$$

一方、

$$\chi(G_. \otimes N) = \Sigma_i(-1)^i \mathrm{length}(H_i(G_. \otimes N)) \in \mathbb{Z} \simeq K_0 x$$

と置くとき、closed immersion $i : x \subset Y$ によるGrothendieck群の準同型$i_* : K_0 x \to K_0 Y$によって、$i_*(\chi(G_. \otimes N)) = \Sigma_i(-1)^i [G_i \otimes N]$ となることに注意しよう。(2.4.4)によって、τはiとcovariantなので、次の等式が得られることが分る。

(3.3.2) $$\Sigma_i(-1)^i \tau_Y(G_i \otimes N) = \chi(G_. \otimes N)\, i_*([x])$$

(3.3.1)、(3.3.2)、(2.2.2)によって、次の等式が得られる。

$$i_*(\chi(G_. \otimes N))[x]) = i_*(ch(G_.)(\tau_Y(N)))$$

ここで、定義によって、$ch(G_.) : A_*Y \to A_0 x \simeq \mathbb{Z}$であるから、$A_0 x$を$\mathbb{Z}$と同一視して次の等式が得られたと言っても良い。

(3.3.3) $$\chi(G_. \otimes N) = ch(G_.)(\tau_Y(N))$$

（３．４）Frobenius写像fをm回連続して行ったものを$f^m : S \to S$と書くことにする。Ｓ自身をf^mを通してS-algebraと見たものをS^mと書く。また、$G_.^m = G_. \otimes S^m$と置く。$G_.^m$に(3.3)の議論を適用して、(3.3.3)により、

(3.4.1) $$\chi(G_.^m) = ch(G_.)(\tau_Y(S^m))$$

が得られる。一方、Frobenius写像$f^m : Y \to Y$はintegralなので、(2.4.4)により、

(3.4.2) $$\tau_Y(S^m) = f_*^m(\tau_Y(\mathcal{O}_Y))$$

ここで、一般にj次元cycle $V \subset Y$に対して、

$$f_*^m([V]) = p^{mj}[V]$$

であることに注意して、(2.4.5)と(3.4.2)によって、

$$\tau_Y(S^m) = p^{md}[Y] + (p^d\text{の}(m-1)\text{次以下の項})$$

但し、$d = \dim(S)$である。結局、(3.4.1)とこれを合せて、

$$\chi(G_\cdot^m)=p^{md}ch(G_\cdot)([Y])+(p^d \text{の}(m-1)\text{次以下の項})$$

特に、次の等式が得られた。

(3.4.3) $$ch(G.)([Y])=\lim \chi(G_\cdot^m)/p^{md} \quad (m\to\infty)$$

この右辺は、$\chi_\infty(G.)$と書いて、Duttaの重複度と呼ばれる。(3.1)によると、F. がR上で、NITの反例を与えるときには、(3.4.3)の値は0になる筈であった。以下では、G.のcomplexとしての長さnがSの次元に等しい時には、この値は正であることを証明しよう。そうすれば、NITの証明は完了する。

（3．5）結局、次のことを証明すれば良い。

(3.5.1)補題　complex G. の長さnがSの次元に等しいときには、$\chi_\infty(G.)$は常に正である。

この補題の証明のためには、次の2つのことを証明すれば良い。

(3.5.2)　$\lim \mathrm{length}(H_0(G_\cdot^m))/p^{mn}>0 \quad (m\to\infty)$

(3.5.3)　$\lim \mathrm{length}(H_i(G_\cdot^m))/p^{mn}=0 \quad (m\to\infty)$、$i>0$。

(3.5.2)は、殆ど明らかである。

実際、$G.:\ldots\to G_1 \xrightarrow{(a_{ij})} G_0 \to 0$ とするとき、$G_\cdot^m:\ldots\to G_1 \xrightarrow{(a_{ij}^{p^m})} G_0\to 0$であるから、

$$\mathrm{length}(H_0(G_\cdot^m))\geqq \mathrm{length}(G_0/\mathfrak{m}^{p^m}G_0)=\mathrm{rk}(G_0)\cdot \mathrm{length}(S/\mathfrak{m}^{p^m})$$

よって、$\lim \mathrm{length}(H_0(G.))/p^{mn}\geqq \mathrm{rk}(G_0)>0$がでる。

(3.5.3)の証明は、もう少し面倒である。

(3.5.3)の証明の為に、$D^\cdot$をSのdualizing complexとする。二重複体$\mathrm{Hom}_S(G.,D^\cdot)$によって次の2つのspectral sequenceがある。

$$'E_2^{pq}=\mathrm{Ext}_S^p(H_q(G.),D^\cdot) \Rightarrow H^n$$

$$''E_2^{pq}=\mathrm{Ext}_S^p(G.,H^q(D^\cdot)) \Rightarrow H^n$$

ここで、$'E_2^{pq}$は退化して、$H^n\simeq \mathrm{Ext}_S^d(H_{n-d}(G.),D^\cdot)\simeq \mathrm{Hom}_S(H_{n-d}(G.),E_S(k))$となる。特に、$\mathrm{length}(H^n)=\mathrm{length}(H_{n-d}(G.))$である。このことと上の第2のspectral sequenceから、次の不等式が得られる。

(3.5.4) $\quad \mathrm{length}(H_i(G.)) \leqq \Sigma_{j=0}^{i} \mathrm{length}(\mathrm{Ext}_S^j(G.,H^{i-j+n}(D^\cdot)))$

ここで、$\dim(H^j(D^\cdot)) \leqq j$であることに注意して、(3.5.3)の証明の為には、次の事を証明すれば充分であることが分る。。

(3.5.5) 有限生成S加群M（但し、$\dim(M) \leqq j$）と$i \geqq 0$に対して、

$$h^i(M,m) = \mathrm{length}(\mathrm{Ext}_S^i(G_\cdot^m, M))$$

と置くとき、つぎの事が成立する。

$$h^i(M,m)/p^{m(j+1)} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

(3.5.5)の証明の為に次の事を注意しておこう。

(3.5.6) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$がS加群のexact列であるとき、不等式；

$$h^i(M,m) \leqq h^i(M',m) + h^i(M'',m)$$

が成立する。

(3.5.6)によって、(3.5.5)の証明には、$M=S/\mathfrak{p}$ （$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$）と仮定して構わないことが分る。

(3.5.5)を$M=S/\mathfrak{p}$の次元jについての帰納法で証明しよう。

$j=0$のときには、$M=S/\mathfrak{m}$であるから、$h^i(M,m)$はmについて常数である。従って、明らかに(3.5.5)は正しい。

$j>0$としよう。このときには、$x \in \mathfrak{m}-\mathfrak{p}$をとって、x倍写像$G. \to G.$が0にhomotopy同値であるように取ることが出来る。（何故なら$H_*(G.)$は長さ有限であるから。）従って、

$$0 \to M \xrightarrow[x^{p^m}]{} M \to M/x^{p^m}M \to 0$$

から得られる長完全列；

$$\mathrm{Ext}_S^i(G_\cdot^m, M) \xrightarrow[x^{p^m}]{} \mathrm{Ext}_S^i(G_\cdot^m, M) \to \mathrm{Ext}_S^i(G_\cdot^m, M/x^{p^m}M))$$

において、左側のx^{p^m}倍写像は0である。よって、次の不等式が得られる。

$$h^i(M,m) \leqq h^i(M/x^{p^m}M,m) \leqq p^m h^i(M/xM,m)$$

M/xMに帰納法の仮定を使って、

$$h^{i}(M, m)/p^{m(j+1)} \leqq h^{i}(M/xM, m)/p^{mj} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

が得られる。これで、(3.5.5)の証明が終り、従って、(3.5.2)の証明も完了した。

§4. 付記

前章までで述べたように、ホモロジカル予想と言われていたもののうちで、ＮＩＴとそれに付随した幾つかの予想は解決した。しかし、次に掲げる予想は未だ未解決であることを注意しておこう。

直和因子予想、モノミアル予想、カノニカル・エレメント予想、big ＣＭ予想、small ＣＭ予想、...

また、§３で述べたRobertsの証明は、環が不等標数の時にのみ通用する方法である。一般の環について通用する証明を考えることはまだ意義があると思う。更に、環が不等標数の時にも、もっと初等的な証明がありえるであろう。

REFERENCES

P. Roberts ; Le theoreme d'intersection, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Serie 1, no 7, 1987.

W. Fulton ; Intersection Theory, Springer-Verlag, 1984.

Pseudo-affine rings について

小野田信春　　福井大・教育

<u>序</u>　以下ではネーター環 D と D-代数 R を固定して考える。R が D 上有限生成ならば、明らかに、各 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} D$ に対し、ファイバー環 $R \otimes_D k(\mathfrak{p})$ は $k(\mathfrak{p})$ 上有限生成である。但し、ここで、$k(\mathfrak{p})$ は剰余体 $D_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}D_\mathfrak{p}$ を表わす。しかし、逆が一般に成立しないことは次の簡単な例からもすぐにわかる。

例 1　$D = \mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}[X, \frac{X}{2}, \cdots, \frac{X}{p}, \cdots]$　（p は全ての素数を動く）

例 2　$D = \mathbb{Z}_{(p)}$, $R = \mathbb{Z}_{(p)} + X\mathbb{Q}[X]$　（p は素数）

それでは、どのような条件のもとでこの逆が成立するであろうか。実は、この問題は擬多項式環の研究から出てきたものである。いま、$D^{[n]}$ で D 上 n 変数の多項式環を表わすとき、各 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} D$ に対し、$R \otimes_D k(\mathfrak{p}) \cong k(\mathfrak{p})^{[n]}$ を満たす D-代数 R を Asanuma [1] に従って、D 上 n 変数の擬多項式環と呼ぶことにする。Sathaye [7] は、D が $\mathbb{Q}$ を含む離散付値環のとき、R が D 上平坦かつ有限生成という仮定のもとで、D 上 2 変数の擬多項式環は、D 上 2 変数の多項式環に他ならないことを示したが、Asanuma [1] は D が同じとき、D 上平坦な擬多項式環は D 上有限生成になることを導き、結果として Sathaye の定理から、R が D 上有限生成であるという仮定を除くことに成功した。更に一般のネーター環 D 上の擬多項式環 R のもついくつかの重要な性質を、R が D 上有限生成という仮定のもとで示している。このようなことから、ファイバー環の有限生成性よりもとの環の有限生成性を導くより一般的な定理があれば、この種の研究に役立つと考えたわけである。その結果、得られた定理は次である：

定理 $(D, \mathfrak{m})$ は excellent かつ整閉な局所整域、R は次の条件を満たす D－代数とする：

(1) R は D 上平坦。

(2) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, D$ に対し、$R \otimes_D k(\mathfrak{p})$ は $k(\mathfrak{p})$ 上有限生成な整閉整域。

(3) $\mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{p})} R \otimes_D k(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ によらずに一定。

このとき、R は D 上有限生成な整閉整域である。

この定理の系として次を得る。

系 ネーター局所環 $(D, \mathfrak{m})$ 上平坦な擬多項式環 R は D 上有限生成である。

本稿の目的はこれらを証明することにある。なお、主定理は講演時にはまだ予想段階であったが、その後証明が完了したので、それを含めて報告することにする。形式上、全体は4つの節よりなるが、最初の3節は準備で最後の節で主定理の証明を与える。

1. 準備

この節では次節以降で必要な基本的な補題をいくつか与える。証明は本論と無関係（かつ易しい）ので全て省略する。なお、序で約束した通り、D はネーター環、R は D－代数を常に表わすものとする。

補題 1.1. (1) D の巾零イデアル $\mathfrak{n}$ に対し、R が D 上有限生成であるための必要十分条件は、$R \otimes_D D/\mathfrak{n}$ が $D/\mathfrak{n}$ 上有限生成となることである。

(2) D のイデアル $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ で $\mathfrak{q}_1 R \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m R = (0)$ を満たすものに対し、R が D 上有限生成であるための必要十分条件は、各 i につき、$R \otimes_D D/\mathfrak{q}_i$ が $D/\mathfrak{q}_i$ 上有限生成となることである。

(3) D 上忠実平坦な D－代数 $\widetilde{D}$ に対し、R が D 上有限生

成であるための必要十分条件は、$R\otimes_D\widetilde{D}$ が $\widetilde{D}$ 上有限生成となることである。
(4) D が準局所環のとき、R が D 上有限生成となるための必要十分条件は、D の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し、$R_\mathfrak{m} = R\otimes_D D_\mathfrak{m}$ が $D_\mathfrak{m}$ 上有限生成となることである。

補題 1.2. R は整域かつ $D \subseteq R$ と仮定する。
(1) $R[\frac{1}{x}]$ が整閉となる R の元 x が存在すれば、R は整閉である。
(2) R が D 上平坦のとき、$0 \neq a \in D$ で $R[\frac{1}{a}]$ が整閉かつ各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(D/aD)$ に対し $R_\mathfrak{p}$ も整閉となるものが存在すれば R は整閉である。

補題 1.3. R は D 上平坦と仮定する。D のイデアル $\mathfrak{m}$ を固定し、D－加群 M に対し、M^* で M の $\mathfrak{m}$－進完備化を表わすものとする。このとき、
(1) R^* は D 上平坦である。
(2) D のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し、$(\mathfrak{a}R)^* \cong \mathfrak{a}R^*$ および $(R/\mathfrak{a}R)^* \cong R^*/\mathfrak{a}R^*$ が成り立つ。
更に $R/\mathfrak{m}R$ がネーター環ならば次も成立する。
(3) R^* はネーター環である。
(4) $\dim R^* = \sup\{\dim \widehat{R_M} \mid M \in \mathrm{Max}(R)$ かつ $M \supseteq \mathfrak{m}R\}$
(5) $P \in \mathrm{Spec}\,R$ かつ $P \supseteq \mathfrak{m}R$ ならば $\dim \widehat{R_P} = \dim (R_P)^*$

2. 擬アフィン環

この節では、擬アフィン環の概念を導入してその基本性質を調べる。

定義 2.1. 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,D$ に対し、ファイバー環 $R\otimes_D k(\mathfrak{p})$ が $k(\mathfrak{p})$ 上有限生成であるとき、R を D 上の擬アフィン環という。

擬アフィン環がいつアフィン環になるかを調べるのが目

的であるが、一般にこれの成立しないことは序で示した通りである。そこで更に、次のような概念も導入する。

定義 2.2. D上の擬アフィン環Rは次の条件を満たすとき、階数 n であるという。
(1) RはD上忠実平坦。
(2) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, D$ に対し、$R \otimes_D k(\mathfrak{p})$ は整閉整域。
(3) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, D$ に対し、$\mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{p})} R \otimes_D k(\mathfrak{p}) = n$。

この節の残りの部分では、RはD上階数 n の擬アフィン環と仮定する。

補題 2.3. (1) Dの積閉集合 S に対し、$S^{-1}R$ は $S^{-1}D$ 上階数 n の擬アフィン環である。
(2) Dのイデアル $\mathfrak{a}$ に対し、$R \otimes_D D/\mathfrak{a}$ は $D/\mathfrak{a}$ 上階数 n の擬アフィン環である。
(3) $x \in R$ が任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ に対し、$x \notin \mathfrak{m}R$ を満たすなら、$R[\frac{1}{x}]$ は、D上階数 n の擬アフィン環である。

証明は定義より直ちにできるので省略する。

補題 2.4. (1) RはD上忠実平坦である。
(2) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, D$ に対し、$\mathfrak{p}R \in \mathrm{Spec}\, R$ となる。

証明 (1)は定義から各 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ に対し $\mathfrak{m}R \neq R$ となることより明らか。(2)は $S = (D/\mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ とおくとき、$R \otimes_D k(\mathfrak{p}) \cong S^{-1}(R/\mathfrak{p}R) \supseteq R/\mathfrak{p}R$ より明らか。

補題 2.5. (1) Dのイデアル $\mathfrak{a}$ に対し、$\sqrt{\mathfrak{a}R} = \sqrt{\mathfrak{a}}R$。
(2) Dが被約(又は整域)ならばRも被約(又は整域)。
(3) Dが整閉整域ならばRも整閉整域。

証明 (1)は前補題から直ちに出る。(2)は(1)の特別な場合。よって(3)を示す。$R = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)} R_{\mathfrak{m}}$ ゆえ、補題 2.3 からDは局所環としてよい。$d = \dim D$ についての帰納法で証明する。$d = 0$ のときは明らか。$d = 1$ とするとDは

離散付値環ゆえ、Dの極大イデアルを$\mathfrak{m}$とするとき、$\mathfrak{m} = xD$ と表わせる。補題2.4よりxはRの素元でもあることに注意する。$R \otimes_D k(0) \cong R[\frac{1}{x}]$ ゆえ、仮定から $R[\frac{1}{x}]$ は整閉。よって、補題1.2よりRも整閉となる。$d > 1$ のときは、$0 \neq a \in D$ を任意にとれば、補題2.3と帰納法の仮定より、$R[\frac{1}{a}]$ は整閉。しかも任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(D/aD)$ に対し、Dは整閉ゆえ $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ に注意すれば、再び補題2.3と $d = 1$ のときのことより $R_{\mathfrak{p}}$ は整閉となる。従って、補題1.2よりRは整閉である。

補題 2.6. Dが整域ならば次が成り立つ。

(1) 各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,D$ に対し、$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}R)$。

(2) DとRの間に次元公式が成り立つ。即ち、$P \in \mathrm{Spec}\,R$, $\mathfrak{p} = P \cap D$ に対し、次の等式が成立する：

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + n - \mathrm{tr.deg}_{D/\mathfrak{p}}\, R/P$$

証明 (1)は補題2.4と $\mathrm{tr.deg}_D R = \mathrm{tr.deg}_{D/\mathfrak{p}}\, R/\mathfrak{p}R = n$ よりでる。(2)は $R \otimes_D k(\mathfrak{p})$ が体 $k(\mathfrak{p})$ 上有限生成整域であることと(1)より出るが詳細は省略する。

補題 2.7. Dが整域かつ有限次元ならば、$\dim R = \dim D + n$ が成り立つ。

証明 任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(D)$ と、$\mathfrak{m}R \subseteq M$ を満たす任意の $M \in \mathrm{Max}(R)$ に対し、$R/\mathfrak{m}R$ が体 $D/\mathfrak{m}$ 上のアフィン整域であることから R/M が $D/\mathfrak{m}$ 上代数的になることに注意すれば、補題2.6より、$\mathrm{ht}(M) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) + n$ を得る。よって、$\dim R \geq \dim D + n$ となるが、逆向きの不等式が一般に成立するので等号が成り立つ。

補題 2.8. Dが catenary ならば、任意の $P \in \mathrm{Spec}\,R$ と、Dの任意の正則元xで、$x \in P$ を満たすものに対して、$\mathrm{ht}(P/xR) = \mathrm{ht}(P) - 1$ が成り立つ。

証明 一般の場合は補題2.3を使ってDが整域の場合

に帰着できる。従ってDは整域と仮定してよい。また、$\mathfrak{p}=P\cap D$とおくとき、必要ならば、D, Rを各々$D_{\mathfrak{p}}$, $R_{\mathfrak{p}}$でおき代えることにより、Dは$\mathfrak{p}$を極大イデアルにもつ局所環とも仮定できる。このとき、xDの極小素イデアルを$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$とすれば、補題2.5より、$\mathfrak{p}_1R, \cdots, \mathfrak{p}_tR$が$xR$の極小素イデアルになる。このことと、補題2.3，補題2.6および$ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i) = ht(\mathfrak{p})-1$とを用いれば、$\mathfrak{p}_iR \subseteq P$を満たす任意の$i$に対し、簡単な計算から、$ht(P/\mathfrak{p}_iR) = ht(P)-1$が示せて主張の正しいことがいえるが、詳細は省略する。

<u>補題</u> 2.9.　任意の$P\in \operatorname{Spec} R$に対し、$PR_P$は$R_P$の有限生成イデアルである。

<u>証明</u>　$\mathfrak{p}=P\cap D$とおくとき、Dは$\mathfrak{p}$を極大イデアルにもつ局所環と仮定してよい。すると、$R/\mathfrak{p}R$は体$D/\mathfrak{p}$上のアフィン環ゆえネーター環。従って、$P/\mathfrak{p}R$は有限生成イデアル。よってPも有限生成である。

<u>補題</u> 2.10.　$\dim D=0$ならば、RはD上有限生成である。

<u>証明</u>　補題1.2，1.3および2.5より直ちに従う。

3.　<u>擬アフィン環の$\mathfrak{m}$-進完備化</u>

本節では、Dは$\mathfrak{m}$を極大イデアルにもつ局所整域かつcatenaryであるとし、RはD上階数nの擬アフィン環と仮定する。また、D-加群Mに対し、M^*でMの$\mathfrak{m}$-進完備化を表わす。

<u>補題</u> 3.1.　$S\cap \mathfrak{m}R=\phi$を満たすRの任意の積閉集合Sに対し、$\dim (S^{-1}R)^* \geq \dim (S^{-1}R)$が成り立つ。とくに、$\dim R^* \geq \dim R$となる。

証明　$d = \dim D$ についての帰納法で示す。$d = 0$ のときは明らか。$d > 0$ として、D の正則元 $x \in \mathfrak{m}$ を任意にひとつ選ぶ。補題1.3より x は $(S^{-1}R)^*$ の正則元でもあり、かつ、$(S^{-1}R)^*/x(S^{-1}R)^* \cong (S^{-1}R/x(S^{-1}R))^*$ となる。ここで、$R \longrightarrow R/xR$ による S の像を $\bar{S}$ とするとき、$S^{-1}R/x(S^{-1}R) \cong \bar{S}^{-1}(R/xR)$ ゆえ、補題2.3と帰納法の仮定から、

$$\dim (S^{-1}R/x(S^{-1}R))^* \geqq \dim S^{-1}R/x(S^{-1}R)$$

を得る。更に補題2.7から

$$\dim S^{-1}R/x(S^{-1}R) = \dim S^{-1}R - 1$$

が従うことに注意すれば、

$$\dim (S^{-1}R)^* \geqq \dim (S^{-1}R)^*/x(S^{-1}R)^* + 1 \geqq \dim S^{-1}R/x(S^{-1}R) + 1 = \dim S^{-1}R$$

となり、主張の正しいことがわかる。

補題 3.2.　$P \in \operatorname{Spec} R$ に対し、$\dim \widehat{R_P} \geqq \dim R_P$ となる。

証明　$\mathfrak{p} = P \cap D$ とおく。必要ならば D、R を $D_\mathfrak{p}$, $R_\mathfrak{p}$ でおき代えて、$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ としてよい。すると、$R/\mathfrak{p}R$ は $D/\mathfrak{p}$ 上有限生成ゆえネーター環であり、また、R は D 上平坦ゆえ、R_P も D 上平坦である。従って、R_P が局所環であることに注意すれば、補題1.3より、$\dim \widehat{R_P} = \dim (R_P)^*$ を得る。よって、前補題より結論を得る。

4.　主定理の証明

前節までの準備をもとにここでは主定理の証明を与える。従って、特に断わらない限り、D は $\mathfrak{m}$ を極大イデアルにもつ excellent かつ正規な局所整域、R は D 上階数 n

の擬アフィン環とする。

<u>補題</u> 4.1. 任意の $P \in \operatorname{Spec} R$ に対し、R_P は D 上の局所域である。

<u>証明</u> $\mathfrak{q} = P \cap D$ とおくとき、例によって $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ と仮定してよい。補題 2.6 と 2.9 より、次の 5 条件を満たす正規局所環 $(T, \mathfrak{n})$ の存在が導ける（詳細は省略する。[5], Lemma 2 参照）：

(1) T は D を支配し、R_P に支配される
(2) T は D 上の局所域
(3) T と R の商体は一致する
(4) T と R_P の次元は等しい、即ち $\dim T = \dim R_P$
(5) T と R_P の剰余体は等しい、即ち $T/\mathfrak{n} = R_P/PR_P$

このとき、$T = R_P$ が示せればよい。条件 (1) より自然な準同型写像 $f: \hat{T} \longrightarrow \widehat{R_P}$ が存在するが、条件 (5) よりこれは全射である。従って、補題 3.2 および完備化の一般論より、

$$\dim T \geq \dim \hat{T} \geq \dim f(\hat{T}) = \dim \widehat{R_P} \geq \dim R_P$$

を得るが、条件 (4) より、ここで等号が全て成立し、特に、$\dim \hat{T} = \dim f(\hat{T})$ となる。一方、条件 (2) より T は excellent であり、しかも正規局所整域ゆえ、解析的正規性（[2], Theorem 79 参照）より、$\hat{T}$ は（正規）整域になる。よって f は単射でなければならず、結局 f は同型写像、即ち、$\hat{T} = \widehat{R_P}$ がわかった。そこで $x \in R_P$ を任意にとる。条件 (3) より、ある $a, b \in T$ が存在して $x = b/a$ と表わせるが、このとき

$$b \in aR_P \cap T \subseteq a\widehat{R_P} \cap T = a\hat{T} \cap T = aT$$

となり、$x = b/a \in T$ を得る。よって、$T = R_P$ が示せた。

<u>補題</u> 4.2. $R[\frac{1}{x}]$ が D 上有限生成となるような $x \in R$ が存在する。

<u>証明</u>　R/mR は D/m 上有限生成かつ超越次元 n をもつから、ネーターの正規化定理より R/mR の要素 $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ で D/m 上代数的独立かつ R/mR が $D/m[\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n]$ 上整となるものが存在する。各 i に対し、$\bar{x}_i$ の R における逆像 x_i をひとつ選び、$T = D[x_1, \cdots, x_n]$ とおく。まず T が D 上 n 変数の多項式環と同型、即ち、$x_1, \cdots, x_n$ が D 上代数的独立となることを示そう。$M = mR \cap T$ とおき、T^*, R^* でそれぞれ、T および R の M-進完備化を表わす。このとき、$MR = mR$ より、R^* は R の m-進完備化と一致することに注意して欲しい。R^* は自然に T^*-加群とみなせるが、補題1.3と $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ の選び方から、R/MR は T/MT-加群として有限生成なので、[3], Theorem 8.4 より、R^* は有限 T^*-加群になる。従って、

$$\dim T^* \geqq \dim R^*$$

を得る。一方、補題3.1と補題2.7より、

$$\dim R^* \geqq \dim R = \dim D + \mathrm{tr.deg}_D R$$

であり、更に T はネーター環ゆえ一般論から、

$$\dim T^* \leqq \dim T \leqq \dim D + \mathrm{tr.deg}_D T$$

となる。これらの不等式より、$\mathrm{tr.deg}_D T \geqq \mathrm{tr.deg}_D R$ となるが、逆の不等号は明らかゆえ、等号が成立する。よって $\mathrm{tr.deg}_D T = n$ となり、$x_1, \cdots, x_n$ が D 上代数的独立であることがわかった。なお、このことから $M = mT$ がでることに注意しておく。さて、そこで T の $Q(R)$ における整閉包 $\overline{T}$ を考えよう。補題2.5より、$\overline{T} \subseteq R$ に注意する。T は excellent ゆえ、$\overline{T}$ は有限 T-加群であり、従って $\overline{T}$ の素イデアルで M の上にあるものは有限個しかない。$\overline{M} = mR \cap \overline{T}$ はそのひとつであるが、それ以外のものを $\overline{M}_1, \cdots, \overline{M}_r$ として、$\overline{T}$ の要素 t を、$t \in (\overline{M}_1 \cup \cdots \cup \overline{M}_r) \setminus \overline{M}$ となるようにとり、$T' = \overline{T}[\frac{1}{t}]$, $R' = R[\frac{1}{t}]$ とおく。補題2.1より R' も D 上階数 n の擬アフィン環である。

$(T')^*$ および $(R')^*$ で T', R' の $\overline{M}$－進完備化を表わす。もちろん、$(R')^*$ は R' の m－進完備化に一致する。さて、$T/M \subseteq \overline{T}/\overline{M} \subseteq R/mR = R/\overline{M}R$ において、$R/\overline{M}R$ は有限 T/M－加群であったから、それは有限 $\overline{T}/\overline{M}$－加群でもある。従って $R'/\overline{M}R'$ は有限 $T'/\overline{M}T'$－加群になり、$(R')^*$ は $(T')^*$－加群として有限生成であることがわかる。ここで、T' は excellent かつ整閉整域で、更に $\overline{M}T'$ は T' の素イデアルであることに注意しよう。よって解析的正規性から、$(T')^*$ は整閉整域である。以上のことから、補題4.1のときと同様の議論により、自然写像 $(T')^* \longrightarrow (R')^*$ は単射であることがいえる。従って、可換図式

$$\begin{array}{ccc} T' & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow g \\ (T')^* & \longrightarrow & (R')^* \end{array}$$

において、g 以外は全て単射であり、しかも T' と R' は商体が一致するから、容易にわかるように g も単射になる。このことから、$(T')^*$ と $(R')^*$ は birational であることがいえ、かつ $(T')^*$ は整閉整域で $(R')^*$ は $(T')^*$ 上整であったから、結局、$(T')^* = (R')^*$ となることがわかった。さてここで任意の $s \in D$ に対し、$P' \in \mathrm{Ass}(T'/sT')$ ならば $P' \subseteq \overline{M}T'$ となることを示そう。実際、$\overline{P} = P' \cap \overline{T}$ とおけば、$\overline{P} \in \mathrm{Ass}(\overline{T}/s\overline{T})$ となり、かつ $\overline{T}$ は整閉整域ゆえ $\mathrm{ht}(\overline{P}) = 1$ がわかる。よって、$P = \overline{P} \cap T$ とおけば、T は excellent ゆえ T と $\overline{T}$ の間に次元公式が成り立つので $\mathrm{ht}(P) = 1$ となり、$P \in \mathrm{Ass}(T/sT)$ である。ところが、T は D 上の多項式環ゆえ、$\mathrm{Ass}(T/sT) = \{ \mathfrak{g}T \mid \mathfrak{g} \in \mathrm{Ass}(D/sD) \}$ なので、従って、$P \subseteq mT = M$ がいえる。よって、$P'(T')_M \in \mathrm{Ass}((T')_M/s(T')_M)$ となるが、ここで t のとり方より $(T')_M$ は $\overline{M}(T')_M$ を極大イデアルにもつ局所環なので、$P'(T')_M \subseteq \overline{M}(T')_M$ となり、従って、$P' \subseteq \overline{M}T'$ が示せる。この事実と Krull の共通部分定理より、任意の $s \in D$ に対し、$s(T')^* \cap T' = sT'$ が成立する。ゆえに、$S = D \setminus \{0\}$ とおくとき、$S^{-1}T' \cap R' = T'$ となる。実際、$x \in S^{-1}T' \cap R'$ に対し、$x = b/s$ ($b \in T'$,

$s \in S$）と表せば

$$b \in sR' \cap T' \subseteq s(R')^* \cap T' = s(T')^* \cap T' = sT'$$

となり、$x = b/s \in T'$ を得る。ここで、$S^{-1}R' \cong R' \otimes_D k(0)$ ゆえ、$S^{-1}R'$ は $S^{-1}T'$ 上有限生成かつ両者の商体は一致することに注意しよう。従って、ある $u \in T'$ に対し、

$$S^{-1}T'[\tfrac{1}{u}] = S^{-1}R'[\tfrac{1}{u}]$$

が成り立つ。このとき $S^{-1}T'[\frac{1}{u}] \cap R'[\frac{1}{u}] = R'[\frac{1}{u}]$ は明らかであるが、一方、$S^{-1}T' \cap R' = T'$ より $S^{-1}T'[\frac{1}{u}] \cap R'[\frac{1}{u}] = T'[\frac{1}{u}]$ でもあるので、結局、$T'[\frac{1}{u}] = R'[\frac{1}{u}]$ となる。以上で、$R'[\frac{1}{u}] = R[\frac{1}{tu}]$ が D 上有限生成となることがわかり、主張の正しいことが示せた。

以上2つの補題から主定理が導ける。ここではそれを少し一般化して次の形で述べる：

定理 4.3. excellent かつ正規な準局所環 D 上階数 n の擬アフィン環 R は D 上有限生成である。

証明　補題 1.1 より、D は正規局所整域としてよい。すると、補題 4.1, 4.2 および [4], Theorem 2.20 より主張が従う。

系 4.4. ネーター準局所環 D 上平坦な擬多項式環 R は D 上有限生成である。

証明　補題 1.1 より、D, R をそれぞれ $\hat{D}$, $R \otimes_D \hat{D}$ でおき代えて、D は完備としてよい。更に、同じ補題により、D は局所整域とも仮定できる。完備局所環は excellent ゆえ、前定理より結論を得る。

最後に、主定理の各条件について吟味しておこう。もちろん、これらの条件は必要条件ではない。しかし、序

に挙げた例1のRは条件(1),(2),(3)を全て満たしている（Dが局所環でない）し、例2のRは(1),(2)を満たしている。更に(1)以外の全ての条件を満たすが、D上有限生成とならないようなRもある（[1], P.114参照）。従って、主定理の各条件は、ある意味でぎりぎりの限界を与えているとも言える。但し、Dおよび各ファイバー環に整閉という条件を付けているが、これははずせそうな気がする。しかし、これに関しては今のところ、証明も反例もできていない。

References

[1] T.Asanuma, Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, Invent. math. 87(1987), 101-127.

[2] H.Matsumura, Commutative algebra, 2nd ed., Benjamin, New York, 1980.

[3] H.Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press.

[4] N.Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, Japan J. Math. 10(1984), 29-53.

[5] N.Onoda, A remark on spots, to appear in Kobe J. Math.

[6] N.Onoda, Algebras with affine fibres over an excellent ring, in preparation.

[7] A.Sathaye, Polynomial rings in two variables over a D.V.R.: A criterion, Invent. math. 74(1983), 159-168.

Cyclic cover of normal graded rings の Demazure's construction としての実現

泊　昌孝　　筑波大・数学系

以下の内容は、渡辺敬一（東海大・理）氏との共同研究として得られた事を、泊が記すものである。

§1. 主定理の証明.

§2. 2次元 rational triple point の canonical cover について.

<u>Introduction</u>　本稿では、k を代数的閉体、$R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ を k 上有限生成であるような正規次数付環とする。R を幾何学的情報であらわし、またその代数幾何を用いて R の環論的な性質を記述する手段として、次の Demazure による定理は基本的である。（記号の詳細は (1.1) を参照）

<u>定理</u>（[D] 3.5）. $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ が k 上有限生成正規次数な normal graded domain とする。$0\neq T\in Q(R)$ を商体 $Q(R)$ の homogeneous element であって $\deg(T)=1$ となるものとするとき、$\exists 1$ $D\in \mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})=\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$（但し $X=\mathrm{Proj}(R)$）であって $R_n = H^0(X,\mathcal{O}_X(nD))\cdot T^n$ $(\forall n\geq 0)$ となる。（以下、このような時、$R=R(X,D)$ と記す。）

渡辺敬一氏は、上記の記述法を、R の divisor class group $Cl(R)$ の計算、R の Macaulay性、Gorenstein性、及び rational singularity 又は canonical singularity に関する判定規準の研究へ用いて、数々の興味ある結果を得た（[W 3,4,5]）。今回、我々の興味は $Cl(R)$ の torsion element I of order r により定まる R の cyclic covering $\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ である。これには、同型 $I^{[r]}\xrightarrow{\sim} R$ により graded R-algebra of finite type の構造を定義する事ができる。その事を、I と X, D の言葉によって normal projective variety Y/k とその上の ample $\mathbb{Q}$-Cartier divisor $\tilde{D}$ を与えて、$\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}\cong R(Y,\tilde{D})$ と記述する事によって示すのが、このノートの目的である。

D を、次のようにあらわす：$D=\sum \frac{p_V}{q_V}V$、ただし V は X 上の既約な Weil divisor 全体を動くものとし、$p_V, q_V\in\mathbb{Z}$ with G.C.D$(p_V,q_V)=1$, $q_V\geq 1$。そして $\mathrm{Div}(X,D)$ として $\{E\in \mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{Q}\mid E=$

$=\sum r_V\cdot V$ with $q_V\cdot r_V\in\mathbb{Z}$ (Vは上と同様) $\}$ とおく，すると，我々の結果は次の様に述べられる。

<u>主定理</u>　$R=R(X,D)$ を normal graded ring $/k$，とし $Cl(R)$ の torsion element I of order r を次のような fractional ideal として表現せよ：
$I=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X,\mathcal{O}_X(E+kD))T^k$, with $E\in \mathrm{Div}(X,D)$ とし，また，整数 a' であって $rE-a'D$ が X 上の integral principal divisor となるものをとる（ E，及び a' の存在性は [W3] で知られている）。
すると：

(1) $s=G.C.D(r,a')>0$ とおき，更に projective variety Y を有限 cyclic cover $\rho: Y=\mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1}\mathcal{O}_X(l\cdot\frac{r}{s}E-l\cdot\frac{a'}{s}D)\right)\longrightarrow X$，によって定めると，$Y$は k 上の normal projective variety となる。

(2) 整数 α 及び β を，$\alpha a'+\beta r=s$ であって $0\leqq\alpha<r$ となるものとする。Y上の $\mathbb{Q}$-divisor $\tilde{D}$ を $\tilde{D}=\rho^*[\alpha\cdot E+\beta\cdot D]$ と定めると，$\tilde{D}$ は Y上の ample $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-divisor となる。

(3) さて，(1)，(2) により，$R(Y,\tilde{D})$ なる k 上の正規次数付環を得るが，$\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ に適当な graded ring over k の構造を定めて，k上の graded ring としての同型対応 $R(Y,\tilde{D})\cong\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ を与える事ができる。（これは，graded R-module としての同型でもある）。

(4) 更に，$I^*=\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}, I\right)$ とおくと，上記の対応により，graded $R(Y,\tilde{D})$-module として，$I^*=R(Y,\tilde{D})(a'/s)$ となる。

上記の torsion element I として canonical module $K_R=I$ となる時，torsion order を <u>index</u> と呼び，cyclic cover $\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ は R の <u>canonical cover</u> と呼ばれる [W2]。この場合について，

<u>系</u>　$R=R(X,D)$ の canonical module K_R が $\mathbb{Q}$-Cartier of index r であるとせよ。整数 a' であって，X上の divisor についての条件「 $r(K_X+D')-a'D$ が X上の integral principal divisor となる」を満すものとする。ただし，divisor D' は定理の記号 $D=\sum\frac{p_V}{q_V}V$ の状態で，$D'=\sum\frac{q_V-1}{q_V}V$ と定めるものであり，K_Xは X上の canonical divisorである（このような a' の存在は [W3] で知られている。)。すると，Rの canonical cover $\tilde{R}$ は，次のよ

うにして定まる graded ring $R(Y, \tilde{D})$ と同型である。

(1) normal projective variety Y は 有限 cyclic cover $\rho : Y = \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1} \mathcal{O}_X\left(\frac{lr}{s}(K+D') - \frac{la'}{s}D\right)\right) \longrightarrow X$ によって定める。ただし，s は $s = G.C.D(r, a') > 0$ とおく。

(2) Y 上の ample $\mathbb{Q}$-Cartier $\mathbb{Q}$-divisor $\tilde{D}$ は 整数 α 及び β を $\alpha a' + \beta r = s$ with $0 \leqq \alpha < r$ となるようにとって $\tilde{D} = \rho^*[\alpha(K+D') + \beta D]$ として定める。

(3) 更に，$K_{\tilde{R}} = \tilde{R}(a'/s)$ となる。 特に，$\tilde{R}$ が Cohen-Macaulay となる場合には a'/s が $\tilde{R}$ に対する「後藤-渡辺の $a(\tilde{R})$-invariant」[GW] である。

我々の定理の証明は，$\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ に自然な graded structure を導入すると，ほとんど自動的に議論がすすんでゆくところの，Demazure's construction の理論 ([D] [W3.4.5]) の系といえるものです。 また，Spec をとった段階での resolution 多様体に関する情報を積極的には用いないので，Wahl [W2] に見られる計算例と見くらべると，少し経済的な計算法と言えると思う。

実は， Wahl [W2] にある例をながめながら「2 次元 rational singularity の canonical cover にあらわれる特異性は，他の場合にくらべて不変量 (p_g や p_a 等) が 小さくなるはずだ」と 何らかの現象を期待したが，canonical divisor K_R が $\mathbb{Q}$-Cartier になる特異点全体の中での rational singularity の独自性を見出す事はまだできていない。 そして いくらでも (様々な) 不変量が大きくなる rational triple point の系列を 確認できた (2.6)。

§1. 主定理の証明． (1.1) [D], [W3.4.5] より記号などを含めて，多く事柄を復習することから，まず，はじめる。

$X = \mathrm{Proj}(R)$: normal irreducible projective scheme (of dim $\geqq 1$) / k.

$k(X)$: rational function field of X

$\mathrm{Irr}^1(X)$: X 上の codim 1 の irreducible closed subvariety の集合.

$\mathrm{Div}(X)$: X 上の Weil divisor のなす group.

$\mathrm{Div}(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元 $E = \sum_{V \in \mathrm{Irr}^1(X)} r_V V$ 及び $E' = \sum_{V \in \mathrm{Irr}^1(X)} r'_V \cdot V$ について

$$E \geqq E' \iff r_V \geqq r'_V \quad (\forall V \in \mathrm{Irr}^1(X))$$ と定め，

$[E] = \mathrm{Sup}\{ Z \in \mathrm{Div}(X) \mid Z \leqq E \}$ とする。 E について，

$\mathcal{O}_X(E) = \mathcal{O}_X([E]) \subseteq k(X)$ である。

$D = \sum_{V \in \mathrm{Irr}'(X)} \frac{p_V}{q_V} V$. with $p_V, q_V \in \mathbb{Z}$, $G.C.D(p_V, q_V) = 1$, $q_V \geq 1$ と Demazure 表示の D をあらわし，更に，正の整数 N を ND が X 上の ample Cartier divisor となるようにとる。

$Cl(R)$ の計算の為を含めて，次の diagram は，我々の考察の為に常に基本的な役割を果たす：

$$U(X, D) = \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)T^n\right) \xrightarrow{\pi} X$$
$$C(X, D) = \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD)T^n\right) \xrightarrow{\pi} X$$

(1.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & U(X,D) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[r, "\cong"'] \arrow[d, hook] & V - V(R_+) \arrow[d, hook] \\
X & C(X,D) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\Phi"'] & V = \mathrm{Spec}\, R \\
 & S(X,D) \arrow[ul] \arrow[u, hook] \arrow[r] & V(R_+) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}$$

ここで $S(X, D) = V\left(\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}_X(nD)T^n\right)$ in $C(X, D)$

また，Φ は R の grading より induce される R の filtration より定まる filtered blowing-up と一致する canonical map であり，$C(X, D)$ は normal scheme となる。

この時，$Cl(R)$ の元は，次のように表現された [W3]：まず

$Cl(R) \cong HDiv(R)/HP(R)$ ([S3] Proposition 1.7)

ただし，$HDiv(R)$ は R の grading に関する homogeneous divisor 全体，また $PDiv(R)$ は homogeneous principal divisor 全体のなす群である。そして

$Div(X, D) = \{E \in Div(X, \mathbb{Q}) \mid E = \sum_{V \in \mathrm{Irr}'(X)} r_V \cdot V$, where $r_V \cdot q_V \in \mathbb{Z}$ $(\forall V \in \mathrm{Irr}'(X))\}$ とおくと，

$$\begin{array}{ccccc}
Div(X, D) & \xrightarrow{\pi^*} & HDiv(U) & \longrightarrow & HDiv(R) \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
E = \sum_{V \in \mathrm{Irr}'(X)} r_V \cdot V & \longmapsto & \sum_{V \in \mathrm{Irr}'(X)} q_V \cdot r_V\, \pi^{-1}(V)_{red} & \mapsto & \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(E + kD))T^k
\end{array}$$

ただし．$HDiv(U)$ は U 上の（grading によりひきおこされる）$\mathbb{G}_m$-作用に対して stable な divisor 全体のなす群である。

なる対応によって，群としての同型が生ずる。この対応によって，$div(T) = \pi^*(D) = \sum_{V \in \mathrm{Irr}'(X)} p_V \cdot \pi^{-1}(V)_{red} \in HDiv(U)$ であり（[LD] (2.9)）$HP(R)$ すなわち $Q(R) = k(X)(T)$ の homogeneous element 全体は $P(X) \oplus \mathbb{Z}D$ と対応する，ただし $P(X)$ は X 上の principal divisor 全体のなす群。　かくして．

$$\mathrm{Cl}(R) \cong \mathrm{Div}(X,D)/(P(X)\oplus\mathbb{Z}\cdot D)$$ である。

以後、$\mathrm{Div}(X,D)$ の元 E, E' について、$E \sim E'$ とは、$E - E' \in P(X)$ の事であると定める。

(1.2) $I \in \mathrm{Cl}(R)$ であって torsion of order r なものを考える。(1.1) における対応により、$\mathrm{HDiv}(R)$ による表現を、$E \in \mathrm{Div}(X, D)$ によって

$$I = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(E + kD))\,T^k$$

とあらわすと、$\mathrm{Cl}(R)$ における m 倍 ($m \in \mathbb{Z}$) に対応する $\mathrm{HDiv}(R)$ の元は、

$$I^{[m]} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(mE + kD))\,T^k$$

である。そして、$I^{[r]} \in HP(R)$; すなわち、$\exists \varphi \in k(X)$, $\exists a' \in \mathbb{Z}$ s.t.

$$rE = \mathrm{div}(\varphi) + a'\cdot D \quad \text{in} \quad \mathrm{Div}(X, D)$$

となる。

(1.3) 以上の記号の下で、まず $\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ の graded structure を定める。(1.2) で述べたように $\mathcal{O}_X(rE - a'D) = \varphi^{-1}\mathcal{O}_X$ in $k(X)$ (constant sheaf として) が成立する。これより、環 $k(X)[T, T^{-1}]$ の中での関係として、$I^{[r]} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(rE + kD))\,T^k = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, \varphi^{-1}\mathcal{O}_X((a'+k)D))\,T^k = \bigoplus_{k'\in\mathbb{Z}} (\varphi^{-1}T^{-a'})\cdot H^0(X, \mathcal{O}_X(k'D))\,T^{k'}$
$= (\varphi^{-1}T^{-a'})\cdot R$ となる。そして、

$$\alpha : I^{[r]} \longrightarrow R \ ; \ \xi \longmapsto (\varphi T^{a'})\xi$$

なる graded R-module としての同型写像が定まる。α により $\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}$ を

$$\bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]} = \Big(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} I^{[m]}U^m\Big)\Big/(U^r - \varphi T^{a'})$$

の右辺で定める graded R-algebra と同一視する。ここで、U は indeterminate であり、右辺にて、$\deg T^k U^m = k + m\cdot\frac{a'}{r}$ とおくことによって $\frac{\mathrm{G.C.D}(a', r)}{r}\mathbb{Z}$-graded structure を定める。このように見た時、$\tilde{R} = \bigoplus_{m=0}^{r-1} I^{[m]}U^m$ とあらわす事にする。さて、$\tilde{R}$ の degree $\frac{ns}{r}$ (ただし、$s = \mathrm{G.C.D}(r, a') > 0$ と以下では書く)、$n \in \mathbb{Z}$, part は、

$$\tilde{R}_{\frac{ns}{r}} = \bigoplus_{l=0}^{s-1} H^0(X, \mathcal{O}_X(\delta_l^n E + \gamma_l^n D))\,T^{\gamma_l^n} U^{\delta_l^n} \ ; \quad \text{ただし}$$

$$\gamma_l^n = n\beta - l\cdot\frac{a'}{s} + a'\left[\frac{l\cdot\frac{r}{s} + n\cdot\alpha}{r}\right], \quad \delta_l^n = l\frac{r}{s} + n\alpha - r\left[\frac{l\cdot\frac{r}{s} + n\alpha}{r}\right]$$

となる。ここで，α，β は定理のように定めるものとする。そして

$$\delta_\ell^n E + \gamma_\ell^n D = \ell\frac{r}{s}E - \ell\frac{a'}{s}D + n(\alpha E + \beta D) - \left[\frac{\ell\frac{r}{s} + n\alpha}{r}\right](rE - a'D)$$

及び $\mathcal{O}_X(\delta_\ell^n E + \gamma_\ell^n D)\,T^{\gamma_\ell^n}\sqcup^{\delta_\ell^n}$

$$= \mathcal{O}_X\left(\ell\frac{r}{s}E - \ell\frac{a'}{s}D + n(\alpha E + \beta D)\right)T^{-\frac{\ell a'}{s}}\sqcup^{\frac{\ell r}{s}}(T^\beta\sqcup^\alpha)^n$$

となる事を注意しておく。

(1.4) 主張(1.4.1) 「$rN(\alpha E+\beta D)$ は X 上の ample Cartier divisor」

証明 $rN(\alpha E + \beta D) = Nr\alpha E + N\beta r D = N\alpha(rE - a'D) + N(\alpha a' + \beta r)D \sim sND$ ample Cartier divisor on X //(1.4.1)

(1.4.2) そして

$$Y = \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D\right)\right) \xrightarrow{\ \rho\ } X$$

$$\cong\ \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D\right)T^{-\frac{\ell a'}{s}}\sqcup^{\frac{\ell r}{s}}\right)$$

なる finite morphism でひきあげると，

$$\rho^*(\mathcal{O}_X(rN(\alpha E+\beta D))) = \bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D + rN(\alpha E+\beta D)\right)$$

は ample invertible $\mathcal{O}_Y$-module である。 定理の(ii)の証終

(1.5) (1.4)より $\widetilde{R}^{(rN)} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(nrN\widetilde{D}))(T^\beta\sqcup^\alpha)^{rNn}$
$\mathrm{Proj}(\widetilde{R}^{(rN)}) = Y$ であるが，$\widetilde{R}$ が normal なので，Y も normal となる。 定理の(i)の証終.

(1.6). Y は normal であり，かつ $\bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D + n(\alpha E+\beta D)\right)$ は $\mathcal{O}_X$-module として (S_2) であり，ゆえに $\mathcal{O}_Y$-module としても (S_2) である。 また ρ の branch locus の外で見ればわかるように，これは $\mathcal{O}_Y$-module として rank 1 である。ゆえに Y 上の Weil divisor $\widetilde{D}_{(n)}$ が存在して

$$\bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D + n(\alpha E+\beta D)\right)T^{-\frac{\ell a'}{s}}\sqcup^{\frac{\ell r}{s}} = \mathcal{O}_Y(\widetilde{D}_{(n)})$$

と $k(Y)$ の constant subsheaf としてあらわされる。この $\widetilde{D}_{(n)}$ を表示したい。

(1.6.1) 主張 $\bigoplus_{-\infty}^{+\infty}\left(\bigoplus_{\ell=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\ell r}{s}E - \frac{\ell a'}{s}D + n(\alpha E+\beta D)\right)T^{-\frac{\ell a'}{s}}\sqcup^{\frac{\ell r}{s}}\right)(T^\beta\sqcup^\alpha)^n$

なる $k(Y)[T^{\beta}\sqcup^{\alpha}, (T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{-1}]$ の subalgebra は Y 上の normal scheme を定義する。

証明 この Spec が normal である事だけを確めればよい。定義にもどれば

$$\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{lr}{s}E-\frac{la'}{s}D+n(\alpha E+\beta D)\right)T^{-\frac{la'}{s}}\sqcup^{\frac{lr}{s}}\right)(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{n}$$

$$=\left(\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{O}_X(mE+kD)T^{k}\sqcup^{m}\right)\Big/(\sqcup^{r}-\varphi T^{a'})$$

である。これは基本図式(1.1.1)に於る $\sqcup(X,D)$ 上における divisor $\pi^{-1}(E)$ による cyclic étale covering を定義するのだから、normal である。 主張(1.6.1)の証終。

$\tilde{D}_{(n)}$の決定　$n=rNm$, $m\in\mathbb{Z}$ の時は (1.4), (1.5) より $D_{(rNm)}=rNm\tilde{D}$ である。一般の n に対しては、$f\in k(Y)$ について

$$\begin{aligned}
f\in\mathcal{O}_Y(\tilde{D}_{(n)}) &\Leftrightarrow f(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{n}\in\mathcal{O}_Y(\tilde{D}_{(n)})(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{n}\\
&\underset{(1.6.1)}{\Leftrightarrow} f^{rN}(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{nrN}\in\mathcal{O}_Y(\tilde{D}_{(rNn)})(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{rNn}\\
&\Leftrightarrow f^{rN}\in\mathcal{O}_Y(\tilde{D}_{(rNn)})\\
&\Leftrightarrow \mathrm{div}(f)+n\tilde{D}\geqq 0 \quad \text{on } Y.
\end{aligned}$$

以上により $\tilde{D}_{(n)}=[n\tilde{D}]$ とすればよい事がわかった。よって、$\tilde{R}=R(Y,\tilde{D})$ となる事の証明が終わった。

注意(1.7)　上の議論によって $R(Y,\tilde{D})$ に対する基本図式(1.1.1)における $C(Y,\tilde{D})=\mathrm{Spec}_Y\left(\bigoplus_{m\geqq 0}\mathcal{O}_Y(m\tilde{D})T^{m}\right)\longrightarrow \mathrm{Spec}(R(Y,\tilde{D}))$ について、

$$\mathcal{O}_Y(m\tilde{D})\cong\bigoplus_{l=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{lr}{s}E-\frac{la'}{s}D+m(\alpha E+\beta D)\right)$$

である事も確められた。

(1.8)　$I^{*}=\bigoplus_{m=0}^{r-1}I^{[m+1]}$ である。$\tilde{R}$ の時と同様に grading を入れると

$$I^{*}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}H^{0}\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{lr}{s}E-\frac{la'}{s}D+n(\alpha E+\beta D)+E\right)\sqcup^{\frac{lr}{s}}T^{-\frac{la'}{s}}\right)(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{n}$$

となる。$E=\frac{a'}{s}(\alpha E+\beta D)+\beta\left(\frac{r}{s}E-\frac{a'}{s}D\right)$ in $\mathrm{Div}(X,D)$ より I^{*} は

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}H^{0}\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1}\mathcal{O}_X\left(\frac{\beta+l}{s}(rE-a'D)+\left(n+\frac{a'}{s}\right)(\alpha E+\beta D)\right)\sqcup^{\frac{lr}{s}}T^{-\frac{la'}{s}}\right)(T^{\beta}\sqcup^{\alpha})^{n}$$

となり

$$\mathcal{O}_X\left(\frac{\beta+l}{s}(rE-a'D)+(n+\frac{a'}{s})(\alpha E+\beta D)\right)$$
$$=\varphi^{-\beta}\mathcal{O}_X\left(\frac{l}{s}(rE-a'D)+(n+\frac{a'}{s})(\alpha E+\beta D)\right)$$

であるから $I^* = \varphi^{-\beta}(T^\beta L^\alpha)^{-\frac{a'}{s}}\tilde{R}$ となる。ゆえに
$I^* \cong \tilde{R}(a'/s)$ である。　　　　主定理の証明終

Remark (1.9) 系の中では，canonical cover について $\tilde{R}(a'/s) \cong K_{\tilde{R}}$ である事を主張しているが，これより

$$s\{K_Y+(\tilde{D})'-\rho^*(K_X+D')\}\sim 0 \quad \text{in } \mathrm{Div}(Y)$$

という，ある種の "log-ramification formula" を得る。ただし，$(\tilde{D})'$ とは $\tilde{D}$ に対して，D から D' の定義と同様に定める adjoint 因子である。

証明　[W3]より $K_Y+(\tilde{D})'-(a'/s)\cdot\tilde{D}\sim 0$ in $\mathrm{Div}(Y)$
である。一方 $\mathrm{Div}(X,\mathbb{Q})$ の元としての等式

$$\frac{a'}{s}\{\alpha(K+D')+\beta D\}-(K+D')=\frac{\beta}{s}\{a'D-r(K+D')\}$$

が成立する。$\rho^*\left(\frac{\{a'D-r(K+D')\}}{s}\right)$ は $\mathrm{Div}(Y)\otimes\mathbb{Q}$ の元であって s 倍すれば principal になるものである。　　　　証明終

§2. 2次元 rational triple point の canonical covering について

(2.1) 主定理の応用として，2次元 rational triple point について，canonical covering の計算例を与える事にする。rational triple point は canonical covering を計算する対象としては，最もやさしい，そして non-trivial な系列である。

我々が問題とする事は：

① R が quotient singularity になる為の条件 (log-terminal になる為の条件と述べても，同じ問題である，石井 [I] 参)。この間については，解答は，既に良く知られている。このノートでは，我々の言葉で述べればどのような事になるかという事を注意するのにとどめる。

② canonical cover $\tilde{R}$ を $\tilde{R}=R(Y,\tilde{D})$ とあらわす時，genus of Y が大きくなる例をみつける事。

③ canonical cover 上の特異点の geometric genus の計算。

④ canonical cover 上の特異点の embedding dimension および　重

複度の計算

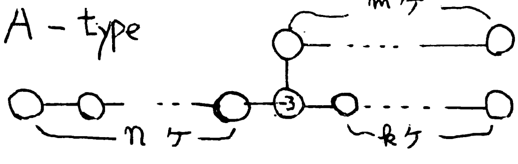
我々は ②③④については，いくらでも大きくなる例が存在する事を示す。また，③について canonical cover 上の特異点の geometric genus が1になる rational triple point の例をできるだけ多くあげる。

以下では，2次元正規特異点論では慣用となっている語句を多く使うが，[HYW] [W1] などを参照していただきたい。

(2-2) rational triple point の Pinkham-Demazure表示. 我々の計算は，graded ring を Demazure表示したところからはじまる。幸いなことに，2次元 normal graded ring の場合，H. Pinkham [P] が特異点 Spec(R) の minimal good resolution における例外集合の様子から標準的な方法で求める表示が得られる事を示している（「Pinkham の結果を高次元化したのが Demazure であった」というのが歴史的には正しい言い方であるが…）。

少し，rational 特異点の復習を行なう：一般に，(V, p) を2次元正規 algebraic variety の点 p における germ とし，$\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ を $\psi^{-1}(p) = A$ となるような特異点解消とする。整数 $\dim (R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}})_p$ を特異点 (V, p) の geometric genus と呼び $p_g(V, p)$ とあらわす。これは特異点解消のえらび方によらない。(V, p) が rational singularity であるとは，$p_g(V, p) = 0$ となる事とする [A]。M. Artin は rational singularity について，例外集合を $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ と既約成分に分解した時，intersection 行列 $(A_i \cdot A_j)$ によって Hilbert-Samuel 関数を完全に記述した；特に (V, p) は Cohen-Macaulay of maximal embedding dimension となる。また，rational double point と rational triple point は $(A_i \cdot A_j)$ で特異点の解析的構造が定まってしまう（taut singularity と呼ばれる）事がわかっている（[B] [Tj-2] [L]）。Artin の分類によれば，rational triple point の resolution における例外集合の dual graph は，常に "star-shaped" graph となり，対応する graded 特異点がその唯一の解析構造を実現するものである（すなわち，rational triple point は常に k^*-action を持つ）。そして，次のリストが rational triple point の例外集合の dual graph と対応する特異点の Pinkham-Demazure 表示である。

A - type

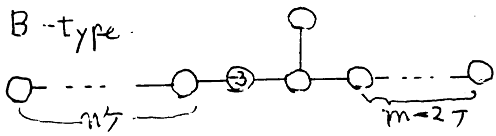


$m, n, k \geq 0$ $A_{m,n,k}$ と記す。

$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{m+1}P_1 + \frac{1}{n+1}P_2 + \frac{1}{k+1}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。 ⌋A

B-type

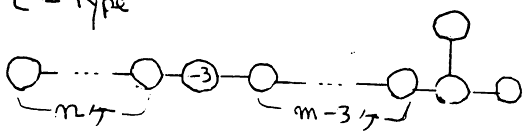


$m \geqq 3,\ n \geqq 0$. $B_{n,m}$ と記す

$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{m-1}P_2 - \frac{m+1}{2n+3}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。$\lrcorner_B$

C-type

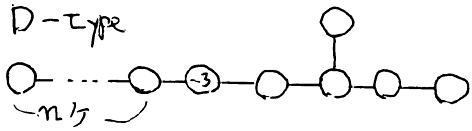


$n \geqq 0,\ m \geqq 4$, $C_{m,n}$ と記す.

$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{(m-2)n+2m-5}{(m-1)n+2m-3}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点. $\lrcorner_C$

D-type

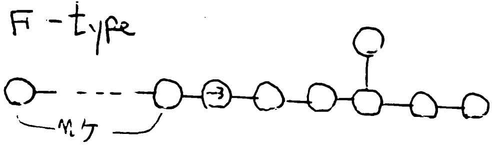


$n \geqq 0$, D_n と記す

$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{2n+3}{3n+5}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。$\lrcorner_D$

F-type

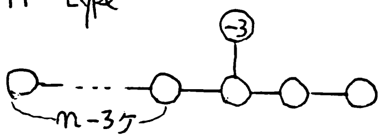


$n \geqq 0$. F_n と記す

$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{3n+5}{4n+7}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。$\lrcorner_F$

H-type

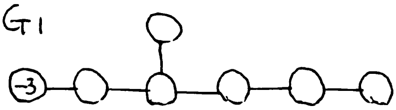


$n \geqq 4$. H_n と記す.

$R(\mathbb{P}^1, \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{n-3}{n-2}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。$\lrcorner_H$

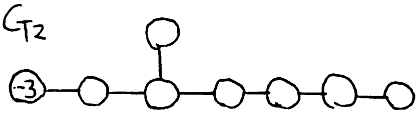
G_1



$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 - \frac{3}{5}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。

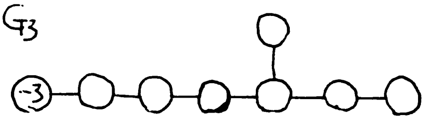
G_2



$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{5}P_2 - \frac{3}{5}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。

G_3



$R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - \frac{7}{9}P_3)$

P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。

そして、G.N. Tjurina はそれぞれ具体的な定義 ideal を与えている [Tj 1]。

(2.3) (このパラグラフでは、基礎体 k の標数が zero であると仮定する。)
問① について、J. Wahl (Proposition 4.6 [W 2]) は、2次元 rational singularity R に対して、R が quotient singularity；$R = k[x, y]^G$ for some $G \subseteq GL(2, k)$ with $\#(G) < +\infty$，である為には、R の canonical cover が rational singularity (特に rational double point になる) になる事が必要充分条件である事を示している。

$R = R(\mathbb{P}^1, D)$ と書かれている場合に限定すると、

R の canonical cover $\tilde{R}$ が rational $\Longleftrightarrow$ $a(\tilde{R}) < 0$

である。ただし $a(\tilde{R})$ は graded ring $\tilde{R}$ に対する Goto-Watanabe の a-invariant [GW] である。我々の系により $a(\tilde{R}) = a'/s$ であるから、この条件は $a' < 0$ と同値である。

すなわち

(2.3.1) $\quad 0 > \deg(K_{\mathbb{P}^1} + D') = -2 + \sum \dfrac{q_v - 1}{q_v}$

となる事と同値である。

すでに、E. Brieskorn [B] によって、2次元 quotient singularity は完全に分類されている。そして、条件 (2.3.1) も、別の context によって示されている (渡辺公夫 [W 6]，都丸 [T] ，この class が 2次元 log-terminal singularity としてとらえられるという、川又氏らの結果も含めて石井 [I] も参照)。

ここで，ひとつ例を計算してみよう。

Example (2.4). $A_{1,2,4}$, $R = R(\mathbb{P}^1, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{5}P_3) = k[T, xT^2, x^{-1}T^3, (x+1)^{-1}T^5]$ (ここで，x, T はそれぞれ不定元である [Tj 1] 参)。P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。

$D = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{5}P_3$, $D' = \frac{1}{2}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{4}{5}P_3$

$\deg D = \dfrac{31}{30}$ $\quad \deg(K_{\mathbb{P}^1} + D') = \dfrac{-1}{30}$ である。$31(K_{\mathbb{P}^1} + D') + D$ を計算してみよう：$K_{\mathbb{P}^1} = -2P_1$ とおいて

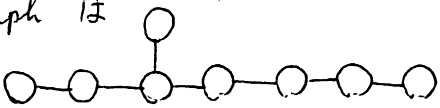
$$
\begin{aligned}
31(K_{\mathbb{P}^1} + D') + D &= -62P_1 + \tfrac{31}{2}P_1 + \tfrac{62}{3}P_2 + \tfrac{124}{5}P_3 + \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{3}P_2 + \tfrac{1}{5}P_3 \\
&= -62P_1 + 16P_1 + 21P_2 + 25P_3
\end{aligned}
$$

これは $\mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$ で linear equivalent to zero. (~ 0 と書いてる)
ゆえに、$r = 31$. $a' = -1$ $\quad s = \gcd(r, a') = 1$ であり，$\alpha = 30$

$\beta = 1$ とすると $\alpha a' + \beta r = s$ が成立する。canonical cover $\tilde{R}$ を $\tilde{R} = R(Y, \tilde{D})$ と書くとき、$Y = X$ ($\because s = 1$)．として

$$\tilde{D} = 30\left(-2P_1 + \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{2}{3}P_2 + \tfrac{4}{5}P_3\right) + \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{3}P_2 + \tfrac{1}{5}P_3$$
$$\sim -\tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{3}P_2 + \tfrac{1}{5}P_3$$
$$\sim 2P_1 - \tfrac{1}{2}P_1 - \tfrac{2}{3}P_2 - \tfrac{4}{5}P_3.$$

ゆえに、Spec $\tilde{R}$ の minimal good resolution の例外集合の dual graph は



となり（[P] 及び [HYW] 参）、たしかに $\tilde{R}$ は rational double (of E_8-type) である。

次に、問②〜④ について、不変量がいくらでも大きくなる例を与えよう。その準備として、canonical cover 上の特異点の geometric genus の計算公式を与えておく。

定理(2.5)　normal 2-dimensional graded ring $R = R(X, D)$ の canonical module K_R が $\mathbb{Q}$-Cartier of index r であり、R の canonical cover $\tilde{R}$ が、主定理の系の如く $\tilde{R} = R(Y, \tilde{D})$ として与えられているものと仮定する。この時、Spec $\tilde{R}$ の特異点の geometric genus $p_g(\tilde{R})$ は次の式で与えられる。

$$p_g(\tilde{R}) \underset{(i)}{=} \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \dim H^1\left(X, \mathcal{O}_X\left(\left(\tfrac{lr}{s} + k\alpha\right)(K + D') + \left(-\tfrac{la'}{s} + k\beta\right)D\right)\right)$$
$$\text{(ii)} = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{a'/s} \dim H^1\left(X, \mathcal{O}_X\left(\left(\tfrac{lr}{s} + k\alpha\right)(K + D') + \left(-\tfrac{la'}{s} + k\beta\right)D\right)\right)$$
$$\text{(iii)} = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{a'/s} \dim H^0\left(X, \mathcal{O}_X\left(\left(\tfrac{lr}{s} + k\alpha\right)(K + D') + \left(-\tfrac{la'}{s} + k\beta\right)D\right)\right)$$
$$\text{(iv)} = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k \geqq -[l\frac{a'}{r}]} \dim H^1\left(X, \mathcal{O}_X\left(l(K + D') + kD\right)\right)$$

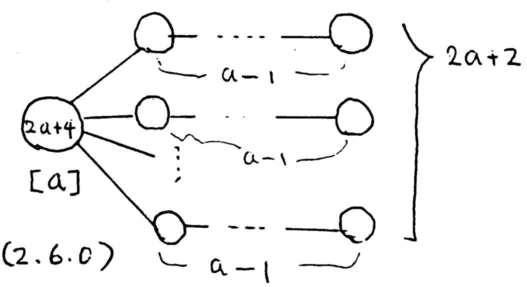
証明　[P], [W4], [W6] により $p_g(\tilde{R}) = \sum_{k \geqq 0} \dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y(k\tilde{D}))$ $= \sum_{k=0}^{a(\tilde{R})} \dim H^1(Y, \mathcal{O}_Y(k\tilde{D})) = \sum_{k=0}^{a(\tilde{R})} \dim H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k\tilde{D}))$ となる。我々の公式群は、注意(1.7) を用いて、X上の計算に書きなおし、まとめなおし

たものである。 //

Example (2.6). $A_{2a-1,\,2a,\,2a(2a+1)-1}$, $a \geq 1$ 自然数,
$R = k[T, xT^{2a}, x^{-1}T^{2a+1}, (x+1)^{-1}T^{2a(2a+1)}]$　x, T は不定元
$= R(\mathbb{P}^1, D)$, $D = \frac{1}{2a}P_1 + \frac{1}{2a+1}P_2 + \frac{1}{2a(2a+1)}P_3$. P_1, P_2, P_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の異なる3点。
の canonical cover $\tilde{R}$ を $\tilde{R} = R(Y, \tilde{D})$ とあらわすと,

index of $R = 2(2a+1)$, $a(\tilde{R}) = a-1$,
genus of $Y = a$, $p_g(\tilde{R}) = \frac{1}{2}a(a+1)$.
emb dim $(\tilde{R}_{(\tilde{R})_+}) = \mathrm{mult}_{(\tilde{R})_+}\tilde{R} = 2a+4$ である。

そして, $\mathrm{Spec}(\tilde{R})$ の minimal good resolution における例外集合の dual graph は [W1] の記法に従って



$$\tilde{D} = Q - \sum_{i=1}^{2a+2} \frac{a-1}{a} P_i^*$$

$P_1^*, \cdots, P_{2a+2}^*$ は Y 上の異なる $2a+2$ ケの点であり, Q は Y 上の integral divisor であって $\deg Q = 2a+4$.

(2.6.0)

とあらわされる。

証明　$K_{\mathbb{P}^1} = -2P_1$ とあらわす。

$$K_{\mathbb{P}^1} + D' = -2P_1 + \frac{2a-1}{2a}P_1 + \frac{2a}{2a+1}P_2 + \frac{2a(2a+1)-1}{2a(2a+1)}P_3$$
$$\sim P_1 - \frac{1}{2a}P_1 - \frac{1}{2a+1}P_2 - \frac{1}{2a(2a+1)}P_3$$

すなわち $K_{\mathbb{P}^1} + D' \sim P_1 - D$ である事に, まず注意しておく。

$$\deg(K+D') = \frac{2a(2a+1)-2a-1-2a-1}{2a(2a+1)} = \frac{(2a-2)(2a+1)}{2a(2a+1)} = \frac{a-1}{a}$$

そして $\deg D = 1 - \deg(K_{\mathbb{P}^1}+D') = \frac{1}{a}$ である。

$$K+D' - (a-1)D \sim P_1 - aD \sim \frac{1}{2}P_1 - \frac{a}{2a+1}P_2 - \frac{1}{2(2a+1)}P_3$$

である。ゆえに $r\{(K+D') - (a-1)D\} \sim 0$ となる最小の自然数 r は, $r = 2(2a+1)$. これが index である。そして, $a' = 2(2a+1)\cdot(a-1)$
$s = \gcd(r, a') = 2(2a+1)$. $a(\tilde{R}) = a'/s = a-1$ である。

$$Y = \mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^1}\left(\bigoplus_{l=0}^{s-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\left(\frac{l}{2}P_1 - \frac{la}{2a+1}P_2 - \frac{l}{2(2a+1)}P_3\right)\right) \xrightarrow[\rho]{} X = \mathbb{P}^1$$

は $\deg \rho = s = 2(2a+1)$ である cyclic Galois covering であり，P_1, P_2, P_3 の逆像は それぞれ，$2a+1$ ケ，2 ケ，1 ケ の異なる点よりなる。それを
$\rho^{-1}(P_1) = \{P_{1,i}^* \,;\, i=1,\cdots,2a+1\}$ $\rho^{-1}(P_2) = \{P_{2,1}^*, P_{2,2}^*\}$
及び $\rho^{-1}(P_3) = \{P_3^*\}$ とあらわす事にする。
genus of Y; $g(Y)$, は Hurwitz's formula により
$$2g(Y)-2 = 2(2a+1)(-2) + (2a+1) + 2\cdot(2a) + 2\cdot(2a+1) - 1$$
となり，これより $g(Y) = a$ である。
$\alpha a' + \beta r = s$ となる整数 α, β として，$\alpha=0, \beta=1$ ととる。
$$\tilde{D} = \rho^*(D) = \sum_{i=1}^{2a+1} \frac{1}{a} P_{1,i}^* + P_{2,1}^* + P_{2,2}^* + \frac{1}{a} P_3^*$$
$$\sim Q - \sum_{i=1}^{2a+1} \frac{a-1}{a} P_{1,i}^* - \frac{a-1}{a} P_3^*$$
ただし $Q = \sum_{i=1}^{2a+1} P_{1,i}^* + P_{2,1}^* + P_{2,2}^* + P_3^*$，$\deg Q = 2a+4$

以上で，$p_g(\hat{R})$，embdim. 及び multiplicity 以外の主張はすべて証明された。
<u>$a=1$ の場合</u>，例外集合は non-singular elliptic curve ひとつになる。この時，$\hat{R}$ は <u>simple elliptic singularity</u> と呼ばれ，残る3つの不変量の値は，斎藤恭司氏による [S1]。ゆえに <u>以後 $a \geqq 2$ の場合にのみ論ずる事にする</u>。
$$\tilde{R} = \bigoplus_{k\geq 0} \tilde{R}_k$$
$$\tilde{R}_k = \bigoplus_{\ell=0}^{s-1} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell\{(K+D') - (a-1)D\} + kD))U^\ell T^{k-\ell(a-1)}$$
となるのであった。 divisor $E_{\ell,k}$ を
$$E_{\ell,k} = [\ell\{(K+D') - (a-1)D\} + kD]$$
$$= \left[\frac{\ell a + k}{2a} P_1 + \frac{k - \ell a}{2a+1} P_2 + \frac{k-\ell a}{2a(2a+1)} P_3\right]$$
とおき，$\tilde{R}$ が ℓ について $\mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$-graded，k について $\mathbb{Z}$-graded な bi-graded algebra となる事に着目して
(ℓ, k)-次 part $\tilde{R}_{\ell,k} = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{\ell,k}))U^\ell \cdot T^{k-\ell(a-1)}$

を調べる。
(2.6.1) まず，$p_g(\hat{R})$ の計算をめざして，$k \leqq a-1 = a(\hat{R})$ において考える ((2.5) 参)。

$$E_{2m,k} = mP_1 + \left[\frac{k}{2a}\right]P_1 - mP_2 + \left[\frac{m+k}{2a+1}\right]P_2 + \left[\frac{-2ma+k}{2a(2a+1)}\right]P_3.$$
$$E_{2m+1,k} = mP_1 + \left[\frac{a+k}{2a}\right]P_1 - mP_2 + \left[\frac{k+m-a}{2a+1}\right]P_2 + \left[\frac{k-(2m+1)a}{2a(2a+1)}\right]P_3$$

などに注意しながら計算すると，

$l=2m$，$0 \leqq m \leqq 2a$ について，

$$E_{2m,0} = \begin{cases} 0 & m=0 \\ mP_1 - mP_2 - P_3 & 0<m \leqq 2a \end{cases}$$

$$E_{2m,k} = \begin{cases} 0 & m=0 \\ mP_1 - mP_2 - P_3 & 0<m \leqq 2a-k \\ mP_1 - (m-1)P_2 - P_3 & 2a-k+1 \leqq m \leqq 2a \end{cases}$$

$l=2m+1$，$0 \leqq m \leqq 2a$ について

$$E_{2m+1,k} = \begin{cases} mP_1 - (m+1)P_2 - P_3 & 0 \leqq m \leqq a-k-1 \\ mP_1 - m\cdot P_2 - P_3 & a-k \leqq m \leqq 2a \end{cases}$$

となる。ゆえに (2.5)(iii) を用いて

$$p_g(\tilde{R}) = \sum_{k=0}^{a-1} \dim \tilde{R}_k = \sum_{k=0}^{a-1}(k+1) = \frac{1}{2}a(a+1) \qquad //$$

(2.6.2) $\mathrm{emb\,dim}(\tilde{R}_{\tilde{R}_+}) \geqq 2a+4$ を示す。

$k=a$ において

$$E_{2m,a} = \begin{cases} 0 & m=0 \\ mP_1 - mP_2 - P_3 & 1 \leqq m \leqq a \\ mP_1 - (m-1)P_2 - P_3 & a+1 \leqq m \leqq 2a. \end{cases}$$

$$E_{2m+1,a} = \begin{cases} P_1 & m=0 \\ (m+1)P_1 - mP_2 - P_3 & 1 \leqq m \leqq 2a \end{cases}$$

さて，$1 \leqq k \leqq a-1$ において，$\tilde{R}_{2m+1,k}=0$，$0 \leqq m \leqq 2a$ であったので $k=a$ における $\bigoplus_{m=0}^{2a} \tilde{R}_{2m+1,a}$ の元は $\left(\bigoplus_{k \geqq 1} \tilde{R}_k\right)^2$ には属さない（S even に注意）。

$$\mathrm{emb\,dim}(\tilde{R}_{(\tilde{R})_+}) \geqq \dim \tilde{R}_1 + \sum_{m=0}^{2a} \dim \tilde{R}_{2m+1,a}$$
$$= 2 + 2 + \sum_{m=1}^{2a} 1 = 2a+4 \qquad //$$

(2.6.3) 以後，multiplicity of $\tilde{R}$ at $(\tilde{R})_+$ が $2a+4$ となる事を次の方針で示し，Sally の不等式 [S2] を用いて求める結果に導く。

方針　$\Phi : C(Y, \check{D}) = \mathrm{Spec}_Y(\bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{O}_Y(k\check{D})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\tilde{R})$ を基本図式 (1.1.1) にて与えた canonical morphism とする。

Step 1　$(\tilde{R})_+ \mathcal{O}_{C(Y,\check{D})}$ が reflexive $\mathcal{O}_{C(Y,\check{D})}$ ideal sheaf $\bigoplus_{k\geq 1} \mathcal{O}_Y(k\cdot\check{D})$ と一致する事を示す。」

次に　$\theta : \tilde{C} \longrightarrow C = C(Y, \check{D})$ を C 上の特異点の minimal resolution によって canonical にひきおこされる morphism であるとする。θ と Φ の合成　$\tilde{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\tilde{R})$ は、特異点 $\tilde{R}$ の minimal good resolution を与える写像である。この例外集合 $(\Phi\circ\theta)^{-1}(V((\tilde{R})_+))$ を A と書くと、$A = \bigcup^{m} A_j$ と既約成分に分解し、intersection dual graph を書くと、まさにはじめに述べた (2.6.0) になる。さて、我々がここで示すのは、

Step 2　$(\tilde{R})_+ \cdot \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ が locally principle $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$-ideal となり、$(\tilde{R})_+\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-|A|)$ となる。」

特に、maximal ideal cycle = Artin's fundamental cycle = $|A|$ となり、Theorem 2.7 [W 1]　により、multiplicity of $\tilde{R}$ at $(\tilde{R})_+ = -|A|\cdot|A|$ である。この右辺は (2.6.0) より容易に $2a+4$ となる事がわかる。

実は、今回のノートで示した内容を本質的に使うのは Step 1 に関する部分である。

(2.6.4)　Step 1 の証明　$\alpha \in \tilde{R}_{0,1}$　$\beta \in \tilde{R}_{4a,1}$、$\gamma, \delta \in \tilde{R}_{1,a}$ を

$$\begin{cases} \alpha = \tilde{\alpha}\cdot U^0 T^1, \quad \tilde{\alpha} \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}), \quad \tilde{\alpha}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \\ \beta = \tilde{\beta}\cdot U^{4a} T^{1-4a(a-1)}, \quad \tilde{\beta} \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2aP_1 - (2a-1)P_2 - P_3)) \\ \qquad \text{s.t.}\ \tilde{\beta}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2aP_1 - (2a-1)P_2 - P_3) \\ \gamma = \tilde{\gamma}\cdot U^1 T^{a-(a-1)}, \quad \tilde{\gamma} \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P_1)), \ \text{s.t}\ \tilde{\gamma}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \\ \delta = \tilde{\delta}\cdot U^1 T^{a-(a-1)}, \quad \tilde{\delta} \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P_1)) \ \text{s.t}\ \tilde{\delta}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P_1 - P_2) \end{cases}$$

となるものとしてとろう。我々は、$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\mathcal{O}_C = \bigoplus_{k\geq 1} \mathcal{O}_Y(k\cdot\check{D})$ である事を示す。

注意 (1.7) により

$$\mathcal{O}_{C(Y,\check{D})} = \bigoplus_{k\geq 0} \bigoplus_{l=0}^{s-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{l,k}) U^l T^{k-l(a-1)}$$

$$\bigoplus_{k\geq 1} \mathcal{O}_Y(k\check{D}) = \bigoplus_{k\geq 1} \bigoplus_{l=0}^{s-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{l,k}) U^l T^{k-l(a-1)}$$

$k \geqq a$ である時，$E_{\ell-1,k-a} + E_{1,a} = E_{\ell,k}$，$\ell \in \mathbb{Z}$ であり，$(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{\ell-1,k-a}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{\ell,k})$，$\ell \in \mathbb{Z}$ となる。ゆえに

$$(\gamma, \delta)\mathcal{O}_{C(Y,\tilde{D})} = \bigoplus_{k \geqq a} \mathcal{O}_Y(k\tilde{D})\cdot T^k$$

となる。さて，$1 \leqq k \leqq a-1$ の場合について，k を固定して考える。

<u>$E_{2m,k}$ について</u>，$2a-k+2 \leqq m \leqq 2a$ 又は $0 \leqq m \leqq 2a-k$ ならば，$E_{2m,k} = E_{2m,k-1}$ である (2,6,1)。この時 $\tilde{\alpha}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m,k-1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m,k})$ である。$m = 2a-k+1$ のとき，$E_{2m-4a,k-1} = (m-2a)P_1 - (m-2a)P_2$ である。$E_{2m-4a,k-1} + E_{4a,1} = E_{2m,k}$ となり，$\tilde{\beta}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m-4a,k-1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m,k})$ となる。

<u>$E_{2m+1,k}$ について</u>，$a-k+1 \leqq m \leqq 2a$ 又は $0 \leqq m \leqq a-k-1$ ならば，$E_{2m+1,k} = E_{2m+1,k-1}$ である (2.6.1)。この時，$\tilde{\alpha}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m+1,k-1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m+1,k})$ となる。$m = a-k$ の時，$E_{2m-4a+1,k-1} = (m-2a)P_1 - (m-2a+1)P_2$，である。ゆえに，$E_{2m-4a+1,k-1} + E_{4a,1} = E_{2m+1,k}$ となり，$\tilde{\beta}\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m-4a+1,k-1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(E_{2m+1,k})$ となる。

以上により $(\alpha,\beta)\bigoplus_{k=0}^{a-2}\mathcal{O}_Y(k\tilde{D})T^k = \bigoplus_{k=1}^{a-1}\mathcal{O}_Y(k\tilde{D})T^k$ が示せた。

あわせて，$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\mathcal{O}_C = \bigoplus_{k \geqq 1}\mathcal{O}_Y(k\tilde{D})T^k$ がわかった。

Step 1 //

(2.6.5) <u>Step2 の証明と (2.6) の証明の残りの部分について．</u>
かくして $(\tilde{R})_+\mathcal{O}_C$ は divisorial ideal sheaf となった。$C(Y,\tilde{D})$ の特異点は rational singularity であるので，$\tilde{C} \longrightarrow C$ によるその全逆像は locally principal である [G]。実際に，Giraud は具体的な逆像の計算法を与えていた。我々は [TW 1] の Chapter 2，(又は [TW 2]) にて，Giraud の inverse image について論じた。特に，今，[TW2] の記号で述べれば $(\tilde{R})_+\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(L_{-1})$ である。$L_{-1} = -|A|$ である事は容易にわかる。

さて，$\tilde{R}$ は $(\tilde{R})_+$ において，hypersurface でない Gorenstein 特異点である。ゆえに J. Sally [S2] により，$\mathrm{mult}_{(\tilde{R})_+}\tilde{R} \geqq \mathrm{emb\,dim}_{(\tilde{R})_+}\tilde{R}$ である。(2.6.2) 以後の計算をまとめると，両者が一致して，$2a+4$ である事がわかる。

Q.E.D.

(2,ヌ) さて，再び canonical cover $\tilde{R}$ 上の特異点の geometric genus を問題としてみよう。以下に挙げるリストは，現在までに我々が <u>$p_g(\tilde{R})=1$</u> となる事を確認する事ができた rational triple point のすべてである。果して，これらで $p_g(\tilde{R})=1$ となるものすべてを尽しているかどうかは，まだ不明であるが，我々は少なくともそれに近いものである事を確信している。なお，個々の計算に，<u>木田祐司氏の UBASIC 86</u> の助けを借りて，PC9801 (NEC) で算出したものを含むことを記しておく。

<u>A-type</u>，$A_{a-1,b-1,c-1}$ $(a \leqq b \leqq c)$ とあらわす時，

$(a, b, c) =$ $(2,3,n)$； $6 \leqq n \leqq 12$, $n=14, 15, 16, 18, 21, 24, 30, 36$

$(2,4,n)$； $4 \leqq n \leqq 8$, $n=10, 12, 16$

$(2,5,n)$； $n=5, 6, 8, 10, 15, 20, 30$.

$(2,6,n)$； $n=6, 8, 9, 12, 18$

$(2,7,7)$, $(2,7,14)$, $(2,7,28)$, $(2,8,8)$ $(2,8,12)$ $(2,8,16)$

$(2,9,10)$, $(2,10,10)$.

$(3,3,n)$； $n=3, 4, 5, 6, 9$

$(3,4,n)$； $n=4, 6, 8, 12, 24$.

$(3,5,5)$, $(3,5,12)$, $(3,6,6)$, $(3,6,12)$, $(3,7,21)$ $(3,8,12)$

$(3,9,9)$, $(4,4,4)$, $(4,4,8)$, $(4,5,10)$, $(4,6,6)$ $(5,5,5)$.

<u>B-type</u> $B_{2,4}$, $B_{3,4}$, $B_{4,4}$, $B_{14,4}$, $B_{1,5}$, $B_{2,5}$, $B_{5,5}$,
$B_{1,6}$, $B_{6,6}$ $B_{0,7}$ $B_{1,7}$, $B_{3,7}$, $B_{0,8}$, $B_{2,8}$, $B_{8,8}$.
$B_{0,9}$, $B_{1,9}$ $B_{4,9}$ $B_{0,10}$, $B_{0,11}$, $B_{1,11}$, $B_{2,11}$
$B_{0,12}$, $B_{0,13}$, $B_{0,15}$, $B_{1,15}$, $B_{0,17}$

D-type D_n； $n=1, 2, 3, 7$.

F-type F_n； $n=0, 1, 2$.

H-type H_n； $n=3, 4, 5, 8$.

G_1, G_2, G_3.

以上 106 ケ

参考文献

[A] M. Artin., On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. Math., 88, 129 − 136 (1966)

[B] E. Brieskorn., Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Invent. Math. 4, (1968) 336 − 358.

[D] M. Demazure., Anneaux gradues normaux. preprint. Ecol. Polytechnique (1979)

[G] J. Giraud., Improvement of Grauert−Riemenschneider's theorem for a normal surface. Ann. Inst. Fourier 32 (1982) 13−23.

[HYW] T. Higuchi., E. Yoshinaga., Kimio Watanabe., 多変数複素解析入門 .. 数学ライブラリー51. 森北出版 (1980).

[I] S. Ishii., Isolated $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularities of dimension three. Adv. Stud. in Pure Math. 8, (1986) "Complex Analytic Singularities" 165 − 198. Kinokuniya - North-Holland.

[L] H.B. Laufer., Taut two-dimensional singularities., Math. Ann. 205 (1973) 131 − 164.

[P] H. Pinkham., Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 227 (1977) 183−193

[S1] K. Saito., Einfach elliptiche Singularitäten. Invent. Math. 23. 289 − 325 (1974).

[S2] J.D. Sally., Tangent cones at Gorenstein singularities, Composito. Math., 40 (1980)., 167 − 175.

[Tj-1] G.N. Tjurina., Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. Funct. Analy. and its appl. vol 2. No.4. (1968) 324 - 333.

[Tj-2] ――――――., The rigidity of rational contractible curves on a surface. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Matem. 32. 943 − 970 (1968)

[T-W1] M. Tomari., K-i. Watanabe., Filtered Rings, Filtered Blowing-Ups and Normal Two-Dimensional Singularities with "Star-Shaped" Resolution. preprint.

[T-W2] ――――, ――――, "Star-Shaped" resolutionを持つ2次元正規特異点について. RIMS 講究録 595, 112 − 142 (1986).

[T] T. Tomaru., Pluri-genera δ_m of normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Scien. reports of Yokohama National Univ. Sect. 1. No. 28 (November, 1981) 35 − 43.

[W1] Ph. Wagreich., Elliptic singularities of surfaces. Amer. J. Math. 92. (1970), 419-454.
[W2] J. M. Wahl, Equations defining rational singularities. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e. Ser. t.10 (1977). 231-264.
[W3] K.-i. Watanabe., Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings Nagoya Math. J. 83 (1981) 203-211.
[W4] ———., Rational singularities with k^*-action. In "Commutative Algebra" Proc. Trento Conf. edited by S. Greco and G. Valla. Lecture Notes in Pure and applied Math. No. 84. (1983) 339-351.
[W5] ———., Normal graded rings について (Divisor class group, regularity). RIMS 講究録 621 (1987). 136-149
[W6] Kimio Watanabe., On pluri-genera of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250 (1980) 65-94
[S3] P. Samuel., Lectures on Unique Factorization Domains Tata Inst. of Fund. Res. (1964) Bombay.
[GW] S. Goto., K.-i. Watanabe., On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan Vol. 30. No. 2 (1978) 179-213.

Integral Arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}^3$

尼崎睦実（京大数研）

本稿の内容は看板どおりのものではありません．表題の曲線については［A4］に詳しく書いてあるのでそちらを見て下さい．ここでは，graded Buchsbaum ring を定めるイデアルの standard basis（Gröbner basis ということもある）およびその syzygy についての概観を与えます．

Notation and Convention

1. 基礎体 k の標数はめんどうなことを気にしなくてよいように 0 としておく．
2. 変数のベクトル $x=(x_1,\dots,x_r)$ に対して $x\langle i\rangle=(x_{i+1},\dots,x_r)$ $(0\leqq i\leqq r)$ とおき，$k[x\langle i\rangle]$ を $x\langle i\rangle$ の成分で生成される多項式環とする．特に $k[x\langle r\rangle]=k$．
3. $\mathrm{Mat}(x\langle i\rangle)=\{Q\mid Q$ は $k[x\langle i\rangle]$ の元を成分とする行列$\}$．
4. $\bar{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_\ell)$ が整数のベクトル，μ が整数，E が次数付加群のとき $E(\bar{\nu}+\mu)=\bigoplus_{i=1}^{\ell}E(\nu_i+\mu)$ とおく．ただし $E(\cdot)$ は次数のずらしを示す．
5. ℓ 行 ℓ 列の単位行列を 1_ℓ で表わす．

§1. Standard Basis of a Homogeneous Ideal

体 k 上 r 個の $(r\geqq 1)$ 不定元によって生成される多項式環 R をひとつ固定して以下の議論を進める．R の斉次1次の元からなる

k 上の勝手な生成系 $x=(x_1,\dots,x_r)$ があるとき R の x に関する単項式全体に次の順序を導入する。

(1.0). *Reverse lexicographic Order.*

$x^\nu > x^{\nu'}$ $\quad (\nu=(\nu_1,\dots,\nu_r)\ ,\ \nu'=(\nu'_1,\dots,\nu'_r) \in \mathbb{Z}_0^r)$

$\Longleftrightarrow$

$1 \leqq {}^\exists l \leqq r$ s.t. $\nu_i = \nu'_i \ (l < {}^\forall i \leqq r)$ and $\nu_l < \nu'_l$.

この順序による有次多項式 $f \in R$ $(f \neq 0)$ の *leading term* (いちばん大きい項)を $in(x;f)$ と書くことにする. 有次イデアル $I \subset R$ $(I \neq (0))$ に対し $A = R/I$, $d = \dim A$, $c = \operatorname{depth}_m A$, $in(x;I) = \{in(f) \mid f \in I\}$ が生成するイデアル, とおく. ただし m は R の極大イデアル xR.

Theorem (1.1) (Grauert [Gr; §2], Hironaka [HU; §5]).

十分一般な $x=(x_1,\dots,x_r)$ に対して. I の生成系 $\{f_l^i \mid 1 \leqq i \leqq r-c,\ 1 \leqq l \leqq m_i\}$ (standard basis, Gröbner basis) で次の性質を持つものがある.

1) $m_i \geqq 1$ $(1 \leqq i \leqq r-c)$ で

$$I = \bigoplus_{i=1}^{r-c} \bigoplus_{l=1}^{m_i} f_l^i\, k[x\langle i-1\rangle] \quad (k\text{-ベクトル空間として}).$$

2) $$\begin{cases} in(x; f_l^i) \in k[x_1,\dots,x_i]x_i & ({}^\forall i, {}^\forall l) \\ in(x;I) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r-c} \bigoplus_{l=1}^{m_i} in(x;f_l^i)\, k[x\langle i-1\rangle] \end{cases}.$$

3) (Urabe [U; 2.2]). $x_1^{\nu_1}\cdots x_p^{\nu_p}\cdots x_q^{\nu_q}\cdots x_r^{\nu_r} \in in(x;I)$, $p<q$, $\nu_q>0 \Rightarrow x_1^{\nu_1}\cdots x_p^{\nu_p+1}\cdots x_q^{\nu_q-1}\cdots x_r^{\nu_r} \in in(x;I)$ (Borel fixedness of $in(x;I)$, cf. [BS; (2.6)]).

4) $N(x;I)=\bigoplus_{x^\nu\notin in(x;I)} k\cdot x^\nu \hookrightarrow R$ とおくと

$$\begin{cases} f_\ell^i - in(x;f_\ell^i)\in N(x;I) & (\forall i, \forall \ell) \\ R = I\oplus N(x;I) & (k\text{-ベクトル空間として}) \end{cases}.$$

Remark (1.2). 1) $x=(x_1,\dots,x_r)$ を十分一般にとるとき, $\{\nu\in \mathbb{Z}_0^r \mid x^\nu\in in(x;I)\}$ は x によらず定まる.

2) (1.1) の 2) より $f_\ell^i(x_1,\dots,x_g,0,\dots,0)=0$ $(\forall g<\forall i\leqq r-c,\ 1\leqq\forall\ell\leqq m_i)$.

3) 整数 p $(1\leqq p\leqq r)$ に対して $c'=\max(0,c-p)$ とおくと $\{f_\ell^i(x_1,\dots,x_{r-p},0,\dots,0)\mid 1\leqq i\leqq r-p-c',\ 1\leqq\ell\leqq m_i\}$ が $I+x\langle r-p\rangle R/x\langle r-p\rangle R\subset R/x\langle r-p\rangle R=k[x_1,\dots,x_{r-p}]$ の $(x_1,\dots,x_{r-p})$ に関する standard basis となる.

Definition (1.3). 上のようになっているとき非減少列 $\overline{n}^i=(n_1^i,\dots,n_{m_i}^i)$ $(1\leqq i\leqq r-c)$ を $\overline{n}^i=(\deg(f_1^i),\dots,\deg(f_{m_i}^i))$ up to a permutation によって定め, $B(I)=(\overline{n}^1;\cdots;\overline{n}^i;\cdots;\overline{n}^{r-c})$ とおく ((1.2) の 1) により一意的に定まる).

R-加群 M に関する m の重複度を $\deg(M)$ と書こう.

Proposition (1.4). I, c, d および $B(I)$ について次のことがいえる.

1) 十分一般な R の斉次1次の元からなる生成系 $x=(x_1,\dots,x_r)$ および $0\leqq p\leqq r$ に対して,

$$\dim_k\left(I+x\langle r-p\rangle R/x\langle r-p\rangle R\right)_\nu=\sum_{i=1}^{r-p-c'}\sum_{\ell=1}^{m_i}\binom{\nu-n_\ell^i-r-p-i}{r-p-i}_+ ,$$

ただし $c'=\max(0,c-p)$, $x\langle r\rangle R=(0)$.

2) $d < r$ ならば $m_1 = 1$ で

$$m_j = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \sum_{\ell=1}^{m_i} \binom{n^i_\ell}{j-i} \quad (2 \leqq j \leqq r-d),$$

そして

$$\deg(R/I) = (-1)^{r-d} \sum_{i=1}^{r-d} (-1)^i \sum_{\ell=1}^{m_i} \binom{n^i_\ell}{r-d+1-i} - m_{r-d+1},$$

ただし $d = c$ のときは $m_{r-d+1} = 0$ と考える。

3) $n^i_1 \leqq n^{i+1}_1$ $(1 \leqq i \leqq r-c-1)$, $n^i_{m_i} \leqq n^{i+1}_{m_{i+1}}$ $(1 \leqq i \leqq r-d-1)$.

Remark (1.5). 1) $n^1_1 = \min\{n \mid I_n \neq 0\}$.

2) $r = 4$, $2 = d \geqq c \geqq 1$ で $\mathrm{length}(H^1_m(R/I)) < \infty$ のときは $B(I)$ を曲線 $\mathrm{Proj}(R/I)$ の *basic sequence* と名づけた ([A2;§1], [A3; Introduction]).

§2. Standard Free Resolution

整数 n^i_ℓ $(1 \leqq i \leqq s,\ 1 \leqq \ell \leqq t_i)$, 文字 X_ℓ $(1 \leqq \ell \leqq s-1)$, Y^i_ℓ $(1 \leqq i \leqq s,\ 1 \leqq \ell \leqq t_i)$ および多項式環 $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ $(1 \leqq s \leqq r+1,\ t_i \geqq 0\ (1 \leqq i \leqq s-1),\ t_s \geqq 1)$ が与えられたとする。このとき R-加群

$$V := \bigoplus_{\ell=1}^{s-1} R \cdot X_\ell, \qquad W_i := \bigoplus_{\ell=1}^{t_i} R \cdot Y^i_\ell \quad (1 \leqq i \leqq s),$$

$$W := \bigoplus_{\ell=1}^{s} W_\ell, \qquad (\bigwedge^p V) \otimes_R W \quad (0 \leqq p \leqq s-1)$$

に $\deg X_\ell = 1$ $(1 \leqq \ell \leqq s-1)$, $\deg Y^i_\ell = n^i_\ell$ $(1 \leqq i \leqq s,\ 1 \leqq \ell \leqq t_i)$ から定まる自然な次数付けを導入して次数付 R-加群にする。もし

$t_i = 0$ のときは $W_i = 0$ と考える。任意の $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ $(1 \leqq l \leqq p,\ 1 \leqq \alpha_l \leqq s-1)$ に対し $X_\alpha = X_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge X_{\alpha_p} \in \bigwedge^p V$ とおく。$p=0$ のときは $X_\alpha = 1$ としておく。

Definition (2.1). 1) $\mathcal{E}(p; q, q') = \{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}) \mid q \leqq \alpha_1 < \cdots < \alpha_{p+1} \leqq q' \} \subset \mathbb{Z}^{p+1}$ $(0 \leqq p \leqq q'-q)$.

2) $$L_p = \bigoplus_{(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p; 1, s)} \bigoplus_{l=1}^{t_i} R \cdot X_\alpha \otimes Y_l^i \hookrightarrow \left(\bigwedge^p V\right) \otimes_R W,$$

ただし $t_i = 0$ のときは $\bigoplus_{l=1}^{t_i} R \cdot X_\alpha \otimes Y_l^i = 0$ (以下同様)。

3) $$L_{p,q} = \left\{ \bigoplus_{\substack{(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p; 1, s) \\ \alpha_1 \leqq q+1}} \bigoplus_{l=1}^{t_i} k[x\langle \alpha_1 - 1 \rangle] \cdot X_\alpha \otimes Y_l^i \right\}$$
$$\oplus \left\{ \bigoplus_{(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p; q+2, s)} \bigoplus_{l=1}^{t_i} k[x\langle q \rangle] \cdot X_\alpha \otimes Y_l^i \right\} \subset L_p$$
$$(0 \leqq q \leqq s-p-1).$$

4) $$L_{p,q}^{rem} = \bigoplus_{(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p; q+1, s)} \bigoplus_{l=1}^{t_i} k[x\langle \alpha_1 - 1 \rangle] \cdot X_\alpha \otimes Y_l^i \subset L_p$$
$$(0 \leqq q \leqq s-p-1),$$
$$L_p^{rem} = L_{p,0}^{rem} \quad (0 \leqq p \leqq s-1).$$

ここで $p=0$ のときは α はなしで $\alpha_1 = i$ と考える。

Remark (2.2). $L_p = L_{p,0} \supsetneqq \cdots \supsetneqq L_{p,s-p-1} = L_p^{rem} = L_{p,0}^{rem} \supsetneqq \cdots \supsetneqq L_{p,s-p-1}^{rem} \neq 0$ $(0 \leqq p \leqq s-1)$.

R 上の線形写像 $\Phi_p : L_p \longrightarrow L_{p-1}$ $(1 \leqq p \leqq s-1)$ は

(1) $$\Phi_p = \sum_{\substack{(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p-1; 1, s) \\ (\beta, j) \in \mathcal{E}(p; 1, s)}} \Phi_{\alpha, \beta}^{i, j}\, X_\alpha \otimes X_\beta^*$$

($\Phi_{\alpha,\beta}^{i,j} \in \mathrm{Hom}_R(W_j, W_i)$) の形で書くことにし，また $\mathrm{Hom}_R(W_j, W_i)$ の元は基底 $\{Y_\ell^m\}$ に関する行列表現と同一視することにしよう.

Lemma (2.3). $\Phi_p : L_p \longrightarrow L_{p-1}$ ($1 \leqq p \leqq s-1$) を R 上の線形写像で

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_{\alpha,\beta}^{i,j} \in \mathrm{Mat}\,(x\langle\alpha_1-1\rangle) & \text{if } (\alpha, i) \neq (\beta_2, \dots, \beta_p, j) \\ \Phi_{\alpha,(\beta_1,\alpha)}^{i,i} - x_{\beta_1} 1_{t_i} \in \mathrm{Mat}\,(x\langle\alpha_1-1\rangle) \end{cases}$$

を満たすものとする。ただし $p=1$ のときは α はなしで $\alpha_1 = i$。このとき $\Phi_p|L_p^{rem}$ は単射で

$$L_{p-1,q} = \Phi_p(L_{p,q}^{rem}) \oplus L_{p-1}^{rem} \qquad (0 \leqq q \leqq s-p-1).$$

特に

$$L_{p-1} = \Phi_p(L_p^{rem}) \oplus L_{p-1}^{rem}.$$

直和は k-ベクトル空間として考える。

Proof. [A1; 1.2] を見よ. □

次数付 R-加群 E が次数 n_ℓ^i の斉次な元 $e_\ell^i \in E$ ($1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq \ell \leqq t_i$) を用いて

$$(3) \qquad E = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{\ell=1}^{t_i} k[x\langle i-1\rangle]\, e_\ell^i \quad (k\text{-ベクトル空間として})$$

と書けたとする. R-線形写像 $\Psi_0 : L_0 \longrightarrow E$ を $\Psi_0(Y_\ell^i) = e_\ell^i$ ($1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq \ell \leqq t_i$) によって定めよう。仮定 (3) より $\Psi_0(L_0^{rem}) = E$ で $\Psi_0|L_0^{rem}$ は単射だから，すべての $1 \leqq \beta_1 < j \leqq s$, $1 \leqq \ell \leqq t_j$ に対し

$$x_{\beta_1} e_\ell^j = \Psi_0(\psi_{\beta_1,\ell}^j)$$

となる $\psi_{\beta_1,\ell}^j \in L_0^{rem}$ が一意的に定まる．$\Psi_1 : L_1 \to L_0$ を

$$\Psi_1 = \sum_{(\beta_1,j)\in\mathcal{E}(1;1,s)} \sum_{\ell=1}^{t_j} (x_{\beta_1} Y_\ell^j - \psi_{\beta_1,\ell}^j) \otimes (Y_\ell^j)^* \otimes X_{\beta_1}^*$$

で定めると，Ψ_1 は (2) を満たし，[A1; 1.6] より

$$\operatorname{Ker}\Psi_0 = \operatorname{Im}\Psi_1 = \Psi_1(L_1^{rem})$$

がわかる．これを続けていくには次のようにする．

Lemma (2.4). 記号・条件が (2.3) のようになっているとし，さらに $1 \leqq p \leqq s-2$ で $\Phi_p(L_p^{rem})$ が R-加群であると仮定する．すべての $(\beta_1, \beta', j) \in \mathcal{E}(p+1; 1, s)$，$1 \leqq \ell \leqq t_j$ に対し，$\varphi_{(\beta_1,\beta'),\ell}^j$ を

$$x_{\beta_1}\Phi_p(X_{\beta'} \otimes Y_\ell^j) = \Phi_p(\varphi_{(\beta_1,\beta'),\ell}^j)$$

によって一意的に定まる L_p^{rem} の元とする．

$$\Phi_{p+1}$$

$$= \sum_{(\beta_1,\beta',j)\in\mathcal{E}(p+1;1,s)} \sum_{\ell=1}^{t_j} (x_{\beta_1} X_{\beta'} \otimes Y_\ell^j - \varphi_{(\beta_1,\beta'),\ell}^j) \otimes (Y_\ell^j)^* \otimes X_{(\beta_1,\beta')}^*$$

とおくとこれは (2) を満たし

$$\operatorname{Ker}\Phi_p = \operatorname{Im}\Phi_{p+1} = \Phi_{p+1}(L_{p+1}^{rem}).$$

Proof. [A1; 1. 6] を見よ． □

このようにして得られた $\Psi_p : L_p \to L_{p-1}$ $(0 \leqq p \leqq s-1,\ L_{-1} = E)$ は E の *free resolution* を与える．これを E の $\{e_i^j\}$ から始まる

standard free resolution と呼ぼう．これは必ずしも極小ではない．

Definition (2.5). 1) 勝手な R-線形写像 $\Phi_p : L_p \to L_{p-1}$ $(1 \leqq p \leqq s-2)$ があるとき，$(\beta, j) \in \mathcal{E}(p+1; 1, s)$ に対して

$$\sigma(\Phi_p)^j_\beta = \sum_{\ell=1}^{p+1} \sum_{(\gamma,i)\in\mathcal{E}(p-1;\beta_\ell+1,s)} (-1)^\ell \Phi^{i,j}_{\gamma,\beta(\ell)} (X_{\beta_\ell} \wedge X_\gamma) \otimes X^*_\beta$$

とおきさらに

$$\sigma(\Phi_p) = \sum_{(\beta,j)\in\mathcal{E}(p+1;1,s)} \sigma(\Phi_p)^j_\beta$$

とおく．ただし Φ_p は (1) の形に書けているとし，$\beta(\ell)$ は次のようにして定める．

2) ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_m)$，集合 $\{\ell_1, \ldots, \ell_{m'}\} \subset \{\ell \mid 1 \leqq \ell \leqq m\}$ に対し，$v(\ell_1, \ldots, \ell_{m'})$ を v から第 ℓ_n 成分 $(1 \leqq n \leqq m')$ をすべて除いて得られるベクトルとする．

今後次のことを仮定しよう．

Assumption (2.6). 上で定めた standard free resolution に現われる

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{(\beta_1,j)\in\mathcal{E}(1;1,s)} \Psi^{i,j}_{\beta_1} \otimes X^*_{\beta_1}$$

は

$$\Psi^{i,j}_{\beta_1} \in \mathrm{Mat}\,(x<\beta_1>) \qquad (1 \leqq {}^\forall i \leqq \beta_1)$$

を満たす．

Theorem (2.7). 仮定 (2.6) のもとでは Ψ_p $(1 \leqq p \leqq s-1)$ の表示 (1) に関する係数は次の条件を満たす．まず $(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p-1; 1, s)$，$(\beta, j) \in \mathcal{E}(p; 1, s)$ に対して $\eta(\alpha, i; \beta, j) = \{\alpha_\ell \mid \alpha_\ell \leqq \beta_p,\ 1 \leqq \ell \leqq p-1\}$，$\theta(\beta, j) = \{\beta_\ell \mid 1 \leqq \ell \leqq p\}$ とおく．

1) $2 \leqq p \leqq s-1$ で $\phi \neq \eta(\alpha, i; \beta, j) \subset \theta(\beta, j)$ のとき $\alpha_q = \max \eta(\alpha, i; \beta, j)$ となる q を用いて $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $\alpha'' = (\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{p-1})$ とおくと

$$\Psi^{i,j}_{\alpha,\beta} = (-1)^q \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha', \beta'' \end{pmatrix} \Psi^{i,j}_{\alpha'',\beta''} ,$$

ただし $(\alpha', \beta'') = \beta$ up to a permutation で $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha', \beta'' \end{pmatrix}$ はその符号。

2) $2 \leqq p \leqq s-1$ で $\eta(\alpha, i; \beta, j) \not\subset \theta(\beta, j)$ ならば $\Psi^{i,j}_{\alpha,\beta} = 0$.

Proof. [A 5] を見よ. □

Corollary (2.8). 仮定 (2.6) のもとでは 各 $1 \leqq p \leqq s-2$ に対し

$$\Psi_{p+1} = \sigma(\Psi_p) + \sum_{\substack{(\beta, j) \in \mathcal{E}(p+1; 1, s) \\ (\alpha, i) \in \mathcal{E}(p; \beta_{p+1}+1, s)}} \Psi^{i,j}_{\alpha,\beta} X_\alpha \otimes X^*_\beta$$

となり, もしさらに

(4) $\Psi^{i,j}_{\alpha,\gamma} = 0 \quad {}^\forall(\alpha, i) \in \mathcal{E}(p-1; 1, s), {}^\forall(\gamma, j) \in \mathcal{E}(p; 1, s)$ s.t. $\alpha_1 > \gamma_2$

ならば

$$\Psi_{p+1} = \sigma(\Psi_p)$$

である. ただし $p=1$ のときは $\alpha_1 = i$, $\gamma_2 = j$ として理解する.

Corollary (2.9). 仮定 (2.6) のもとで (4) がある $p = p_0$ $(1 \leqq p_0 \leqq s-2)$ に対して成立すればすべての p $(p_0 \leqq p \leqq s-2)$ に対して等式 $\Psi_{p+1} = \sigma(\Psi_p)$ および (4) が成立する.

Corollary (2.10). 仮定 (2.6) のもとでは

1) $s \geqq 2$ のとき

$$\Psi_{s-1} = \sum_{\ell=1}^{s-1} (-1)^{\ell-1} \Psi^{s,s}_{\ell} (X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_\ell \wedge \cdots \wedge X_{s-1}) \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge X_{s-1})^*$$
$$+ (-1)^{s-2} \Psi^{s-1,s}_{s-1} (X_1 \wedge \cdots \wedge X_{s-2}) \otimes (X_1 \wedge \cdots \wedge X_{s-1})^* .$$

2) $\Psi_{p+1} = \sigma(\Psi_p) \qquad (\frac{s-1}{2} \leqq {}^{\forall}p \leqq s-2)$.

Example (2.11). $E = k = R/(x_1,\dots,x_r)$ の場合に上に述べたことを適用すると, $s = r+1$, $t_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq r)$, $t_{r+1} = 1$, $n^{r+1}_1 = 0$, $e^{r+1}_1 = 1 \in E$, $E = k \cdot 1$, $L_p = (\bigwedge^p V) \otimes_R W_{r+1} \cong \bigwedge^p V$ $(0 \leqq p \leqq r)$, $\Psi_1 = \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell Y^{r+1}_1 \otimes (Y^{r+1}_1)^* \otimes X^*_\ell \cong \sum_{\ell=1}^{r} x_\ell X^*_\ell$ で Ψ_1 は (2.6) 及び (4) を満たす. 従って (2.9) より $\Psi_{p+1} = \sigma(\Psi_p)$ がすべての p $(1 \leqq p \leqq r-1)$ に対して成り立ち, *standard free resolution* は $x_1,\dots,x_r$ に関する Koszul Complex によって構成される k の R 上の *minimal free resolution* に一致する.

§3. Local Cohomologies and B(I)

前節で説明したことを R の斉次イデアル I に応用しよう. 十分一般な $x = (x_1,\dots,x_r)$ をとり (3) としては (1,1) の 1) に示した直和分解をとる. $\Psi_p : L_p \to L_{p-1}$ $(0 \leqq p \leqq r-c-1,\ L_{-1} := I)$ を $\{f^i_\ell\}$ から始まる I の *standard free resolution* とする. 技術的に基本的なことは次の事実.

Lemma (3.1). 1) 仮定 (2.6) は成立する.
2) $1 \leqq i < j$ のとき $\Psi^{i,j}_{\beta 1}$ の各成分は $\mathfrak{m}$ の元である.

Proof. 1) [A1; 2.2] を見よ. 2) (1.1) の 1) と (1.2) の 2), 3) よりわかる. □

Proposition (3.2). 記号は §1, §2 と同じとする. このとき

1) $$\mathrm{Hom}_k(H_{\mathfrak{m}}^c(A), k)(r) \cong \mathrm{Coker}(\Psi^{\vee}_{r-c-1} : L^{\vee}_{r-c-2} \to L^{\vee}_{r-c-1})$$

$$\cong \frac{\displaystyle\bigoplus_{\ell=1}^{m_{r-c}} k[x\langle r-c-1\rangle]\cdot(X_1\wedge\cdots\wedge X_{r-c-1}\otimes Y_\ell^{r-c})^*}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m_{r-c-1}} k[x\langle r-c-1\rangle]\cdot {}^t\Psi^{r-c-1,r-c}_{r-c-1}((Y_\ell^{r-c-1})^*)\cdot(X_1\wedge\cdots\wedge X_{r-c-1})}.$$

ただし ${}^t\Psi^{r-c-1,r-c}_{r-c-1}$ は転置行列, 2つめの $\cong$ は $k[x\langle r-c-1\rangle]$-加群としての同形.

2) ${}^t\Psi^{r-c-1,r-c}_{r-c-1}$ の成分は $x\langle r-c-1\rangle\cdot k[x\langle r-c-1\rangle]$ の元.

Proof. 1) 最初の $\cong$ は duality. 2つめの $\cong$ は (2.10) の 1), 2) と (2.6) に注意すればよい. 2) (3.1) の 2) と (2.6) よりわかる. □

Corollary (3.3). $B(I) = (\bar{n}^1; \cdots; \bar{n}^i; \cdots; \bar{n}^{r-c})$ は (1.3) で定義したもので $c \leq p < r$ とする.

1) $\Psi^{i,j}_{p_1}$ に $x_{r-p+1} = \cdots = x_r = 0$ を代入したものを $\bar{\Psi}^{i,j}_{p_1}$ で表せば $k[x_{r-p}]$-加群として

$$\mathrm{Hom}_k(H_{\mathfrak{m}}^0(A/x\langle r-p\rangle A), k) \cong \frac{k[x_{r-p}](\bar{n}^{r-p}-1)}{\mathrm{Im}({}^t\bar{\Psi}^{r-p-1,r-p}_{r-p-1})}.$$

しかも ${}^t\bar{\Psi}^{r-p-1,r-p}_{r-p-1}$ の成分はすべて $x_{r-p}k[x_{r-p}]$ の元である.

2) $$m_{r-p} \leq h^0(A/x\langle r-p\rangle A) \leq \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i} h^i(A).$$

Proof. 1) (3.2) を $\bar{I} := I + x\langle r-p\rangle R/x\langle r-p\rangle R \subset \bar{R} :=$

$R/x\langle r-p\rangle R$ に用いる. 2) 明らか. □

§4. Graded Buchsbaum Rings

記号はすべて §3 と同じとする. 環 A は R 上の free resolution

$$0 \to L_{r-c-1} \xrightarrow{\Psi_{r-c-1}} \cdots\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\Psi_1} L_0 \xrightarrow{\Psi_0} R \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を持つが $M := \mathrm{Im}(\Psi_{r-d-1})$ に着目すると次のことがわかる.

Lemma (4.1). A が Buchsbaum 環であるための必要十分条件は M が Buchsbaum R-加群であること. またこのとき $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(M) = r-d+c$.

Proof. $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = \mathrm{Ext}_R^i(k, M) = 0 \quad (0 \leqq i < r-d+c)$ は明らか. 可換図式

$$(5)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_R^i(k, A) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}_R^{i+r-d}(k, M) \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_i' \\ H_{\mathfrak{m}}^i(A) & \xrightarrow{\sim} & H_{\mathfrak{m}}^{i+r-d}(M) \end{array} \qquad (0 \leqq i < d)$$

より π_i が全射 $\Leftrightarrow$ π_i' が全射. □

A が Buchsbaum 環で $r > d$ としよう. すると各 $i\ (0 \leqq i < d)$ に対して $\mathfrak{m} H_{\mathfrak{m}}^i(A) = 0$ であるから整数のベクトル $\overline{w}^i$ で

$$(6)\qquad H_{\mathfrak{m}}^i(A) \cong k(-\overline{w}^i) \qquad (0 \leqq i < d)$$

となるものがある. また (3.3) より

$$(7)\qquad H_{\mathfrak{m}}^0(A/x\langle r-p\rangle A) \cong k(-\overline{n}^{r-p+1}) \qquad (c \leqq p < d).$$

さらに完全列

$$0 \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(A/x\langle r-p+1\rangle A) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(A/x\langle r-p\rangle A) \longrightarrow H^{i+1}(A/x\langle r-p+1\rangle A)(-1) \to 0$$

$$(1 \leqq p < d, \quad 0 \leqq i < d-p)$$

より

$$(8) \qquad H^0_{\mathfrak{m}}(A/x\langle r-p\rangle A) \cong \bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{\mathfrak{m}}(A)(-i)^{\binom{p}{i}} \qquad (0 \leqq p < d).$$

Theorem (4.2). A が Buchsbaum 環で $r>d$ とし，$\overline{w}^i$ $(0 \leqq i < d)$ は (6) のようにして定める。このとき次のことが成立する。順序を無視すると，

1) $\overline{n}^i = ((\overline{w}^j + j + 1)^{\binom{r-i}{j}})_{c \leqq j \leqq r-i} \qquad (r-d+1 \leqq {}^\forall i \leqq r-c)$,

2) $((\overline{w}^i + i + 1)^{\binom{d}{i}})_{c \leqq i < d}$ は $\overline{n}^{r-d}$ の部分列．

Proof. 1) (7) と (8) に (6) を代入したものを比較すればよい。
2) 仮定と (4.1) より M は Buchsbaum R-加群だから Goto [Go] の定理を用いることができる。ある整数列 $\overline{w}$ があって (5), (6) より

$$(9) \qquad M \cong \bigoplus_{j=c}^{d-1} Syz^{j+r-d}(k)(-\overline{w}^j) \oplus R(-\overline{w}) \quad (R\text{-加群として}).$$

これに

$$(10) \qquad Syz^i(k) = \bigoplus_{\ell=1}^{r-i+1} k[x\langle \ell-1\rangle](-i)^{\binom{r-\ell}{i-1}} \qquad (1 \leqq i \leqq r)$$

を代入すると

$$(11) \qquad M \cong \bigoplus_{\ell=2}^{d-c+1} \bigoplus_{j=c}^{d-\ell+1} k[x\langle \ell-1\rangle](-\overline{w}^j - j - r + d)^{\binom{r-\ell}{j+r-d-1}}$$

$$\oplus \bigoplus_{j=c}^{d-1} R(-\overline{w}^j - j - r + d)^{\binom{r-1}{j+r-d-1}} \oplus R(-\overline{w}).$$

一方 (2.4) と 1) より $r-d>1$ ならば

$$(12)\quad M \cong L^{rem}_{r-d-1}$$

$$\cong \bigoplus_{\ell=2}^{d-c+1} \bigoplus_{j=c}^{d-\ell+1} k[x<\ell-1>](-\overline{w}^j - j - r + d)^{\sum_{i=\ell+r-d-1}^{r-j} \binom{i-\ell-1}{r-d-2}\binom{r-i}{j}}$$

$$\oplus \bigoplus_{j=c}^{d-1} R(-\overline{w}^j - j - r + d)^{\sum_{i=r-d+1}^{r-j} \binom{i-2}{r-d-2}\binom{r-i}{j}} \oplus R(-\overline{n}^{r-d} - r + d + 1)$$

で $r-d=1$ のときは

$$(13)\quad M \cong I \cong \bigoplus_{\ell=2}^{r-c} \bigoplus_{j=c}^{r-\ell} k[x<\ell-1>](-\overline{w}^j - j - 1)^{\binom{r-\ell}{j}} \oplus R(-\overline{n}^1).$$

Mの2つの表示 (11) と (12) 又は (13) を下の (4.3) に注意して比較すれば結論を得る. □

Lemma (4.3). $\ell \geq 0$, $m \geq 0$, $n \geq \ell + m$ のとき

$$\sum_{i=\ell}^{n-m} \binom{i}{\ell}\binom{n-i}{m} = \binom{n+1}{\ell+m+1}.$$

Corollary (4.4). AがBuchsbaum環ならば $r-d \leq p \leq r-c-1$ のとき Ψ_p の成分はすべて $\mathfrak{m}$ の元.

Corollary (4.5). AがBuchsbaum環のとき

$$m_{r-d} \geq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A)$$

であり特に $r-d=1$ の場合

$$c=0, \quad h^0(A)=1, \quad h^i(A)=0 \quad (1 \leq i < d),$$

$r-d=2$ の場合は

$$\min\{n \mid I_n \neq 0\} = n_1^1 = m_2 \geq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(A).$$

B(I) による graded Buchsbaum ring の 特徴づけとして次のことが成立するはずである。

(4.6). A が Buchsbaum 環であるための必要十分条件は

$$m_{r-d+1} = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} h^i(A).$$

この辺でやめておこう。

References

[A1] Amasaki, M., Preparatory Structure Theorem for ideals Defining Space Curves, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983), 493–518.

[A2] Amasaki, M., On the Structure of Arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}_k^3$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 793–837.

[A3] Amasaki, M., Curves in $\mathbb{P}^3$ Whose Ideals Are Simple in a Certain Numerical Sense, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ. 23.

[A4] Amasaki, M., Integral arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}^3$, preprint RIMS-577 (1987).

[BS] Bayer, D. and Stillman, M., A criterion for detecting m-regularity, Invent. math. 87 (1987), 1–11.

[Go] Goto, S., Maximal Buchsbaum modules over regular local rings, 第7回可換環論シンポジウム報告集 (1985年 京都府青年会館.

[Gr] Grauert, H., Über die Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen, Invent. Math. 15 (1972), 171-198.

[HU] 広中平祐述. 卜部東介 記, 「解析空間入門」, 朝倉出版 (1982).

[U] Urabe, T., On Hironaka's Monoideal. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 15 (1979), 279-287.

[A5] Amasaki, M., 題未定, in preparation.

ON THE VECTOR BUNDLES WHOSE ENDOMORPHISMS YIELD QUATERNION ALGEBRAS OVER A PRODUCT OF ELLIPTIC CURVES

Hajime KAJI Waseda University

Introduction

Let X be a non-singular projective variety over an algebraically closed field k with arbitrary characteristic p, let n be a positive integer prime to p, and let us consider the following diagram of étale cohomology sets:

$$\text{(FD)}\qquad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & H^1(X, \mathbb{G}_m) \\ & & & & & & \downarrow c_X \\ & & H^1(X, \mu_n)\times H^1(X, \mu_n) & & \overset{\cup}{\rightarrow} & & H^2(X, \mu_n) \\ & & \downarrow A & & & & \downarrow \\ H^1(X, GL_n) & \xrightarrow{\mathcal{E}nd} & H^1(X, PGL_n) & & \xrightarrow{d_n} & & H^2(X, \mathbb{G}_m). \end{array}$$

The definition of each map above is this: The lower horizontal sequence is induced from a well-known, fundamental sequence of étale sheaves of group schemes over X

$$\text{(FS)}\qquad 1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow GL_n \rightarrow PGL_n \rightarrow 1,$$

so this sequence is exact; The right vertical sequence is induced from the Kummer sequence for the étale topology over X

$$\text{(KS)}\qquad 1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

so this sequence is also exact; The upper horizontal map $\cup$ is (non-canonically) defined by the cup-product on X with a fixed primitive n-th root ζ of unity in k; The left vertical map A is defined by a generalization of the construction of a cyclic algebra over a field to the case over a scheme, which makes the diagram above commutative. We shall give a construction of an Azumaya algebra, denoted by A(L, M), of rank n^2 over X from a pair of n-torsion line bundles L and M over X such that the diagram above commutes (see

Sections 1 and 2).

We here note that (see, e.g., [1, §4] and [7, III and IV]): $H^1(X, GL_n)$ is equal to the set of isomorphism classes of vector bundles of rank n over X (for the Zariski topology), in particular, $H^1(X, \mathbb{G}_m)$ coincides with the Picard group Pic(X) of X; $H^1(X, \mu_n)$ coincides with its n-torsion part $\mathrm{Pic}(X)_n$; $H^1(X, PGL_n)$ is equal to the set of isomorphism classes of Azumaya algebras of rank n^2 over X, whose elements correspond bijectively with the isomorphism classes of fibre bundles over X for the étale topology with a geometric fibre $\mathbb{P}^{n-1}$, namely, *projective space bundles of rank* n over X, via the functor of certain left ideals of the algebra.

Now, for a pair of n-torsion line bundles L and M over X, the commutativity and the exactness of the diagram above imply the equivalence of the following conditions:

(1) The Azumaya algebra A(L, M) is isomorphic to $\mathcal{E}nd(V)$ for some vector bundle V over X;

(2) The cup-product $L \cup M$ is equal to $c_X(Z)$ for some line bundle Z over X.

So, one may expect that there would exist some relation between V and Z above. We here propose to discuss about the following problem:

How can one construct the vector bundle V *from the line bundle* Z?

where one should note that V is uniquely determined by A(L, M) up to tensoring line bundles over X.

The purpose of this article is to give an answer to this problem in case X is a product of two elliptic curves and n = 2. Namely, in this case, we shall construct *all* such vector bundles V from the line bundles Z.

Throughout this article, we always use the étale cohomology, and assume that *the base* X *is a non-singular, quasi-projective variety over a field* k, *the integer* n *is positive, prime to the characteristic* p *of* k, *and* k *contains a primitive* n-*th root* ζ *of unity*. For full details, we refer to [K].

1. Construction of Azumaya Algebras

In this section, we shall give a construction of an Azumaya algebra of rank n^2 over X from a pair of n-torsion line bundles, strictly speaking, we shall define a map

$$H^1(X, \mu_n) \times H^1(X, \mu_n) \quad \to \quad H^1(X, PGL_n),$$

which, in the special case n = 2, has been given by D. Mumford [9, §3].

Remark 1.1. Taking cohomology of the sequence (KS), one can interpret $H^1(X, \mu_n)$ as the set of isomorphism classes of couples (L, Φ) where L is an n-torsion line bundle over X and Φ is an isomorphism $O_X \to L^{\otimes n}$. In case X is complete over an algebraically closed field, it follows that

$$H^1(X, \mu_n) \simeq Pic(X)_n .$$

In case X is a spectrum of a field K, it follows that

$$K^*/K^{*n} \simeq H^1(K, \mu_n)$$

$$H^2(K, \mu_n) \simeq H^2(K, \mathbb{G}_m)_n .$$

Now, let L and M be n-torsion line bundles over X with isomorphisms $\Phi : O_X \to L^{\otimes n}$ and $\Psi : O_X \to M^{\otimes n}$. For a pair of such couples (L, Φ) and (M, Ψ), consider a vector bundle over X:

$$A := \bigoplus_{0 \le i, j \le n-1} L^{\otimes i} \otimes M^{\otimes j}.$$

Using Φ and Ψ, one can define the following maps

$$L^{\otimes i} \otimes M^{\otimes j} \otimes L^{\otimes k} \otimes M^{\otimes \ell} \xrightarrow{\xi^{jk}} L^{\otimes i} \otimes L^{\otimes k} \otimes M^{\otimes j} \otimes M^{\otimes \ell} \to L^{\otimes r} \otimes M^{\otimes s},$$

where $i+k \equiv r$, $j+\ell \equiv s$ modulo n, and $0 \leq r, s \leq n-1$, and ξ is the primitive n-th root of unity. Thus, we obtain an O_X-algebra structure on A.

To investigate a local structure of this algebra A, take an affine open neighborhood U of an arbitrary point in X over which

$$L|_U = O_U \cdot \ell \simeq O_U ,$$

$$M|_U = O_U \cdot m \simeq O_U ,$$

where ℓ, m are generators of L, M over U, respectively. Since both $\Phi(1)|_U$ and $\ell^{\otimes n}$ generate $L^{\otimes n}|_U$, there exists a unit a in $\Gamma(U, O_U)$ such that

$$a \cdot \Phi(1)|_U = \ell^{\otimes n}.$$

Similarly, for M, there exists a unit b in $\Gamma(U, O_U)$ such that

$$b \cdot \Psi(1)|_U = m^{\otimes n}.$$

Then, we see that the restriction $A|_U$ is isomorphic to an O_U-algebra generated by elements ℓ, m with relations

$$\ell^n = a, \quad m^n = b, \text{ and } \ell m = \xi m \ell.$$

Particularly, in case $n = 2$, $A|_U$ is isomorphic to an O_U-algebra generated by ℓ, m with relations

$$\ell^2 = a, \quad m^2 = b, \text{ and } \ell m = -m\ell,$$

namely, a *quaternion algebra* over U. Hence, A is an Azumaya algebra of rank n^2 over X, in particular, a quaternion algebra over X when $n = 2$ (see, e.g., [7, IV, (2.1)]). We denote by $A((L, \Phi), (M, \Psi))$ the algebra A obtained from a pair of the couples (L, Φ), (M, Ψ), and by $P((L, \Phi), (M, \Psi))$ the projective space bundle naturally corresponding to A via the functor of left ideals of A which are subbundles of A of rank n (see, e.g., [1, §4]). Thus, our construction gives the required map.

Remark 1.2. In case X is a spectrum of a field K, by the isomorphism $H^1(K, \mu_n) \to K^*/K^{*n}$ in Remark 1.1, the couples (L, Φ), (M, Ψ) are assigned to the elements a, b above modulo K^{*n}, respectively. So, in this case, the map A above gives the construction of ordinary cyclic algebras over the field K.

Next, we study the case n = 2 in detail. In this case, we have another method for constructing projective space bundles of rank 2, namely, *projective line bundles*, from a pair of 2-torsion line bundles as follows: For any 2-torsion line bundles L and M with isomorphisms $\Phi : O_X \to L^{\otimes 2}$ and $\Psi : O_X \to M^{\otimes 2}$, let A be the quaternion algebra $A((L, \Phi), (M, \Psi))$, let E be a direct summand $O_X \oplus L \oplus M$ of A, and let q be a quadratic form on E defined by the reduced norm of A. In other words, the quadratic form q on E is this: We have three global sections

$$1/\iota(1) \in \Gamma(X, O_X{}^{\vee\otimes 2}) \subset \Gamma(X, S^2(E^\vee))$$
$$1/\Phi(1) \in \Gamma(X, L^{\vee\otimes 2}) \subset \Gamma(X, S^2(E^\vee))$$
$$1/\Psi(1) \in \Gamma(X, M^{\vee\otimes 2}) \subset \Gamma(X, S^2(E^\vee)),$$

where ι is a natural isomorphism $O_X \to O_X{}^{\otimes 2}$. Put

$$q := 1/\iota(1)-1/\Phi(1)-1/\Psi(1).$$

Then, we obtain a divisor C of $\mathbb{P}(E^\vee)$ defined by the quadratic form q, which is a conic bundle over X.

Now, we locally investigate this bundle C. With the same notations as above, we have an isomorphism

$$E^\vee|_U = O_U\cdot 1/1 \oplus O_U\cdot 1/\ell \oplus O_U\cdot 1/m \simeq O_U \oplus O_U \oplus O_U ,$$

and an expression

$$q|_U = 1/\iota(1)-1/\Phi(1)-1/\Psi(1)|_U \simeq \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -a & \\ & & -b \end{pmatrix}$$

via the isomorphism $E^\vee|_U \simeq O_U \oplus O_U \oplus O_U$ above, which is nothing but the restriction to $E|_U$ of the reduced norm of A. Hence, the conic bundle

C over X has no singular fibres. Using an étale cover of X associated to a 2-torsion line bundle, for example, L, we see that C is locally trivial over X for the étale topology, namely, a projective line bundle over X.

Thus, we obtain a projective line bundle C from a pair of the couples (L, Φ) and (M, Ψ), which is denoted by C((L, Φ), (M, Ψ)). The vector bundle E used above and the quadratic form q on E defining C are denoted by E((L, Φ), (M, Ψ)) and q((L, Φ), (M, Ψ)), respectively.

By definition, C((L, Φ), (M, Ψ)) is the projective line bundle naturally corresponding to the quaternion algebra A((L, Φ), (M, Ψ)) (see, e.g., [1, §4], or [13, XIV, §2, Remark 3, p207]), so the bundles C((L, Φ), (M, Ψ)) and P((L, Φ), (M, Ψ)) are isomorphic over X, and we see that our projective space bundles are explicitly given in terms of conic bundles.

Therefore, we get the diagram (FD) in the introduction, which is called the *fundamental diagram* for X.

Definition 1.3. For any elements a and b of $H^1(X, \mu_n)$, the value $d_n(A(a, b)) = d_n(P(a, b))$ is called the *Hilbert symbol* of a and b over X, and denoted by $\langle a, b\rangle_n$.

Remark 1.4. Our Hilbert symbol over X coincides with the classical one when X is a spectrum of a field (see Remark 1.2).

The next proposition follows directly from the exactness of the lower sequence in (FD).

Proposition 1.5. For any elements a, b of $H^1(X, \mu_n)$, the following conditions are equivalent:

(1) $P(a, b) \simeq \mathbb{P}(V^{\vee})$, or equivalently, $A(a, b) \simeq \mathcal{E}nd(V)$ for some vector bundle V over X;

(2) $\{a, b\}_n = 0$.

Under the equivalent conditions above, we say that $P(a, b)$, or $A(a, b)$ *comes from* the vector bundle V.

2. Commutativity of the Fundamental Diagram

Proposition 2.1. The fundamental diagram (FD) is commutative.

Proof. Use, e.g., [13, XIV, §2, Proposition 5] and [7, III, (2.22)] (see Remark 1.4).

From the Proposition 2.1 above, we get the following corollaries, which will be used below.

Corollary 2.2. For any elements a, b and c of $H^1(X, \mu_n)$, we have:

(a) $\{a\otimes b, c\}_n = \{a, c\}_n + \{b, c\}_n$;

(b) $\{a, b\otimes c\}_n = \{a, b\}_n + \{a, c\}_n$;

(c) $\{a, b\}_n + \{b, a\}_n = 0$.

Proof. The required results follow directly from the fact that the cup-product $\cup$ is bilinear and alternating.

Corollary 2.3. For any elements a and b of $H^1(X, \mu_n)$, the following conditions are equivalent:

(1) The projective space bundle $P(a, b)$, or equivalently, the Azumaya algebra $A(a, b)$ comes from some vector bundle over X;

(2) The cup-product $a\cup b$ in $H^2(X, \mu_n)$ is equal to $c_X(Z)$ for some line

bundle Z over X;

(3) $\{a, b\}_n = 0$.

Proof. Combine Propositions 1.5 and 2.1.

Under the equivalent conditions above, we say that the cup-product $a \cup b$ *comes from* the line bundle Z over X.

Definition 2.4. For elements a, b and c of $H^1(X, \mu_n)$, we define the *composition of the pairs* (a, c) and (b, c) to be the pair $(a \otimes b, c)$ in $H^1(X, \mu_n) \times H^1(X, \mu_n)$. Moreover, we define the *composition of the projective space bundles* P(a, c) and P(b, c) to be the bundle $P(a \otimes b, c)$. Furthermore, if P(a, c) and P(b, c) come from vector bundles V_a and V_b, respectively, then we define the *composition of the vector bundles* V_a and V_b to be a vector bundle V_{ab} modulo Pic(X) such that $P(a \otimes b, c)$ comes from V_{ab}. By virtue of Corollaries 2.2 and 2.3, the existence of the composition V_{ab} is guaranteed. But, one should note that, for isomorphism classes of projective space bundles, or vector bundles, the composition of them are *not* well-defined since it depends upon the choice of the pairs (a, c) and (b, c). So, we shall specify the pairs of the elements of $H^1(X, \mu_n)$ whenever we use this terminology. Similarly, we define the *composition of the pairs* (a, b) and (a, c) to be the pair $(a, b \otimes c)$ in $H^1(X, \mu_n) \times H^1(X, \mu_n)$, and so on.

Finally, we give a sufficient condition for Br(X) = Br'(X) (see [7, IV, (2.9)]), where Br'(X) is the cohomological Brauer group $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{tor}$ of X.

Corollary 2.5. If the map

$$H^1(X, \mu_n) \otimes H^1(X, \mu_n) \quad \to \quad H^2(X, \mu_n)$$

defined by the cup-product $\cup$ is surjective, then the set

$$\{ \{a, b\}_n \mid a, b \in H^1(X, \mu_n) \}$$

generates the n-torsion part $Br'(X)_n$. In particular, we have

$$Br(X)_n = Br'(X)_n .$$

Proof. This follows from Proposition 2.1 and the fact that the image of $H^2(X, \mu_n)$ in $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ is equal to $Br'(X)_n$.

3. Rational Sections and Vector Bundles

Lemma 3.1. Let P be a projective line bundle over X with projection π, and let ω_π be a relative canonical bundle of π. Then, we have:

(a) P is isomorphic to a quadratic divisor C of $\mathbb{P}(E^\vee)$ for some vector bundle E of rank 3 over X;

(b) Any such E as above is isomorphic to the vector bundle $\left(\pi_*(\omega_\pi^\vee)\right)^\vee$ modulo Pic(X), in particular, uniquely determined by P up to tensoring line bundles over X.

Proof. See, e.g., [K].

Proposition 3.2. Let K be the function field of X, let C be a projective line bundle over X, and let q be a quadratic form over X which defines the conic bundle C as in Lemma 3.1. Then, the following conditions are equivalent:

(1) C comes from a vector bundle over X;

(2) C has a rational section over X;

(3) q has a K-rational solution at the generic point Spec K of X.

Proof. See, e.g., [7, III, Exercise 4.24], [12, Proposition 18] or

[13, X, §6, Exercise 1].

Now, we have

Theorem 3.3. Let C be a projective line bundle over X, and let E be a vector bundle of rank 3 over X such that C is isomorphic to a quadratic divisor of $\mathbb{P}(E^\vee)$ as in Lemma 3.1. Assume that C has a rational section over X, and identify C with the divisor of $\mathbb{P}(E^\vee)$ above. Then:

(a) For a rational section of C over X, there exist a unique line bundle S over X and a unique homomorhism $s : S \to E$ satisfying the following conditions:

(1) s is injective as a homomorphism of sheaves over X;

(2) The zero locus $(s)_0$ of s as a homomorphism of vector bundles has codimension at least 2 in X;

(3) The cokernel of s, denoted by V_0, is a torsion-free sheaf of rank 2 over X;

(4) The rational map $\mathbb{P}(S^\vee) \to \mathbb{P}(E^\vee)$ defined by s gives a section of C via an isomorphism $X \simeq \mathbb{P}(S^\vee)$, which is defined over the complement $X-(s)_0$ and coincides with the given rational section of C over X.

Thus, we have an exact sequence over X

$$0 \to S \xrightarrow{s} E \to V_0 \to 0.$$

(b) Let V be the double dual of V_0. Then, V is a vector bundle of rank 2 over X and the bundle C comes from V.

Proof. See [K].

4. Composition of Vector Bundles

We first study geometric meaning of the composition of our projective line bundles (see Definition 2.4). In this section, we always consider the case $n = 2$.

Proposition 4.1. Let L, L' and M be 2-torsion line bundles over X with isomorphisms $\Phi : O_X \to L^{\otimes 2}$, $\Phi' : O_X \to L'^{\otimes 2}$ and $\Psi : O_X \to M^{\otimes 2}$. Let C and C' be the projective line bundles $C((L, \Phi), (M, \Psi))$ and $C((L', \Phi'), (M, \Psi))$, respectively, let C'' be the composition of C and C', and let E, E', and E'' be the vector bundles $E((L, \Phi), (M, \Psi))$, $E((L', \Phi'), (M, \Psi))$, and $E((L'', \Phi''), (M, \Psi))$, respectively, where we put $(L'', \Phi'') := (L, \Phi)\otimes(L', \Phi')$ in $H^1(X, \mu_2)$. Let $(X:Y:Z)$, $(X':Y':Z')$, and $(X'':Y'':Z'')$ be the global coordinates of $E = O_X\oplus L\oplus M$, $E' = O_X\oplus L'\oplus M$, and $E'' = O_X\oplus L''\oplus M$ over X, respectively, and let

$$\varphi : \mathbb{P}(E^\vee) \times_X \mathbb{P}(E'^\vee) \to \mathbb{P}(E''^\vee)$$

be a rational map defined by $\varphi((X:Y:Z)\times(X':Y':Z'))=(X'':Y'':Z'')$ with

$$X'' := X\otimes X' + \Psi^{-1}\circ Z\otimes Z'$$

$$Y'' := Y\otimes Y'$$

$$Z'' := X\otimes Z' + Z\otimes X'.$$

Then, we have:

(a) The image of the restriction $\varphi|_{C \times_X C'}$ is dense in C'';

(b) The base locus of $\varphi|_{C \times_X C'}$ is contained in a fibre product $H \times_X H'$, where H, H' are tautological divisors of $\mathbb{P}(E^\vee)$, $\mathbb{P}(E'^\vee)$ defined by natural inclusions

$$O_X\oplus M \to E, \qquad O_X\oplus M \to E',$$

respectively.

Proof. To prove the statements, we have only to consider the problem at each fibres over X. So, we may assume that X is a spectrum of a field. Then, the required results follow from a direct computation.

Using Proposition 4.1, one can define *the composition of the maps* s in Theorem 3.3 (a) in the obvious way, by which we shall define the composition of rational sections of our projective line bundles.

Theorem 4.2. With the same notations as above, assume that the bundles C and C' have rational sections over X and the element (M, Ψ) in $H^1(X, \mu_2)$ is not zero. Let $s = (X:Y:Z)$, $s' = (X':Y':Z')$ be the maps $S \to E$, $S' \to E'$ corresponding to the rational sections as in Theorem 3.3 (a), respectively, let s" be the composition of s and s', and let V, V' and V" be the double dual of the cokernels of s, s' and s", respectively. Then:

(a) We have

$$(s'')_0 \subset (s)_0 \cup (s')_0 \cup \Big((Y)_0 \cap (Y')_0 \Big),$$

in particular, $(s'')_0$ is a proper subset of X, and s" defines a rational map $\mathbb{P}(S^\vee \otimes S'^\vee) \to \mathbb{P}(E''^\vee)$, which gives a rational section of C" over X via an isomorphism $X \simeq \mathbb{P}(S^\vee \otimes S'^\vee)$;

(b) If $(s'')_0$ has codimension at least 2 in X, then V" is a vector bundle of rank 2 over X, and C" comes from V". In other words, the vector bundle V" is the composition of V and V' defined by the pairs $((L, \Phi), (M, \Psi))$ and $((L', \Phi'), (M, \Psi))$.

Proof. (a) The assertion follows from the definition of s" and Proposition 4.1, where we note that neither Y nor Y' is identically zero since (M, Ψ) is not zero.

(b) The required result follows directly from Theorem 3.3.

Definition 4.3. By virtue of Theorem 4.2 (a) above, from rational sections of the bundles C and C' over X, we obtain a rational section of C" over X, which is called the *composition of the rational sections* of C and C' over X (defined by the pairs ((L, Φ), (M, Ψ)) and ((L', Φ'), (M, Ψ))).

5.. Cycle Map on a Product of Two Elliptic Curves

In this section, we investigate the cycle map c_X from Pic(X) to $H^2(X, \mu_n)$ when the base X is a product of two elliptic curves defined over an algebraically closed field. From now on, we shall assume that *the ground field* k *is algebraically closed.* For any elliptic curve E, we always fix the unity of group structure of E.

Lemma 5.1. Let X be a product of elliptic curves E_1 and E_2, and let R be the group $\mathrm{Hom}(E_1, \hat{E}_2) = \mathrm{Hom}(E_2, \hat{E}_1)$ of correspondences between E_1 and E_2. Then, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pic}(E_1)\oplus\mathrm{Pic}(E_2) & \xrightarrow{c_{E_1}\oplus c_{E_2}} & H^2(E_1, \mu_n)\oplus H^2(E_2, \mu_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Pic}(X) & \xrightarrow{c_X} & H^2(X, \mu_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R & \xrightarrow{\gamma} & H^1(E_1, \mu_n)\otimes H^1(E_2, \mu_n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

with exact rows. Moreover, the top horizontal map is surjective.

Proof. See, e.g., [K].

Now, looking at the meaning of the map γ defined as above, we find that γ is composed of the following:

$$R = \mathrm{Hom}(E_2, \hat{E}_1) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(H^1(\hat{E}_1, \mu_n), H^1(E_2, \mu_n))$$

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(H^1(\hat{E}_1, \mu_n), \mu_n)\otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}H^1(E_2, \mu_n)$$
$$\to H^1(E_1, \mu_n)\otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}H^1(E_2, \mu_n),$$

where one should note that, by the e_n-pairing over E_1 (see, e.g., [7, V, (2.4) (f)]), there is a canonical isomorphism of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(H^1(\hat{E}_1, \mu_n), \mu_n) \simeq H^1(E_1, \mu_n).$$

Proposition 5.2. Let X be a product of elliptic curves E_1 and E_2 with i-th projection p_i, let L and M be n-torsion line bundles over X, written

$$L = p_1{}^*L_1\otimes p_2{}^*L_2, \qquad M = p_1{}^*M_1\otimes p_2{}^*M_2,$$

with n-torsion line bundles L_i, M_i over E_i, i = 1, 2, and let γ be the map defined by the cycle map c_X as in Lemma 5.1. Then:

(a) We have

$$L\cup M = (L_1\cup M_1)\oplus(L_2\cup M_2)\oplus(L_1\otimes M_2-M_1\otimes L_2)$$

via the decomposition

$$H^2(X, \mu_n)= H^2(E_1, \mu_n)\oplus H^2(E_2, \mu_n)\oplus H^1(E_1, \mu_n)\otimes H^1(E_2, \mu_n);$$

(b) Assume that L_1, M_1 are a basis for $H^1(\hat{E}_1, \mu_n)$, and let P_1, Q_1 be the points of E_1 corresponding to L_1, M_1, respectively. For a homomorphism $\varphi : E_2 \to \hat{E}_1$ such that

$$\hat{\varphi}(P_1) = L_2, \quad \hat{\varphi}(Q_1) = M_2,$$

we have

$$\gamma(\varphi) = L_1\otimes M_2-M_1\otimes L_2$$

in $H^1(E_1, \mu_n)\otimes H^1(E_2, \mu_n)$.

Proof. (a) This is obvious.

(b) From the meaning of the map γ, one can easily compute the value $\gamma(\varphi)$ in $H^1(E_1, \mu_n)\otimes H^1(E_2, \mu_n)$.

Remark 5.3. Using Proposition 5.2, one can easily compute the relations on the set of generators of the group $Br(X)_n$ of a product X of two elliptic curves (see Example 8.4).

Theorem 5.4. With the same notations as above, the following conditions are equivalent:

(1) The projective space bundle P(L, M), or equivalently, the Azumaya algebra A(L, M) comes from some vector bundle over X;

(2) The elements $L_1 \otimes M_2 - M_1 \otimes L_2$ in $H^1(E_1, \mu_n) \otimes H^1(E_2, \mu_n)$ is equal to $\gamma(\varphi)$ for some correspondence φ between E_1 and E_2;

(3) $\{L, M\}_n = 0$.

Proof. Combine Corollary 2.3, Lemma 5.1 and Proposition 5.2 (a).

Under the equivalent conditions above, we say that the element $L_1 \otimes M_2 - M_1 \otimes L_2$ *comes from* the correspondence φ between E_1 and E_2. In Section 7, we shall explain the relation between the correspondences and the vector bundles above.

As an application of Theorem 5.4, we obtain an elementary, concrete example of projective space bundles which do not come from any vector bundles (see also Example 8.4). Such an example in the case over a complex number field $\mathbb{C}$ has been given by J.-P. Serre [12, 6.4].

Example 5.5. With the same notations as above, assume that E_1 and E_2 are not isogenous and $L \cup M$ is not zero. Then, it follows from Theorem 5.4 that the projective space bundle P(L, M) does not come from any vector bundle. Note that, in case n = 2, P(L, M) is explicitly given in terms of a conic bundle.

6. Some Properties

In this section, we state some properties of our projective space bundles over an abelian variety, which will be used below.

Proposition 6.1. Let X be an abelian variety, and let L and M be n-torsion line bundles over X. Then, the projective space bundle P(L, M) is homogeneous. In particular, if P(L, M) comes from a vector bundle V over X, then V is homogeneous up to tensoring line bundles over X, namely, *semi-homogeneous* (see [8, (5.2)]).

Proposition 6.2. Let X be an abelian variety, and let L and M be n-torsion line bundles over X. Assume that the projective space bundle P(L, M) comes from a vector bundle V over X. Then, the following conditions are equivalent:

(1) P(L, M), or equivalently, V is simple;

(2) The cup-product $L \cup M$ has order n in $H^2(X, \mu_n)$.

Proposition 6.3. Let X be an abelian variety of dimension g, and let L and M be n-torsion line bundles over X. For an integer d, the following conditions are equivalent:

(1) The projective space bundle P(L, M) is a pull-back from an abelian variety of dimension d;

(2) Both L and M are pull-backs from an abelian variety of dimension d.

7. Vector Bundles over a Product of Two Elliptic Curves

From now on, we always consider the case n = 2. So, the characteristic p is not 2.

Example 7.1. Let X be an elliptic curve, and let P_∞ be the point of X corresponding to the unity of the group X. For any 2-torsion line bundles L and M over X such that the cup-product $L \cup M$ is not zero, let P_0 and P_1 be the points of X corresponding to them, respectively, where we note that the conditions $L \cup M \neq 0$ and $P_0 \neq P_1$ are equivalent.

It follows from Tsen's theorem that the Hilbert symbol $\{L, M\}_2$ is zero. In other word, the projective line bundle $C(L, M)$ has a rational section over X, and comes from some vector bundle over X.

We here construct a global section of $C(L, M)$ and construct the vector bundle over X. One may assume that X is given by an equation

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \qquad \text{with } \lambda \neq 0,\ 1$$

in $\mathbb{P}^2$ such that P_∞ is the point at infinity and P_0, P_1 have coordinate $(0, 0)$, $(1, 0)$, respectively. Let P_λ be the point of X with coordinate $(\lambda, 0)$. In terms of the group structure of X, we have that $P_0 + P_1 = P_\lambda$.

Now, for such a pair (L, M), according to the local investigation of conic bundles over X at Section 1, the quadratic form $q(L, M)$ on the vector bundle $E(L, M)$, denoted by E, is represented by a matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -x & \\ & & -(x-1) \end{pmatrix}$$

at the generic point Spec K of X. Clearly, it has a K-rational solution $(1:1:i)$, with $i^2 = -1$. By the ratio $(1:1:i)$, we embed the line bundle $O_X(-P_\infty)$ into E as a subbundle: We define a map s from $O_X(-P_\infty)$ to $E = O_X \oplus L \oplus M$ by $s(\alpha) := (\alpha:\alpha:i\alpha)$. Then, we find that s gives a global section of $C(L, M)$ over X. According to Theorem 3.3 (b), with the same notations as there, $C(L, M)$ comes from the cokernel $V_0 = V$ of s, where $(s)_0$ is empty, in other words, s is an injection of vector bundles, so its cokernel V_0 is already locally free. From the exact sequence of vector bundles over X

$$0 \to O_X(-P_\infty) \xrightarrow{s} E \to V \to 0,$$

we find that the vector bundle V is indecomposable, of rank 2, with the first Chern class P_λ, where one should note that P_λ is the point of X corresponding to the 2-torsion line bundle L⊗M. Now, according to M. F. Atiyah [2, II, Theorem 7], such a vector bundle V is characterized by the properties above. In this article, a vector bundle V over an elliptic curve X is called *of type Atiyah (determined by a point* P of X) if V is indecomposable, of rank 2 and degree 1 (whose first Chern class is represented by the point P). Using the characterization above, we see that a vector bundle of type Atiyah is semi-homogeneous (see [2, II, Corollary, p434]), which follows also from Proposition 6.1. On the other hand, it is well-known that a vector bundle of type Atiyah is simple (see [2, III, §2, Lemma 22]), which follows also from Proposition 6.2.

Theorem 7.2. Let X be a product of elliptic curves E_1 and E_2 with i-th projection p_i, let L and M be 2-torsion line bundles over X, written

$$L = p_1{}^*L_1 + p_2{}^*L_2, \quad M = p_1{}^*M_1 + p_2{}^*M_2,$$

with n-torsion line bundles L_i, M_i over E_i, i = 1, 2, and let P_i be the 2-torsion point of E_i corresponding to a line bundle $L_i + M_i$, i = 1, 2. Assume that the Hilbert symbol $\langle L, M\rangle_2$ is equal to zero, and let Φ_i be the homomorphism from X to E_i defined by the correspondence between E_1 and E_2 which comes to the element $L_1 \otimes M_2 - M_1 \otimes L_2$ in $H^1(E_1, \mu_2) \otimes H^1(E_2, \mu_2)$ (see Theorem 5.4). Then, we have:

(a) In case the cup-product $L \cup M$ is zero, the quaternion algebra A(L, M) comes from either $O_X \oplus L$ or $O_X \oplus M$, corresponding to whether L is non-trivial or not , or whether M is trivial or not;

(b) In case $L_i \cup M_i$ is not zero for some index i, let V_i be a vector bundle of type Atiyah over E_i determined by P_i. Then, A(L, M) comes from the pull-back $\Phi_i^* V_i$;

(c) In case both $L_1 \cup M_1$ and $L_2 \cup M_2$ are zero but $L_1 \otimes M_2 - M_1 \otimes L_2$ is not zero, let V_i' be a vector bundle of type Atiyah over E_i determined by a non-zero 2-torsion point other than P_i. Then, A(L, M) comes from the composition of $\Phi_i^* V_i'$ and $p_i^* V_i'$, which is constructed as in Theorem 4.2 (b). In this case, A(L, M) is uniquely determined by the value $L_1 \otimes M_2 - M_1 \otimes L_2$.

Proof. See [K].

Corollary 7.3. With the same notations as above, if the Hilbert symbol $(L, M)_2$ is equal to zero, then the quaternion algebra A(L, M) comes from one of the vector bundles of the following three types:

(1) A direct sum $O_X \oplus L$ or $O_X \oplus M$;

(2) A pull-back of a vector bundle of type Atiyah over either E_1 or E_2 by a morphism defined by $L \cup M$, which is semi-homogeneous and simple;

(3) A composition of vector bundles of type (2) above, which is semi-homogeneous and simple.

Proof. See Propositions 6.1, 6.2 and Theorem 7.2.

Remark 7.4. For a vector bundle V of type (3) in Corollary 7.3, we have both examples, such that V is a pull-back of a vector bundle over some elliptic curve, and such that V is not any pull-back of any vector bundle over any elliptic curve (see Example 8.5).

8. Examples

Throughout this section, we consider the case $n = 2$, so that the characteristic p is not 2. We shall discuss some examples over a product of two elliptic curves E given by the equation

$$y^2 = x^3 - x$$

in $\mathbb{P}^2$.

First, we fix some notations and state some elementrary facts on the elliptic curve E. Let P_∞ be the point of E at infinity. Considering P_∞ as a unity, define a group structure on E. Via an isomorphism from E to its dual defined by P_∞, we sometimes identify them. Let P_{-1}, P_0 and P_1 be the points of E with coordinates $(-1, 0)$, $(0, 0)$ and $(1, 0)$, respectively. Let L and M be the 2-torsion line bundles over E corresponding to P_0 and P_1, respectively, which form a basis for the group $H^1(E, \mu_2)$.

Computing the Hasse invariant, we have

Lemma 8.1. E is supersingular if and only if $p \equiv 3$ modulo 4.

Let R be the ring of endomorphisms of E, and let ι be the endomorphism of E defined by $\iota(x, y) := (-x, iy)$, with $i^2 = -1$. It clearly follows that

$$\iota^2 + 1 = 0,$$

$$\hat{\iota}(P_0) = L, \qquad \hat{\iota}(P_1) = L + M. \tag{1}$$

Moreover, we have

Lemma 8.2. If E is not supersingular, then R is freely generated by 1 and ι as a $\mathbb{Z}$-module.

Proof. See, e.g., [5, IV, (4.19)] and [10, IV, §22, Second example].

If, on the contrary, E is supersingular, then R is a maximal order of the quaternion division algebra $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ over $\mathbb{Q}$ (see, e.g., [loc. cit.]). To get a typical example of funny phenomenon in this case, we assume $p = 3$ (see Lemma 8.1). Then, let η be an endomorphism of E defined by $\eta(x, y) := (x+1, y)$. We have

$$\eta^2 + \eta + 1 = 0,$$

$$\hat{\eta}(P_0) = L + M, \qquad \hat{\eta}(P_1) = L. \tag{2}$$

Moreover, we find the following relations

$$\iota\eta=\eta^2\iota, \qquad \iota\eta\iota\eta+1=0,$$

$$\eta\iota=\iota\eta^2, \qquad \eta\iota\eta\iota+1=0.$$

Remark 8.3. Furthermore, one can easily show that R is freely generated by 1, ι, η and $\iota\eta$ as a $\mathbb{Z}$-module.

Now, let E_1 and E_2 be two copies of E, and let X be a product of E_1 and E_2 with i-th projection p_i .

Example 8.4 (for Remark 5.3). It can be shown that: if E is supersingular, then $Br(X)_2$ is zero; otherwise, it is a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module of rank 2. We assume that E is not supersingular.

Here, we shall find a free generator of $Br(X)_2$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. By virtue of Lemmas 5.1 and 8.2, we see that $Br(X)_2$ is isomorphic to a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module generated by $L\otimes L$, $L\otimes M$, $M\otimes L$ and $M\otimes M$ with relations $\gamma(1) = \gamma(\iota) = 0$. Using Proposition 5.2 (b) and the equalities (1), we have

$$\{p_1{}^*L,\ p_2{}^*M\}_2 = \{p_1{}^*M,\ p_2{}^*L\}_2 \tag{3}$$

$$\{p_1{}^*L,\ p_2{}^*L\}_2 = 0. \tag{4}$$

Thus, $Br(X)_2$ is freely generated by $\{p_1{}^*L, p_2{}^*M\}_2 = \{p_1{}^*M, p_2{}^*L\}_2$ and $\{p_1{}^*M, p_2{}^*M\}_2$ over $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. According to Proposition 1.5, the equality (4) means that $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ comes from some vector bundle over X. We note that $A(p_1{}^*L, p_2{}^*M)$, $A(p_1{}^*M, p_2{}^*L)$ and $A(p_1{}^*M, p_2{}^*M)$ do not come from any vector bundles over X.

Example 8.5 (for Remark 7.4). According to Theorem 7.2, $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ comes from a vector bundle of type (3) in Corollary 7.3. We shall show that: In case $p = 3$, $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ comes from a pull-back of a vector bundle over an elliptic curve; In case $p = 0$, $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ does not come from any pull-back of any vector bundle over any elliptic curve.

First, assume $p = 3$. Let ψ be the endomorphism $\iota+\eta+\iota\eta$ of E, and define a homomorphism $\Psi: X \to E$ to be the composition of $\psi \times \iota\psi$ with the group law of E. Using the equalities (1) and (2), we find that

$$\Psi^* A(L + M, M) = A(p_1{}^*L, p_2{}^*L).$$

According to Example 7.1, $A(L + M, M)$ comes from a vector bundle V_3 over E which is of type Atiyah determined by the point P_0. Thus, our algebra $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ comes from the pull-back $\Psi^* V_3$.

Next, assume $p = 0$. In order to prove our claim, by Proposition 6.3, we have only to show that both line bundles $p_1{}^*L$ and $p_2{}^*L$ are not pull-backs of any line bundles over any elliptic curve. In this case, we may assume that the ground field k is a complex number field $\mathbb{C}$, and our elliptic curve E is given by

$$E = \mathbb{C}^1/\Gamma, \qquad \Gamma = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot i,$$

with $i^2 = -1$ (see, e.g., [5, IV, (4.20.1)]). Hence, it follows

$$X = \mathbb{C}^2/\Gamma \times \Gamma.$$

Identifying X with its dual, the line bundles $p_1{}^*L$ and $p_2{}^*L$ correspond to the vectors $\left(\frac{1+i}{2}, 0\right)$ and $\left(0, \frac{1+i}{2}\right)$ of $\mathbb{C}^2$ modulo $\Gamma \times \Gamma$, respectively. Now, assume that both line bundles are pull-backs of some line bundles over an elliptic curve. Then, there should exist a 1-dimensional vector subspace of $\mathbb{C}^2$ which contains both $\left(\frac{1+i}{2}, 0\right)$ and $\left(0, \frac{1+i}{2}\right)$ modulo $\Gamma \times \Gamma$. Therefore, we have

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} + a & b \\ c & \frac{1+i}{2} + d \end{pmatrix} = 0$$

for some elements a, b, c and d of Γ. It follows that the complex number $\frac{1+i}{2}$ is integral over $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$. This contradicts the fact that the ring $\mathbb{Z}[i]$ of Gaussian integers is integrally closed in its quotient field $\mathbb{Q}(i)$. Hence, our algebra $A(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$ does not come from any pull-back of any vector bundle over any elliptic curve.

Finally, we refer to a rational solution of a quadratic form over the function field K of X. Chasing the construction of the vector bundles at Section 7, one can find a K-rational solution of *all* the quadratic form $q(L, M)$ with 2-torsion line bundles L and M over X.

Example 8.6. Let q be the quadratic form $q(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$. According to the local investigation of conic bundles at Section 1, q is represented by a matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -x_1 & \\ & & -x_2 \end{pmatrix}$$

at the generic point Spec K of X, where (x_i, y_i) is the affine coordinate of E_i in $\mathbb{P}^2$, with $i = 1, 2$. This qudratic form q defines the conic bundle $C(p_1{}^*L, p_2{}^*L)$, which comes from a vector bundle of type (3) in Corollary 7.3. So, chasing the construction of vector bundles of this type, making a calculation, we find a solution (X:Y:Z) of q, where

$$X := \frac{1-i}{2}\left(x_1{}^2x_2 + \frac{i}{2}y_1{}^2 \right) + x_1\left(\frac{1+i}{4}(x_1{}^2+1)x_2 - \frac{i}{2}y_1y_2\right)$$

$$Y := \frac{1+i}{4}y_1(x_1+i)(x_2-1) - \frac{i}{2}y_2x_1(x_1-i)$$

$$Z := \frac{1-i}{2}\left(x_1{}^2x_2 + \frac{i}{2}y_1{}^2 \right) + \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{1+i}{4}(x_1{}^2+1)x_2 - \frac{i}{2}y_1y_2\right)$$

with $i^2 = -1$.

References

1. M. Artin and D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, *Proc. London Math. Soc.* (3) 25 (1972), 75-95.

2. M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.* (3) 7 (1957), 414-452.

3. V. G. Berkovich, The Brauer group of abelian varieties, *Functional Anal. Appl.* 6 (1973), 180-184.

4. G. Elencwajg and M. S. Narasimhan, Projective bundles on a complex torus, *J. Reine Angew. Math.* 340 (1983), 1-5.

5. R. Hartshorne, "Algebraic Geometry," Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.

6. R. Hoobler, When is Br(X)=Br'(X)?, *in* "Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry," Lecture Notes in Mathematics 917, pp231-244, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/New York, 1982.

7. J. S. Milne, "Étale Cohomology," Princeton Mathematical Series 33, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.

8. S. Mukai, Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety, *J. Math. Kyoto Univ.* 18 (1978), 239-272.

9. D. Mumford, Theta characteristics of an algebraic curve, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 4 (1971), 181-192.

10. D. Mumford, "Abelian Varieties," Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics 5, Oxford University Press, Bombay, 1974.

11. C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, "Vector Bundles on Complex Projective Spaces," Progress in Mathematics 3, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1980.

12. J.-P. Serre, Espaces fibrés algébriques, *in* "Anneaux de Chow et

Applications," Séminaire Chevalley 2, Secrétariat Math., Paris, 1958.

13. J.-P. Serre, "Local Fields," Graduate Texts in Mathmatics 67, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.

14. H. Umemura, On a certain type of vector bundles over an abelian variety, *Nagoya Math. J.* 64 (1976), 31-45.

K. H. Kaji, On the vector bundles whose endomorphisms yield Azumaya algebras of cyclic type, to appear in *J. Algebra*.

多項式環の d ―列とその応用

下田保博

序　Aは可換環で単位元1をもつものとする。$a, a_1, \cdots, a_r$ をAの元の列とし，aは特にべき零でないとする。このときAの局所化 $A[\frac{1}{a}]$ およびその部分環 $T = A[\frac{a_1}{a}, \cdots, \frac{a_r}{a}]$ が考えられる。このTについて歴史的な結果をのべておく。

知られていることがら；

(1) regular local ring の monoidal transform

(A, m) が regular local ring で $P = (a, a_1, \cdots, a_r)$ をその素イデアルとする。また剰余環 A/P は regular local ring であると仮定する。このとき，上記のTの mT を含むTにおける素イデアルQによる局所化 T_Q はPを中心にもつAの monoidal transform とよばれる。またとくに $P = m$ のとき，T_Q は quardratic transform とよばれる。regular ring の2つの組に対して次の問題があることが知られている。

問題（Zariski－Abhyankar）

(R, S) を d－次元 regular local ring の pair で同じ商体をもち，SはRを支配する（すなわち，$n(R)$, $n(S)$ をR, Sの極大イデアルとするとき，$n(S) \cap R = n(R)$）ものとせよ。このとき，regular local ring の列 $R_0, \cdots, R_t$ で $R_0 = R$, $R_t = S$ で R_i は R_{i-1} の quardratic transform になるものがあるか？

Abhyankar は[1]で $d = 2$ のときはこの問題は正しいことを証明したが，しかし1971年に Shannon [13]，1972年に Sally [11] が，

quardratic transform でなく、一般の monoidal transform (特に $\mathrm{ht}\,P = 2$ のときで充分であるが) に対しても上記の問題 1 は $d > 2$ とすると成立しないことを示した。次の例は Sally [11] による。

<u>例</u> (R, m) を d-次元 regular local ring で $d > 2$ とする。$m \ni x, y, z$ を最小生成系の一部とする。$f_i = y^2 + z^{2i+1}$ $(i \geq 1)$, $T_i = R[\frac{x}{f_i}]_N$ (ただし N は $R[x/f_i]$ の極大イデアルで $N \cap R = m$) かつ $\mathrm{ht}(x, f_i) = 2$.

さて、一般の環 A に対しても $T = A[\frac{a_1}{a}, \cdots, \frac{a_r}{a}]$ を monoidal transform とよぶようであり、いろいろ研究がなされている。特に次のような結果が知られている。

(2) 正則列と monoidal transform

A が Noether 環で、$a, a_1, \cdots, a_r$ が正則列のときは T について次が成立する。

$X_1, \cdots, X_r$ を A 上の変数とし、多項式環 $F = A[X_1, \cdots, X_r]$ を考えると、自然な環準同型写像 $\varphi : F \longrightarrow T$ が $\varphi(X_i) = -\frac{a_i}{a}$ により定義される。今 F の中で $f_1 = aX_1 + a_1, \cdots, f_r = aX_r + a_r$ という列を作ると、明らかに $I = (f_1, \cdots, f_r) \subset \ker\varphi$ である。

いつ $\ker\varphi$ は I に等しくなるかに関しては

<u>命題 (Davis [2])</u> $a, a_1, \cdots, a_r$ が正則列ならば、$I = \ker\varphi$ である。

さらに次が成立する。

<u>命題 (松岡 [8])</u> $f_1, \cdots, f_r$ は正則列である。

<u>命題 (Hochster - Ratlift [6], 松岡 [8], Ratlift [9])</u>

(A, m) を Cohen-Macaulay ring, $a, a_1, \cdots, a_r$ は正則列とする。

このとき，$T=A[\frac{a_1}{a},\cdots,\frac{a_r}{a}]$ は Cohen-Macaulay ring になる。

このことを用いて Sally は次のことを示した。

<u>命題 (Sally [12])</u>

$(A,\mathfrak{m})$ を Cohen-Macaulay ring とする。もし $G(\mathfrak{m})=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ が Cohen-Macaulay ring ならば，$\mathrm{proj}\bigoplus_{j=0}\mathfrak{m}^j$ も Cohen-Macaulay になる。

(3) T の Cohen-Macaulay 性について

(2) で A が Cohen-Macaulay ring ならば，T は $a,a_1,\cdots,a_r$ が正則列のとき，T も Cohen-Macaulay になることがわかった。そこで次のような問題を考える。

<u>問題</u> A が必ずしも Cohen-Macaulay でないとするとき，T はいつ Cohen-Macaulay になるか？

これについて次のような結果が知られている。

<u>命題 (後藤 [3])</u>

$(A,\mathfrak{m})$ を Buchsbaum ring，$a_1,a_2,\cdots,a_d$ を A のパラメーター系とし，$A'=A[\frac{x}{a_1}:x\in\mathfrak{m}]$ とおく。このとき，$a_1,\frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_d}{a_1}$ は A' で正則列であり，A'_N ($N=(\{\frac{x}{a_1}:x\in\mathfrak{m}\},\mathfrak{m})$ とおく) は Cohen-Macaulay ring になる。

ここで，$(A,\mathfrak{m})$ が Buchsbaum ring であるとは，A の任意のパラメーター系が次の (i), (ii) をみたすものをいう。

(i) $a_i\notin(a_1,\cdots,\check{a}_i,\cdots,a_r)$ (今の場合は常に成り立つ)

(ii) $(a_1,\cdots,a_i):a_{i+1}a_j=(a_1,\cdots,a_i):a_j$

for $0\leqq i<j\leqq r$ が成り立つ。

(この条件をみたす元の列 $a_1, \dots, a_d$ は一般に d-列とよばれる。)

次に

<u>命題 (Huneke [7])</u> $a_1, \dots, a_r$ を d-列とし, $q = (a_1, \dots, a_r)$ とおく。q に関する Rees 環 $R(q) = \bigoplus_{n \geq 0} q^n = A[a_1X, \dots, a_rX]$ を考える。このとき, $a_1X, \dots, a_rX$ は $R(q)$ で d-列になる。

この命題に従えば $a_rX \cdot H_1((a_1X, \dots, a_{r-1}X); R) = (0)$ が成立するので, $R(q)_{(a_rX)}$ で $\frac{a_1}{a_r}, \dots, \frac{a_1}{a_r}$ は正則列。よって次が成立する。

<u>命題 (Herzog - Simis - Vasconcelos [5])</u>

(A, m) を d-次元 Noether 環とし, $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_d = z\}$ をパラメーター系で d-列とする。$T = A[\frac{x_1}{z}, \dots, \frac{x_d}{z}]$, $N = (m, \frac{x_1}{z}, \dots, \frac{x_{d-1}}{z})$ とおくと, T_N は Cohen-Macaulay ring になる。

さらに, Ratliff は環の unmixed 性に関連して上の命題の $d=2$ の場合の一般化である次の形の命題を示した。

<u>命題 (Ratliff [10])</u> (A, m) を 2-dim 局所整域とし, b, c をパラメーター系とする。もし $bA : cA = bA_S \cap A$ ならば, $A[\frac{b}{c}]_{(m, \frac{b}{c})}$ は Cohen-Macaulay 環になる。ここで, $S = A \setminus \bigcup \mathfrak{P}$. ($\mathfrak{P}$ は ht $\mathfrak{P} = 1$ の素イデアルで $\mathfrak{P} \ni (b)$)

以上の結果に従えば, T の局所化が Cohen-Macaulay かどうかは元の列 $a_1, \frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_r}{a_1}$ が正則列かどうかによって決定される (ただし $T = A[\frac{a_2}{a_1}, \dots, \frac{a_r}{a_1}]$ とする。) さらに次のようなこともいえる。

注意 $a, a_1, \ldots, a_r \in A$ で $B = A[X_1, \ldots, X_r]/(aX_1+a_1, \ldots, aX_r+a_r) = A[x_1, \ldots, x_r]$ とおく。さて，a が B で零因子でないと仮定する。このときは容易に $T = B$ となり，明らかに $a, \frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_r}{a}$ は正則列をなす。

特に $a, a_1, \ldots, a_r$ が A のパラメーター系のときには B が Cohen-Macaulay と仮定すると，A もそうなることがわかる。

従って以下我々の考察対象は a は B で零因子でない場合を扱うものとする。同時に $T \neq B$ でもある。

このとき次のような問題が提起できるであろう。

問題 (1) $a, a_1, \ldots, a_r \in A$ をとる。$aX_1+a_1, \ldots, aX_r+a_r$ は多項式環の中でどのような性質をもつか？

(2) $B = A[X_1, \ldots, X_r]/(aX_1+a_1, \ldots, aX_r+a_r) = A[x_1, \ldots, x_r]$，$T = A[\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_r}{a}]$ とおく。B または T について何がいえるか？

（たとえば，いつ $x_1, \ldots, x_r$ または $\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_r}{a}$ は正則列をなすか？）

本稿では最初に与えられた元の列 $a, a_1, \ldots, a_r$ が d-列であるときに，上の (1)，(2) について調べるのが主目的である。

結果は次の２つである。

定理１ A は可換環で，$a, a_1, \ldots, a_r$ は d-列であるとする。このとき，次の条件は同値である。

(i) $x_1, \ldots, x_r$ は $B = A[X_1, \ldots, X_r]/(aX_1+a_1, \ldots, aX_r+a_r) = A[x_1, \ldots, x_r]$ で正則列になる。

(ii) $\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_r}{a}$ は $T = A[\frac{a_1}{a}, \ldots, \frac{a_r}{a}]$ で正則列

(iii) $(a_1, \ldots, a_j) : a_{j+1} = (a_1, \ldots, a_j) : a$ for $0 \leq j \leq r-1$

<u>定理2</u>　Aは可換環で$a_1, \cdots, a_r, a$はd-列とする。このとき

(1) $aX_1+a_1, \cdots, aX_r+a_r, a$は$A[X_1, \cdots, X_r]$の中でd-列になる。

(2) $B = A[X_1, \cdots, X_r]/(aX_1+a_1, \cdots, aX_r+a_r) = A[x_1, \cdots, x_r]$とおくと

$x_1, \cdots, x_r$は正則列

さらに、(A, m)が局所環のとき

(3) B_MがCohen-Macaulay $\Longleftrightarrow$ $A/(a_1, \cdots, a_r)$はCohen-Macaulay

ただし$M = (m, x_1, \cdots, x_r)$.

本稿で扱う記号を用意しておく。

<u>記号</u>　(1) 環AとそのイデアルIを考える。$a \in A$に対して、A/Iでのaの像を常に$\bar{a}$で表わすことにする。

(2) $Z(A) = \{ r \in A : ra = 0 \text{ for } {}^\exists a \neq 0 \}$とおく。すなわち$Z(A)$は$A$の零因子の全体の集合である。

(3) 多項式環$A[X]$の元fにおいて、f_nをfのX^nの係数として表わす。

1. 定理1の証明

ここでは大まかに定理1の証明をしたい。くわしくは[16]を参照されたい。

まず必要とするのは次の補題である。

<u>補題1</u>　$a, a_1, \cdots, a_r$はd-列とする。このとき$A[X]/(aX+a_1)$で$\bar{a}, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_r$はd-列となる。

<u>命題2</u>　$a, a_1, \cdots, a_r$はd-列とする。このとき、$aX_1+a_1, \cdots, aX_r+a_r, a$は$A[X_1, \cdots, X_r]$でd-列となる。

<u>定理1の証明</u>

(i) ⇒ (iii)：まず次の主張を示す。

<u>主張1</u>　$0:\mathfrak{a} \subset 0:a_1$ のとき $\overline{x_1} \notin Z(A[x_1]/(\mathfrak{a}x_1+a_1)) \Longleftrightarrow 0:\mathfrak{a} = 0:a_1$.

今 $\overline{x_i} \notin Z(B/(\overline{x_1},\dots,\overline{x_{i-1}})B)$ とせよ. このとき, $\overline{x_i} \notin Z(A/(a_1,\dots,a_{i-1})[x_i]/(f_i))$ が成り立つ。よって上の主張1により $(a_1,\dots,a_{i-1}):a_i = (a_1,\dots,a_{i-1}):\mathfrak{a}$ がいえる。

(iii) ⇒ (i)：主張1より $\overline{x_j} \notin Z(A/(a_1,\dots,a_{j-1})[x_j]/(f_j))$ がいえる。このとき,

<u>主張2</u>　$\overline{x_j} \notin Z(A/(a_1,\dots,a_{j-1})[x_j]/(f_j))$ なら,

$\overline{x_j} \notin Z(A/(a_1,\dots,a_{j-1})[x_j,\dots,x_r]/(f_j,\dots,f_r))$.

主張2は $\overline{x_j} \notin Z(B/(\overline{x_1},\dots,\overline{x_{j-1}})B)$ を示しているので, $x_1,\dots,x_r$ は B で正則列となる。

(i) ⟺ (ii)：まず命題2から次のことがわかる。

<u>主張3</u>　$T = A[x_1,\dots,x_r]/(f_1,\dots,f_r):\mathfrak{a}$ かつ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{q}A[x_1,\dots,x_r]/(f_1,\dots,f_r) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & B \arrow[r] & A/\mathfrak{q}[x_1,\dots,x_r] \arrow[r] & 0 \\
& T & & &
\end{tikzcd}$$

は完全列　ただし $\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, a_1,\dots,a_r)$.

この完全列にヘビの補題を順次適応することにより (i) ⇒ (ii) がいえる。(ii) ⇒ (i) は (ii) から (iii) の条件を計算により次のようにして求める。

$(a_1,\dots,a_{i-1}):a_i \ni y$ とせよ. $y\mathfrak{a}x_i \in (a_1,\dots,a_{i-1},f_i,\dots,f_r)$.

このとき, $\overline{x_i} = \dfrac{a_i}{\mathfrak{a}}$ は T で零因子にならないので, $y\mathfrak{a} \in (a_1,\dots,a_{i-1},f_i,\dots,f_r)$

よって $y \in (a_1,\dots,a_{i-1}):\mathfrak{a}$ がいえる。

2 定理2の証明.

まず次の補題から始める。

補題4 a, bはAの元の列で, $0:b \subset 0:a$とする。このとき,
$\bar{X} \notin Z(A[X]/(aX+b))$.

今定理2の(1)が成り立つものとする。つまり, $a_1, \cdots, a_r, a$がd-列のとき,

(*) $a_1, \cdots, a_i, aX_{i+1}+a_{i+1}, \cdots, aX_r+a_r, a$はd-列 $(1 \leq i \leq r-1)$
が成り立つものとする。このとき次のd-列に関する定理を用いると,
定理2の(2)がいえる。

定理(後藤－山岸[4]) $a_1, \cdots, a_s$がd-列で$q=(a_1, \cdots, a_s)$とおく。このとき,

$$(a_1, \cdots, \check{a}_j, \cdots, a_k) : a_j \subset (a_1, \cdots, \check{a}_j, \cdots, a_k) : q$$

for $1 \leq j < k \leq s$.

従って(*)の列で

$$(a_1, \cdots, a_{i-1}, f_{i+1}, \cdots, f_r) : a_i \subset (a_1, \cdots, a_{i-1}, f_{i+1}, \cdots, f_r) : a$$

が成り立つ。これは環 $A/(a_1, \cdots, a_{i-1})[X_{i+1}, \cdots, X_r]/(f_{i+1}, \cdots, f_r)$ が
補題4の仮定をみたしていることを示している。よって $x_i \notin Z(B/(x_1, \cdots, x_{i-1})B)$.

そこで定理2の(1)を示せばよいことになる。以下$a_1, \cdots, a_r, a$が
d-列なら, $aX_1+a_1, \cdots, aX_r+a_r, a$がd-列になることを示す。まず,
定理1の中で示したように, 補題1と同様の形を示せばよい。しかしながら,
次に示すような反例があって補題1に相当するものは成立しないことに
なる。

例 $a_1, \cdots, a_r, a$はd-列であっても$A[X]/(aX+a_1)$で$\bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_r, \bar{a}$は
d-列になるとは限らない。たとえば, $A=k[S, T, U, V, W]/(S^2T, SU, ST-SV, VW)$
$=k[s, t, u, v, w]$とし, $a_1=t$, $a_2=u$, $a=v$とおく。

$A[X]/(vX+t)$ で $(\bar{0}):\bar{v}$ をとると，$(\bar{0}):\bar{u}\bar{v} \neq (\bar{0}):\bar{v}$ となる。
よって $\bar{u}, \bar{v}$ は d－列でない。

しかしながら次の補題は成立する。

<u>補題5</u> $a_1, \cdots, a_r, a$ が次の①，②をみたすとする。

① $a_1, \cdots, a_r, a$ は d－列

② $a_1, \cdots, a_r$ は u.d－列

このとき，$A[X]/(aX+a_1)$ で $\bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_r, \bar{a}$ は上の①，②をみたす。

ここで，A の元の列 $a_1, \cdots, a_r$ が unconditioned d－列（略して u.d－列とかく）とは $a_1, \cdots, a_r$ のどの順序も d－列になることである。

上の補題5は最終的には次を示せばよいことに帰着できる。

<u>補題6</u> a, b が d－列のとき，$bX+a, b$ は $A[X]$ で d－列となる。

さて補題5より次のことが導かれる。

<u>命題7</u> A の元の列 $a_1, \cdots, a_r, a$ が

① $a_1, \cdots, a_r, a$ は d－列

② $a_1, \cdots, a_r$ は u.d－列

をみたすものとする。このとき，$aX_1+a_1, \cdots, aX_r+a_r, a$ は $A[X_1, \cdots, X_r]$ で d－列となる。

そこで我々の問題は次のようなことになろう。

<u>問題</u> 与えられた d－列 $a_1, \cdots, a_r$ に対して

(1) $(b_1, \cdots, b_i) = (a_1, \cdots, a_i)$ for $1 \leqq i \leqq r$

(2) $b_1, \cdots, b_r$ は u.d－列

をみたす元の列 $b_1, \cdots, b_r$ が A に存在するか？

例えば，$a_1, \cdots, a_r$ が正則列で A が局所環のときはよく知られているが，この結果を d-列に拡張した場合は成り立つかどうか筆者は現在のところ知っていない。しかしながら，次の形では上記の問題は成立しているといえる。

<u>定理 8</u>　A が可換環で，$a_1, \cdots, a_r$ が d-列であるとする。このとき，A の忠実に平坦な拡大環 A' と A' の元の列 $b_1, \cdots, b_r$ があって

(1) $(b_1, \cdots, b_i) = (a_1, \cdots, a_i)A'$　for $1 \leqq i \leqq r$

(2) $b_1, \cdots, b_r$ は u. d-列

をみたす。

この定理を用いると，忠実に平坦な拡大で不変な A の性質を調べるときには常に $a_1, \cdots, a_r$ という d-列は u. d-列としてよいことになる。

さて上の定理 8 を証明するには次の命題が必要である。

<u>命題 9</u>　$a_1, \cdots, a_r$ は A で d-列であるとし，$\bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_r$ は A/a_1A で u.d-列になると仮定する。このとき，$a_1,\ a_1X_2 + a_2, \cdots, a_1X_r + a_r$ は $A[X_2, \cdots, X_r]$ で u. d-列．

これにより上記定理 8 の $b_1, \cdots, b_r$ は構成可能となる。実際に，$\{X_{ij}\}_{1 \leqq i < j \leqq r}$ を A 上の変数とし，$A' = A[\{X_{ij}\}]$ とおく。

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_1X_{12} + a_2 \\ \cdots \\ b_r = a_1X_{1r} + a_2X_{2r} + \cdots + a_{r-1}X_{r-1\,r} + a_r \end{cases}$$

が求めるものである。

さていまいよ定理 2 の (1) を示すことにしよう。$(r+1) \times (r+1)$ の正方行列 Z を次のような成分 z_{ij} をもつものとする。

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i>j) \\ X_{ij} & (i<j) \end{cases}$$

そして $Y_1, \cdots, Y_r$ を $(Y_1, \cdots, Y_r) = (X_1, \cdots, X_r)Z$ で定義する。

さらに，$b_1, \cdots, b_r$ を定理8の証明で用いたものとし，$1 \leqq i \leqq r$ に対して $f_i' = aY_i + b_i$ とおくと，$(f_1', \cdots, f_r') = (f_1, \cdots, f_r)Z$ が成立する。

次に $B[\{X_{ij}\}] = B'$ とし，$B' = A[\{X_{ij}\}][Y_1, \cdots, Y_r]$ であることに注意すれば，$f_1', \cdots, f_r', a$ は B' で d-列になるのが命題7より導かれる。

さて $f_1, \cdots, f_r, a$ ($= f_{r+1}$ とおく) が d-列になることを示そう。

今 $g \in (f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1}f_j$ であるとせよ。

$$\begin{aligned} gf_j &\in (f_1, \cdots, f_i) : f_{i+1} \\ &\in \{(f_1, \cdots, f_i) : (f_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} f_k X_{k\,i+1})\} \end{aligned}$$

従って
$$\begin{aligned} gf_j &\in (f_1', \cdots, f_i')B' : f_{i+1}' \\ &\in (f_1', \cdots, f_i')B' : f_{i+1}' \cap \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

ここで $\mathfrak{a} = (f_1', \cdots, f_r', a)B' = (f_1, \cdots, f_r, a)B'$ とする。従って $f_1', \cdots, f_r', a$ は B' で d-列となるので，

$$\begin{aligned} gf_j &\in (f_1', \cdots, f_i')B' \cap A[X_1, \cdots, X_r] \\ &\in (f_1, \cdots, f_i)B' \cap A[X_1, \cdots, X_r] \\ &= (f_1, \cdots, f_i) \end{aligned}$$

References

1 S.Abhyanker, On the valuations centered in a local domain, Amer.J.Math. 78(1956)321-348.

2 E.Davis, Ideals of the principal class,R-sequences and a certain monoidal transformation, Pac. J.Math. 20(1967)197-205.

3 S.Goto, Noetherian local rings with Buchsbaum associated graded rings, J.Alg. 86(1984)336-384.

4 S.Goto and K.Yamagishi, The theory of unconditioned strong d-sequences and modules of finite local cohomology,in preprint.

5 J.Herzog,A.Simis,and W.V.Vasconcelos, Approximation complexes of blowing up rings II,J.Alg.82(1983)53-83.

6 M.Hochster and L.J.Ratliff,Jr., Five theorems on Macaulay rings, Pac.J.Math.44(1973)147-172.

7 C.Huneke, Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras, Comm.in Alg.9(1981)339-366.

8 T.Matsuoka, Some remarks on a certain transformation of Macaulay rings, J.Math.Kyoto Univ.11(1971)301-309.

9 L.J.Ratliff,Jr., Two notes of locally Macaulay rings, Trans.Amer.Math.Soc.119(1965)399-406.

10 ---------, A theorem on prime divisors of zero and characterizations of unmixed local domains, Pac.J.Math. 65(1976)449-469.

11 J.Sally, Regular overrings of regular local rings, Trans.Amer.Math.Soc.171(1972)291-300.

12 -------, Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, J.Alg.56(1979)168-183.

13 D.Shannon, Monoidal transforms of regular local rings, Amer.J.Math.95(1973)294-320.

14 Y.Shimoda, On regular sequence of $A[X_1,\ldots,X_r]/I$ with an ideal I generated by a d-sequence.to appear.

ideal の order と multiplicity について

池田 信　岐阜教育大学

I を regular local ring $(R, \mathfrak{m})$ の ideal とする。

$\nu(I) := \max\{n \mid I \subset \mathfrak{m}^n\}$

とおき，これを I の order と呼ぶ。本稿の目的は $\nu(I)$ と local ring R/I の multiplicity $e(R/I)$ との関係を調べることである。一般には $\nu(I)$ と $e(R/I)$ とは無関係である。たとえば I が $\mathfrak{m}$-primary でないとすると

$\nu(I\mathfrak{m}^n) = n + \nu(I)$

$e(R/I) = e(R/\mathfrak{m}^n I)$

だから n が十分大なら $e(R/\mathfrak{m}^n I) < \nu(\mathfrak{m}^n I)$.
一方，任意の自然数 $e \geqq \alpha$ に対して $e(R/I) = e$, $\nu(I) = \alpha$ となるような例はいつでも作れる。以下，簡単のため R は体 k 上の formal power series ring $k[\![X_1, \cdots, X_v]\!]$ とする。

Proposition 1: I が unmixed ならば $\nu(I) \leqq e(R/I)$.

proof. k は無限体としてよい，よって $X_1, \cdots, X_d$ $(d = \dim R/I)$ の R/I における image は $\mathfrak{m}/I$ の minimal reduction を生成するとしてよい。I は unmixed だから $I \cap k[\![X_1, \cdots, X_d, X_{d+1}]\!]$

は $k[\![X_1, \cdots, X_{d+1}]\!]$ の principal ideal でありその生成元を f とする。

$f \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^{n+1}$ とすると $n \geqq \nu(I)$ だから

$$\nu(I) \leqq n = e(k[\![X_1, \cdots, X_{d+1}]\!]/(f)) \leqq e(R/I). \quad \text{Q.E.D.}$$

I が R の unmixed ideal ならば Prop. 1. より $\nu(I) \leqq e(R/I)$ であるが，いつ $\nu(I) = e(R/I)$ となるかが次の問題である。

I が単項 ideal ならば，もちろん $\nu(I) = e(R/I)$ である。

I が unmixed で $e(R/I) = \nu(I)$ であっても I は単項 ideal とは限らない。

<u>Example</u> (1) $R = k[\![X_1, \cdots, X_{2n}]\!]$.

$I = (X_1, X_2) \cap \cdots \cap (X_{2n-1}, X_n)$

とすると I は unmixed であり $n = \nu(I) = e(R/I)$.

(2) X, Y を変数とし $A = k[\![X^2, X^3, XY, Y]\!]$ とおくと A は Buchsbaum で $e(A) = 2$. $R = k[\![X_1, X_2, X_3, X_4]\!]$ から A への surjective ring hom. の kernel を $\mathfrak{g}$ とすると

$$2 = e(R/\mathfrak{g}) = \nu(\mathfrak{g}).$$

この例から分るように $e(R/I) = \nu(I)$ かつ I が unmixed であることは I が単項 ideal であるための十分条件ではない。

Theorem 2. (1) R/I が Cohen-Macaulay であって $\nu(I)=e(R/I)$ ならば I は単項 ideal である。

(2) R/I が unmixed Buchsbaum ring で $e(R/I)=\nu(I)\geqq 3$ ならば I は単項 ideal である。

proof. (1) $A=R/I$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}/I$ とおく。$A/\mathfrak{n}$ は無限体としてよい。$\mathfrak{q}=(x_1,\cdots,x_d)A$ $(d=\dim A)$ を $\mathfrak{n}$ の minimal reduction とすると

$$e(A)=\ell(A/\mathfrak{q}).$$

$n=\nu(I)$ とすると.

$$\begin{aligned} n=\ell(A/\mathfrak{q}) &= \sum_{i\geq 0}\ell(\mathfrak{n}^i+\mathfrak{q}/\mathfrak{n}^{i+1}+\mathfrak{q}) \\ &\geqq \sum_{i=0}^{n-1}\ell(\mathfrak{n}^i/\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}^i+\mathfrak{n}^{i+1}) \\ &= \binom{v-d+n-1}{v-d} \qquad (v=\dim R). \\ &\geqq v-d+n-1 \end{aligned}$$

$$\therefore\ v-d\leqq 1.$$

よって I は単項 ideal である。

(2) $\mathfrak{q}=(x_1,\ldots,x_d)A$ は $\mathfrak{n}$ の minimal reduction であって $e(A)=e(A/(x_1,\ldots,x_{d-1}))$ をみたすものとする。A は Buchsbaum だから $A/(x_1,\ldots,x_{d-1}):x_d$ は Cohen-Macaulay であり

$$e(A) = \ell(A/(x_1, \cdots, x_{d-1}) : x_d + (x_d)).$$

(1)より A が Cohen-Macaulay であればよい。今，A は Cohen-Macaulay でないとしてみよう。このとき $v - d \geq 2$.

$x_1, \cdots, x_d, y, z$ が $\mathfrak{n}$ の minimal generators の一部とするとき，$\bar{y}, \bar{z}$ で y, z の $A/(x_1, \cdots, x_{d-1}) : x_d + (x_d)$ における image を表せば

$$\{\bar{y}^i \bar{z}^j \mid i + j \leq n - 2\} \quad (n = e(A))$$ は k 上1次独立

である。実際，自明でない関係式

$$0 = \sum_{i+j \leq n-2} \alpha_{ij} \bar{y}^i \bar{z}^j \qquad \alpha_{ij} \in k$$

があったとすると A において

$$x_d \left(\sum \alpha_{ij} y^i z^j\right) + a x_d^2 + \sum_{i=1}^{d-1} b_i x_i = 0 \qquad (a, b_i \in A).$$

なる関係式が得られる。これは $\nu(I) = n$ に反する。

よって

$$n = \ell(A/(x_1, \cdots, x_{d-1}) : x_d + (x_d)) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$n \geq 3$ より $n = 3$ を得る。

$$K = \sum_{i=1}^{d} (x_1, \cdots, \check{x}_i, \cdots, x_d) : x_i + \mathfrak{q}$$

とおけば

$$e(A) = 1 + \ell(\mathfrak{m}/K) + \sum_{i=1}^{d-1} \binom{d-1}{i-1} \ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) \quad \cdots (*)$$

$\nu(I) = 3$ であることから任意の $1 \leq i \leq d$ に対し

$$(x_1,\cdots,\check{x}_i,\cdots,x_d):x_i \subset (x_1,\cdots,\check{x}_i,\cdots,x_d)+\mathfrak{n}^2$$

となる。よって　$K \subset \mathfrak{q}+\mathfrak{n}^2$.　$v-d \geqq 2$ より

$$\ell(\mathfrak{n}/K) \geqq \ell(\mathfrak{n}/\mathfrak{q}+\mathfrak{n}^2) \geqq 2.$$

(*) より.

$$3 = e(A) \geqq 1+2+\sum_{i=1}^{d-1}\binom{d-1}{i-1}\ell(H^i_{\mathfrak{n}}(A))$$

よって　$H^i_{\mathfrak{n}}(A)=0 \quad (0<i<d)$

A は unmixed だから $H^0_{\mathfrak{n}}(A)=0$，すなわち A は Cohen-Macaulay。これは A が Cohen-Macaulay でないと仮定したことに反する。よって A は Cohen-Macaulay でなくてはならない。　Q.E.D.

<u>Corollary</u> 3　R/I が Buchsbaum で S_2 をみたしていれば，I は単項 ideal $\Longleftrightarrow$ $e(R/I)=\nu(I)$.

<u>Proof</u>. S_2 条件より R/I は unmixed であることがでる。$e(R/I)=1$ ならば R/I は regular. $e(R/I)\geqq 3$ ならば Theorem 2 より明らか。$e(R/I)=2$ のときは後藤四郎氏により「R/I: $S_2 \Longleftrightarrow R/I$: CM」が証明されている。Q.E.D.

Corollary 3 における仮定「R/I が Buchsbaum」は少し強すぎるように思われる。次に示すように R が homogeneous な多項式環 $k[X_1,\cdots,X_v]$, $\deg X_i=1$ で I が R の

homogeneous ideal ならば R/I が S_2 をみたすという仮定のもとで

$$I:\text{単項} \iff e(R/I) = \nu(I)$$

が成り立つ。また次の定理の証明から $R \doteqdot k[\![x_1,\dots,x_v]\!]$ のときでも R/I が domain でなければ上の二つの条件は同値であることがわかる。このことから次のように予想するのは自然であるように思われる。

Conjecture: R が regular local ring で I が R の ideal であるとき, $e(R/I) = \nu(I)$ でありかつ R/I が S_2 をみたしていれば I は単項 ideal である。

$e(R/I) = \nu(I) = 2$ で R が体を含んでいれば上の conjecture は正しいことが知られているが R が体を含まないときには $e(R/I) = 2$ であっても未解決である。$e(R/I) = 2$ ならば monomial conjecture が正しければ上の conjecture が正しいことは証明されている。

<u>Theorem</u> 4. k が代数閉体で $R = k[x_1,\dots,x_v]$ が homogeneous な多項式環で I が homogeneous ideal で R/I が S_2 をみたしているとき, $e(R/I) = \nu(I)$ ならば I は単項 ideal である。

<u>proof</u>. Case 1: R/I が domain でないとき.

$A = R/I = k[x_1,\dots,x_v]$

とおく。$x_1,\dots,x_d$ は A の s.o.p としてよい。

$S = k[x_1, \ldots, x_d]$, $\quad B = k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}]$ とおくと.

$$e(A) = \mathrm{rank}_S A \geqq \mathrm{rank}_S B = e(B) \geqq \nu(I) \quad (\text{cf. Prop. 1})$$

より $\mathrm{rank}_S A = \mathrm{rank}_S B$, すなわち A と B は birational である。 $v = \dim R \geqq \dim A + 2$ とすると

$C = k[x_1, \ldots, x_d, x_{d+2}] \subsetneqq A$

であり C と A は birational である。

P を $\dim A/P = \dim A$ をみたす A の prime ideal とする。

$P \cap B = fB$, $\quad P \cap C = gC$

とすれば A が domain でないことから

$\deg f, \deg g < n$

一方 A, B, C は birational だから

$Q(A/P) = Q(B/B \cap P) = Q(C/C \cap P)$

これより $\deg f = \deg g = m < n$.

$$\begin{aligned} f &= x_{d+1}^m + a_1 x_{d+1}^{m-1} + \cdots + a_m \\ g &= x_{d+2}^m + b_1 x_{d+2}^{m} + \cdots + b_m \end{aligned} \qquad (a_i, b_i \in S)$$

とする。 B と C が birational であることから S の homogeneous element $0 \neq s, t$ があって

$s f = t g$. $\quad \deg s = \deg t > 0$ とする。

A は S_2 をみたすから s, t は S の元として共通因子をもたないとしてよい。このとき s, t は S-regular だから S_2 より A-regular でもある。

よって

$$x_{d+1}^{m} + a_1 x_{d+1}^{m-1} + \cdots + a_m = t\,a, \quad (a \in A).$$

と書ける。これは degree $m < n$ の non-trivial な関係式で $\nu(I) = n$ に反する。

$\deg s = \deg t = 0$ としても $sf = tg$ は degree $m < n$ の non-trivial な関係式を与える。よって $\dim R \leqq \dim A + 1$.

Case 2. R/I が domain のとき.

Q を $A = R/I$ の homogeneous prime で $\dim A/Q = 1$ をみたすものとすれば k が代数閉体であるから $Q = (x_1, \cdots, x_{v-1})$ としてよい。Abhyankar による次の結果を使う。

Lemma 5. $B = k[x_1, \cdots, x_{v-1}]$ とおくと

$$\begin{cases} e(A) = e(B) & \text{if } \dim A > \dim B. \\ e(A) > e(B) & \text{if } \dim A = \dim B. \end{cases}$$

Prop 1 より $e(B) \geqq \nu(I)$ だから後者は起らない。

v についての induction により B は hypersurface としてよい。$A = B[x_v]$ で $\dim A > \dim B$ だから x_v は B 上代数的に独立, したがって A も hypersurface である。Q.E.D.

正標数の体の代数拡大に伴う高階微分の拡張について

京都大学教養部　鈴木 敏

Kを標数0の体で微分dが与えられて居るものとする．$z \in K$を，Kで積分不能な元とする($dx = z$となる$x \in K$がない)．このときdをKのある拡大体迄拡張して$dy = z$と出来たとする．このときyは必ずK上に超越的である(e.g. Suzuki [10])．Kの標数pが，$p>0$であるとき，これは一般には成り立たない．yがK上非分離な元で$dy = z$なることがあり得る．詳しくは定理6-1の系2．このようなyが，必ず非分離的であると云うことの証明だけならば，帰納法(backwards)を用いて容易に証明出来るが，不思議な事に文献をよく探して見ても，Baerが[1]で特殊な場合に示して居るだけで，一般的な場合の証明は見付からない．このことが1つ．

さらに$p>0$のときは，高階微分を考えるのが普通であるが，この場合上のような超越性，非分離性に対応する事実はどのようにまとめ上げればよいのか，その為に，代数拡大に伴う，高階微分の拡張について，整理して見る必要があると思いこの仕事を始めた．途中種々と，この目的だけの為には不必要な点もあるが，一般論を展開すると云う意味ですべて述べて置く．

標数 0 の場合の超越性に対応する問題は今の所、定理 6−2 である。

さらに進んで、標数 0 の場合、たとえば e^x が定義されない（これを微分方程式の問題と捉えて）、e^{ax} も定義される等に対応する問題も考えなければならないと思うが、今の所手がつかない。

内容の目次は、

§1. 準備

記号

K：標数 $p>0$ の体、　$\overline{K}$：K の代数的閉包

K_s；K の $\overline{K}$ における分離的閉包

L；K の代数的拡大体（$L\subset\overline{K}$）

$d=\{d_i\}_{0\leq i<m+1}$：$K\to K$ の高階微分（$d_0=id_K$）

　m は d の長さ。（$m=\infty$ もあり得る。

$d'=\{d'_i\}_{0\leq i<m+1}$：$d$ の L への拡張（若しあれば）。

$d^{(n)}=\{d_i\}_{0\leq i\leq n}$：$d$ の n 次の切断

$K_{c,d}$（$=K_c$）；d の定数体

$K_i=K_{c,d^{(i)}}$　（L, d' に関しても同様）

$I(d)$：d の index ＝始めて $d_i\neq 0$ となる i

<u>定義</u> 高階微分 d が iterative であるとは，

$$d_i d_j = \binom{i+j}{j} d_{i+j}$$

の条件が充されるときに云う．

(通常) 微分は長さ1の高階微分でもあるし，長さ1の iterative な高階微分でもある．

v を K 上解析的に独立な元とするとき

$E : K \longrightarrow K[[v]]/(v^{m+1})$ で

$E(x) = x + d_1(x)v + d_2(x)v^2 + \cdots\cdots, \quad x \in K$

は同型を与え，これを Taylor 展開と呼ぶ．

<u>定義</u> $z \in K$ が，d に関して i 次の積分不能な元で

あるとは，$z \notin d_i(K)$ であることを云う．

今後 K の代数拡大とは $\bar{K}$ に含まれる K の拡大体とする．

M が K_c の拡大体で，M に K_c 上の高階微分 d^* が与えられたとき，Kawahara-Yokoyama [6] 及びは Berger [2] の高階微分の一般的構成の方法により，d と d^* を合成して，L の高階微分を得る．d^* が trivial ($d^* = \{d_0\}$) のときは，各 i に関して $d'_i = d_i \otimes M$ であるが，このとき $d' = d \otimes M$ 及びは $d' = d \otimes_{K_c} M$ と記述する．このとき，d' の定数体は M であり，d' は d の係数拡大と云う．

高階微分の iterative な条件を見るために，体の生成元

のみに関して調べれば良い等の事実は、他にも方法はあるであろうが、次のLemmaが最も有用であると思われる。

<u>予備定理 1-1</u> (Miyanishi [7]).

S を K の部分体で、d を S 上の高階微分とする。$R = S[[v]]/(v^{m+1})$ とし、$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ で定義される(中への)同型 $\Delta : R \longrightarrow R \hat{\otimes}_S R$ を考える。このとき、d が iterative であることと、次の図式が可換であることとは同値である。(ここで E は上述の Taylor 展開を表わす。)

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "E"] \arrow[d, "E"'] & R \hat{\otimes}_S K \arrow[d, "\Delta \hat{\otimes} id"] \\
R \hat{\otimes}_S K \arrow[r, "id \hat{\otimes} E"] & R \hat{\otimes}_S R \hat{\otimes}_S R
\end{tikzcd}$$

§2. 定数体と値域

この§では、今後の議論の基本となる基礎的な事実を述べる。

<u>命題 2-1</u> i を $0 < i < m+1$ なる整数で、$g' = I(d')$ とし、t を整数で $i < g'p^t$ なるものとする。このとき次が成立する。

(1) $L_i \supset L^{p^t}$.

(2) K と L_i は K_i 上に一次的に分離して居る。

(3) $L_i \cap K(L^{p^t}) = K_i(L^{p^t})$.

(4) $K(L^{p^t})$ と L_i は K_i 上一次的に分離して居る.

<u>証明</u> (1) は y の Taylor 展開から y^{p^t} の Taylor 展開を導けばすぐ判る. (2) を示せば, (3), (4) は同じような論法で証明されるので (2) のみを証明する. $\{m_1, \cdots, m_\ell\}$ を L_i の元の組で K_i 上で1次独立で K 上で1次従属なる最短なものとする. このとき, K の元 $k_2, k_3, \cdots, k_\ell$ で

$$m_1 + k_2 m_2 + \cdots + k_\ell m_\ell = 0$$

となるものが存在する. $j \leq i$ なら各 q につき $d_j'(m_q) = 0$. であるから, $d_j(k_2) m_2 + \cdots + d_j(k_\ell) m_\ell = 0$ となるから, $d_j(k_2) = \cdots = d_j(k_\ell) = 0$. 故に各 $k_q \in K_i$. これは $m_1, m_2, \cdots, m_\ell$ の1次独立性に矛盾する. ∎

<u>予備定理 2-1</u> ∂ を K の(通常)微分で ∂' をその L への拡張とする. $\omega \in L$ で $\omega \notin K(L_{c,\partial'})$ なら $\partial'\omega \notin L_{c,\partial'}\partial(K)$.

<u>証明</u> $\partial'\omega \in L_{c,\partial'}\partial(K)$ なら, $u \in K(L_{c,\partial'})$ で $\partial' u = \partial'\omega$ なるものが存在する. このとき $v = \omega - u$ と置くと, $v \notin K(L_{c,\partial'})$ であるが, $\partial' v = 0$ だから $v \in L_{c,\partial'}$ となり矛盾である. ∎

<u>予備定理 2-2</u> i を $0 < i < m+1$ なる整数とすれば $L_i d_i(K) \cap K = d_i(K)$.

<u>証明</u> 上の命題 2-1, (2) より従う. (1次分離性より). ∎

命題 2-2. i を $0<i<m+1$ なる整数とする. このとき次の4つの叙述は同値である.

(1) $L = K \otimes_{K_i} L_i$.

(2) $L_{q-1} = K_{q-1} \otimes_{K_q} L_q$ 但し $q = 1, 2, \cdots, i$.

(3) $L = K \otimes_{K_q} L_q$ 但し $q = 0, 1, \cdots, i$.

(4) $d'^{(i)} = d^{(i)} \otimes_{K_i} L_i$.

これらの条件が満足されるとき、次が成り立つ.

(5) $d'_q(L) = L_q d_q(K)$ 但し $q = 1, 2, \cdots, i$.

証明 (2) $\Longrightarrow$ (3) は帰納法. (3) $\Longrightarrow$ (1) は自明. (1) $\Longrightarrow$ (2) は $K \otimes_{K_q} L_q = K \otimes_{K_{q-1}} (K_{q-1} \otimes_{K_q} L_q)$ なる関係より背理法で直ぐ示される. (4) $\Longrightarrow$ (1) は定義より、(1) $\Longrightarrow$ (4) は $d'^{(i)}$ は L_i で自明なる事より従う. (5) は明らかである. ∎

命題 2-3. d を通常微分とするとき次が成り立つ.

$$L = K \otimes_{K_c} L_c \iff d'(L) = L_c d(K)$$

証明 予備定理 2-1 からの帰結である. ∎

§3. 有限長の高階微分の拡張の可能性

予備定理 3-1. d の長さ m は有限と仮定する. M を L と K_c の中間体で $L = K \otimes_{K_c} M$ とすれば、d は L の高階微分 d' で $I(d') = I(d) = g$ なるものに

拡張出来る。このとき r を正整数で $gp^{r-1} \leq m < gp^r$ なるものとすれば、$M \supset K_c(L^{p^r})$ である。

<u>証明</u> 拡張の可能性については、M による d の定数拡大を考えればよい。後の事実は $K^{p^r} \subset K_c$ より従う。∎

今後この§では iterative な高階微分のみ扱う。そこで先づ iterative な高階微分の基本的事実を挙げておく。これらは、殆ど Weisfeld [13] に述べてある。ここで、簡単のため、$K = K_{p-1}$ という記述を許して貰う。

1°. 正整数 $j < m+1$ の p 進展開を $j = j_0 + j_1 p + \cdots + j_g p^g$ とするとき

$$d_j = \frac{1}{j_0!\, j_1! \cdots j_g!} (d_1)^{j_0} (d_p)^{j_1} \cdots (d_{p^g})^{j_g}$$

が成り立つ。

2°. $I(d) = p^f$ の形に書け、

$$K = K_{p-1} = \cdots = K_{p^f-1} \supset K_{p^f} = K_{p^f+1} = \cdots = K_{p^{f+1}-1} \supset K_{p^{f+1}} = \cdots$$

である。

3°. $K_{p^{i-1}}$ は K_{p^i} 上純非分離的である。

4°. $m \geq p^{r-1}$ とするとき、$i = f, f+1, \ldots, r-2$ に対し、

$$[K_{p^{i-1}} : K_{p^i}] = p \quad \text{である。}$$

5°. $x \in K$ で $x \notin K_{p^f}$ なる任意の元 x に対して、$i \geq f$ かつ $p^{i+1} < m+1$ であれば、$K_{p^{i-1}} = K_{p^i}(x^{p^{i-f}})$。

次の 6°, 7° では $m < \infty$ かつ $p^{r-1} \leq m < p^r$ と仮定する。

6*. x を 5* における1つの定まった元とする。このとき $K_{p^{r-2}}$ の K_c 上の p 独立な基底として、

$\{x^{p^{r-s-1}}\} + A$ の形のものを取ることが出来る。ただし、$+$ は集合論的な和を意味する。

7*. 6* の記号を用いて、

$$K = K_c(x) \otimes_{K_c} \Big(\bigotimes_{a \in A}{}_{K_c}\, K_c(a) \Big)$$ と表わされる。

<u>予備定理 3-2.</u> d を有限な長さ m を持つ、iterative な高階微分，r を $p^{r-1} \le m < p^r$ なる整数とする。i を $-1 \le i \le r-1$ とすれば $K_{p^i} = \{y \in K \mid y^{p^{r-i-1}} \in K_c\}$。

<u>証明</u> Taylor 展開による。∎

<u>命題 3-1.</u> d を iterative で、$m < \infty$ とする。このとき、d が L の iterative な高階微分で、$I(d') = I(d) = p^s$ なるものに拡張出来る必要十分条件は、L と K_c の中間体 M で $L = K \otimes_{K_c} M$ なるものの存在することである。このような M として、$M \supset L_c$ なるものを取ることが出来る。また、このような任意の M に対し、$M \supset K_c(p^r)$ である。ただし r は $m < p^{r+s}$ なる正整数である。

<u>証明</u> 最初の主張に関しては、十分条件のみを述べればよい。可換図式

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & K(L_c) \arrow[r] & L \\ K_c \arrow[u] \arrow[r] & L_c \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

において、K と L_c は K_c 上1次的分離である。

元 x 及び集合 A_c を 5*, 6* のように取る。

$x^{p^{r-s-1}}$ と A は L_c 上 1次独立であるから、L_c 上の p 独立なる元で $\{x^{p^{r-s-1}}\}\cup A\cup B$ なる元を取ることが出来る。

$B=\phi$ のときは、$L=L_c(x)\otimes_{L_c}(\bigotimes_{a\in A L_c}L_c(a))=K\otimes_{K_c}L_c$ であるから、$M=L_c$ と置けばよい。さもなければ $L=L_c(x)\otimes_{L_c}(\bigotimes_{a\in A L_c}L_c(a))\otimes_{L_c}(\bigotimes_{b\in B L_c}L_c(b))$

$=(K\otimes_{K_c}L_c)\otimes_{L_c}(\bigotimes_{b\in B L_c}L_c(b))=K\otimes_{K_c}(\bigotimes_{b\in B L_c}L_c(b))$

であるから、$M=\bigotimes_{b\in B L_c}L_c(b)$ と置けばよい。一方 $K^{p^r}\subset K_c$ より $M\supset K_c(K^{p^r}(M^{p^r}))=K_c(L^{p^r})$ は仕意の M の選び方に対して成り立つ。 ∎

<u>予備定理 3-3.</u> T を標数 $p>0$ なる体で、Q を T の部分体で、無限ケの元を持つとする。y を T の代数拡大の元とする。y_1 を $y_1\in T(y)$, $y_1\notin T(y^p)$ なる元とする。このとき Q の元 c で $y_2=y_1-cy^p$ とするとき $T(y)=T(y_2)$ なるものが存在する。

<u>証明</u> 有限次分離拡大が単拡大であることの証明を真似る。e を T 上の非分離指数で、$t=[T(y^{p^e}):T]$ とする。$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_t$ を $T(y^{p^e})$ からの T 上の同型のすべてとする。各 σ_i を $T(y)$ 迄一意的に拡大したものも同じ記号で示す。$c\in Q$ ですべての $i\neq j$ なる (i,j) の組に対し、$\sigma_i(y_1)-\sigma_j(y_1)\neq c(\sigma_i(y^p)-\sigma_j(y^p))$ なる c を取れば、主張は、後は、簡単な帰納法で示される。 ∎

<u>命題3−2.</u> d を通常微分とする. L を K の単拡大とするとき、命題3−1 の M は常に K_c の単拡大である.
<u>証明</u>　$L = K(y)$ とし次の可換図を考える.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & K(y^p) \arrow[r] & K(y) \\ K_c \arrow[u] \arrow[r] & K_c(y^p) \arrow[u] \arrow[r] & K_c(y) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ここで $K_c \supset K^p$ であるから $K_c(y^p) = K_c(L^p)$ である.

$K(y) = K(y^p)$ つまり y が K 上分離的なら $M = K_c(y^p)$ でなければならず、これは K_c 上単拡大である. 次に $K(y) \supsetneqq K(y^p)$ と仮定する. このとき任意の M に対して $M \supsetneqq K_c(y^p)$ である. 何となれば、さもなければ $L = K(M) = K(y^p)$ となってしまう. このとき $[M : K_c(y^p)] = [K(y) : K(y^p)] = p$. $y_1 \in M$, $y_1 \notin K_c(y^p)$ なる y_1 をとれば $M = K_c(y^p, y_1)$.
$K(y^p)$ と M は $K_c(y^p)$ 上1次的に分離して居るから、$y_1 \notin K(y^p)$ である. そこで予備定理3−3 を適用して、$c \in K_c$ で $y_2 = y_1 - c y^p$ と置き、$K(y) = K(y_2)$ と出来る. このとき $K_c(y^p) = K_c(y_2^p)$ である. 何となれば命題2−1 の(3)により、両辺共に $L_c \cap K(L^p)$ だからである. $[M ; K_c(y_2^p)] = p$ かつ $y_2 \notin K_c(y_2^p)$ であるから $M = K_c(y_2^p, y_2) = K_c(y_2)$ は K_c の単拡大. ■

Zorn の補題により、$\bar{K}$, K の中間体で d の拡張出来る極大なものが存在する. $I(d)$ を保つ極大なものも存在するし、d が元々 iterative なら、iterative な条件を保ったまま、あるいはさらに $I(d)$ も保ってその極大

なものも存在する．

<u>定理3-1.</u> d を iterative な高階微分とし，長さ m は有限であるとする．L を K と $\bar{K}$ の中間体として，d は L に index と iterative な条件を保って拡張出来るものとする．このとき次の3条件は同値である．

(1) L は K の代数拡大体の集合の中，d が iterative な条件と index を保つ意味で極大である．

(2) $\bar{K}$ の中で L_c の真の拡大体 M で，L と M とが，K_c 上1次的に分離して居るものは存在しない．

(3) L は K の分離的閉包 K_s を含み $L_{p^{r-2}} = L_c^{p^{-1}}$ である．

<u>証明</u> (1) $\Longleftrightarrow$ (2) は命題3-1による．(1)，(2) が正しいとせよ．最初に $L_{p^{r-2}} \subsetneqq L_c^{p^{-1}}$ と仮定して，$y \in L_c^{p^{-1}}$ かつ $y \notin L_{p^{r-2}}$ なる元を取る．予備定理3-2により，$L_{p^{r-2}} = L_c^{p^{-1}} \cap L$ であるから，$y \notin L$．故に L と $L_c(y)$ は L_c 上1次的に分離して居り(2)に反する．故に $L_{p^{r-2}} = L_c^{p^{-1}}$．次に T が L の分離的代数拡大とする．このとき，L と T^p は L^p 上1次的に分離，したがって $g=1,2,\cdots,r$ に対し，L^{g-1} と T^{p^g} は L^{p^g} 上1次的に分離．したがって L と T^{p^r} は L^{p^r} 上1次的に分離．$L_c \supset L^{p^r}$ で L と $L_c(T^{p^r})$ は L_c 上1次的に分離して居る．よって仮定(2)により $L_c = L_c(T^{p^r})$．よって $L = L(T^{p^r}) = T$．逆に(3)が正しいとせよ．若し L が極大でないとすると，L_c の真の代数拡大体

M で，L と M が L_c 上1次的に分離して居るものが存在する．仮定より M の任意の元は L 上，したがって L_c 上純非分離的．よって $z \in M$, $z \notin L_c$ で $z^p \in L_c$ なる元 z が存在して仮定に反する． ■

系1. $d_1 \neq 0$ を仮定すれば定理3-1で index が保たれるという仮定は自然に充される．

系2. d が通常微分なら，定理3-1の仮定はすべて充される．

§4. 拡張の一意性

予備定理4-1. $\{G_i\}_{0<i<m+1}$ を L の部分体の列で次の条件が充されるとする．

(1) 次の図式は可換である．ここで各矢印は入射的な写像を示す．

$$\begin{tikzcd}
L & G_1 \arrow[l] & G_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & G_i \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
K \arrow[u] & K_1 \arrow[l] \arrow[u] & K_2 \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & K_i \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(2) $0 < i < m+1$ なる i に対し，$L = K \otimes_{K_i} G_i$．

このとき，$0 < i < m$ なる i に対し，$G_i = K_i \otimes_{K_{i+1}} G_{i+1}$ であり，$d^{*\{i\}} = d^{(i)} \otimes_{K_i} G_i$ とおくと，d の L への拡張 d^* で，$d^{*(i)} = d^{*\{i\}}$ なるものが存在する．この場合，d が iterative なら，d^* も iterative である．

証明　自然な帰結である。■

予備定理 4-2.　$0 < i < m+1$ なる整数 i に対し、$t(i)$ を $p^{t(i)-1} \leq i < p^{t(i)}$ とし、$G_i = K_i(L^{p^{t(i)}})$ と置き、$L = K \otimes_{K_i} G_i$ を仮定する。この時の3主張を得る。

(1)　L の d' は一意的に存在し $I(d') = I(d)$ である。

(2)　L の拡大体 L^* に d の拡張 d^* が存在するとき、d^* は L に d' を導く。(つまり、d^* は L で閉じて居る。)

(3)　d が iterative なら、d' も iterative である。

証明　d' の存在は予備定理 4-1 による。任意の d の拡張 d' に対して命題 2-1 より、$L_i = K_i(L^{p^{t(i)}})$ であるから、$d'^{(i)} = d^{(i)} \otimes_{K_i} L_i$ と一意的に定まる。つまり、d' は一意的に定まる。命題 2-1 により、$L^*_{c,d^*(i)} \supset L^{*p^{t(i)}} \supset L^{p^{t(i)}}$ であるから、d_i^* は $L^{p^{t(i)}}$ で自明である。$L = K(L^{p^{t(i)}})$ であるから、$d_i^*(L) \subset (d_i(K))L^{p^{t(i)}} \subset L$. 他の主張は明らかである。■

命題 4-1.　$L = K(L^p)$ であり L の拡大体 L^* に d が拡張 d^* を持つとする。このとき、d^* は L に制限 d' を持ち、d' は d の L への一意的な拡張であり、$I(d') = I(d)$ である。このとき d が iterative であれば、d' も iterative である。

証明　命題 2-1 により $L^*_{c,d^*(i)} \supset L^{*p^t}$ である。但し、$p^{t-1} \leq i < p^t$. K と $L^*_{c,d^*(i)}$ は K_i 上1次的に分離して居る

から K と $K_i(L^{p^t})$ は K_i 上1次的に分離して居る．$L=K(L^p)=\cdots=K(L^{p^t})$ であるから，$L=K(K_i(L^{p^t}))=K\otimes_{K_i}K_i(L^{p^t})$．よって予備定理4−2が適用出来る．∎

<u>命題4−2.</u> L が K 上分離的であるとすると，d' は一意的に存在し，$I(d')=I(d)$ であり，d の L を含む任意の代数的拡大体における拡張は，L に d' を導く．

<u>証明</u> 定理3−1における証明と同様 K と $K_i(L^{p^t})$ とは K_i 上1次的分離，但し $p^{t-1}\leq i<p^i$．よって $L=K(L^{p^t})=K\otimes_{K_i}K_i(L^{p^s})$．よって予備定理4−2を適用出来る．∎

<u>定理4−1.</u> L は K 上非分離指数有限であるとする．d は iterative で長さ有限とする．このとき次は，同値である．

(1) L は K 上分離的である．

(2) d は L の高階微分に一意的に拡張出来る．

<u>証明</u> (1) $\Longrightarrow$ (2) は命題4−2によるし，よく知られて居ることと思う．(2) $\Longrightarrow$ (1) は，誰でも当然と思うだろうが，explicit に述べられた文献はないと思うので一応述べて置く．L は K 上非分離的とし，K' を L 内の K の分離的閉包とする．命題4−2により，$d_i(K)\subset K'$ であるから，$K=K'$ したがって L は K 上純非分離としてよい．d' が存在するので命題3−1より，$L=K\otimes_{K_c}M$ なる M が存在するが，M は K_c 上純非分離である．$M'=K_c(M^p)$ とすれば，$M'\neq M$ である．これは，L が

K上有限純非分離指数をもつことになる．dをM'により係数拡大することにより$K=K(M')$と仮定してよい．このとき，$M^p \subset K_c$．$\{z_j\}_{j\in A}$をMのK_c上のp独立な基底とする．$\{b_j\}_{j\in A}$をK_cの任意の部分集合とし，$d_i^*(z_j)=0$ $(i\neq p^{r-1})$ また $d^*_{p^{r-1}}(z_j)=b_j$ $(j\in A,\ p^{r-1}\le m<p^r)$と置き，$M$のiterativeな高階微分$d^*=\{d_i^*\}_{0\le i\le m}$を定義する．$d'$を$d$と$d^*$の合成とする．$d'$がiterativeなこと，$I(d')=I(d)$なることは直ぐ分る．斯様に，$d'$は一意的でないことになってしまう．■

§5. 無限長の高階微分

最初に次を注意する．dが無限長の高階微分の場合，$p^f=I(d)$とすれば，§3の4^*により，$s\ge f$なら，$s\ge f$なる整数に対して，常に$[K_{p^{s-1}}:K_{p^s}]=p$となることを注意する．

<u>命題5-1.</u> dを無限長のiterativeな高階微分とし，Lへのiterativeで$I(d')=I(d)$を保つ拡張d'を有するとする．このとき，任意の正整数tに対して，$d'^{(t)}=d^{(t)}\otimes_{K_t}L_t$が成立する．とくに，$L=K\otimes_{K_t}L_t$である．

<u>証明</u> $p^f=I(d)$とおく．次の可換図で，$s\ge f$に対して，$[L_{p^{s-1}}:L_{p^s}]=[K_{p^{s-1}}:K_{p^s}]=p$

であり、$K_{p^{s-1}}$ と L_{p^s} は K_{p^s} 上1次的に分離して居る。

$$\begin{tikzcd}
L = L_{p^{s-1}} = \cdots = L_{p^{f-1}} & L_{p^f} \arrow[l] & L_{p^{f+1}} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & L_{p^s} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
K = K_{p^{-1}} = \cdots = K_{p^{f-1}} \arrow[u] & K_{p^f} \arrow[l] \arrow[u] & K_{p^{f+1}} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l] & K_{p^s} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

故に $s \geq 0$ に対し、$L = K \otimes_{K_{p^s}} L_{p^s}$ であるから、命題2-2により、任意の正整数 t に対して、

$d'^{(t)} = d^{(t)} \otimes_{K_t} L_t$、$L = K \otimes_{K_t} L_t$ が成立する。■

系. d を無限長の高階微分で、L に iterative な拡張 d' を有するとする。このとき、任意の正整数 t に対し、$d'^{(t)} = d^{(t)} \otimes_{K_t} L_t$ が成立する。

予備定理 5-1. L は K 上純非分離拡大とする。d を K の無限長の高階微分とする。このとき、d' が存在すれば、一意的である。

証明. $x \in L$ なら正整数 n が存在して、$x^{p^n} \in K$ である。Taylor 展開 $E: K \longrightarrow K[[U]] \subset L[[U]]$, $E': L \longrightarrow L[[U]]$ を考える。E' は E の拡張である。$E'(x)$ は $E(x^{p^n}) = E'(x^{p^n})$ の p^n 乗根である。$L[[U]]$ では p^n 乗根は存在すれば一意的であるから、$E'(x)$ は一意的に定まる。■

命題 5-2. d を無限長の高階微分とする。もし d' が存在すれば、一意的に定まる。さらに d が iterative なら、d' も iterative である。

証明　K'をKのLに於ける分離的閉包とする。命題4-2により$d'(K')\subset K'$であり、dがiterativeならd'もiterativeであるから、$K=K'$として論じてよい。この時LはK上純非分離拡大である。そうすると予備定理5-1により、d'は一意的に定まる。dをiterativeと仮定する。ここで予備定理1-1を適用する。$(\Delta\hat{\otimes}\mathrm{id})\circ E'$と$(\mathrm{id}\hat{\otimes}E')\circ E'$は$K$上で一致するが$R\hat{\otimes}_{K_c}R\otimes_{K_c}L$は$L$上の2変数の巾級数環であるから、予備定理5-1に於ける証明と同様上の2つの同型はLで一致しなければならない。つまりd'はiterativeと云う事になる。

今后K_sでKの$\bar{K}$における分離的閉包を示すことにする。§3で述べられた様に、dがそこ迄拡張出来る極大なKの代数拡大体Lが存在する。命題4-2により、Lは常にK_sを含む。所が、若しdが無限長の高階微分なら、$\bar{K}$には、この様な最大なKの拡大体が存在することさえ、証明出来る。これは、iterativeな場合に於ける式島[9]の結果の拡張である。

これを論ずるのに先づ次の定義から始める。

定義　dを無限長の高階微分とする。Kの任意の元ωと任意の自然数eに対して、Kの部分集合$A^{k,d}_{\omega,e}$を次の様に定義する。$a\in K$とするとき、aが$A^{k,d}_{\omega,e}$に属するのは、Kの元の組$a_0,a_1,\cdots,a_t$

で $a_0 = \omega$, $a_t = a$ で自然数の組 $i_1, i_2, \cdots, i_t$ で、$a_j = d_{i_j p^e}(a_{j-1})$ $(j=1,2,\cdots,t)$ なるものが存在することである。

<u>命題5-3</u>. d を無限長の高階微分とする。$x \in \overline{K}$ で $x^{p^e} = \omega \in K$ とする。このとき、$x \in L\,(\subset \overline{K})$ で d が L に拡張出来る K の拡大体 L が存在するための必要十分条件は、任意の $y \in A^{K,d}_{\omega,e}$ に対し、j が $j \not\equiv 0\ (p^e)$ なる自然数なら、$d_j(y) = 0$ となることである。この条件が充されるとき、このような L の最小なものは、$K((A^{K,d}_{\omega,e})^{p^{-e}})$ である。

<u>証明</u> <u>1. 充分性</u> $y \in K$ である $z \in L$ に対し、$y = z^{p^e}$ であるとせよ。このとき、任意の自然数 i に対して $d_{ip^e}(y) = (d'_i(z))^{p^e}$ である。よって、$u = d_{ip^e}(y)$, $v = d'_i(z)$ と置けば、$u^{p^{-e}} = v \in L$ である。したがって $j \not\equiv 0\ (p^e)$ なら $d_j(u) = d'_j(v^{p^e})$ となり、$A^{K,d}_{\omega,e}$ の要求は充され $L \supset (A^{K,d}_{\omega,e})^{p^{-e}}$ も成り立つ。

<u>2. 必要性</u>. $A^{K,d}_{\omega,e}$ が上の条件を充すとせよ。$L = K((A^{K,d}_{\omega,e})^{p^{-e}})$ と置く。この時 $L^{p^e} = K^{p^e}(A^{K,d}_{\omega,e})$ である。所が一般に $a, b \in K$, $j \not\equiv 0\ (p^e)$ で $d_j(a) = d_j(b) = 0$ が充されれば、このような j に対して $d_j(ab)$ は成り立つ。よって任意の $c \in L^{p^e}$, $j \not\equiv 0\ (p^e)$ に対して、$d_j(c) = 0$ である。この事実及び、$A^{K,d}_{\omega,e}$ の性質から、L^{p^e} は作用 d により閉じて居り、実際には、d_{jp^e} だけが L^{p^e} に自明でなく働く。よって、

$d_j^* = d_{jp^e}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ と置くことにより, L^{p^e} の高階微分 $d^* = \{d_j^*\}_{j=0,1,\cdots}$ が定義出来る. $\psi : L^{p^e} \longrightarrow L$ を $\psi(a) = a^{p^{-e}}$ で定まる同型とする. このとき, d^* は ψ を通じて, L の高階微分 d' を定義する. つまり, $\psi \circ d^* = d' \circ \psi$ である. $a \in K$ とする. このとき, $d_i'(a) = d_i'(\psi(a^{p^e})) = \psi(d_i^*(a^{p^e})) = \psi(d_{ip^e}(a^{p^e})) = \psi((d_i(a))^{p^e}) = d_i(a)$ であるから, d' は d の拡張である.
3. 最小性　1., 2. より明らかである. ∎

定理 5-1. d を無限長の高階微分とする. このとき $\bar{K}$ に含まれ, d が拡張出来る K の最大の拡大体 L が存在する.
証明　d が拡張出来る極大な L が最大であることを言えば良い. L は K_0 を含むから, $K = K_0$ と仮定してよい. L と異る極大な L_1 が存在したとせよ. $x \in L_1$ で $x \notin L$ なる元を取れ, このとき自然数 e で $w = x^{p^e} \in K$ なるものが存在する. このとき $A_{w,e}^{K,d}$ は命題 5-3 の条件を充す. 一方 $L \supset K$ で, d は d' の K への制限であるから $A_{w,e}^{K,d} = A_{w,e}^{L,d'}$ であり, これの d' に関する要求は d に関するそれと同じである. よって d' は $L(x)$ を含む $\bar{K}$ の部分体に拡張されてしまって L の極大性に反する. ∎

§6. 積分不能な元と非分離指数.

定理 6-1. K の高階微分 d, 正整数 $i < m+1$ に対して、K の元 z が $z \notin d_i(K)$ であり, $y \in L$ で $d'_i(y) = z$ なるものが存在したとする. この時次が成立する.

(1) y は K 上非分離的である.

m が i に比して十分大きければ,

(2) 正整数 t で $z^{p^t} \in d_{ip^t}(K)$ なるものが存在する.

(3) y の K 上の非分離指数は (2) を充す t 以上である.

証明 q を y の非分離指数, $g' = I(d')$ と置く. $i < g'p^s$ とせよ. y^{p^q} は K 上分離的であるから $y^{p^q} \in K(y^{p^{q+s}}) \subset K(L^{p^{s+q}})$. ここで $s \geq 1$ としておく. $ip^q < g'p^{s+q}$ であるから, $ip^q < m+1$ である限り, 命題 2-1 より $L^{p^{q+s}} \subset L_{ip^q}$ で, $z^{p^q} = (d'_i(y))^{p^q} = d'_{ip^q}(y^{p^q}) \in d'_{ip^q}(K(L^{p^{q+s}})) \subset d'_{ip^q}(K(L_{ip^q})) = L_{ip^q}d_{ip^q}(K)$ であるから予備定理 2-2 により,

$$z^{p^q} \in K \cap L_{ip^q}d_{ip^q}(K) = d_{ip^q}(K)$$

よって (2) が成立. (3) も明かである. 若し y が分離的であるならば, $q = 0$ であり, 上の推論が m の大きさにかかわらず成立し, $z \in d_i(K)$ となり矛盾である. ∎

これを通常微分の場合に適用すると, 単に次のようになる.

系1. d を L の d' に拡張出来る通常微分とする。
$z \in K$ が K で積分不能な元とし、$y \in L$ で $d(y) = z$ なるものが存在すれば、y は K 上非分離的である。

系2. $L = K(y)$ と単拡大で d が通常微分であるとき、次の条件は同値である。

(1) d は $d'(y) = z$ なるような L の d' に拡張出来る。

(2) y が K 上非分離的であり、K と $K_c(y)$ は K_c 上一次的に分離して居る。

これらの条件が充たされるとき $L \cong K \otimes_{K_c} L_c$ が成立。
(系2 の証明は定理 6-1 だけからは直接出ないが簡単)

d が無限長の iterative な高階微分のときは、命題 5-1 が適用出来て、強く次が主張出来る。

定理 6-2. d を無限長の高階微分で L の d' に拡張出来るとし、$I(d) = I(d')$ であったとする。このとき、任意の i に対し、K で i 次の積分不能な元は L でも i 次の積分不能な元である。

参考文献

[1] R. Baer, Algebraische Theorie der differentierbaren Funktionenkörper I, S.-B. Heiderberger Acad. Wiss. Math.-natur. Kl.(1927),15-32.

[2] R. Berger, Differential höcherer Ordnung und Körpererweiterungen bei Primzahlcharacteristik, S.-B. Heiderberger Akad. Wiss. Math.-natur. Kl.,(1966),143-202.

[3] W. C. Brown, Higher derivations and tensor products of commutative rings, Canadian J. Math. **30-2**,(1978),401-418.

[4] H. Hasse and F. K. Schmidt, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algeraishen Funktionenkörper einer Unbestimmten. J. Reine Angew. Math. **177** (1937),215-237.

[5] N. Heerema and J. Devency, Galois theory for fields K/k finitely generated, Trans. A.M.S. **189** (1974), 263-274.

[6] Y. Kawahara and Y. Yokoyama, On higher differentials of commutative rings, Tokyo Sci. Univ. Math. **2** (1970); 12-30.

[7] M. Miyanishi, A remark on iterative higher derivation, J. Math. Kyoto Univ. **8-3** (1968),411-415.

[8] K. Okugawa, Differential algera of nonzero characteristic, Lecture in Math. Kyoto University **16** (1987), kinokuniya publ. co..

[9] K.Shikishima, Maximal differential field and its applications, Acta Hun. Sci., Univ. Sangio Kyotiensis **9** , Nat. Sci. Ser. (1980), 1-10.

[10] S. Suzuki, Some types of derivations and their applications to field theory, J. Math. Kyoto Univ. **21-2** (1981), 375-382.

[11] M. E. Sweedler, Structure of inseparable extensions, Ann. Math. **87** (1968), 401-410.

[12] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, A.M.S. Colloq. Publ. **29** (1962).

[13] M. Weisfeld, Purely inseparable extensions and higher derivations, Trans. A.M.S. **116-4** (1965), 435-449.

[14] H. Yanagihara, Some remarks on higher derivations of finite rank in a field of positive characteristic, J. Sci. Hiroshima Univ., ser.A-I **32** (1968), 167-171.

イデアルの不変量について

広島大学 理学部　大石 彰

0. 不変量の定義　$(R, \mathfrak{m}, k)$ を d 次元ネーター局所環で剰余体が無限体であるものとし，I を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする。ここで考える I の不変量としては二つの種類がある．不変量 $\delta(I)$, $\rho(I)$, $\tau(I)$ はイデアルの還元（reduction）を用いて定義され，一方不変量 $e_i(I)$, $f_i(I)$ はイデアル I に伴う Hilbert 関数を用いて定義される．

$\overline{I}$ で I の整閉包を表わす．即ち，$\overline{I} = \{x \in R \mid$ ある $a_i \in I^i$ について $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0\}$．$I = \overline{I}$ のとき I は整閉であると言う．$J \subset I$ なるイデアル J は $\overline{J} = \overline{I}$ を満たすとき，同じことだが，$JI^n = I^{n+1}$ となる自然数 n があるとき，I の還元であると言う．このとき $e(I) = e(J)$ であり，R が quasi-unmixed ならば逆が成り立つ．I の還元の中で（包含関係に関して）極小なものが常に存在し，それは R のパラメーターイデアルになっている．

定義 0.1. 次のようにおく:

$\delta(I) = \min\{n \mid$ ある I の極小還元 J について $JI^n = I^{n+1}\}$,

$\rho(I) = \min\{n \mid$ ある I の極小還元 J について $I^{n+1} \subset J\}$,

$\tau(I) = \min\{n \mid$ ある I の極小還元 J について $\mathfrak{m}^n I \subset J\}$.

また, $\delta(R) = \delta(\mathfrak{m})$, $\rho(R) = \rho(\mathfrak{m})$ とおく.

定義 0.2. 整数 $e_i(I) = e_i$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$ 及び $f_i(I) = f_i$ $(0 \leqslant i < d)$ を次の式で定義する:

$$\ell(R/I^{n+1}) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d, \quad n \gg 0,$$

$$\mu(I^n) = f_0\binom{n+d-1}{d-1} - f_1\binom{n+d-2}{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}, \quad n \gg 0.$$

但し, $\mu(I)$ は I の極小生成系の個数を表わす. また, $e_i(R) = e_i(\mathfrak{m})$, $f(I) = f_0(I)$ とおく. [2] の記号を使うと $e_i(I) = e_i(G(I))$, $f_i(I) = e_i(F(I))$, 但し $G(I) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/I^{n+1}$, $F(I) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$.

1. 不変量 $\delta(I)$, $\rho(I)$ と次数付環 $G(I)$

この節では, R は Cohen-Macaulay 環とする. 主な結果は次の二つの定理である:

定理 1.1. R が正則局所環でないとき, 次の条件は

全て 同値：

(1) $\mathrm{emb}(R) = e(R) + \dim(R) - 1$.

(2) $\delta(R) = 1$.

(3) $\rho(R) = 1$.

(4) $\mathrm{reg}\, G(R) = 1$，但し $G(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$

(5) $r(R) = e(R) - 1$，但し $r(R)$ は R の Cohen-Macaulay 型.

(6) $e_1(R) = e(R) - 1$.

(7) $e_2(R) = 0$.

（一般には，不等式 $\mathrm{emb}(R) \leqslant e(R) + \dim(R) - 1$，$e_1(R) \geqslant e(R) - 1 \geqslant r(R)$，$e_2(R) \geqslant 0$，$\mathrm{reg}\, G(R) \geqslant \delta(R) \geqslant \rho(R)$ が成り立つ．）

定理 1.2. R が Gorenstein 環のとき次の条件は全て同値：

(1) $\mathrm{emb}(R) = e(R) + \dim(R) - 2$.

(2) $\delta(R) = 2$.

(3) $\rho(R) = 2$.

(4) $\mathrm{reg}\, G(R) = 2$.

(5) $e_1(R) = e(R)$.

(6) $e_2(R) = 1$ かつ $G(R)$ が Cohen-Macaulay.

IをRの $\mathfrak{m}$－準素イデアル， JをIの極小還元とすると Valabrega と Valla (1978) により，$G(I)$が Cohen－Macaulay $\iff$ 任意の $n \geqq 0$ に対して $J \cap I^{n+1} = JI^n$.

従って，$\delta(I) \leqq 1$ なら $G(I)$が Cohen－Macaulay (Valla, 1979)

$\delta(R) \leqq 2$ なら $G(R)$が Cohen－Macaulay (Sally, 1980).

$g_\Delta(I) = e(I) + (d-1)\,\ell(R/I) - \ell(I/I^2) = \ell(I^2/IJ)$； $g_\Delta(R) = g_\Delta(\mathfrak{m})$ とおくと $\delta(I) \leqq 1 \iff g_\Delta(I) = 0$.

<u>命題</u> 1.3. (1) $\rho(I) \leqq \delta(I)$, $\rho(I) \leqq \tau(I)$, $\rho(I) \leqq g_\Delta(I) + 1$. $G(I)$が Cohen－Macaulay なら $\delta(I) = \rho(I)$.

$\delta(R) = 1$ と $\rho(R) = 1$ とは同値で，$\delta(R) = 2$ ならば $\rho(R) = 2$.

(2) Rが正則局所環でないとき，$r(R) \leqq e(R) - 1$ で，等号が成り立つのは $\rho(R) = 1$ のときに限る．更に $\rho(R) = 2$ ならば $g_\Delta(R) \leqq r(R)$.

従って Rが Gorenstein のとき，$g_\Delta(R) = 1 \iff \delta(R) = 2 \iff \rho(R) = 2$.

(3) $g_\Delta(I) = 1$ のとき $G(I)$が Cohen－Macaulay $\iff \delta(I) = \rho(I) = 2$.

<u>証明</u>. (1) JがIの極小還元，$g_\Delta(I) = \ell(I^2/IJ)$

$= n$ のとき $I^{n+2} \subset \mathfrak{m}^n I^2 \subset IJ \subset J$. よって $\rho(I) \leqq n+1$.

(2) J を $\mathfrak{m}$ の極小還元とすると $(J:\mathfrak{m})/J \subset \mathfrak{m}/J$ より $r(R) \leqq \ell(\mathfrak{m}/J) = \ell(R/J) - \ell(R/\mathfrak{m}) = e(R) - 1$ で, $r(R) = e(R) - 1 \Longleftrightarrow (J:\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \Longleftrightarrow \mathfrak{m}^2 \subset J,\ \mathfrak{m} \not\subset J \Longleftrightarrow \rho(R) = 1$. 次に $\rho(R) = 2$, $\mathfrak{m}^3 \subset J$ とすると

$$(J:\mathfrak{m})/J \supset \mathfrak{m}^2 + J/J \cong \mathfrak{m}^2/J \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}^2/J\mathfrak{m}$$

より $r(R) \geqq \ell(\mathfrak{m}^2/J\mathfrak{m}) = g_\Delta(R)$.

(3) $G(I)$ が Cohen-Macaulay, J を I の極小還元とすると $1 = g_\Delta(I) = \ell(I^2/IJ) = \ell(I^2/I^2 \cap J)$ より $I^2 \not\subset J$, $I^3 \subset \mathfrak{m} I^2 \subset I^2 \cap J \subset J$. 故に $\delta(I) = \rho(I) = 2$. 逆に $\delta(I) = \rho(I) = 2$ として J を $JI^2 = I^3$ となる I の極小還元とすると, $1 = g_\Delta(I) = \ell(I^2/IJ) = \ell(I^2/I^2 \cap J) + \ell(I^2 \cap J/IJ)$, $I^2 \neq I^2 \cap J$ より $J \cap I^2 = JI$.
一方, $n \geqq 2$ のとき $J \cap I^n = J \cap JI^n = JI^n$. よって Valabrega - Valla により $G(I)$ は Cohen-Macaulay.
証終.

<u>命題</u> 1.4 (Huneke and Sally). $\delta(I) \leqq 1$ とすると $F(I)$ は Cohen-Macaulay 環である. 従って

$$\mu(I^n)=f(I)\binom{n+d-1}{d-1}-(f(I)-1)\binom{n+d-2}{d-2},\ n\geqslant 1.$$

特に，$\mu(I)=f(I)+\dim(R)-1$，$f_1(I)=f(I)-1$.

<u>系</u> 1.5（[2]）. R が二次元擬有理的局所環（例えば二次元正則局所環）で I が整閉のとき，$F(I)$ は Cohen-Macaulay で，$\mu(I^n)=f(I)n+1\ (n\geqslant 1)$.
特に $f(I)=\mu(I)-1$.

<u>命題</u> 1.6. $\dim(R)=2$，$e_2(I)=0$ とすると $f_1(I)=f(I)-1$.

<u>証明</u>. 仮定と成田の定理（[2]参照）によりある r について $\delta(I^r)\leqslant 1$. 従って命題 1.4 より $F(I^r)$ は Cohen-Macaulay 環で $\mathrm{reg}\,F(I^r)\leqslant 1$. 従って [3] により $0=g_s(F(I^r))=g_s(F(I)^{(r)})=g_s(F(I))$
$=f_1(I)-f(I)+1$. 証終.

<u>定理</u> 1.7. $\dim(R)\geqslant 2$ のとき，$e_2(R)=0$ は $e_1(R)=e(R)-1$ と同値である.

証明． $g_s(R) := e_1(R) - e(R) + 1 = 0$ ならば $e_2(R) = 0$ なることは [3] 参照． 逆に $e_2(R) = 0$ とする． R の superficial R－正則列 $x_1, \cdots, x_{d-2}$ を取り $S = R/(x_1, \cdots, x_{d-2})$ とおくと， $\dim(S) = 2$， $e_2(S) = e_2(R) = 0$ かつ $g_s(S) = g_s(R) = 0$． よって $d = 2$ としてよい． このとき 主張 は 命題 1.6 から従う．
証終．

定理 1.1 と 定理 1.2 の証明 は 以上 の 結果 と [2]，[3] の 結果 を 合わせれば 得られる．

2． $\tau(I) = 1$ なる イデアル と 次数付環 $F(I)$ 前節と同様，$(R, \mathfrak{m}, k)$ を 剰余体 が 無限体 であるような d 次元ネーター 局所環 とし， I を R の $\mathfrak{m}$－準素イデアル とする． R の 局所 コホモロジー 加群 $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ $(i < d)$ が 全て 有限生成（同じことだが 長さ 有限 の 加群） になるとき， R は 一般（化された）Cohen－Macaulay 環 (generalized Cohen－Macaulay ring) と呼ばれる． これは $I(R) := \sup\{\ell(R/I) - e(I) \mid I$ は R の パラメーターイデアル$\}$ が 有限 になるという条件 と 同値 である (Schenzel－Trung－Cuong)． 更に，$\ell(R/I) - e(I)$ が

任意のパラメーターイデアル I について一定のとき，R は Buchsbaum 環であると言う（Stückrad－Vogel）．後藤四郎氏により，R が Buchsbaum 環のときには，Abhyankar の不等式の拡張である不等式

$$\mathrm{emb}(R) \leqslant e(R) + \dim(R) - 1 + I(R)$$

が成り立ち，等式が成り立つことは $\delta(R) \leqslant 1$ と同値で，このとき $G(R)$ が Buchsbaum 環になることが示された．次の命題は，この不等式をイデアルの場合に一般化したものである．

命題 2.1. (1) R が一般 Cohen－Macaulay 環とすると不等式

$$\tau(I) \leqslant e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) + I(R) + 1 - \mu(I)$$

が成り立つ．特に

$$\mu(I) \leqslant e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) + I(R).$$

(2) R が Buchsbaum 環のとき，$\tau(I) \leqslant 1$ であることと等式 $\mu(I) = e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) + I(R)$ が成り立つことは同値である．

(3) R が Cohen－Macaulay 環とする．$\tau(I) \leqslant 1$ ならば $e(I) \leqslant \ell(R/I) + r(R)$ かつ

$$\mu(I) \leqslant \dim(R) + r(R).$$

また，$\tau(I) \leqslant 2$ ならば

$$\mu(I) \geqslant e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) - r(R).$$

(4) R が Gorenstein 環のとき，$\tau(I) = 1$ は $e(I) = \ell(R/I) + 1$ と同値で，このとき $\mu(I) = \dim(R) + 1$．また，$\tau(I) = 2$ は $\mu(I) = e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) - 1$ と同値である．

<u>証明</u>．(1) 長さ有限の R-加群 M に対して $\tau(M) = \min\{n \mid \mathfrak{m}^n M = 0\}$ とおくと $\tau(M) \leqslant 1$ は $\ell(M) = \mu(M)$ と同値で，$\tau(M) = n$ のとき

$$\ell(M) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(\mathfrak{m}^i M/\mathfrak{m}^{i+1} M) \geqslant \ell(M/\mathfrak{m}M) + n - 1$$
$$= \mu(M) + \tau(M) - 1.$$

J を I の極小還元とすると $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$ なので

$$\begin{aligned}\mu(I) &= \mu(J) + \mu(I/J) = d + \mu(I/J)\\ &\leqslant d + \ell(I/J) - \tau(I/J) + 1\\ &\leqslant d + \ell(R/J) - \ell(R/I) - \tau(I) + 1\\ &\leqslant d + e(I) + I(R) - \ell(R/I) - \tau(I) + 1.\end{aligned}$$

その他の主張の証明も同様である．証終．

I がパラメーターイデアルのとき $F(I) \cong k[X_1, \cdots, X_d]$ なので $f(I) = 1$, $f_i(I) = 0$ $(i \geqslant 1)$．R が Buchsbaum

環，$f(\mathrm{I})=1$ でも I がパラメーターイデアルとは限らない．（例：$R=k[[X,Y]]/(X^2,XY)$ のとき $e(R)=\mathrm{I}(R)=1$ かつ $emb(R)=e(R)+\mathrm{I}(R)=2$．）

系 2.2. R が一般 Cohen-Macaulay 環で $f(\mathrm{I})=1$ とすると $\mu(\mathrm{I})\leqslant \dim(R)+\mathrm{I}(R)$．
特に，R が Cohen-Macaulay 環のときは $f(\mathrm{I})=1$ と I がパラメーターイデアルであることは同値である．

証明．$\ell(\mathrm{I}^n/\mathrm{I}^{n+1})\leqslant \mu(\mathrm{I}^n)\ell(R/\mathrm{I})$ より $e(\mathrm{I})\leqslant f(\mathrm{I})\ell(R/\mathrm{I})=\ell(R/\mathrm{I})$．従って $\mu(\mathrm{I})\leqslant e(\mathrm{I})+d-\ell(R/\mathrm{I})+\mathrm{I}(R)\leqslant d+\mathrm{I}(R)$．証終．

以下で R は Cohen-Macaulay 環と仮定する．

定理 2.3. (1) 任意の整数 $n\geqslant 0$ に対して不等式

$$\mu(\mathrm{I}^n)+\ell(R/\mathrm{I}^n)\leqslant e(\mathrm{I})\binom{n+d}{d}-(e(\mathrm{I})-1)\binom{n+d-1}{d-1}$$

が成り立つ．特に，$f(\mathrm{I})\leqslant e_1(\mathrm{I})+1$．

(2) $\tau(\mathrm{I})\leqslant 1 \iff \mu(\mathrm{I})=e(\mathrm{I})+\dim(R)-\ell(R/\mathrm{I})$
$\iff$ 任意の整数 $n\geqslant 0$ について等式

$$\mu(\mathrm{I}^n)+\ell(R/\mathrm{I}^n)=e(\mathrm{I})\binom{n+d}{d}-(e(\mathrm{I})-1)\binom{n+d-1}{d-1}$$

が成り立つ．更にこのとき，

$$f(\mathrm{I}) = e_1(\mathrm{I}) + 1$$

かつ $f_i(\mathrm{I}) = e_i(\mathrm{I}) + e_{i+1}(\mathrm{I}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant d-1)$.

<u>証明</u>．J を I の極小還元とすると，完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}^n/m\mathrm{J}^n \longrightarrow \mathrm{I}^n/m\mathrm{I}^n \longrightarrow (\mathrm{I}^n/\mathrm{J}^n) \otimes_R k \longrightarrow 0$$

より $\mu(\mathrm{I}^n) = \mu(\mathrm{J}^n) + \mu(\mathrm{I}^n/\mathrm{J}^n)$

$$\leqslant \mu(\mathrm{J}^n) + \ell(\mathrm{I}^n/\mathrm{J}^n) = \mu(\mathrm{J}^n) + \ell(R/\mathrm{J}^n) - \ell(R/\mathrm{I}^n).$$

従って $\mu(\mathrm{I}^n) + \ell(R/\mathrm{I}^n) \leqslant \mu(\mathrm{J}^n) + \ell(R/\mathrm{J}^n)$

$$= \binom{n+d-1}{n} + e(\mathrm{I})\binom{n+d-1}{d}$$

$$= e(\mathrm{I})\binom{n+d}{d} - (e(\mathrm{I})-1)\binom{n+d-1}{d-1}.$$

また，$e_i(\mathrm{I}) = e_i$，$f_i(\mathrm{I}) = f_i$ とおくと

$$\mu(\mathrm{I}^n) + \ell(R/\mathrm{I}^n) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i\binom{n+d-1-i}{d-1-i} + \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i\binom{n-1+d-i}{d-i}$$

$$= e_0\binom{n+d}{d} - (e_0+e_1-f_0)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d(e_{d-1}+e_d-f_{d-1}),$$

$n \gg 0$．これらのことより主張が従う．証終．

<u>系</u> 2.4.　$\dim(R) \geqslant 2$ のとき $\tau(\mathrm{I}) = 1$ とすると

(1) $g_s(F(\mathrm{I})) := f_1(\mathrm{I}) - f(\mathrm{I}) + 1 = e_2(\mathrm{I})$．特に，$f_1(\mathrm{I}) \geqslant f(\mathrm{I}) - 1$．

(2) $g_\Delta(F(I)) := f(I) + \dim(R) - 1 - \mu(I) = g_s(I)$.
特に，$\mu(I) \leqslant f(I) + \dim(R) - 1$ かつ 等号が 成立するのは $\delta(I) \leqslant 1$ と 同値.

(3) $f_0(I) - f_1(I) + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}(I) - 1 = (-1)^{d-1} e_d(I)$,
即ち $X = \mathrm{Proj}\, F(I)$ とおくと $g(I) = p_a(X)$.
(但し，$g_s(I) = e_1(I) - e(I) + \ell(R/I)$, $g(I) = e_d(I)$.)

これらの 結果は 定理 2.3 と [2], [3] の 結果から 従う.
系 2.4 より，R が Cohen-Macaulay環で

$$\mu(I) = e(I) + \dim(R) - \ell(R/I) = f(I) + \dim(R) - 1$$

とすると $F(I) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$ は Cohen-Macaulay環である.
これは R が Cohen-Macaulay で $\mathrm{emb}(R) = e(R) + \dim(R) - 1$ ならば $G(R)$ も Cohen-Macaulay であると言う Sally の結果の 拡張に なっている.

系 2.5. $\tau(I) = 1$ のとき 次は同値：

(1) $\delta(I) = 1$.

(2) $G(I)$ が Cohen-Macaulay.

(3) $\mu(I) = f(I) + \dim(R) - 1$.

$\dim(R) = 2$ とすると，これらは 次の条件 とも 同値：

(4) $g(I) = 0$ かつ $F(I)$ が Cohen-Macaulay.

(5) $f_1(I)=f(I)-1$ かつ $F(I)$ が Cohen-Macaulay.

3. 一次元の場合　この節では，簡単のため，(R, m, k) は一次元解析的不分岐なネーター局所環で剰余体は無限体とし，I を R の m-準素イデアルとする．

$S=\bigcup_{n=0}^{\infty}(I^n : I^n)_{Q(R)}$ （R の I に関する第一近傍の環）とおいて，xR を I の極小還元とすると，$IS=xS$ で

$$\ell(R/I^n)=e(I)n-\ell(S/R)+\ell(I^nS/I^n),\quad n\geq 0,$$

$$f(I)=\mu_R(S)=\mu(I^n),\quad n\geq \delta(I),$$

$$\delta(I)=\min\{n \mid S=(I^n : I^n)\}$$

が成り立つ．

$$p_a(I)=\ell(S/R)-e(I)+\ell(R/I)=\ell(IS/I),$$

$$\overline{p}_a(I)=\ell(\overline{R}/R)-e(I)+\ell(R/\overline{I})=\ell(I\overline{R}/\overline{I}),$$

$p_a(R)=p_a(m)$，$\overline{p}_a(R)=\overline{p}_a(m)$ とおく．但し $\overline{R}$ は R の整閉包（[2] 参照）．$\overline{I}=I\overline{R}\cap R$ より次の完全列がある：

$$0\longrightarrow R/\overline{I}\longrightarrow \overline{R}/I\overline{R}\longrightarrow \overline{R}/I\overline{R}+R\longrightarrow 0.$$

従って $e(I)-\ell(R/\overline{I})=\ell(\overline{R}/I\overline{R}+R)$ であり，$I\subset J$ とすると $\overline{p}_a(I)\leq \overline{p}_a(J)$ が成り立つ．（$p_a(I)\leq p_a(J)$ は一般には成り立たない．）

命題 3.1（[2]）．$p_a(I)=0 \Longleftrightarrow \delta(I)\leq 1$，

$p_a(I) = g_a(I) \iff \delta(I) \leqslant 2$，

I が整閉のとき

$\overline{p_a}(I) = 0 \iff \overline{\delta}(I) \leqslant 1$

$\iff \delta(I) \leqslant 1$ かつ 任意の n について I^n が整閉.

但し，$\overline{\delta}(I) = \min\{n \mid$ ある $\overline{I}$ の極小還元 J について $J\overline{I^m} = \overline{I^{m+1}}$ $(\forall m \geqslant n)\}$，$\overline{\delta}(R) = \overline{\delta}(\mathfrak{m})$.

これより，$p_a(R) = 0 \iff emb(R) = e(R)$，

$p_a(R) = 1 \iff emb(R) = e(R) - 1$ かつ $G(R)$ が Cohen-Macaulay，

$\overline{p_a}(R) = 0 \iff emb(R) = e(R)$ かつ 任意の $\mathfrak{m}^n$ が整閉.

R の任意の整閉イデアル I が $\delta(I) \leqslant 1$ を満たすとき R が <u>Arf 環</u> であると言う（Lipman）. 以上のことより：

<u>命題</u> 3.2. 次の条件は同値：

(1) $\overline{p_a}(R) = 0$.

(2) 任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して $\overline{p_a}(I) = 0$.

(3) R は Arf 環で，I が整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアル のとき任意の n について I^n も整閉である.

<u>系</u> 3.3. 半正規環（seminormal ring）は Arf 環である.

例. $k[[X_1, \cdots, X_n]]/(X_iX_j \mid i \neq j)$, $k[[t^e, t^{e+1}, \cdots, t^{2e-1}]]$, $e \geqq 1$ 等は Arf 環である.

任意の m-準素イデアル I について $\mu(I) \leqq e(R)$ 従って $f(I) \leqq e(R)$ であり, $\tau(I) \leqq 1$ ならば $\mu(I) \leqq f(I) \leqq e(R)$ が成り立つ.

命題 3.4. (1) I が整閉とする. $\tau(I) \leqq 1$ であることは $\mu(I) = e(R)$ かつ $\overline{p_a}(I) = \overline{p_a}(R)$ と同値で, このとき $\delta(I) \leqq 1$ かつ $\mu(I) = f(I) = e(R)$. 特に $\overline{p_a}(R) = 0$ のとき $\tau(I) \leqq 1$ は $\mu(I) = e(R)$ $(= \mathrm{emb}(R))$ と同値である.

(2) $\tau(I) = 1$ のとき $\mu(I) = f(I) - 1$ であることは $\delta(I) = 2$ かつ $e(I) = \ell(I/I^2) + 1$ と同値で, このとき $G(I)$ は Cohen-Macaulay 環でない.

$\overline{R}$ が局所環であるとき R は カスプ的 (cuspidal) であると言う. これは R が解析的既約, 即ち $\hat{R}$ が整域であることと同値で, このとき $\overline{R}$ は DVR となる. v を $\overline{R}$ の (正規化された) 付値, $n = t\overline{R}$ を $\overline{R}$ の極大イデアルとする. $H := v(R - \{0\})$ は numerical semigroup で

（R の値半群と言う），任意の $n \in H_+ := H - \{0\}$ に対して $I_n := t^n\overline{R} \cap R = \{x \in R \mid v(x) \geqq n\}$ は整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアルである．逆に任意の整閉 $\mathfrak{m}$-準素イデアル I はある $n \in H_+$ により $I = I_n$ となる．更に，$I_n\overline{R} = t^n\overline{R}$，$e(I_n) = [\overline{R}/\mathfrak{n} : R/\mathfrak{m}]n$，$\overline{I_m I_n} = I_{m+n}$，$\overline{I_n^r} = I_{nr}$（$m, n \in H_+$，$r \geqq 1$）が成り立つ．一次元解析的既約な局所環 R が $\overline{R}/\mathfrak{n} = R/\mathfrak{m}$ を満たすとき，R をカスプ曲線特異点（cuspidal curve singularity）と呼ぶ．このとき任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して $e(I) = \min\{v(x) \mid 0 \neq x \in I\}$ であり，$e(I) = n$ とすると $\overline{I} = I_n$ かつ t^nR が I の唯一の極小還元である．

H が numerical semigroup，k が体のとき $k[[H]]$ は値半群が H のカスプ曲線特異点である（monomial curve singularity と呼ばれる）．

R がカスプ的整域，$c = (R : \overline{R})$ を R の導手とすると，任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル I に対して $\overline{\delta}(I) = \{\ell(\overline{R}/c)/e(I)\}$ が成り立つ，但し $\{x\} = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqq x\}$（[2] 参照）．従って $I \subset J$ ならば $\overline{\delta}(I) \leqq \overline{\delta}(J)$ となる．

命題 3.5．H が numerical semigroup，$R = k[[H]]$，$n \in H_+$ とする．

(1) $\overline{\delta}(I_n) = \{ c(H)/n \}$. 従って $n \geqq c(H)$ ならば $\overline{\delta}(I_n) = \delta(I_n) \leqq 1$.

(2) $\delta(I_n) \leqq 1 \iff a, b \in H$, $n < b \leqq a < c(H)$ ならば $a + b - n \in H$.

<u>系</u> 3.6. $k[[H]]$ が Arf 環 $\iff a, b, c \in H$, $c < b \leqq a < c(H)$ ならば $a + b - c \in H$.
(このとき H を <u>Arf 半群</u> と呼ぶ.)

例えば $H = e\mathbb{N} \cup (c + \mathbb{N})$, $1 \leqq e \leqq c$ は Arf 半群である.

<u>定理</u> 3.7. R が Gorenstein 環のとき次は同値:

(1) $\overline{p_a}(R) = 1$.

(2) $\overline{\delta}(R) = 2$.

(3) $\overline{g}(R) = 2$ (このとき $e(R) = 2$) または $emb(R) = e(R) - 1$ かつ m^n が任意の n について整閉 (このとき $e(R) \geqq 3$). 但し, $\overline{g}(R) = \ell(\overline{R}/R)$ とおく.

<u>証明</u>. (1) $\Rightarrow$ (3): $1 = \overline{p_a}(R) \geqq p_a(R) \geqq 0$ より $p_a(R) = 0$ または 1. $p_a(R) = 0$ ならば $e(R) = 2$. よって $\overline{g}(R)$

$= \overline{p}_a(R) + e(R) - 1 = 2$. $p_a(R) = 1$ ならば $S = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{m}^n : \mathfrak{m}^n)$ として $\ell(\overline{R}/S) = \overline{p}_a(R) - p_a(R) = 0$ より $\overline{R} = S = (\mathfrak{m}^n : \mathfrak{m}^n)$ $(n \geqq 2)$ かつ $emb(R) = e(R) - 1$, $e(R) \geqq 3$ ([2], [3] 参照).

故に $n \geqq 2$ について $\mathfrak{m}^n \overline{R} = \mathfrak{m}^n$ より $\overline{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}^n \overline{R} \cap R = \mathfrak{m}^n$.

(3) $\Longrightarrow$ (2): $\overline{g}(R) = 2$ とすると $\mathfrak{m}^2\overline{R} \subset R$ より

$$\ell(\overline{R}/\mathfrak{m}^2\overline{R}) + \ell(\mathfrak{m}^2\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}^2}) = \ell(\overline{R}/R) + \ell(R/\overline{\mathfrak{m}^2})$$
$$= \ell(\overline{R}/\mathfrak{m}^2\overline{R} + R) + \ell(R/\overline{\mathfrak{m}^2}) = \ell(\overline{R}/\mathfrak{m}^2\overline{R}).$$

従って $\mathfrak{m}^2\overline{R} = \overline{\mathfrak{m}^2}$, 即ち $\overline{R} = (\overline{\mathfrak{m}^2} : \overline{\mathfrak{m}^2})$ が成り立ち $\overline{\delta}(R) \leqq 2$. $\overline{\delta}(R) \leqq 1$ とすると $\overline{p}_a(R) = 0$, $e(R) = 2$ となり $\overline{g}(R) = 1$ で矛盾. $emb(R) = e(R) - 1$, $\overline{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}^n$ $(n \geqq 1)$ とすると $\overline{\delta}(R) = \delta(R) = 2$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): $\overline{R} = (\overline{\mathfrak{m}^2} : \overline{\mathfrak{m}^2})$ より $\overline{\mathfrak{m}^2} \subset c := (R : \overline{R})$.

故に $\overline{g}(R) = \ell(\overline{R}/R) = \ell(R/c) \leqq \ell(R/\overline{\mathfrak{m}^2})$

$$= \ell(\overline{R}/\overline{\mathfrak{m}^2}) - \ell(\overline{R}/R)$$
$$= \ell(\overline{R}/\mathfrak{m}^2\overline{R}) - \ell(\overline{R}/R) = 2e(R) - \overline{g}(R)$$

よって $\overline{g}(R) \leqq e(R)$, 即ち $\overline{p}_a(R) = \overline{g}(R) - e(R) + 1 \leqq 1$. $\overline{p}_a(R) = 0$ とすると $\overline{\delta}(R) \leqq 1$ となり矛盾. 証終.

例えば $R = k[[H]]$ のとき, $\overline{p}_a(R) = 1 \Longleftrightarrow H = \langle 2, 5 \rangle$ または $\langle e, e+1, \cdots, 2e-2 \rangle$, $e \geqq 3$ で このとき 任意の

整閉 $\mathfrak{m}$－準素イデアル I に対して G(I) は Cohen-Macaulay.

参考文献

[1] 大石, Castelnuovo's regularity of graded rings and modules, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 627-644.

[2] 大石, Genera and arithmetic genera of commutative rings. Hiroshima Math. J. 17 (1987), 47-66.

[3] 大石, Δ-genera and sectional genera of commutative rings, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 361-372.

[4] 大石, 可換環の種数について, 第32回 代数学シンポジウム (1986年7月) 報告集, 156-178.

On some numerical invariants of ideals (summary)

Akira Ooishi

Let (R, m) be a d-dimensional Cohen-Macaulay local ring and let I be an m-primary ideal of R. Define the integers $e_i(I) = e_i$ $(0 \leqq i \leqq d)$ and $f_i(I) = f_i$ $(0 \leqq i < d)$ by the following conditions:

$$\ell(R/I^{n+1}) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \dots + (-1)^d e_d, \quad n \gg 0,$$

$$\mu(I^n) = f_0\binom{n+d-1}{d-1} - f_1\binom{n+d-2}{d-2} + \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1}, \quad n \gg 0.$$

We also put $e_i(R) = e_i(m)$ and $f(I) = f_0(I)$.

Theorem 1. Assume that R is not regular. Then the following conditions are equivalent: (1) $\mathrm{emb}(R) = e(R) + \dim(R) - 1$; (2) $e_1(R) = e(R) - 1$; (3) $e_2(R) = 0$; (4) $r(R) = e(R) - 1$. (In general, we have $\mathrm{emb}(R) \leqq e(R) + \dim(R) - 1$, $e_1(R) \geqq e(R) - 1 \geqq r(R)$ and $e_2(R) \geqq 0$.)

Theorem 2. We have $\mu(I) \leqq e(I) + \dim(R) - \ell(R/I)$. If the equality holds, then $f(I) = e_1(I) + 1$, $f_i(I) = e_i(I) + e_{i+1}(I)$ $(1 \leqq i \leqq d - 1)$, $f_1(I) - f(I) + 1 = e_2(I) \geqq 0$, $f(I) + \dim(R) - 1 - \mu(I) = g_s(I)$ $(:= e_1(I) - e(I) + \ell(R/I)) \geqq 0$, and the following conditions are equivalent: (1) $G(I) = \bigoplus_{n\geqq 0} I^n/I^{n+1}$ is Cohen-Macaulay; (2) $\mathrm{reg}\, G(I) \leqq 1$; (3) $e_1(I) = e(I) - \ell(R/I)$; (4) $\mu(I) = f(I) + \dim(R) - 1$. Moreover, in this case, $F(I) = \bigoplus_{n\geqq 0} I^n/mI^n$ is Cohen-Macaulay.

Example. If R is a two-dimensional pseudo-rational local ring (e.g., a two-dimensional regular local ring) and I is integrally closed, then $F(I)$ is Cohen-Macaulay and $\mu(I^n) = f(I)n + 1$ for all $n \geqq 1$. In particular, $f(I) = \mu(I) - 1$.

(December, 1987)

Regular local ring の Galois extension

広島大学理学部　伊藤史朗

R を regular local ring，K を R の商体，L を R の Galois（= finite separable + normal）拡大，S を R の L での整閉包とする。S が再び local となるような場合，S の局所環としての色々な性質を，拡大 L/K 及びうめこみ $R \subset K$ に関する情報で記述できないであろうか。

筆者は S の emb. dimension に関心があるのだが、今のところ解答は得ていないし、見通しもない。この小論では参考のために拡大 L/K が最も簡単な場合の計算結果を報告する。

§1. 準備

この節では準備のための一般論をあつかう。

R ： 體体 k_0 を含む noetherian UFD

K ： R の商体

L ： K の Galois extension

G ： $\mathrm{Gal}(L/K)$．これは abelian であると仮定する。

n ： $|G|$．これは k_0 で invertible であると仮定する

S ： R の L での整閉包

又，以後 G の character といえば $\mathrm{Hom}(G, k_0^*)$ の元と了解する。従って G の character は丁度 n ヶ存在する。それらを

$\chi_1, \cdots, \chi_n$ を表わす。各 χ_i に対して group ring $k_0[G]$ の元 $e(\chi_i)$ を次のように定める。

$$e(\chi_i) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma\in G} \chi_i(\sigma^{-1})\sigma .$$

次の事実は良く知られている。

<u>Lemma</u> 1. (1) $e(\chi_i)^2 = e(\chi_i)$, (2) $e(\chi_i)e(\chi_j) = 0$ if $i \neq j$, (3) $\sum_i e(\chi_i) = 1$。

S は自然に $R[G]$-加群, L は自然に $K[G]$-加群であって $k_0[G] \subset R[G] \subset K[G]$ であることから次の事実が導かれる。

<u>Lemma</u> 2 (1) $L = e(\chi_1)L \oplus \cdots \oplus e(\chi_n)L$

(2) $e(\chi_i)L = \{x \in L \mid \sigma x = \chi_i(\sigma)x \text{ for all } \sigma \in G\}$

(3) $e(\chi_i)L \cdot e(\chi_j)L = e(\chi_i\chi_j)L$

(4) $e(1)L = K$ (ここで 1 は自明な character)。

<u>Corollary</u> 3 (1) $S = e(\chi_1)S \oplus \cdots \oplus e(\chi_n)S$

(2) $e(\chi_i)S \cdot e(\chi_j)S \subseteq e(\chi_i\chi_j)S$

(3) $e(1)S = R$。

<u>Definition</u>. 各 $e(\chi_i)S$ は reflexive R-module, rank 1 である。今 R は UFD であるので $e(\chi_i)S$ は free R-module となる。$e(\chi_i)S$ の base を $s(\chi_i)$ とする。ただし $s(1) = 1$ としておく。上の Cor. の (2) より各 i, j に対し

$$s(\chi_i)s(\chi_j) = g(\chi_i, \chi_j)s(\chi_i\chi_j)$$

となる $g(\chi_i, \chi_j) \in R$ が存在する。$s(1) = 1$ であるから

$g(1, x_i) = g(x_i, 1) = 1$ となっている。

Lemma 4. (1) S/R の discriminant ideal は $\prod_i g(x_i, x_i^{-1})$ で生成される

(2) S が R 上 unramified $\Leftrightarrow$ 任意の x_i, x_j に対して $g(x_i, x_j)$ は invertible

証明. (1) 簡単な計算で $\det \mathrm{Tr}(S(x_i)S(x_j)) = \pm \prod_i n g(x_i, x_i^{-1})$ が確められる。(2) $g(x, x^{-1})S(x') = S(x^{-1})S(x)S(x') = g(x, x')g(x^{-1}, xx')S(x')$ であることから (1) の結果から (2) が従う。

さて、R, S に共に local で $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ がそれぞれの maximal ideal で $R/\mathfrak{m} = S/\mathfrak{n}$ となる場合を考えよう。$S/\mathfrak{n}$ に G は自明に作用しているので

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \sum_{x \neq 1} e(x) S$$

となる。そこで G の character x に対し

$$I(x) = \{ g(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = x,\ x_1 \neq 1,\ x_2 \neq 1 \}$$
で生成される R のイデアル

とおくと

$$\mathfrak{n}^2 = (\mathfrak{m}^2 + I(1)) + \sum_{x \neq 1} (\mathfrak{m} + I(x)) S(x),$$

従って

$$\dim_{S/\mathfrak{n}} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + I(1) + \#\{x \neq 1 \mid I(x) \neq R\}$$

となる。

§2 $g(x,x')$ …その1

最初に R が DVR，G が S の各 maximal ideal の inertia group である場合を考えよう。（S 自身も local となる。）

V，W をそれぞれ R，S の completion，N を W の Jacobson radical とする。G の S への action は W への action に自然に拡張され $W^G = V$ となる。

(1) $H^i(G, 1+N) = 1$ for $i \geqq 1$.

実際 乗法群 $1+N$ は n の各約数に対して divisible である。従って 完全列 $1 \to 1+N \to W^* \to (W/N)^* \to 1$ と (1) から

(2) $H^1(G, W^*) = H^1(G, (W/N)^*)$

及び 完全列

(3) $Hom(G, W^*) \to Hom(G, (W/N)^*) \to Ext^1(G, 1+N) = 1$

が導かれる。今 G は W/N に自明に作用しているので $H^1(G, (W/N)^*) = Hom(G, (W/N)^*)$ である。従って 1-cocycle 群 $Z^1(G, W^*)$ は $B^1(G, W^*)$ と $Hom(G, W^*)$ で生成される。

さて u を N の生成元とする。各 $\sigma \in G$ に対して $\sigma u = a(\sigma) u$ となる $a(\sigma) \in W^*$ が存在する。簡単に確かめられるように $\{a(\sigma)\}_\sigma$ は 1-cocycle であるから $\varphi \in Hom(G, W^*)$ と $b \in W^*$ が存在して $a(\sigma) = \varphi(\sigma) \cdot \sigma b \cdot b^{-1}$ $\forall \sigma \in G$ となる。このとき $\sigma(b^{-1} u) = \sigma(b)^{-1} a(\sigma) u = \varphi(\sigma) b^{-1} u$ である。従って $b^{-1} u$ を改めて u とおくと

(4) $\sigma u = \varphi(\sigma) u$ for all $\sigma \in G$。

任意の $\sigma, \tau \in G$ について $\varphi(\tau)\varphi(\sigma) u = \tau\sigma u = \tau(\varphi(\sigma) u) = \tau(\varphi(\sigma))\varphi(\tau) u$ であるから $\varphi(\sigma) \in W^G = V$ である。又 $\varphi(\sigma)$

$=1$ とすると，$\sigma u=u$ であるから，W の completeness より $\sigma=id$ となる。従って φ は単射である。ところで V^* の有限部分群は全て k_0^* $(\subset V^*)$ に含まれているから φ は G の character であって，しかもこの φ によって G は k_0^* の部分群と同型であるから，G は巡回群である。とくに $Hom(G,k_0^*)$ も巡回群であるが，簡単な計算から φ は $Hom(G,k_0^*)$ の生成元であることも分かる。又，(4)をみたす character φ は unique であることも容易に確めることができる。

まとめると，

Lemma 5. (1) $Hom(G,k_0^*)$ の元 φ で次の性質をもつものが存在する。N の生成元 u を適当に選べば G の任意の元 σ に対して $\sigma u=\varphi(\sigma)u$.

(2) この φ は $Hom(G,k_0^*)$ を生成する。

(3) $S=e(\varphi^0)S+\cdots+e(\varphi^{n-1})S$ かつ $e(\varphi^i)W=Vu^i$。

とくに

(4) $0\leqslant i,j<n$ なる整数について $g(\varphi^i,\varphi^j)$ が invertible $\Leftrightarrow$ $i+j<n$.

さて DVR とは限らない R について考える。P を S の高さ1の素イデアルで，P において S は R 上 unramified でないとしよう。このとき inertia group $=\{\sigma\in G \mid \sigma a-a\in P$ for all $a\in S\}$ は自明でない。$S'=S^H$，$Q=P\cap S'$ とおく。S'_Q，S_Q，H に対し Lemma 5 を用いると，Lemma 5 (1) をみたす H の character φ が存在する。このとき G の任意の character χ に対し，整数 $ord_P(\chi)$ で

$$\chi|_H = \varphi^{\mathrm{ord}_P(\chi)}, \quad 0 \leq \mathrm{ord}_P(\chi) < |H|$$

となるものが unique に定まる。φ を P での(P の inertia group の) basic character, $\mathrm{ord}_P(\chi)$ を P での χ の order と呼ぶことにする。

§3 $g(\chi, \chi')$ … その2

最初に一般的な注意をしておく。H を G の部分群, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^H$ とおく。すると

$$\mathfrak{S} = \sum_{\psi : H\text{の char}} e(\psi)\mathfrak{S}$$

$$= \sum_{\chi : G\text{の char}} e(\chi)\mathfrak{S}$$

であるが, さらに ψ を H の character としたとき

$$e(\psi)\mathfrak{S} = \sum_{\chi|_H = \psi} e(\chi)\mathfrak{S}$$

となっている。とくに

$$\mathfrak{S}' = \sum_{\chi|_H = 1} e(\chi)\mathfrak{S}$$

であって, $\chi|_H = 1$ となる G の character χ に対して $\bar{\chi}$ で χ から導かれる G/H の character を表わすことにすると

$$e(\chi)\mathfrak{S} = e(\bar{\chi})\mathfrak{S}'$$

となっている。

<u>Lemma</u> 6. $\mathfrak{S}$ の各 maximal ideal の inertia group を含んでいるような G の subgroup H を考える。χ_1, χ_2 を G の character で $g(\chi_1, \chi_2)$ は invertible であると仮定しよう。このとき $\chi|_H = 1$ となる G の任意の character χ に対して $g(\chi_1\chi, \chi^{-1}\chi_2)$ は invertible である。

証明. $g(\chi_1,\chi_2)g(\chi,\chi^{-1})S(\chi_1\chi_2)=S(\chi_1)S(\chi_2)S(\chi)S(\chi^{-1})=$ $g(\chi_1,\chi)g(\chi_2,\chi^{-1})S(\chi_1\chi)S(\chi_2\chi^{-1})=g(\chi_1,\chi)g(\chi_2,\chi^{-1})g(\chi_1\chi,\chi^{-1}\chi_2)S(\chi_1\chi_2)$ であるから $g(\chi,\chi^{-1})$ が invertible であることを確めておけば良い。ところで H の選びかたから, $S'=S^H$ は R 上 unramified である。従って上に述べた注意及び Lemma 4 より $g(\chi,\chi^{-1})$ は invertible である。

Theorem　G の character χ_1,χ_2 に対し $g(\chi_1,\chi_2)$ が invert. となる必要十分条件は, S の各高さ1の ramified prime ideal P において $\mathrm{ord}_P(\chi_1)+\mathrm{ord}_P(\chi_2)<|H(P)|$ が成立することである。

証明. 定理の証明のためには R が DVR であると仮定しておいて十分である。H を S の各 maximal ideal の inertia group とする (inertia group は今の場合 maximal ideal によらず共通である)。$H=\{1\}$ であれば S は R 上 unramified であるので主張は正しい。よって $H\neq\{1\}$ とする。又 $r=|H|$ とおく。

まず最初に S の各 maximal ideal P に対し $\mathrm{ord}_P(\chi_1)+\mathrm{ord}_P(\chi_2)<r$ と仮定しよう。$S'=S^H$ の各 maximal ideal で Lemma 5 (4) を用いると $e(\chi_1|_H)S\cdot e(\chi_2|_H)S=e(\chi_1\chi_2|_H)S$ となる。$e(\chi_1\chi_2|_H)S$ の直和因子 $e(\chi_1\chi_2)S$ に注目すると, G の character χ',χ'' で $\chi'|_H=\chi_1|_H$, $\chi''|_H=\chi_2|_H$, $\chi'\chi''=\chi_1\chi_2$ 及び $g(\chi',\chi'')$ は invertible となるものの存在がわかる。$\chi=(\chi')^{-1}\chi_1$ とおくと $\chi|_H=1$ であって $\chi_1=\chi'\chi$, $\chi_2=\chi^{-1}\chi''$。従って Lemma 6 より $g(\chi_1,\chi_2)$ は invertible である。

次に $g(\chi_1,\chi_2)$ は invertible であると仮定しよう。前の step と同じ理由で $e(\chi_1|_H)S\cdot e(\chi_2|_H)S=e(\chi_1\chi_2|_H)S$ となる

ことを証明しておけばよい。そこで $e(\chi_1|_H)S\cdot e(\chi_2|_H)S=$ $a\,e(\chi_1\chi_2|_H)S$ となる S' の元 a を一つ選ぶ。a は $a=\sum a_\chi\, s(\chi)$, $a_\chi\in R$, χ は G の character で $\chi|_H=1$, と書ける。仮定から $R\, s(\chi_1\chi_2)$ は $e(\chi_1|_H)S\cdot e(\chi_2|_H)S$ の直和因子である。従って $\{a_\chi\, g(\chi,\chi^{-1}\chi_1\chi_2)\mid \chi$ は G の character で $\chi|_H=1\}$ で生成されるRのイデアルは R となる。よってある a_χ は invertible。一方、もし a が invertible でないとすると $a\in Q$ となる S' の maximal ideal Q が存在する。S' の maximal ideal は全て σQ という形をしていること，及び $e(\chi_1|_H)S$, $e(\chi_2|_H)S$, $e(\chi_1\chi_2|_H)S$ は全て G の作用で(集合として)不変であることから $e(\chi_1|_H)S\cdot$ $e(\chi_1|_H)\subseteq \bigcap_{Q:S'\text{の}max}(Q\cdot e(\chi_1\chi_2|_H)S)=(\bigcap_{Q:S'\text{ の}max}Q)\cdot e(\chi_1\chi_2|_H)S$ ($e(\chi_1\chi_2|_H)S$ は free S'-module)。S' は R 上 unramified であるから $\bigcap_{Q:S'\text{の}max}Q=\mathfrak{m}S'$，ただし $\mathfrak{m}$ は R の maximal ideal。よって $a\in\mathfrak{m}S'$ となり、これはある a_χ が invertible という事実に反する。従って a は S' の invertible な元である。

§4. Examples

この節では
k : 代数的閉体, $\mathrm{ch}\, k = 0$
R : kを含む complete regular local ring
K : Rの商体
L : Kの Galois ext.
G : $\mathrm{Gal}(L/K)$, order は n
S : RのLでの整閉包

とする。

Example 1. $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (pは素数), Sが ramified するRの高さ1の素イデアルは1個のみとする。このとき emb. dim $S \leq \dim R + 1$.

証明: Rの高さ1の素イデアル $\mathfrak{P}$ で S が ramified しているとする。$\mathfrak{P}$上のSの素イデアルは唯一つ, それを $\mathfrak{Q}$ とする。$\mathfrak{Q}$ の inertia group は Gである。$\mathfrak{Q}$での basic character を φ とすると Theorem より $g(\varphi, \varphi^{i-1})$ $(i=2, \cdots, p-1)$ は invertible。故に $I(\varphi^i) = R$ $(i=2, \cdots, p-1)$ となり emb. dim $S \leq \dim R + 1$ を得る。

注意. 講演及び予稿においては、Sが ramified するRの高さ1の素イデアルの個数にはふれなかった様に思う。この個数が1であることが、シンポジウムで紹介した証明の大前提である。

Example 2. $R = k[[x, y]]$, $L = K(\sqrt[5]{x^2y^3})$ のとき, Rの高さ1の素イデアルで S が ramified するものは $\mathfrak{z}_1 = xR$ と $\mathfrak{z}_2 = yR$ のみである。$\sigma \in G$ は $\sigma z = \xi z$ ($z = \sqrt[5]{x^2y^3}$, ξは1の原始5乗根) なるものとして定めておく。$V = R_{\mathfrak{z}_1}$, $u = x/z^2$ とおく。VのLでの整閉包 ($S_{\mathfrak{z}_1}$) は $W = V[u] \cong V[U]/(x - y^6U^5)$

従って u が W の Jacobson radical (= maximal ideal) を生成しており $\sigma u = \xi^3 u$。よって $\mathfrak{P}_1$ 上の S の素イデアルでの basic-character φ は $\varphi(\sigma) = \xi^3$ をみたす。同様の議論を $\mathfrak{P}_2 = yR$ について行うと，この点での basic character ψ は $\psi(\sigma) = \xi^2$ をみたす。とくに $\varphi^4 = \psi$ である。

1	φ	φ^2	φ^3	φ^4
1	ψ^4	ψ^3	ψ^2	ψ

Theorem より $I(\varphi^i) \neq R$ $(i = 1, \cdots, 4)$ となるので emb.dim $S \leq 2 + 4 = 6$。実のところ emb.dim $S = 6$ である。

参考文献

P. Griffith. Normal extensions of regular local rings, J. Algebra 106 (1987) 465-475

Integral-valued polynomial ringについて

江畑 暢之・茨城大,理

序. Rをdomain, R[X]をR係数の1変数多項式環とする。R[X]の元f(X)は次の二面性をもつ。

(1) 形式的な多項式としてのf(X).

(2) RからRへの写像としてのf(X).

ここではまず、(2)でunitならば(1)でunitが成り立つ,すなわち、次の(☆)の条件をみたすdomainを考える。

定義1

Rをdomain, $R[X] \ni f(X)$とする。

(☆) $R \ni {}^{\forall}a$に対して
$$f(a) \in R^{\times} \Longrightarrow f(X) \in (R[X])^{\times} = R^{\times}$$

が成り立つとき、R[X]をRに関するweakly Skolem ringという。$R^{\times}$; Rのunit全体, $(R[X])^{\times}$; R[X]のunit全体を表わす。

注意

$(R, \mathfrak{m})$; local domain, $\dim R \geqq 1$とする。

$\mathfrak{m} \ni {}^{\exists}a \neq 0$, $f(X) = aX + 1$とおけば、(☆)の条件はみたされないことがわかる。

では(☆)をみたすdomainの具体例とはいったい何であろうか? それに答えるのが次の定理1である。

定理1

kをfield, Fをkのprime field, $[k : F] = \infty$,

Rをk-affine domain, $\dim R \geqq 1$とする。

このとき. R[X]はRに関してweakly Skolem ring.

証明

$R[X] \ni f(X)$, $R \ni {}^\forall r$ に対して $R^\times \ni f(r)$ とする。$R^\times \ni f(0)$ だから $f(0) = 1$ としてよい。$f(X)$ が non-constant として矛盾を導く。

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + 1 \quad (a_i \in R,\ a_n \neq 0)$$

$f(X) = 0$ の根の1つを α_0 とし, $\alpha = \frac{1}{\alpha_0}$, $A = R[\frac{1}{\alpha}]$ とおけば、$\alpha \in A$ であるから、

$$f(X) = (1 - X\alpha)\, g(X) \qquad (g(X) \in A[X])$$

このとき、$R \ni {}^\forall r$ に対して、

$$f(r) = (1 - r\alpha)\, g(r) \in R^\times \subset A^\times$$

したがって、$1 - r\alpha \in A^\times$

A における k の algebraic closure を k' とすれば、A は k' - affine domain で $A^\times / k'^\times$ は finite rank の free abelian group であるから、その free basis を $\overline{u_1}, \cdots, \overline{u_t}$ $(u_i \in A^\times)$ とする。$R \ni a \neq 0$ を $R^\times \not\ni a$ な元とする。

$k \ni \lambda$ に対して、$1 - \lambda a \alpha \equiv u_1^{\lambda_1} \cdots u_t^{\lambda_t} \pmod{k'^\times}$

$v_\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_t)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ と表わす。

$k \ni \lambda \neq 0$ とすると $1 - \lambda a \alpha \not\equiv 0 \pmod{k'^\times}$. そして $\{v_\lambda ;\ k \ni \lambda\}$ は無限集合だから、

$k \ni {}^\exists \lambda(1), \cdots, \lambda(t+1)$: $\mathbb{F}$ 上一次独立 ,

$\mathbb{N} \cup \{0\} \ni {}^\exists l_1, \cdots, l_{t+1}$, $l_1 \mathbb{Z} + \cdots + l_{t+1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ s.t.

$$l_1 v_{\lambda(1)} + \cdots + l_s v_{\lambda(s)} = l_{s+1} v_{\lambda(s+1)} + \cdots + l_{t+1} v_{\lambda(t+1)}$$

(non - trivial relation)

となる。したがって、

$$(1 - \lambda(1) a \alpha)^{l_1} \cdots (1 - \lambda(s) a \alpha)^{l_s} = \xi\, u_1^{i_1} \cdots u_t^{i_t}$$

$$(1 - \lambda(s+1) a \alpha)^{l_{s+1}} \cdots (1 - \lambda(t+1) a \alpha)^{l_{t+1}} = \eta\, u_1^{i_1} \cdots u_t^{i_t}$$

$\xi, \eta \in k'^\times$. ここで $\xi \neq \eta$ とすれば、

$$(\xi-\eta)u_1^{i_1}\cdots u_t^{i_t} = (1-\lambda(1)a\alpha)^{l_1}\cdots(1-\lambda(s)a\alpha)^{l_s}$$
$$-(1-\lambda(s+1)a\alpha)^{l_{s+1}}\cdots(1-\lambda(t+1)a\alpha)^{l_{t+1}}.$$
$$= ah \quad (h\in A).$$
したがって、$a\in A^{\times}$となり矛盾．よって
$$(1-\lambda(1)a\alpha)^{l_1}\cdots(1-\lambda(s)a\alpha)^{l_s}-(1-\lambda(s+1)a\alpha)^{l_{s+1}}\cdots(1-\lambda(t+1)a\alpha)^{l_{t+1}} = 0 \quad \cdots(\#)$$
$(\#)$は$f(a\alpha)=0$ ($f(x)\in k[X]$)と表わされるが、$f(X)$は恒等的に0ではない。$f(X)$の1次係数が0とすると、
$$-(l_1\lambda(1)+\cdots+l_s\lambda(s))+(l_{s+1}\lambda(s+1)+\cdots+l_{t+1}\lambda(t+1))=0$$
$\mathrm{ch}\, k=0$の場合．$l_1=\cdots=l_{t+1}=0$となり矛盾．
$\mathrm{ch}\, k=P$の場合．$l_1,\cdots,l_{t+1}\in P\mathbb{Z}$となり矛盾．
よって　$a\alpha\in k'$．$\mathrm{tr.deg}_k R=\dim R\geqq 1$から
$R\ni{}^{\exists}b$ s.t. $k'\not\ni b$．$A^{\times}\not\ni ab$より先と同様にして
$ab\alpha\in k'$となり．$b\in k'$．矛盾．
よって．$R[X]$はRに関してweakly Skolem ring．▮

この定理1から次の命題1が、さらに命題2がでる。その前に補題を1つ用意する。

補題

Rをdomain，AをRのintegral extension domainとする．
このとき、$A^{\times}\cap R=R^{\times}$．

命題1

kをfield，$\mathrm{ch}\, k=0$，Fをkのprime field，$[k:F]=\infty$，
Rをk-affine domain，$\dim R\geqq 1$．
AをRのfinite integral extensionとする．
このとき、${}^{\exists}M\in \mathrm{Max}(A)$ s.t. $A/M = R/\mathfrak{m}$．
$(\mathfrak{m}=M\cap R)$

証明

1 Aがdomainの場合．R，Aの商体をそれぞれK，Nとする．LをNを含むKの最小な正規拡大体とする。

Case I．AがRのintegral closureの場合．

LはK上integralだからL＝N．したがって，$^{\exists}\alpha \in N$ s.t. $N = K(\alpha) = K[\alpha]$．$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \ (a_i \in K)$ をαのK上の最小多項式，$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をαの共役元全体とする．$a_i = \dfrac{b_i}{c}$ $(b_i, c \in R, \ c \neq 0)$ とおくとαのかわりに$c\alpha$をとることによって$a_i \in R$としてよい．

α_iはR上integralだから，$A \ni \alpha_i$となり，$A \supset R[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$．

ここで，$^{\forall}M \in \mathrm{Max}(A)$に対して，$A/M \supsetneqq R/\mathfrak{m}$ $(\mathfrak{m} = M \cap R)$とする。

① $A = R[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$の場合

$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + 1$ とおくと．このとき

$f(X) = (1 - \alpha_1 X) \cdots (1 - \alpha_n X)$である。

$^{\exists}M \in \mathrm{Max}(A)$，$^{\exists}a \in R$ s.t. $1 - \alpha_i a \in M$とすると

$$A/M = R/\mathfrak{m}[\bar{\alpha}_1, \cdots, \bar{\alpha}_n] = R/\mathfrak{m}[\bar{a}] = R/\mathfrak{m}$$

となり仮定に反する．

よって，$^{\forall}M \in \mathrm{Max}(A)$，$^{\forall}a \in R$に対して$1 - \alpha_i a \notin M$

$1 - \alpha_i a \in A^{\times}$ より $f(a) \in A^{\times} \cap R = R^{\times}$．

定理1から$f(X)$はconstantとなり矛盾．

$\therefore$ $^{\exists}M \in \mathrm{Max}(A)$ s.t. $A/M = R/\mathfrak{m}$ $(\mathfrak{m} = M \cap R)$

② $A \supsetneqq R[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$の場合．

$^{\exists}\beta_1, \cdots, \beta_\ell \in A$ s.t. $A = R[\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_\ell]$．

$\beta_i \in K[\alpha]$から．$\beta_i = \dfrac{f_i(\alpha)}{s_i}$ $(f_i(\alpha) \in R[\alpha], \ 0 \neq s_i \in R)$

とおける．$s = s_1 \cdots s_l$ とすると $A = R[\frac{1}{s}][\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ となるから、$R[\frac{1}{s}]$ を R に対応させることによって ① に帰着できる．

Case II．A が R の L における integral closure でない場合．
B を R の L における integral closure とすると Case I から．$^\exists \mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(B)$ s.t. $B/\mathfrak{M} = R/\mathfrak{m}$ $(\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R)$.
$\mathfrak{M} \cap A = M$ とおくと
$M \in \mathrm{Max}(A)$, $B/\mathfrak{M} = A/M = R/\mathfrak{m}$.

$\boxed{2}$ A が domain でない場合．
A は R 上 integral だから、$R \supset (0)$ に対して $^\exists P \in \mathrm{Spec}(A)$ s.t. $P \cap R = (0)$．A/P を A に対応させることによって $\boxed{1}$ に帰着できる．■

<u>命題 2</u>

k, F, R は命題 1 と同様．$R[X] \ni f(x)$：non－constant とする。このとき $^\exists \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ s.t. $R/\mathfrak{m}[X] \ni \bar{f}(x) \neq \bar{0}$, $\bar{f}(x) = \bar{0}$ は $R/\mathfrak{m}$ に解をもつ。

<u>証明</u>

K を R の商体．$f(x) = P_1(x) \cdots P_t(x)$ $(P_i(x) \in K[X])$ を既約分解とする。$^\exists a_1, \cdots, a_t \in R$ s.t.
$(a_1 \cdots a_t) f(x) = (a_1 P_1(x)) \cdots (a_t P_t(x))$, $a_i P_i(x) \in R[X]$.
ここで $a_1 P_1(x)$ について命題が成り立てばよいから、$f(x)$ は既約としてよい．さらに $f(x)$ の最高次係数を $d \neq 0$ とおくと．$R[\frac{1}{d}]$ を考えれば．初めから $f(x)$ をモニックとしてよい．このとき $R[X]/f(x)R[X]$ を A とおくと．A は R 上 integral.
そこで命題 1 から $^\exists M \in \mathrm{Max}(A)$ s.t. $A/M = R/\mathfrak{m}$

$(\mathfrak{m} = M \cap R)$. $A \ni \bar{X}$ の A/M における residue class を α とおくと、$\alpha \in R/\mathfrak{m}$ で $\bar{f}(\alpha) = \bar{0}$. ∎

定義 2

R を domain, k を R の商体. $R[X] \ni f(X), g(X)$, $f(X) \neq 0$ とする. almost all $a \in R$ に対して

$$f(a) \mid g(a) \text{ in } R \quad \Longrightarrow \quad f(X) \mid g(X) \text{ in } k[X]$$

が成り立つとき、R を D-ring という.

多項式の二面性の (2) の意味で割り切れるならば、(1) の意味で割り切れる domain を D-ring というのである.

定義 3

R を domain, k を R の商体とする.

$$D(R) = \{ f(X) \in k[X] \mid f(R) \subset R \}$$

を R の integral-valued polynomial ring という.

定理 2

$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{F}$, R は定理 1 と同様. このとき R は D-ring である.

証明

$R[X] \ni f(X), g(X)$, $f(X) \neq 0$. a. a. $a \in R$ に対して $f(a) \underset{R}{|} g(a)$ とする. K を R の商体とする.

Case I. $\mathrm{G.C.D}(f(X), g(X))_{K[X]} = 1$ の場合.

$R \ni {}^{\exists}d \neq 0$, $R[X] \ni {}^{\exists}h(X), j(X)$ s.t. $f(X)h(X) + g(X)j(X) = d$.

a. a. $a \in R$ に対して、$f(a)h(a) + g(a)j(a) = d$.

$f(a) \underset{R}{|} g(a)$ より $f(a) \underset{R}{|} d$. $f(a)$ は $R[\frac{1}{d}]$ で unit であるが、定理 1 の証明から $f(X)$ は constant となる. $f(X) = f \in R$ とおくと $g(X)$ の係数はすべて f で割り切れる.

なぜなら、$g(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_i \in R)$ とおくと、$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1} \in \mathfrak{k}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j)$ に対して、

$$\begin{pmatrix} g(\lambda_1) \\ g(\lambda_2) \\ \vdots \\ g(\lambda_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}^n & \lambda_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}^n & \lambda_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$ であるから正則.

したがって. $a_i \in g(\lambda_1)R + \cdots + g(\lambda_{n+1})R \subset fR$ だから

$f \underset{R}{|} a_i$. よって $f(x) \underset{k[x]}{|} g(x)$

Case II. $G.C.D.(f(x), g(x))_{k[x]} \neq 1$ の場合

$G.C.D.(f(x), g(x))_{k[x]} = \varphi(x) \in k[x]$ とおく。

${}^\exists h(x), j(x) \in k[X]$ s.t. $f(x) = \varphi(x)h(x)$, $g(x) = \varphi(x)j(x)$.

a. a. $a \in R$ に対して、$f(a) = \varphi(a)h(a) \underset{R}{|} \varphi(a)j(a) = g(a)$ より

${}^\exists u \in R$ s.t. $\varphi(a)\big(j(a) - h(a)u\big) = 0$. $\varphi(a) \neq 0$ から

$j(a) - h(a)u = 0$ となり $h(a) \underset{R}{|} j(a)$. $h(x), j(x)$ の共通分母を C とする。Case I で示されたことから $Ch(x)$ は constant. したがって. $f(x) \underset{k[x]}{|} g(x)$. ∎

<u>注意</u>

上の証明からさらに $f(x) \underset{R[x]}{|} g(x)$ が成り立つ. その際、次の補題を使うがこの補題の証明は、上の Case I で $g(x)$ の係数がすべて f で割り切れることを示すときに使った手法でできる。

<u>補題</u>

k を infinite field, R を domain, $R \supset k$. とする.

このとき.

$$D(R) = R[X]$$

参考文献

[1] P. J. Cahen, Polynômes à valeurs entières, Canad. J. Math, 24 (1972), 747 - 754.

[2] P. J. Cahen et J. L. Chabert, Coefficients et valeurs d'un polynôme, Bull. Sci. Math, 95 (1971), 295 - 304.

[3] J. L. Chabert, Les ideaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières, J. reine. angew. Math, 293/294 (1977), 275 - 283.

[4] J. L. Chabert, Polynômes à valeurs entières et propriété de Skolem, ibid., 303/304 (1978), 366 - 378.

[5] H. Gunji & D. L. Mcquillan, On rings with a certain divisibility property, Michign. Math. J, 22 (1975), 289 - 299.

[6] D. L. Mcquillan, On the coefficients and values of polynomials rings, Arch. Math, 30 (1978), 8 - 13.

[7] F. Shibata, T. Sugatani & k. Yoshida, Note on rings of integral - valued polynomials, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can, 8 (1986), 297 - 301.

Galois extension of Noetherian domains

岡山理科大 応数 吉田憲一
佐藤淳郎

本稿ではNoether整域上のGalois拡大 A/R について考察する。今までの、可換整域におけるGalois拡大を扱った文献の多くは R が整閉整域の場合に主として拡大の様子について研究されていた。(c.f [1], [4]). しかし A, R がNoether的で、R が整閉でない場合についてはあまり取り扱われていない。ここでは A, R がNoether整域である場合について A/R の拡大の様子についての研究を扱う。

まず最初にNoether整域におけるGalois拡大の定義を述べる。

<u>定義1</u>　A/R をNoether整域の有限拡大，L, K をそれぞれ A, R の商体とする。この時、A/R がGalois群 G を持つGalois拡大であるとは

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L \arrow[d, dash, "\text{Galois ext}"] \\ R \arrow[r, dash] & K \end{tikzcd}$$

(1) L/K が体におけるGalois拡大

(2) L/K のGalois群を $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とすると任意の $\sigma \in G$ に対して

(i) $\sigma(A) \subseteq A$

(ii) $R = A^{G} = \{a \in A \mid \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G\}$

(3) G の位数を $|G|$ と書く時，$|G| = n \in R^{\times}$ (R の unit group)

の条件が成り立つことを言う。

ここで、織田-吉田[5]による平坦性とエタールの障害イデアルの研究において重要な働きをする局所単純拡大について述べる。

<u>定義2</u>　A/Rを整域の有限拡大とする。この時、A/Rが局所単純拡大(locally simple extension)であるとは任意のRの素イデアル$\mathfrak{p}$に対してある$\alpha_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}$が存在して$A_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}[\alpha_{\mathfrak{p}}]$となることを言う。

局所単純拡大については次の定理が示されている。

<u>定理3</u> (c.f [5] Remark 2.2)　A/RをNoether整域の有限拡大としRは無限体kを含むとする。この時、AがR上不分岐であればA/Rは局所単純拡大である。

更に、Galois拡大と局所単純拡大との関係は次の定理で与えられる。

<u>定理4</u>　A/RをGalois群GをもつNoether整域の局所単純なGalois拡大とする。この時、AはR上平坦である。

(証明)　平坦性は局所的な性質なので$(R, \mathfrak{m})$を局所環と仮定してよい。仮定により$A=R[\alpha]$となる$\alpha \in A$が存在する。$f(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \cdots + \gamma_n \in K[X]$, $n=[L:K]$をαのK上の最小多項式とする。$G = \{\sigma_1 = 1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$とすると$\sigma_i(\alpha)$, $i=1,2,\ldots,n$は$f(X)$の根故γ_iは$\{\sigma_i(\alpha) \mid 1 \leq i \leq n\}$の基本対称式で表わされる。ところが$\alpha \in A$なので$\gamma_i \in A^G = R$ $(1 \leq i \leq n)$となる。

よって、A は階数 n の自由 R-加群となる。以上により、A は R 上平坦である。

（証終）

<u>系5</u>　A/R を Noether 整域の Galois 拡大とし、A は R 上不分岐であるとする。更に R は無限体 k を含むとする。この時、A は R 上エタールである。

（証明）　A が R 上不分岐 $\Rightarrow$ A/R は局所単純拡大（by Theorem 3）

$\Rightarrow$ A は R 上平坦（by Theorem 4）

（証終）

Galois 拡大においては次の補題が大切である。

<u>補題6</u>　A/R を Galois 群 G をもつ Noether 整域の Galois 拡大とする。この時、R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}A\cap R=\mathfrak{a}$ が成り立つ。

（証明）　$\mathfrak{a}A\cap R\supseteq\mathfrak{a}$ は明らか故逆を示す。任意の元 $a\in\mathfrak{a}A\cap R$ をとれば、$a=\sum_{i=1}^{k}x_i\alpha_i$ となる元 $x_i\in\mathfrak{a},\alpha_i\in A\ (1\leq i\leq k)$ が存在する。$a\in R$ なので $a=\frac{1}{n}\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(a)\right)$ である。よって、$a=\frac{1}{n}\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(a)\right)=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i\left(\sum_{\sigma\in G}\sigma(\alpha_i)\right)\right\}$ となる。

ここで、$\sum_{\sigma\in G}\sigma(\alpha_i)\in A^{G}=R,\ (1\leq i\leq k)$ なので $a\in\mathfrak{a}$ である。以上により、

$\mathfrak{a}A\cap R=\mathfrak{a}$ が成り立つ。

（証終）

A/R を Galois 群 G をもつ Galois 拡大とする。C ; $G=G_m \triangleright G_{m-1} \triangleright \cdots\cdots$

$\cdots \triangleright G_0=\{e\}$ を G の 組成列とする。この時、G_i/G_{i-1} $(1 \leqq i \leqq m)$ は $\{e\}$ と異なる単純群であることに注意する。体論における Galois の基本定理によって各 G_i に対して不変体 $L_i=L^{G_i}$ が対応する。L/L_i は Galois 群 G_i をもつ Galois 拡大で、G_{i-1} は G_i の正規部分群なので L_{i-1}/L_i は Galois 群 G_i/G_{i-1} をもつ Galois 拡大である。ここで、$A_i=A\cap L_i$ とおくと、A_{i-1}/A_i は Noether 整域の Galois 拡大となる。以上により、Galois 群 G の組成列に対応する単純な Galois 群 G_i/G_{i-1} をもつ Noether 整域の Galois 拡大の有限列 $A=A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_m=R$ を得る。

注意7 特に、R が1の原始 n 乗根を含み、G が可解群であれば G を素数位数の巡回群に帰着できる。この場合は、単純クンマー拡大と呼ばれる拡大となり、これは、菅谷-吉田により構造定理がよくわかっている。ここでは G が可解群でない場合について考える。

Galois 拡大 A/R の不分岐性及び平担性を調べるにおいて、各 slice した部分 A_i/A_{i+1} での状況を調べるだけでよいことが次によってわかる。

<u>定理8</u>　A/B, B/R, A/R をそれぞれ Noether 整域の Galois 拡大とする。この時 A が R 上不分岐（resp. 平坦）である為の必要十分条件は A が B 上不分岐（resp. 平坦）かつ B が R 上不分岐（resp. 平坦）となることである。

最初に、定理を証明する為に必要な補題を述べる

<u>補題9</u>（c.f. [4] (18.7) Theorem）　R, R^* が共に Noether 環で R^* は R-多元環であるものとする。自然準同型 $\varphi: R \to R^*$ ($R \ni a \mapsto a \cdot 1 \in R^*$) を考える。$R^*$ の極大イデアル全体の集合を $\mathfrak{M}^*$ とし、$\mathfrak{M} = \{\varphi^{-1}(\mathfrak{m}^*) \mid \mathfrak{m}^* \in \mathfrak{M}^*\}$ とおく。もし、次の条件が成立すれば R^* は R-平坦である。

i.e.

$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{M}$ の要素に属する準素イデアル、$\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}$ であって $b \in R$, $\mathfrak{q} : b = \mathfrak{m}$ であれば $\mathfrak{q}R^* : bR^* = \mathfrak{m}R^*$ が成り立つ。

（定理の証明）　<u>Case1</u>（不分岐性について）：A が B 上不分岐、B が R 上不分岐ならば、$\mathfrak{D}_B(A) = \mathfrak{D}_R(B) = (0)$ となる。（c.f. [3], 3.4 定理14）よって、$\mathfrak{D}_R(A) = (0)$ となる。（c.f. [3] 1.8, 定理16）以上により A は R 上不分岐である。（c.f. [3], 3.4 定理14）逆に、A が R 上不分岐であれば、$\mathfrak{D}_R(A) = (0)$ となるので $\mathfrak{D}_B(A) = (0)$ である。したがって A は B 上不分岐となることはよい。次に、B が R 上不分岐となることを示す。任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対して、補題6 より

$\mathfrak{q}B=(\mathfrak{q}B)A\cap B=\mathfrak{q}A\cap B$ となる。ここで A は B 上不分岐故 $\mathfrak{q}A$ は A の radical ideal である。よって $\mathfrak{q}B$ もまた B の radical ideal である。以上により、B は R 上不分岐となる。

Case 2（平坦性について）； A が B 上平坦かつ B が R 上平坦であれば A は R 上平坦となることは明らか。逆に、A が R 上平坦と仮定して、B が R 上平坦となることを示す。$\mathfrak{m}\in R$ の極大イデアル，$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{m}$-primary ideal，$b\in R$，$\mathfrak{q}:b=\mathfrak{m}$ と仮定する。この時、補題9より $\mathfrak{q}B:bB=\mathfrak{m}B$ となることを示せばよい。今、A は R 上平坦なので $\mathfrak{m}A=\mathfrak{q}A:bA$ である。ところが、補題6より $\mathfrak{m}B=\mathfrak{m}A\cap B$ なので、$(\mathfrak{q}A:bA)\cap B=\mathfrak{q}B:bB$ が成り立つ。実際、任意の元 $x\in(\mathfrak{q}A:bA)\cap B$ をとれば $xb\in\mathfrak{q}A\cap B$ である。ところが補題6より $\mathfrak{q}A\cap B=\mathfrak{q}B$ なので $x\in(\mathfrak{q}B:bB)$ となる。逆に任意の元 $x\in\mathfrak{q}B:bB$ をとれば $bx\in\mathfrak{q}B\subseteq\mathfrak{q}A$ なので $x\in(\mathfrak{q}A:bA)\cap B$ となる。以上により、$\mathfrak{m}B=\mathfrak{m}A\cap B=(\mathfrak{q}A:bA)\cap B=\mathfrak{q}B:bB$ となるので B は R 上平坦である。次に A が B 上平坦となることを示す。

M,N を B 加群とし $0\to N\xrightarrow{\varphi}M$ を B 加群の完全列とする。

$\otimes_B A$ を作用させると、

(1) $\cdots\quad 0\longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi\otimes_B A)\longrightarrow N\otimes_B A\xrightarrow{\varphi\otimes_B A}M\otimes_B A\quad$ (exact)

B は R 上平坦なので (1) に $\otimes_R B$ を作用させることで完全列

(2) …… $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi \otimes_B A) \otimes_R B \longrightarrow (N \otimes_B A) \otimes_R B \longrightarrow (M \otimes_B A) \otimes_R B$

を得る。ここで $(N \otimes_B A) \otimes_R B = (A \otimes_B N) \otimes_R B = A \otimes_B (N \otimes_R B) = A \otimes_B (B \otimes_R N) =$ $(A \otimes_B B) \otimes_R N = A \otimes_R N$ である。同様に、$(M \otimes_B A) \otimes_R B = M \otimes_R A$ を得る。ところが A は R 上平坦なので完全列 (2) において $\mathrm{Ker}(\varphi \otimes_B A) \otimes_R B = (0)$ でなければならない。今、B は R 上平坦でかつ B は R の整拡大環故 B は R 上忠実平坦となる。したがって $\mathrm{Ker}(\varphi \otimes_B A) = (0)$ となる。以上により A は B 上平坦である。

（証終）

以上により一般の Galois 拡大の不分岐性及び平坦性を研究するにおいて単純な Galois 群をもつ Galois 拡大の場合に帰着されることがわかった。

次に、単純な Galois 群をもつ Galois 拡大についての不分岐性及び平坦性を考察する。最初に次の定義から始める。

定義 10　任意の元 $\alpha \in A$ に対して $\mathrm{Tr}(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)$ とおき、α の跡 (trace) と呼ぶ。ここで $\mathrm{Tr}(\alpha) \in A^G = R$ に注意する。

この時、次の補題が成り立つ。

補題 11　A/R を Galois 群 G をもつ Noether 整域の Galois 拡大，$H = \{\alpha \in A \mid \mathrm{Tr}(\alpha) = 0\}$ とおくと H は R-加群で $A = R \oplus H$ となる。

(証明)　まず最初 $R\cap H=\{0\}$ を示す。任意の元 $a\in R\cap H$ をとると

$0=Tr(a)=\sum_{\sigma\in G}\sigma(a)=na$ となる。ところが $n\in R^\times$ 故 $a=0$ となる。よって、

$R\cap H=\{0\}$ である。次に、任意の元 $\alpha\in A$ に対して $\beta=\alpha-\frac{1}{n}Tr(\alpha)$ とおく

と $Tr(\beta)=Tr(\alpha-\frac{1}{n}Tr(\alpha))=Tr(\alpha)-\frac{1}{n}\cdot n\cdot Tr(\alpha)=0$ となる。よって $\beta\in H$

となるので、$\alpha=\frac{1}{n}Tr(\alpha)+\beta\in R+H$ となる。以上により $A=R\oplus H$ を得る。

(証終)

<u>定義12</u>　$\mathfrak{q}$ を H で生成されるAのイデアルとし $\mathfrak{J}=\mathfrak{q}\cap R$ とする。

このイデアル $\mathfrak{J}$ が後に不分岐性の判定に重要な役割をはたす。

<u>命題13</u>　A/R を Galois群 G をもつ Noether 整域の Galois拡大とし，$\mathfrak{m}\in R$ の極大イデアルとする。この時 $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{J}$ である為の必要十分条件は $A/\sqrt{\mathfrak{m}A}=R/\mathfrak{m}$ となることである。

(証明)　$\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{J}$ と仮定する。$\sqrt{\mathfrak{q}}=P_1\cap\cdots\cap P_t$，$\sqrt{\mathfrak{J}}=\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cdots\cap\mathfrak{p}_t$，$\mathfrak{p}_i=P_i\cap R\ (1\leqq i\leqq t)$ とすると $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{m}$ 故 $\sqrt{\mathfrak{J}}\subseteq\mathfrak{m}$ なので $\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{m}$ なる $i\ (1\leqq i\leqq t)$ が存在する。今 A は R の整拡大環なので A/P_i も又 $R/\mathfrak{p}_i$ の整拡大環となるので A/P_i と $R/\mathfrak{p}_i$ の間に Going-up theorem が成り立つ。よって、$M\cap R=\mathfrak{m}$，$M\supseteq P_i$ なる Aの極大イデアル M が存在する。

補題11により $A=R\oplus\mathbb{H}$ である。ところが $\mathbb{H}\subsetneqq\mathfrak{q}\subseteqq P_i\subsetneqq M$ なので

$M=\mathfrak{m}\oplus\mathbb{H}$ となる。よって $A/M=R/\mathfrak{m}$ である。$\mathfrak{m}$ 上の A の極大イデアル全体を

$M=M_1,\cdots,M_t$ とおくと任意の $i\,(1\leqq i\leqq t)$ に対して $M_i=\sigma(M_1)$ となる $\sigma\in G$ が存

在する。ここで $\sigma(\mathbb{H})=\mathbb{H}$ に注意すれば $\sigma(M_1)=\sigma(\mathfrak{m}\oplus\mathbb{H})=M_1$ である。

よって $t=1$ でなければならない。よって $\sqrt{\mathfrak{m}A}=M_1=M$ となるので $A/\sqrt{\mathfrak{m}A}=R/\mathfrak{m}$ となる。

逆に、$A/\sqrt{\mathfrak{m}A}=R/\mathfrak{m}$ と仮定する。その時、$M=\sqrt{\mathfrak{m}A}$ は A の極大イデアルで $A=R+M$ である。任意の元 $\alpha\in\mathbb{H}\,(\subsetneqq A)$ をとれば $A=R+M$ なので、

$a-\alpha\in M$ となる $a\in R$ が存在する。ここで $\alpha\in\mathbb{H}$ なので $Tr(\alpha)=0$ に注意すると $Tr(a-\alpha)=Tr(a)=na\in M$ となる。よって $a\in\mathfrak{m}\subsetneqq M$ となるので $\alpha=a+(\alpha-a)\in M$ を得る。以上により $M\supseteqq\mathbb{H}$ がわかるので $\mathfrak{m}\supseteqq\mathfrak{q}\cap R=\mathfrak{q}$ である。

（証終）

以下、G は単純群で、R は標数0の体 k を含むと仮定する。

任意の $\sigma\in G$ に対して $\sigma(\sqrt{\mathfrak{m}A})\subseteqq\sqrt{\mathfrak{m}A}$ なので、$\Phi: G\longrightarrow \mathrm{Aut}_{R/\mathfrak{m}}(A/\sqrt{\mathfrak{m}A})$ なる 群準同型 を得る。G は単純群なので Φ は単射であるか又は零射である。

ここで Φ が零射である為の必要十分条件を与える。

<u>命題 14</u>　A/R を Galois 群 G をもつ Noether 整域の Galois 拡大とする。この時 $\Phi: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{R/\mathfrak{m}}(A/\sqrt{\mathfrak{m}A})$ が零射である為の必要十分条件は $A/\sqrt{\mathfrak{m}A}$ である。したがって、命題 13 より $\mathfrak{m} \in \mathfrak{g}$ である為の必要十分条件は Φ が単射となることである。

（証明）　$A/\sqrt{\mathfrak{m}A} = R/\mathfrak{m}$ とすると $\Phi: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{R/\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m})$ である。ここで $\mathrm{Aut}_{R/\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m}) = \{1\}$ なので Φ は零射となる。逆に、Φ が零射であると仮定する。更に $\sqrt{\mathfrak{m}A} = M_1 \cap \cdots \cap M_t$ $(t \geqq 2)$ と仮定する。この時 $A/\sqrt{\mathfrak{m}A} = A/M_1 \times \cdots \times A/M_t$ である。$A/M_i = K_i$ $(1 \leqq i \leqq t)$ とおくと任意の i, j に対して $\sigma(M_i) = M_j$ となる $\sigma \in G$ が存在する。これより σ は $\tilde{\sigma}: K_i \longrightarrow K_j$ なる permutation を引き起こす。ところが Φ は零射なので $K_i \rightarrow K_j$ なる permutation は起きない。よって $t = 1$ でなければならない。これより、$A/\sqrt{\mathfrak{m}A}$ は体で $R/\mathfrak{m}$ は標数 0 の体を含むので $A/\sqrt{\mathfrak{m}A}$ は $R/\mathfrak{m}$ の有限分離拡大となる。したがって $A/\sqrt{\mathfrak{m}A} = (R/\mathfrak{m})[\bar{\theta}]$ となる $\bar{\theta} \in A/\sqrt{\mathfrak{m}A}$ が存在する。θ を $\bar{\theta}$ の代表元とし $f(X) = \prod_{\sigma \in G}(X - \sigma(\theta)) \in R[X]$ とおくと Φ は零射なので $\theta - \sigma(\theta) \in \sqrt{\mathfrak{m}A}$ となる。よって $\bar{f}(X) = (X - \bar{\theta})^n \in (R/\mathfrak{m})[X]$ となる。$\bar{g}(X)$ を $R/\mathfrak{m}$ 上の $\bar{\theta}$ の最小多項式とすると $\bar{g}(X) \mid \bar{f}(X)$ となるが $\bar{g}(X)$ は既約なので $\bar{g}(X) = X - \bar{\theta}$ で

なければならない。以上により $\bar{\theta}\in R/\mathfrak{m}$ となるので $A/\sqrt{\mathfrak{m}A} = R/\mathfrak{m}$ である。

（証終）

以上の準備の下で main theorem を与える。

<u>定理15</u>　A/R を単純な Galois 群 $\mathfrak{G}$ をもつ Noether 整域の Galois 拡大で A は R 上平坦であるとする。更に R は標数 0 の体 k を含み R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}/\sqrt{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}) \geqq n$ と仮定する。この時、任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $A_\mathfrak{m}$ が $R_\mathfrak{m}$ 上不分岐である為の必要十分条件は $\mathfrak{m}\not\supset\mathfrak{a}$ となることである。すなわち、A が R 上不分岐である為の必要十分条件は $\mathfrak{a}=R$ となることである。

（証明）　$A_\mathfrak{m}$ が $R_\mathfrak{m}$ 上不分岐であると仮定する。この時 $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}=\sqrt{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}$ である。もし $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{a}$ なる R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在すれば 命題13 により $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ となる。すなわち $A_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}+\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ となるので Nakayama の lemma により $A_\mathfrak{m}=R_\mathfrak{m}$ となる。よって $K=L$ となり矛盾する。逆に R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathfrak{m}\not\supset\mathfrak{a}$ と仮定する。この時 $A_\mathfrak{m}/\sqrt{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} \supsetneqq R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ である。A は R 上平坦なので $A_\mathfrak{m}$ は階数 n の自由 $R_\mathfrak{m}$ 加群となる。よって $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ は体 $R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ 上の n 次元 vector space となる。ここで $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m} \longrightarrow A_\mathfrak{m}/\sqrt{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$ なる自然な全射より $n\leqq \dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}/\sqrt{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}) \leqq \dim_{R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})$

$=n$ となる。これより $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}/\sqrt{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}$, すなわち $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ は radical ideal である。今、R は標数 0 の体 k を含むので 以上により $A_{\mathfrak{m}}$ は $R_{\mathfrak{m}}$ 上不分岐である。

(証終)

定理15 で A が R上平坦であるという仮定を取り除くと次の形となる。

定理16　A/R を単純な Galois 群 G をもつ Noether 整域の Galois 拡大とし、R は標数 0 の体 k を含む normal domain であると仮定する。更に、R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\sqrt{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}) \geqq n$ とする。この時、任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $A_{\mathfrak{m}}$ が $R_{\mathfrak{m}}$ 上不分岐である為の必要十分条件は $\mathfrak{m} \not\ni \mathfrak{d}$ となることである。

(証明)　$A_{\mathfrak{m}}$ が $R_{\mathfrak{m}}$ 上不分岐ならば $\mathfrak{m} \not\ni \mathfrak{d}$ となることは定理15 と同様。逆に $\mathfrak{m} \not\ni \mathfrak{d}$ と仮定する。$\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を primary decomposition とすると $\sqrt{Q_i} = M_i$ $(1 \leqq i \leqq t)$ は $A_{\mathfrak{m}}$ の極大イデアルである。そして $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}/Q_1 \times \cdots \times A_{\mathfrak{m}}/Q_t$ で各 $A_{\mathfrak{m}}/Q_i$ $(1 \leqq i \leqq t)$ は Artin 局所環で標数 0 の体 k を含むので equal-characteristic の完備局所環である。よって、Cohen's structure theorem により係数体 I_i $(1 \leqq i \leqq t)$ が存在する。$I = I_1 \times \cdots \times I_t$ とすると $I \subseteq A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ かつ $I \cong A_{\mathfrak{m}}/\sqrt{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}$ である。各 $A_{\mathfrak{m}}/M_i$ は $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ の有限次分離拡大なので $I = (R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}})[\bar{\theta}]$ となる

$\bar{\theta} \in A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ が存在する。ここで $\bar{\theta}$ の代表元 θ をうまくとれば $C=R_{\mathfrak{m}}[\theta]$ は階数 n の自由 $R_{\mathfrak{m}}$ 加群とできることを示す。$\mathrm{rank}_{R_{\mathfrak{m}}} C = \dim_K(K \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} R_{\mathfrak{m}}[\theta]) = \dim_K(K[\theta])$ なので $L=K[\theta]$ となる $\theta \in L$ の存在を保証すればよい。

任意の $\alpha \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ に対して $\theta+\alpha=\mu$ とおくと $\bar{\theta}=\bar{\mu} \pmod{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}$ である。

L/K の proper な subfields を $L_1, \cdots, L_m$ とする。任意の i $(1 \leqq i \leqq m)$ に対して $\mu \notin L_i$ となる $\mu \in A_{\mathfrak{m}}$ が存在すれば $L=K[\mu]$ となるのでよい。

以下この様な μ の存在を保証する。まず $\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{m} L_i$ となる $\alpha \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ をとる。

Case1　$\theta \in L_i$ の時：任意の $\lambda \in k$ に対して $\lambda\theta+\alpha \notin L_i$ である。というのももし $\lambda\theta+\alpha \in L_i$ なる $\lambda \in k$ が存在すれば $\alpha=(\lambda\theta+\alpha)-\lambda\theta \in L_i$ となり矛盾。これより $\mu=\lambda\theta+\alpha$ とおけば $\mu \notin L_i$ $(1 \leqq {}^\forall i \leqq m)$ で $L=K[\mu]$ となる。

Case2　$\theta \notin L_i$ の時：もし $\lambda\theta+\alpha, \mu\theta+\alpha \in L_i$ であれば $(\lambda\theta+\alpha)-(\mu\theta+\alpha)=(\lambda-\mu)\theta \in L_i$ となる。ここで $\theta \notin L_i$ より $\lambda=\mu$ となる。よって $\lambda\theta+\alpha \in L_i$ となる $\lambda \in k$ は存在したとしても各 i に対して唯一つである。それらを $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とすると k は無限体なので任意の i $(1 \leqq i \leqq m)$ に対して $\lambda \neq \lambda_i$, $\lambda \neq 0$ となる $\lambda \in k$ が存在する。この時 $\lambda\theta+\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{m} L_i$ なので $\theta+\frac{1}{\lambda}\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{m} L_i$

よって $\mu = \theta + \frac{1}{\lambda}\alpha$ とおけば $\mu \notin L_i$ $(1 \leq {}^\forall i \leq m)$ となるので $L = K[\mu]$ となる。

以上により、$\bar{\theta} \in A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ の代表元 θ をうまくとれば $C = R_{\mathfrak{m}}[\theta]$ を階数 n の自由 $R_{\mathfrak{m}}$ 加群とできる。よって $C/\mathfrak{m}C$ は体 $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ 上の n 次元 vector space である。Φ を $C/\mathfrak{m}C$ から $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ への自然な写像とすると $\mathrm{Im}\,\Phi = I$ であるから、

$n \leqq \dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(I) \leqq \dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(C/\mathfrak{m}C) = n$ となる。したがって $I \cong C/\mathfrak{m}C$ となる。

I は reduced 故 $\mathfrak{m}C$ は radical ideal である。更に $R_{\mathfrak{m}}$ は標数0の体 k を含むので、C は $R_{\mathfrak{m}}$ 上不分岐である。$R_{\mathfrak{m}}$ は normal domain 故 C も又 normal domain. $A_{\mathfrak{m}}/C$ は birational-integral なので $C = A_{\mathfrak{m}}$ となる。以上により、$A_{\mathfrak{m}}$ は $R_{\mathfrak{m}}$ 上不分岐である。

(証終)

注意17　定理15, 16 で R の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$\dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\sqrt{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}) \geqq n$ と仮定したが実は、$\dim_{R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\sqrt{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}) = n$ である。

最後に、Galois拡大について「parity of branch locus」の一般化が成り立つことを示す。

<u>定義18</u>　A/R を Noether 整域の有限拡大、$G=\{\sigma_1=1,\cdots,\sigma_n\}$ を A の商体 L の R の商体 K 上の自己同型群とする。更に A は自由 R 加群であると仮定する。A の R 上の自由基底を $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in A$ とすると、$d=\{\det((\alpha_i^{\sigma_j})_{1\leq i,j\leq n})\}^2$ は R の unit の差を無視すれば A の R 上の自由基底の選び方によらず unique に決まる。d を A の判別式 (discriminant) と呼ぶ。

以下、A/R を Galois 群 G をもつ Noether 整域の Galois 拡大とし任意の $\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$ に対して $\dim_{R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}})\geqq n$ と仮定する。

<u>補題19</u>　A は R 上平坦で R は標数0の体 k を含むとする。任意の $\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$ をとれば $A_\mathfrak{q}$ は階数 n の自由 $R_\mathfrak{q}$ 加群なので $A_\mathfrak{q}$ の判別式 d が unique に決まる。この時 d が $R_\mathfrak{q}$ の unit であれば、$\mathfrak{q}$ 上にのっている A の素イデアル P は不分岐である。

(証明)　$\mathfrak{q}$ 上にのっている A の素イデアルを $P=P_1,\cdots,P_t$ とする。この時 $(A_\mathfrak{q},P_1A_\mathfrak{q},\cdots,P_tA_\mathfrak{q})$ は半局所環で、$(R_\mathfrak{q},\mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$ を dominate する。

$A_\mathfrak{q}$は階数nの自由$R_\mathfrak{q}$加群なので$A_\mathfrak{q}=R_\mathfrak{q}\alpha_1\oplus\cdots\oplus R_\mathfrak{q}\alpha_n$となる$\alpha_i\in A_\mathfrak{q}$ $(1\leq i\leq n)$が存在する。ここで$A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}}\ni\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n$は体$R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$上1次独立となる。$A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$は体$R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$上の$n$次元vector spaceで自然な全射$A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}\longrightarrow A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}}\rightarrow 0$より$n=\dim_{R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q})\geqq\dim_{R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}})\geqq n$となる。したがって$A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}\cong A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}}$となるので$\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$はradical idealである。以上により$\mathfrak{q}$上にのっているAの素イデアル$P_i$ $(1\leq i\leq t)$は不分岐である。

（証終）

<u>定理20</u> (purity of branch locus) A/RをGalois群$\mathfrak{G}$をもつNoether整域のGalois拡大とし、AはR上平坦であるとする。更にRは標数0の体kを含み，任意の$\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$に対し$\dim_{R_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}}(A_\mathfrak{q}/\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}})\geqq n$と仮定する。この時，任意のRのheight 1の素イデアル$\mathfrak{q}$に対して$\mathfrak{q}$上にのっているAの素イデアルQが不分岐であればAはR上不分岐となる。すなわちA/Rの「ramification locus」はheight 1のRの素イデアルである。

（証明）　任意の$\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(R)$をとり$\mathfrak{q}$上にのっているAの素イデアルを$P_1,\cdots,P_t$とすると$(A_\mathfrak{q},P_1A_\mathfrak{q},\cdots,P_tA_\mathfrak{q})$は半局所整域で$(R_\mathfrak{q},\mathfrak{q}R_\mathfrak{q})$をdominateする。AはR上平坦なので$A_\mathfrak{q}$は自由$R_\mathfrak{q}$加群である。$d$を$A_\mathfrak{q}$の判別式とすると補題19により$d\notin\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$であれば$P_i(1\leq i\leq t)$は$\mathfrak{q}$上

不分岐となる。もし $d \in \mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ であれば d を含む height 1 の $R_{\mathfrak{g}}$ の素イデアル $\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ が存在する。ここで $\mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ 上にのっている $A_{\mathfrak{g}}$ の素イデアル Q をとれば $Q \cap A$ は $\mathfrak{g}$ 上不分岐なので補題19により $d \notin \mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ である。ところが今. $d \in \mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}} \subsetneqq \mathfrak{g}R_{\mathfrak{g}}$ なのでこれは矛盾。以上により. A は R 上不分岐である。

(証終)

References

[1] S. Abhyanker : Ramification theoretic methods in Algebraic Geometry, Prinston. New. Jersey, Prinston University Press 1959

[2] H. Matsumura : Commutative Algebra, Benjamin 1970

[3] Y. Nakai : Commutative rings and Differentials (in Japanease), Kyritsu Tokyo 1973

[4] M. Nagata : Local Rings, Interscience Tracts 13 John Wilely 1962

[5] S. Oda and K. Yoshida : Obstruction ideals of flatness and étale, Math. Rep. Toyama. Univ Vol.7 (1984) 67-78

G_2-stableness と LCM-stableness について

宮崎大学　　宇　田　廣　文

R. Gilmer が群環のGCD性と関連して導入したLCM-stableness の概念に関する研究がいくつかなされている。1つはLCM-stableness の特徴づけに関する研究であり，他の1つはLCM-stableness の普遍性に関する研究である。前者に関しては，polynomial grade が有効な働きを示し，後者に関しては，我々の導入したG_2-stablenessの概念が有効な働きを示した。

ここでは，G_2-stablenessに関するいくつかの性質とKrull整域の拡大環におけるLCM-stableness の普遍性について調べる。

以後，$A \subset B$ は整域の拡大とし，K，LはそれぞれA，Bの商体とする。また，Xは不定元とする。さらに，AのイデアルIに対して，$gr(I)$,$Gr(I)$ はそれぞれIの classical grade, polynomial grade を表すものとする。$A[X]$ の元 $f(X)$ に対し,$f(X)$ の係数全体で生成されるAのイデアルを $c(f)$ とおく。

定義1

(1) $A \subset B$が次の条件を満たすとき，$A \subset B$はLCM-stable であるという。

　Aの任意の元 a, b に対して，$aB \cap bB = (aA \cap bA)B$が成り立つ。

(2) $A \subset B$が次の条件を満たすとき，$A \subset B$はR_2-stableであるという。

　$a:_A b = a$ を満たすAの任意の元 a, b に対して，$a:_B b = a$ が成り立つ。

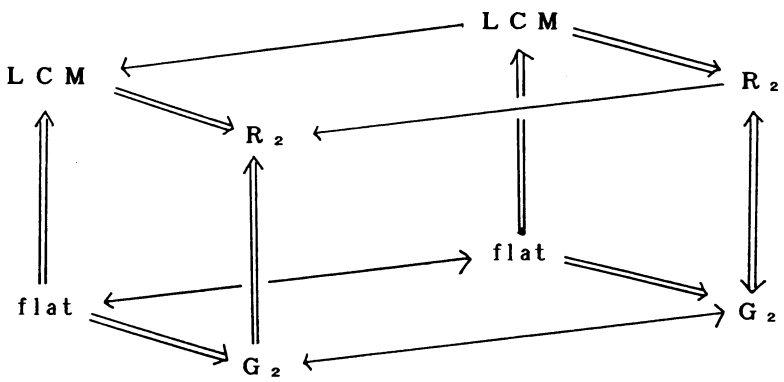
(3) $A \subset B$が次の条件を満たすとき，$A \subset B$はG_2-stableであるという。

　$Gr(I) \geqq 2$を満たすAの任意の有限生成のイデアルIに対して，

　$Gr(IB) \geqq 2$が成り立つ。

注意１　ＬＣＭ-stableness，G_2-stableness，R_2-stableness および flatnessの間の相互関係については，次が知られている。

Ａ⊂Ｂ　　　　　　　　　　Ａ[X] ⊂Ｂ[X]



G_2-stablenessとR_2-stablenessの同値性については，次が知られている。

命題１　Ａの各単項イデアルが準素分解をもつとする。このとき，次は同値である。

(1)　Ａ⊂ＢはG_2-stableである。

(2)　Ａ⊂ＢはR_2-stableである。

特に，ＡがNoether整域やKrull整域のときは成立する。

命題２　gr(Ｐ) = 1 を満たすＡの各素イデアルＰに対して，A_Pが付値環であるとする。このとき，次は同値である。

(1)　Ａ⊂ＢはG_2-stableである。

(2)　Ａ⊂ＢはR_2-stableである。

特に，ＡがＧＣＤ整域のときは成立する。

ここで，$G(A) = \{ P \in Spec(A) \mid Gr(P) \leqq 1 \}$ とおく。

次は，G_2-stablenessの１つの特徴づけである。

定理３　$A \subset B$に対して，次は同値である。

(1)　$A \subset B$はG_2-stableである。

(2)　$B = \cap_{P \in G(A)} B_P$.

命題４　次の条件が満たされるとき，$A \subset B$はG_2-stableである。

(1)　Aは整閉整域である。

(2)　LはKの代数拡大体である。

(3)　BはAのLにおける整閉包である。

注意２　命題４の条件(3) を条件『BはAの整拡大である。』に置き換えることは出来ない。実際，k を体とし，s ,tをk 上の不定元とする。さらに，$A = k[s,t]_{(s,t)}$ とおく。Kの代数的閉包Ωの元 x ，yで次の性質を満たすものをとる。

$$x^2 + sx + s^2 = 0, \quad y^2 + ty + t^2 = 0, \quad tx = sy$$

このとき，$A \subset A[x,y]$ はG_2-stableではないことが示される。

Aの分数イデアルをＩとし，$I_v = A :_K (A :_K I)$ とおく。$I = I_v$ が成立するとき，Ｉを v-イデアルという。さらに，v-イデアルＩはAの有限生成分数イデアルＪで$I = J_v$ を満たすものが存在するとき， finite type という。

定義２　Aが次の条件を満たすとき，AはPrüfer v-multiplication domain (PVMD) という。

Aの finite typeなv-イデアルの全体は積 $I \cdot J = (IJ)_v$ で群である。

PVMDの特徴づけが多くの研究者によって数多くなされてきている。ここでは，我々が与えた次の特徴づけが有用である。

命題５　次は同値である。

(1)　ＡはＰＶＭＤである。

(2)　G(Ａ）の各元Ｐに対して，A_P は付値環である。

定義３　Ａ⊂Ｂにおいて，Ｂの元u はＡ：$_K$c(f)= Ａを満たすＡ[X] のある元 f(x) の根であるとき，Ａ上 super- primitive であるという。

命題６　Ａが整閉整域であるとき，次は同値である。

(1)　ＡはＰＶＭＤである。

(2)　Ｋのある代数拡大体Ｆに対し，Ｆの各元がＡ上 super- primitive である。

次はG_2-stablenessがＰＶＭＤと深くかかわっていることを示している。

定理７　ＡがＰＶＭＤでＢが整閉整域であるとする。さらに，ＬがＫ上代数的であるとする。このとき，次は同値である。

(1)　Ａ⊂ＢはG_2-stableである。

(2)　ＢはＰＶＭＤである。

ここで，ＬＣＭ-stablenessがG_2-stablenessを示す条件を調べる。

定義４　Ａの各元 a ，b に対し，aA ∩ bA が有限生成であるとき，ＡはＦＣ整域であるという。

命題８　次の各場合，Ａ⊂ＢのＬＣＭ-stablenessはＡ⊂ＢのG_2-stablenessを示す。

(1)　ＡはＦＣ整域で，Ｂは整閉整域である。

(2)　ＢはＰＶＭＤである。

命題９　ＡはＰＶＭＤで，Ａ⊂ＢはG_2-stableであるとする。このとき，次が成立する。

(1)　Ａの各有限生成イデアルＩに対し，$B:_L I=((A:_K I)B)_v$ が成立する。

(2)　Ａの０でない各元 a，bに対し，$a:_B b=((a:_K b)B)_v$ が成立する。

補題１０　ＡはＫrull整域で，Ａ⊂ＢはＬＣＭ-stable であるとする。このとき，ＩがＡの v-イデアルならば，ＩＢもＢの v-イデアルである。

命題１１　ＡはＫrull整域で，Ａ⊂ＢはＬＣＭ-stable であるとする。このとき，Ａの各有限生成イデアルＩに対し，$B:_L I=(A:_K I)B$ である。

定理１２　Ｋrull整域Ａに対し，次は同値である。

(1)　Ａ⊂ＢはＬＣＭ-stable である。

(2)　Ａ[X]　⊂Ｂ[X] はＬＣＭ-stable である。

注意３　Ａが locally ＧＣＤ整域のとき，Ａ⊂ＢのＬＣＭ-stableness の普遍性が成立することはわかっていた。さらにここで，ＡがＫrull整域の場合にもＡ⊂ＢのＬＣＭ-stableness の普遍性が成立することがわかった。しかしながら一般にＡ⊂ＢのＬＣＭ-stableness の普遍性が成立するかどうかは知られていない。 locally ＧＣＤ整域とＫrull整域はどちらもＰＶＭＤの仲間である。そこで，次の予想を考えることはそう不自然ではない。

予想 3.1　ＡがＰＶＭＤのとき，Ａ⊂ＢのＬＣＭ-stableness の普遍性が成立する。

一方，もし予想 3.1が正しいなら，注意１からＡがＰＶＭＤのとき，Ａ⊂ＢのＬＣＭ-stableness はＡ⊂ＢのG_2-stableness を示すことがわかる。そこで，予想 3.1より弱くみえる次の予想が出来る。

予想 3.2　AがPVMDのとき，A⊂BのLCM-stablenessはA⊂BのG_2-stablenessを示す。

参　考　文　献

[1] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chapitre 7, Hermann Paris,1965.

[2] R. Gilmer, Multiplicative Ideal Theory, Marcel Dekker, INC. New York, 1972.

[3] R. Gilmer, Finite element factorization in group rings, Lecture Note in Pure and Appl. Math., 7, Dekker, New York, 1974.

[4] D. G. Northcott, Finite Free Resolutions, Cambridge University Press, 1976.

[5] I. J. Papick, Super-primitive elements, Pacific J. Math., 105 (1983), 217 - 226.

[6] F. Richman, Generalized quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 794 - 799.

[7] P. B. Sheldon, Prime ideals in GCD domains, Can. J. Math., 26 (1974), 98 - 107.

[8] H. Uda, LCM-stableness in ring extensions, Hiroshima Math. J., 13 (1983), 357 - 377.

[9] H. Uda, A characterization of Prüfer v-multiplication domains in terms of polynomial grade,Hiroshima Math. J., 16 (1986), 115 -120.

Embedded primary component の発生する理由

岡山理科大学(理学部) 吉田憲一
愛知教育大学 金光三男

イデアルの準素分解は、*embedded primary component* を持つかも知れない。

以下、R は極大イデアル M をもつネーター局所整域で、*depth* $R=1$ かつ $\dim R = d > 1$ とする。$\overline{R}$ を R の整閉包とし、$\overline{R}$ は有限 R-加群であると仮定する。

R の商体の元 α に対して $I_\alpha = \{x \in R \mid \alpha x \in R\}$ とする。更に、$A = \{\alpha \in \overline{R} \mid I_\alpha \supset M^l \text{ for } {}^{\exists} l > 0\}$ とする。このとき、A は R と $\overline{R}$ の中間環である。何故なら、${}^{\forall}\alpha, \beta \in A$ に対して、$I_\alpha \supset M^l$, $I_\beta \supset M^k$ なる自然数 l, k が存在する。$I_{\alpha+\beta} \supset I_\alpha \cap I_\beta \supset I_\alpha I_\beta$ であり、また $I_{\alpha\beta} \supset I_\alpha I_\beta$ だから、$I_{\alpha+\beta} \supset M^{l+k}$, $I_{\alpha\beta} \supset M^{l+k}$ となり、$\alpha+\beta \in A$, $\alpha\beta \in A$。従って、A は R と $\overline{R}$ の中間環であることがいえた。

更に、*conductor ideal* $c(A/R) = R : A$ $(R \neq A)$ は M-*primary ideal* で、A は $\{B \mid R \subset B \subset \overline{R}$; 中間環で $c(B/R)$ が M-*primary*$\}$ の中で最大の環である。何故なら、A は有限 R-加群だから、$A = R\alpha_1 + R\alpha_2 + \cdots + R\alpha_n$ (各 $\alpha_i \in A$) と書ける。${}^{\forall}\alpha_i \in A$ に対して、$I_{\alpha_i} \supset M^{l_i}$ なる自然数 l_i が存在する。$l = l_1 + \cdots + l_n$ とおくと $M^l A \subset R$ 即ち、$M^l \subset c(A/R)$ となる。$c(A/R)$ は M-*primary* イデアルがいえた。次に、B を R と $\overline{R}$ の中間環で $c(B/R)$ が M-*primary* イデアルとする。${}^{\forall}b \in B$ に対して、$I_b \supset M^l$ なる自然数 l が存在する。これは、$c(B/R)$ が M-*primary* イデアルだから、$M^l \subset c(B/R)$ なる l が存在する。従って、

$M^\ell B \subset R$ だから $I_h \supset M^\ell$ がいえた。Aの定義より $h \in A$ 即ち $B \subset A$ がいえた。

<u>定義</u> (1) I を R のイデアルとする。I が <u>contractible ideal</u> とは、R と A の中間環 B で $B \neq R$ なるものと、$J \cap R = I$ となる B のイデアル J が存在するときをいう。

(2) I を R のイデアルとする。$R(I) = \{\alpha \in A \mid \alpha I \subset I\}$ を <u>I の係数環</u>という。

(3) $I_R^{-1} = \{\alpha \in A \mid \alpha I \subset R\}$ とする。

<u>注意</u> I を R のイデアルとすると、$I_R^{-1} \supsetneqq R$ である。これは、$A-R$ の元 α で $I_\alpha = M$ となるものが存在するからである。

<u>補題 1.</u> I を R のイデアルとする。このとき、$I = J \cap R$ となる A のイデアル J が存在することと $IA \cap R = I$ となることは同値である。更に、この条件が成立するなら、$I_R^{-1} = R(I)$ (従って I_R^{-1} は R と A の中間環である)。

[証明] ($\Longrightarrow$) $I \subset J$ だから $IA \subset J$。故に $IA \cap R \subset J \cap R = I$。逆の包含関係は明らかだから、$I = IA \cap R$ がいえた。
($\Longleftarrow$) $J = IA$ とおけば $J \cap R = I$ となる。
次に後半を証明する。$^\forall \alpha \in I_R^{-1}$ に対して、$\alpha I \subset R$。$\alpha I \subset AI$ だから、$\alpha I \subset IA \cap R = I$ $\therefore \alpha \in R(I)$ $\therefore I_R^{-1} \subset R(I)$ 一方、明らかに $R(I) \subset I_R^{-1}$ である。故に $I_R^{-1} = R(I)$ がいえた。

<u>命題 2.</u> I を R のイデアルとする。このとき、I が contractible でないことと $R(I) = R$ であることは同値である。

[証明] ($\Longrightarrow$) $B = R(I)$ とおく。今、$B \supsetneqq R$ とすると、I は B のイデアル

でもあるから、$IB \cap R = I$。定義より I は contractible。

($\Longleftarrow$) I が contractible とする。このとき、定義より $R \subsetneqq B \subset A$ で $IB \cap R = I$ なる環 B が存在する。$C = \{\beta \in B \mid \beta I \subset R\}$ とおく。このとき、$R \subsetneqq C \subset R(I)$ となる。何故なら、$I\alpha = M$ なる $\alpha \in B - R$ が存在するから $\alpha I \subset R$。よって $\alpha \in C$。一方 $CI \subset R$ だから $CI \subset IB \cap R = I$。

$\therefore C \subset R(I)$。$\alpha \in C$ で $\alpha \notin R$ だから $R \subsetneqq C \subset R(I)$ がいえた。

しかし、これは仮定に反する。

<u>命題 3</u>. I を R のイデアルとし、$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を無駄のない準素分解で Q_i は P_i-primary イデアルで $P_i \subsetneqq M$ $(1 \leq i \leq t)$ とする。このとき、$IA \cap R = I$ となる。

[証 明] $I \subset IA \cap R$ は明らかだから、$IA \cap R \subset I$ を証明しよう。$P_i \subsetneqq M$ だから $P_i \not\supset C(A/R)$。何故なら、もし、$P_i \supset C(A/R)$ とすると、$C(A/R)$ が M-primary ideal だから、$P_i = M$ となり矛盾するから。

よって $R_{P_i} = A_{P_i}$ $(1 \leq i \leq t)$ となる。何故なら、$\exists s \in C(A/R)$ で $s \notin P_i$ なる s が存在する。$\forall \frac{a}{t} \in A_{P_i}$ $(a \in A,\ t \in R - P_i)$ に対して、$\frac{a}{t} = \frac{as}{st}$ は R_{P_i} の元である。よって $A_{P_i} = R_{P_i}$ がいえた。このことより、

$(IA \cap R)_{P_i} = IA_{P_i} \cap R_{P_i} = IR_{P_i} \subset Q_i R_{P_i}$ がいえるので、

$IA \cap R \subset Q_i$ $(\forall i)$ がいえる。よって $IA \cap R \subset I$ がいえた。

<u>定 理 4</u>. I を R のイデアルで $\mathrm{height}\, I < \dim R = d$ とする。もし、$R(I) = R$ ならば、I は embedded M-primary component をもつ。

[証 明] I が embedded M-primary component を持たないとする。命題 3 より $IA \cap R = I$。補題 1 より、$I_R^{-1} = R(I)$。注意より、$I_R^{-1} \supsetneqq R$ となるから、これは仮定 $R(I) = R$ に反する。

定理４を詳しく述べるなら、次が得られる。

<u>定理５</u>　I を R の ideal で height $I < d$ とする。$R(I) = R$ なら、I の無駄のない準素分解を $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t \cap Q$（ここで、$Q_i$ は P_i−primary イデアルで Q は M−primary イデアル）とすれば、$R(Q) = R$ が成り立つ。

[証明]　定理４によって、Q は準素分解にでてくる。今 $J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ とおく。命題３より $JA \cap R = J$。従って、補題１より、$J_R^{-1} = R(J)$。今、$R(Q) \supsetneqq R$ とする。このとき、$I_\alpha = M$ となるような $\alpha \in R(Q) - R$ が存在することを示そう。${}^\exists \alpha \in R(Q) - R$ に対して、$\alpha \in A$ だから I_α は M−primary。よって $M = I_\alpha : aR$ となる R の元 a が存在する。他方 $I_\alpha : aR = I_{a\alpha}$ だから $a\alpha$ の代りに α をとればよい。このことによって、$\alpha J \subset R$（$\because M = I_\alpha \supset J$）となり、$\alpha \in J_R^{-1} = R(J)$。$\alpha \in R(J) \cap R(Q) \subset R(I)$ だから、$R(I) \supsetneqq R$。これは仮定に反する。$\therefore R(Q) = R$

<u>注意</u>　$0 \neq a \in R$ が non-unit とすると、$R(aR) = R$。従って定理４より aR は embedded M−primary component をもつというよく知られた結果がいえる。

integrally closed でない環のイデアルを考える時、何かと問題になるのはイデアルの不忠実性が存在するという事である。即ち、R のイデアル I という時、I は確かに R のイデアルではあるが（定義上）、しかし実は I は $R(I)$ のイデアルでもある。とすれば、I を R のイデアルと考えるよりも、$R(I)$ のイデアルと考えなければ、イデアル I についての正しい情報が得られないのではないかと

思われる。そこで、今、仮りに、$R(I)=R$ という条件を満たすイデアルを R の固有のイデアルと呼ぶならば（実際、R の固有のイデアルは、R の拡大環のイデアルから落ちてこない）本講演の結果は次の事を主張している。

(R, M) はすでに述べた局所環とする。このとき、Rの固有のイデアルは必ず M-primary component を有する。

本講演では、depth $R=1$ と仮定したが一般の場合は Rees 環を利用する事によって depth one の場合に帰着されるので、一般の場合についての embedded primary component についての研究も出来るものと考えています。

NOTES ON REDUCTIONS OF IDEALS IN COMMUTATIVE RINGS

岡部　章（小山高専）

1. INTRODUCTION.

環はつねに可換環で単位元をもつとする。環RのイデアルIに対して

$$I^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I^{i+1} : I^i)$$

とおく。I^*はIを含むRのイデアルである。Ratliffと Rushは，論文[7]で次の結果を与えている。

定理A. Iをネーター環Rの正則なイデアルとする。このとき

(1) $I \subseteq I^*$で，大きなすべての整数kに対し，$(I^*)^k = I^k$が成り立つ。

(2) イデアルJが，大きなすべての整数kに対して，$J^k = I^k$であれば，$J \subseteq I^*$となる。

注意1. 定理Aより，大きな整数kに対して，$(I^*)^k = I(I^*)^{k-1}$となることがわかる。つまり，IはI^*の[5]の意味でのreductionである。しかし，Iが非正則なイデアルの場合，IはI^*のreductionとは限らない。

例1. kを体とし，$R = k[X, Y]/(XY)$とおく。ここでX, Yはk上の不定元とする。さて，$I = (X)/(XY)$とおけば，Iは非正則であり，$I^* = (X, Y)/(XY)$となる。ところで，すべての$m \geqq 1$に

対して

$$(I^*)^{m+1} = (Y^{m+1}, X^{m+1}, XY)/(XY)$$

および

$$I(I^*)^m = (X^{m+1}, XY)/(XY)$$

である。よって，$I(I^*)^m \subsetneqq (I^*)^{m+1}$ となり，I は I^* の reduction ではない。

さて，イデアルが正則であるという仮定の下で，Ratliff と Rush は，さらに次の結果を得た。

命題B．I をネーター環 R の正則なイデアルとする。このとき

(1) R のイデアル H が $I \subseteq H \subseteq I^*$ をみたせば，$H^* = I^*$ となる。

(2) $(I^*)^* = I^*$ であり，すべての $m \geqq 1$ に対して，$(I^*)^{m+1} : (I^*)^m = I^*$ が成り立つ。

(3) すべての整数 $m \geqq 1$ に対して

$$(I^m)^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I^{m+i} : I^i)$$

が成り立つ。

(4) $I^* \supseteq (I^2)^* \supseteq \cdots \supseteq (I^k)^* = I^k$

が，大きなすべての整数 k に対して成り立つ。

(5) $I = I_a$ ならば，$I = I^*$ である。

ここで I_a は I の整閉包を表すものとする。

(6) I が invertible なイデアルであれば，すべての $k \geqq 1$ に対して，$(I^k)^* = I^k$ となる。

(7) I が normal なイデアルであれば，すべての $k \geq 1$ に対して，$(I^k)^* = I^k$ が成り立つ。従って，すべての $i > 0$，$j > 0$ に対し，$I^j : I^i = I^{j-i}$ が成り立つ。

特に，命題Bの(6)から，次の重要な結果を得る([7, (2.4)])。

命題C．R を Dedekind domain とする。このとき，すべてのイデアル $I\ (\neq (0))$ に対し，$I^* = I$ となる。

次に，命題Bの(7)に関して，次のことを注意しておく。R を analytically unramified な semi-local ring とすれば，任意のイデアル I に対して，$(I^n)_a$ は大きなすべての整数 n について normal になる([8, Th. 2])。

本稿の目的の一つは，[7, (2.4)] を almost Dedekind domain の場合に拡張することである。

次に，イデアル I^* のもつ性質のうちで最重要なものは，大きなすべての整数 n に対して，$(I^*)^n = I^n$ が成り立つことである。しかし，これは I がネーター環 R の正則なイデアルであるという条件の下で成り立つことである([7, (2.1)])。I が正則でない場合には，これは一般に成り立たない。

例えば R, I を例1におけると同じにとれば，すべての $m \geq 1$ に対し

$$I^{m+1} \subseteq I(I^*)^m \subsetneqq (I^*)^{m+1}$$

となる。

本稿のもう一つの目的は，イデアルが非正則な場合に，I^* に代る I^a なるイデアルが構成し得ることを示すことにある。

2、PROPERTIES OF I^*.

補題1. I, J を可換環 R のイデアルとするとき，$I^*J^* \subseteq (IJ)^*$ が成り立つ。

(証明) $u \in I^*$, $v \in J^*$ とすると，ある $k > 0$ があって

$$uI^k \subseteq I^{k+1}, \quad vJ^k \subseteq J^{k+1}$$

となる。このとき

$$uv(IJ)^k = uI^k \cdot vJ^k \subseteq I^{k+1} \cdot J^{k+1} = (IJ)^{k+1}$$

従って

$$uv \in (IJ)^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} (IJ)^{i+1} : (IJ)^i \quad \text{となる。}$$

系1. I を可換環 R のイデアルとすれば，すべての $m \geq 1$ に対して，$(I^*)^m \subseteq (I^m)^*$ である。

命題1. I, J をネーター環 R の正則なイデアルとする。このとき

(1) $(I^*J^*)^* = (IJ)^*$

(2) すべての整数 $m \geq 1$ に対し，$((I^*)^m)^* = (I^m)^*$

が成り立つ。

(証明) (1) 補題1より $IJ \subseteq I^*J^* \subseteq (IJ)^*$

IJも正則なイデアルだから，[7 , (2.2)] より
$(I^*J^*)^* = (IJ)^*$ となる。
(2) 帰納法による。$n=1$ のときは，[7 , (2.2)] により成立。次に $n>1$ とし，$n-1$ に対して (2) が成り立つと仮定する。このとき，(1) より

$$(I^n)^* = (I^{n-1}\cdot I)^* = ((I^{n-1})^*\cdot I^*)^*$$
$$= (((I^*)^{n-1})^*\cdot (I^*)^*)^* = ((I^*)^{n-1}\cdot I^*)^* = ((I^*)^n)^*$$

となる。

命題2．Iをネーター環Rの正則なイデアルとする。このとき，すべての整数 $n>m>0$ に対して

$$(I^n)^* : (I^m)^* = (I^{n-m})^* = (I^n)^* : I^m$$

が成り立つ。
(証明) はじめに $x \in (I^n)^* : (I^m)^*$ とする。[7 , (2.3.1)] より，kを大きくとれば

$$(I^m)^* = I^{m+k} : I^k,\ (I^n)^* = I^{n+k} : I^k \text{ となる。}$$

従って，$x(I^m)^* \subseteq (I^n)^*$ より

$$x(I^{m+k} : I^k) \subseteq I^{n+k} : I^k$$

このとき

$$x(I^{m+k} : I^k)I^k \subseteq (I^{n+k} : I^k)I^k$$

であり，$xI^{m+k} \subseteq I^{n+k}$ となる。そこで $m+k=l$ とおけば，$x \in I^{n-m+l} : I^l$ を得る。このとき，[7 , (2.3.1)] により

$$x \in I^{n-m+l} : I^l \subseteq (I^{n-m})^* \text{ となる。}$$

このように $(I^n)^* : (I^m)^* \subseteq (I^{n-m})^*$ が成り立つ。

逆に，補題1により

$(I^{n-m})^*(I^m)^* \subseteq (I^{n-m}\cdot I^m)^* = (I^n)^*$ であり

$(I^{n-m})^* \subseteq (I^n)^* : (I^m)^*$ が成り立つ。

以上より，$(I^n)^* : (I^m)^* = (I^{n-m})^*$ である。

次に $(I^n)^* : I^m = (I^{n-m})^*$ を示そう。

はじめに $x \in (I^n)^* : I^m$ をとれば，$k>0$ を大きくとることにより

$$xI^m \subseteq (I^n)^* = I^{n+k} : I^k \quad となる。$$

よって

$$x \in I^{n+k} : I^{m+k} = I^{(n-m)+m+k} : I^{m+k} \subseteq (I^{n-m})^*$$

これから

$$(I^n)^* : I^m \subseteq (I^{n-m})^* \quad が成り立つ。$$

逆に，$x \in (I^{n-m})^*$ をとれば，$l>0$ を大きくとると

$$x \in (I^{n-m})^* = I^{n-m+l} : I^l \quad となる。$$

そこで，$l-m=k$ とおけば，$x \in I^{n+k} : I^{m+k}$ だから

$$xI^m \subseteq I^{n+k} : I^k \subseteq (I^n)^* \quad となり$$

$x \in (I^n)^* : I^m$ を得る。以上より

$$(I^n)^* : I^m = (I^{n-m})^* \quad が得られる。$$

さて，Iがネーター環Rの正則なイデアルのとき，[7，(2.2)] で $(I^*)^* = I^*$ の成り立つことが示されているが，これがネーター環Rの任意のイデアルIに対しても成り立つことが次のように示される。

命題3．Iをネーター環Rのイデアルとするとき，

$(I^*)^* = I^*$ が成り立つ。

（証明） $I^* \subseteq (I^*)^*$ は明らか。$(I^*)^*$ の任意の元を x とすると，ある $k>0$ に対して $x(I^*)^k \subseteq (I^*)^{k+1}$ となる。ところで，l を大きくとれば，$I^* = I^{l+1} : I^l$ となる。従って

$$x(I^{l+1} : I^l)^k \subseteq (I^{l+1} : I^l)^{k+1}$$

となる。この両辺に I^{kl} をかけると

$$x((I^{l+1} : I^l)I^l)^k \subseteq ((I^{l+1} : I^l)I^l)^k (I^{l+1} : I^l)$$

$\therefore$ $x(I^{l+1})^k \subseteq (I^{l+1})^k (I^{l+1} : I^l)$ となる。

ところで

$$\begin{aligned}&(I^{l+1})^k (I^{l+1} : I^l)\\ &= I^{(l+1)k-l} \cdot (I^l (I^{l+1} : I^l))\\ &= I^{(l+1)k-l} \cdot I^{l+1} = I^{(l+1)k+1}\end{aligned}$$

である。従って，$x I^{(l+1)k} \subseteq I^{(l+1)k+1}$ となり，これから $x \in I^*$ であることがわかる。

系2. Iをネーター環Rの正則なイデアルとする。このとき，すべての整数 $n \geq 1$ に対して

$$(I^{n+1})^* : (I^n)^* = (I^*)^{n+1} : (I^*)^n = I^*$$

が成り立つ。

次に I, Jをネーター環Rのイデアルとするとき，$I \subset J$ であっても必ずしも $I^* \subseteq J^*$ が成り立たぬ例を示そう。

例2. kを体とし，$R = k[X, Y]/(X^2Y)$ とおく。ここで X, Y は k 上の不定元である。さて $I = (X)/(X^2Y)$，$J = (X, Y^2)/(X^2Y)$ なるイデアルをとろう。このとき

すべての $m \geqq 2$ に対し，$\bar{Y} \in I^{m+1} : I^m$ となり，これから $\bar{Y} \in I^*$ がわかる。ここで，$\bar{Y}$ は Y の residue class を表す。しかし，$m \geqq 3$ のとき

$$J^m = (X^m, XY^{2(m-1)}, Y^{2m}, X^2Y)/(X^2Y)$$

であり，$\bar{Y} \notin J^{m+1} : J^m$ となる。よって $\bar{Y} \notin J^*$ となり，$I^* \not\subseteq J^*$ がわかる。

このように，一般には $I \subset J$ から $I^* \subseteq J^*$ は言えないが，もし I が J の reduction であれば，$I^* \subseteq J^*$ の成り立つことはわかる。

命題4. I, J を可換環 R のイデアルとする。もし I が J の reduction であれば，$I^* \subseteq J^*$ である。

(証明) 仮定より，ある整数 $k > 0$ が存在して，すべての $l \geqq k$ および $m \geqq 1$ に対して，$I^m J^l = J^{m+l}$ が成り立つ。さて，任意の元 $x \in I^*$ をとれば，ある $m > 0$ に対して，$x \in I^{m+1} : I^m$ となる。このとき

$I^{m+1}J^l = J^{m+l+1}$，$I^m J^l = J^{m+l}$ だから

$xI^m \subseteq I^{m+1}$ より $xI^mJ^l \subseteq I^{m+1}J^l$，すなわち

$x \in I^{m+1}J^l : I^mJ^l = J^{m+l+1} : J^{m+l} \subseteq J^*$ となる。

このようにして $I^* \subseteq J^*$ が証明される。

$I \not\subseteq J$ かつ $J \not\subseteq I$ であって，$I^* = J^*$ が成り立つ例もあることを次に示そう。

例3. k を体とし，$R = k[X, Y]/(X^2Y, XY^2)$ とおく。このとき，$I = (X)/(X^2Y, XY^2)$，$J = (Y)/(X^2Y, XY^2)$

とおけば，明らかに $I \not\subseteq J$ かつ $J \not\subseteq I$ である。しかし，容易にわかるように

$$I^* = J^* = (X, Y)/(X^2Y, XY^2)$$

である。

命題5．I, J をネーター環 R のイデアルとし，$I^* = J^*$ であるとする。このとき，すべての大きな整数 k に対し $I^k J^{k+1} = I^{k+1} J^k$ が成り立つ。

（証明）すべての大きな k に対し

$$I^* = I^{k+1} : I^k \quad かつ \quad J^* = J^{k+1} : J^k$$

となる。よって，$I^* = J^*$ であれば

$$I^{k+1} : I^k = J^{k+1} : J^k \qquad である。$$

そこで，この両辺に $I^k J^k$ をかければ

$$((I^{k+1} : I^k) I^k) J^k = ((J^{k+1} : J^k) J^k) I^k$$

となり，これから $I^{k+1} J^k = I^k J^{k+1}$ を得る。

しかし，この命題の逆は成り立たぬことが，次の例からわかる。

例4．k を体とし，$R = k[X, Y]/(X^2Y, X^3)$ とおく。さて $I = (X)/(X^2Y, X^3)$，$J = (X^2, Y)/(X^2Y, X^3)$ とおくと，$l \geqq 3$ のとき $I^l = (0)$ である。従って，$l \geqq 3$ に対して，$I^l J^{l+1} = I^{l+1} J^l = (0)$ である。ところで，すべての $n \geqq 1$ に対し，$\bar{X} \notin J^{n+1} : J^n$ であり，$\bar{X} \notin J^*$ である。従って $J^* \neq I^* = R$ となる。

補題1により，つねに $I^* J^* \subseteq (IJ)^*$ であるが，

I, J がネーター環 R のイデアルであっても，$I^*J^* \subsetneqq (IJ)^*$ は起る。

例5. k を体とし，$R = k[X, Y]/(XY)$，さらに $I = (X)/(XY)$，$J = (Y)/(XY)$ とおく．このとき，

$$I^*J^* = (X, Y)/(XY)$$

は R の極大イデアルであり，$I^*J^* \neq R$ である。しかるに，$IJ = (0)$ ゆえ $(IJ)^* = R$ となる。

$I^*J^* = (IJ)^*$ が成り立つための1つの十分条件は，I と J が comaximal であることを示そう。

補題2. I, J を可換環 R のイデアルとする。このとき，I と J が comaximal であれば

(1) $I : J = I$ かつ $J : I = J$

(2) すべての $m \geq 1$，$n \geq 1$ に対し

$$I^m : J^n = I^m \text{ かつ } J^m : I^n = J^m$$

である。

定理1. I, J をネーター環 R のイデアルとする。もし I と J が comaximal であれば，$I^*J^* = (IJ)^* = (I \cap J)^*$ である。

(証明) はじめに，補題1より $I^*J^* \subseteq (IJ)^*$ である。次に $(IJ)^* \subseteq I^*J^*$ を示す。整数 k を大きくとれば，すべての $i \geq k$ に対して

$$I^* = I^{i+1} : I^i,\ J^* = J^{i+1} : J^i,\ (IJ)^* = (IJ)^{i+1} : (IJ)^i$$

であるとしてよい。さて，$x \in (IJ)^*$ をとれば

すべての $i \geqq k$ に対して

$$x I^i J^i \subseteq (IJ)^{i+1} \subseteq I^{i+1}$$ である。

よって $x J^i \subseteq I^{i+1} : I^i = I^*$ となり，$x \in I^* : J^i$ である。

ところで，I と J が comaximal のとき，I^* と J^i も comaximal である。従って，補題２により $x \in I^* : J^i = I^*$ となる。同様に

$$x I^i J^i \subseteq (IJ)^{i+1} \subseteq J^{i+1}$$ だから

$x I^i \subseteq J^{i+1} : J^i = J^*$ となり，$x \in J^* : I^i = J^*$ である。このとき，I^* と J^* も comaximal ゆえ

$$x \in I^* \cap J^* = I^* J^*$$ となる。

以上より $I^* J^* = (IJ)^* = (I \cap J)^*$ である。

3. *-CLOSEDNESS.

定義．可換環Rのイデアル I が $I^* = I$ をみたすとき，I を *-closed であると呼ぶことにする。

［７，(2.4)］により，R を Dedekind domain とすれば，R のすべてのイデアル I（$\neq (0)$）は，*-closed であることが証明されている。

定義．可換環Rのすべてのイデアル $I \neq (0)$ が *-closed であるとき，R を *-closed ring と呼ぶことにする。

補題３．$R \subset S$ はネーター環で，I は R のイデアルとする。このとき

(1) S が R 上 flat であれば，$I^* S = (IS)^*$ である。

(2) S が R 上 faithfully flat であれば，

$(IS)^* \cap R = I^*$ である。

(証明) (1) [4, Th. 7.4] により，各整数 $i>0$ について，$(I^{i+1} : I^i)S = (IS)^{i+1} : (IS)^i$ である。

よって

$$I^*S = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(I^{i+1}:I^i)\right)S = \bigcup_{i=1}^{\infty}(I^{i+1}:I^i)S$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}((IS)^{i+1}:(IS)^i) = (IS)^*$$

となる。

(2) S が R 上 faithfully flat のとき，[4, Th. 7.5] により，$I^*S \cap R = I^*$ である。従って，(1) より $(IS)^* \cap R = I^*S \cap R = I^*$ となる。

命題6. (R, M) をネーター局所環，$\hat{R}$ を R の完備化とする。このとき，R のイデアル I に対して，次のことが成り立つ。

(1) $I^*\hat{R} = (I\hat{R})^* = (\hat{I})^*$

(2) $(\hat{I})^* \cap R = I^*$

(証明) 補題3から明らかである。

命題7. R をネーター環，S を R の乗法的閉集合とする。R のイデアル I が $I \cap S = \phi$ をみたすとする。このとき，I が $*$-closed ならば，IR_S も $*$-closed である。

(証明) R_S が R 上 flat ゆえ，補題3から出る。

定理2. $R \subset S$ はネーター環で，I は R のイデアルとする。このとき

(1) SがR上 flat であれば，Iが $*$-closed ならISも $*$-closed である。

(2) SがR上 faithfully flat であれば，(1)の逆も成り立つ。

（証明）(1)は補題3による。

(2) ISが $*$-closed であるとする。[4, Th.7.5]より，$I = IS \cap R = (IS)^* \cap R$ となる。ところで，補題3より $(IS)^* = I^*S$ であるから

$$I = (IS)^* \cap R = I^*S \cap R = I^* \quad \text{である。}$$

系3. (R, M) をネーター局所環，$\hat{R}$ をRの完備化とする。このとき，RのイデアルIに対し

$$I \text{ が } *\text{-closed} \iff \hat{I} \text{ が } *\text{-closed}$$

が成り立つ。ここで，$\hat{I} = I\hat{R}$ である。

定理3. Iをネーター環Rのイデアル，$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をRの極大イデアルの全体とする。このとき

$$I^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (IR_{M_\lambda})^*$$

である。

（証明）R_{M_λ} はR上 flat ゆえ，補題3より $I^*R_{M_\lambda} = (IR_{M_\lambda})^*$ である。よって，[1, Th.4.10]により

$$I^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I^*R_{M_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (IR_{M_\lambda})^* \quad \text{となる。}$$

この定理により，$*$-closedness は local な property であることがわかる。

命題8. Rをネーター環とする。このとき，Rが$*$-closed ringであるための必要十分条件は，Rのすべての極大イデアルMに対して，R_Mが$*$-closed ringであることである。

(証明) (必要性) MをRの極大イデアル，IR_MをR_Mの任意のイデアルとする。このとき，仮定と補題3より，$(IR_M)^* = I^*R_M = IR_M$となる。よって，R_Mは$*$-closed ringである。

(十分性) $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$を$R$の極大イデアルの全体とし，$R_{M_\lambda}$がすべて$*$-closed ringであるとする。さて$I$を$R$の任意のイデアルとすると，[1, Th.4.10]と補題3により

$$I^* = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I^*R_{M_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (IR_{M_\lambda})^* = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} IR_{M_\lambda} = I$$

となる。よって，Rは$*$-closed ringである。

定理4. $R \subset S$を可換環とし，SはR上faithfully flatであるとする。このとき，Sが$*$-closedであれば，Rも$*$-closedである。

(証明) $I(\neq (0))$をRの任意のイデアルとする。このとき，各整数$i>0$に対して

$$(I^{i+1} : I^i)S \subseteq (IS)^{i+1} : (IS)^i$$

である。よって

$$I^*S = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (I^{i+1} : I^i)\right)S = \bigcup_{i=1}^{\infty} (I^{i+1} : I^i)S$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (IS)^{i+1} : (IS)^i = (IS)^* \quad となる。$$

従って，S が R 上 faithfully flat であれば

$$I^* = I^*S \cap R \subseteq (IS)^* \cap R = IS \cap R = I$$

となり，$I^* = I$ を得る。よって，R は $*$-closed である。

系4. (R, M) をネーター局所環，$\hat{R}$ を R の完備化とする。このとき，$\hat{R}$ が $*$-closed であれば，R も $*$-closed である。

補題4. R を可換環，$\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を R の極大イデアルの全体とする。このとき，すべての M_λ に対して，R_{M_λ} が $*$-closed であれば，R は $*$-closed である。

（証明） $I (\neq (0))$ を R の任意のイデアルとする。各 M_λ に対して，$I^*R_{M_\lambda} \subseteq (IR_{M_\lambda})^*$ である。よって，[1, Th. 4.10] により

$$I^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I^*R_{M_\lambda} \cap R) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} ((IR_{M_\lambda})^* \cap R)$$

$$= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (IR_{M_\lambda} \cap R) = I$$

となり，$I^* = I$ を得る。よって R は $*$-closed である。

定理5. R が almost Dedekind domain であれば，R は $*$-closed domain である。

（証明） M を R の極大イデアルとすると，R_M は Dedekind domain だから [7, (2.4)] より R_M は $*$-closed である。従って，我々の主張は補題4から

明らかである。

この定理は，[7, (2.4)] の一つの拡張を与えるものである。尚，almost Dedekind domain はネーター環とは限らないことを注意しておく。

さて，環 R のイデアル I の integral closure を I_a で表すことにする。[7, (2.6)] より，I がネーター環 R の正則なイデアルであれば，$I^* \subseteq I_a$ が成り立つ。さらに，I が prenormal であれば，$I^* = I_a$ の成り立つことも容易にわかる。ここで，I が normal であるとは，すべての $n \geqq 1$ に対して，$(I^n)_a = I^n$ が成り立つことであり，さらに I が prenormal であるとは，ある $k \geqq 1$ に対して，I^k が normal となることである。

ところで，I が非正則なイデアルのときは，$I^* \subseteq I_a$ は一般には成り立たない。例えば，k, R, I を例1のようにとれば，すでに見たように $I^* = (X, Y)/(XY)$ であるが，I は素イデアルゆえ，$I \subseteq I_a \subseteq \sqrt{I} = I$ であり，$I_a = I$ となる。従って，$I_a = I \subsetneqq I^*$ となる。

4. ASYMPTOTIC REDUCTIONS.

定義. $I \subset J$ を可換環 R のイデアルとする。I, J が次の条件(A)をみたすとき，I を J の asymptotic reduction と呼ぶことにする。

(A)：すべての大きな n に対し，$I^{n*} = J^{n*}$ である。

この定義から，asymptotic reductionは，[5]における意味のreductionであることは明らかである。しかし，この逆は一般的には成り立たぬ。そこで，前者をA-reduction，後者をNR-reductionと呼んで区別することにする。

NR-reductionは，必ずしもA-reductionにはならない例を次に示す。

例6．　kを体とし，$R = k[X, Y]/(Y^2)$とおく。ここでX, Yはk上の不定元である。さて，$I = (X, Y^2)/(Y^2) \subset J = (X, Y)/(Y^2)$とおく。このとき，各$n \geqq 1$に対して

$$IJ^n = J^{n+1} = (X^{n+1}, X^n Y, Y^2)/(Y^2)$$

であるが

$$I^n = (X^n, Y^2)/(Y^2) \subsetneqq J^n = (X^n, X^{n-1}Y, Y^2)/(Y^2)$$

である。従って，IはJのNR-reductionであるが，A-reductionでない。

A-reductionの定義から次の命題は明らかである。

命題9．$I \subset J \subset K$を可換環Rのイデアルとする。このとき

IがKのA-reductionであるための必要十分条件は，IがJのA-reductionで，かつJがKのA-reductionであることである。

さて，I をネーター環 R のイデアルとするとき，I を A-reduction にもつイデアルのうちで最大のものが存在することを証明しよう。

定理6．I をネーター環 R のイデアルとする。このとき，次の２つの条件をみたすイデアル $\widetilde{I}$ が存在する。

(1)　I は $\widetilde{I}$ の A-reduction である。

(2)　I がイデアル J の A-reduction ならば，$J \subseteq \widetilde{I}$ が成り立つ。

(証明)

$A(I) = \{$イデアル J | I は J の A-reduction$\}$ とおく。$I \in A(I)$ だから $A(I)$ は空集合でない。R がネーター環ゆえ，$A(I)$ は極大元 $\widetilde{I}$ をもつ。定義より I は $\widetilde{I}$ の A-reduction である。次に (2) を示すためには，$\widetilde{I}$ が唯一の極大元であることを示せばよい。そのためには，$J_1, J_2 \in A(I)$ のとき，$J_1 + J_2 \in A(I)$ であることを言えばよい。

今，k を大きくとって，$I^n = J_1^n$ かつ $I^n = J_2^n$ が，すべての $n \geq k$ に対して成り立つとする。このとき，$m \geq 2k$ なるすべての m に対し，$I^m = (J_1 + J_2)^m$ が成り立つことを示す。はじめに，$I^m \subseteq (J_1 + J_2)^m$ は明らかである。ところで

$$(J_1 + J_2)^m = \sum_{l=0}^{m} J_1^l \cdot J_2^{m-l} \quad \text{である。}$$

(i)　$l \geq k$ のとき

$$J_1^{\ell} \cdot J_2^{m-\ell} = I^{\ell} J_2^{m-\ell} = (I^k \cdot I^{\ell-k}) J_2^{m-\ell}$$
$$\subseteq I^k J_2^{\ell-k} J_2^{m-\ell} = I^k J_2^{m-k}$$

であるが，$m-k \geqq k$ だから $I^{m-k} = J_2^{m-k}$ であり，

$$J_1^{\ell} J_2^{m-\ell} \subseteq I^k J_2^{m-k} = I^k I^{m-k} = I^m$$ となる。

(ii) $m-\ell \geqq k$ のとき

(i) の場合と同様にして

$$J_1^{\ell} J_2^{m-\ell} \subseteq I^k J_1^{m-k} = I^k I^{m-k} = I^m$$ である。

以上より，何れの場合も $J_1^{\ell} J_2^{m-\ell} \subseteq I^m$ が成り立ち，

従って，$(J_1+J_2)^m \subseteq I^m$ となり，$I^m = (J_1+J_2)^m$ を得る。

注意2. 定理6におけるイデアル $\tilde{I}$ は，I を A-reduction にもつ最大のイデアルであることがわかる。そこで，$\tilde{I}$ を I の asymptotic closure と呼ぶことにし，今後は，これを I^a で表わす。

このイデアル I^a は I^* と同様の性質をもつことを次の定理で示す。

定理7. Rをネーター環，IをRのイデアルとする。このとき，次のことが成り立つ。

(1) $(I^a)^a = I^a$ である。

(2) I がイデアル J の A-reduction であれば，$J \subseteq I^a$ が成り立つ

(3) $I \subseteq J \subseteq I^a$ なるイデアル J に対し，$J^a = I^a$ である。

(4) 任意のイデアル J に対して

(i) $I^a J^a \subseteq (IJ)^a$

(ii) $(I^a J^a)^a = (IJ)^a = (I^a J)^a$

である。

(5) 任意の整数 $n \geqq 1$ に対し，$((I^a)^n)^a = (I^n)^a$

である。

(証明)

(1) は命題9と定理6から出る。

(2) は定理6の(2)による。

(3) $I \subseteq J \subseteq I^a$ のとき，命題9より J は I^a の A-reduction である。よって，定理6より $I^a \subseteq J^a$ となる。次に $J \subseteq I^a \subseteq J^a$ ゆえ，I^a は J^a の A-reduction であり，(1) により，$J^a \subseteq (I^a)^a = I^a$ が成り立つ。よって，$J^a = I^a$ となる。

(4) (i) k を大きくとって，$n \geqq k$ なるすべての n に対して，$(I^a)^n = I^n$，$(J^a)^n = J^n$ が成り立つとする。このとき，すべての $n \geqq k$ に対して

$$(I^a J^a)^n = (I^a)^n (J^a)^n = I^n J^n = (IJ)^n$$

となり，定理6より，$I^a J^a \subseteq (IJ)^a$ を得る。

(ii) (i)の結果より，$IJ \subseteq I^a J^a \subseteq (IJ)^a$ である。よって，(3) により $(I^a J^a)^a = (IJ)^a$ である。これから

$(I^a J)^a = ((I^a)^a J^a)^a = (I^a J^a)^a$ も成り立つ。

(5) n についての帰納法で示す。

$n=1$ のときは，(1) により成り立つ。

$n>1$ とし，$n-1$ に対しては，(5) が成り立つと仮定する。このとき，(4) により

$$((I^a)^n)^a=((I^a)^{n-1}\cdot I^a)^a=(((I^a)^{n-1})^a\cdot(I^a)^a)^a$$
$$=(((I^a)^{n-1})^a\cdot I^a)^a$$

となる。しかるに，帰納法の仮定より，$((I^a)^{n-1})^a=(I^{n-1})^a$ だから

$$((I^a)^n)^a=((I^{n-1})^a\cdot I^a)^a=(I^{n-1}\cdot I)^a=(I^n)^a$$

を得る。

さて，I がネーター環 R の正則なイデアルであれば，我々の I^a は [7] の I^* と一致することが容易にわかる。

命題10. I がネーター環 R の正則なイデアルであれば，$I^a=I^*$ が成り立つ。

（証明） 定理6と [7，(2.1)] とによる。

命題11. R をネーター環，I, J を R のイデアルとする。このとき

(1) I が J の A-reduction であれば，$I^*=J^*$ である。

(2) つねに $I^a\subseteq I^*$ であり，$I^a=I^*$ が成り立つのは I が I^* の A-reduction になるときに限る。

（証明） (1) は自明である。

(2) まず (1) の結果より，$I^a\subseteq(I^a)^*=I^*$ である。後半については，$I^a=I^*$ が成り立つのは $I^*\subseteq I^a$ が成り立つときであり，$I\subseteq I^*$ であることに注意すれば，

命題9と定理6より，$I^* \subseteq I^a$ が成り立つのは，I が I^* の A-reduction になるときに限ることがわかる。

注意3. R をネーター環とするとき，次のことが成り立つ。

(1) I, J が R のイデアルで，I が J の A-reduction であれば，$J \subseteq \sqrt{I}$ となる。これから，特に $I^a \subseteq \sqrt{I}$ であることがわかる。

(2) P が R の素イデアルならば，$P^a = P$ である。

注意4. I がネーター環 R の非正則なイデアルの場合には，$I^a \neq I^*$，つまり I が I^* の A-reduction でないことが起る。例えば，k を体とし，$R = k[X, Y]/(XY)$ とおく。このとき，$I = (X)/(XY)$ は R の素イデアルだから，$I^a = I$ である。しかし，例1で見たように $I^* = (X, Y)/(XY)$ だから，$I^a \neq I^*$ である。

I^a に関するさらに詳しい結果は，論文[6]を参照して下さい。

参考文献

1. R. Gilmer, Multiplicative ideal theory, Marcel Dekker, 1972

2. J. H. Hays, Reductions of ideals in commutative rings, Trans., 177 (1973), 51-63.

3. J. H. Hays, Reductions of ideals in Prüfer domains, Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1975), 81-84.
4. H. Matsumura, commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986.
5. D. G. Northcott and D. Rees, Reductions of ideals in local rings, Proc. Cambr. Phil. Soc., 50 (1954), 145-158.
6. A. Okabe, On reductions of ideals in commutative rings and conductorial ideal closures, preprint.
7. L. J. Ratliff, Jr. and R. Rush, Two notes on reductions of ideals, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 929-934.
8. M. Sakuma and H. Okuyama, A criterion for analytically unramification of a local ring, J. Gakugei, Tokushima Univ., 15 (1966), 36-38.

HILBERT FUNCTIONS OF COHEN-MACAULAY GRADED DOMAINS AND ENUMERATIVE COMBINATORICS

日比孝之（名古屋大学 理学部）

"数え上げ"の組合せ論（enumerative combinatorics）とは，自然に現れる或る種の条件を満たす有限な数学的対象の個数を数える学問であって，歴史的には，n 個の元から成る集合の部分集合で，その要素の個数が k 個であるもの，即ち，k 元部分集合の個数が，二項係数 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ で表される ── という事実が，その研究の誕生を告げたのである．今，$a_k=\binom{n}{k}$ と置けば，有限数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ が定義できるが，enumerative combinatorics を支える根底思想は，大雑把に言えば，この様な"数え上げ"から生起する有限数列を完全に決定せよ ── という問題意識である．

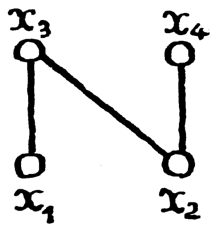
まず，本講で考察する有限数列の定義から始めよう．有限な半順序集合 P の要素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は，(*) P の順序で $x_i < x_j$ ならば $i < j$ である ── という条件

を満たす様に、番号付け (labeling) が施されていると仮定する。そして、n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ で

(a) P の順序で $x_{a_p} < x_{a_q}$ ならば $p < q$

(b) $\#\{r \mid a_r > a_{r+1}\} = i$

を満たすものの個数を $w_i = w_i(P)$ と置く。特に、$w_0 = 1$ である。さて、$s = \max\{i \mid w_i \neq 0\}$ とし、$w(P) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$ と書く。ここで、数列 $w(P)$ は、条件 (*) を満たす P の要素の番号付けとは無関係に決まることに注意する。例えば、

$P =$ 

であれば、$w(P) = (1, 3, 1)$ となる。数列 $w(P)$ は、いわゆる "(P, ω)-分割" の母関数 (cf. [Sta$_1$]) に出現するのであるが、その組合せ論的背景は、残念ながら、割愛せざるを得ない。"数え上げ" の組合せ論の根底思想からすれば、

$\boxed{\text{問題}}$ 与えられた数列 $(w_0, w_1, \cdots, w_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, $w_s \neq 0$, に対して、$w(P) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$ となる有限半順序集

合 P が存在する為の必要十分条件を $w_0, w_1, \cdots, w_s$ の言葉で記述せよ。

を解くことが、数列 $w(P)$ の研究の最終目標である。現在のところ、$w(P)$ に関して、次の性質が期待されている：

$\boxed{\text{予想}}$ 1°) $w_i \leqq w_{s-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq [s/2])$

2°) $w_0 \leqq w_1 \leqq \cdots \leqq w_{[s/2]}$

3°) ξ の s 次方程式 $w_0 + w_1\xi + \cdots + w_s\xi^s = 0$ の根は、すべて実数である。

4°) $w(P)$ は unimodal 数列、即ち、$w_0 \leqq w_1 \leqq \cdots \leqq w_j \geqq w_{j+1} \geqq \cdots \geqq w_s$ $(0 \leqq {}^\exists j \leqq s)$ である。

ところで、有限数列の研究に可換環論、特に、Cohen-Macaulay環の理論がきわめて有効であることを始めて世に示したのは、Stanley の記念碑的な論文 [Sta2] であった。以下、k を体とし、次数付環 $R = \bigoplus_{n \geqq 0} R_n$ は、(i) $R_0 = k$、(ii) $R = k[R_1]$、(iii) $\dim_k R_1 < \infty$ を満たすと仮定する。R の Hilbert 関数 $H(R, n) := \dim_k R_n$ から作った母関数 $F(R, \lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_k R_n)\lambda^n$ を R の Poincaré 級数と呼ぶ。すると、

$$F(R,\lambda)=\frac{h_0+h_1\lambda+\cdots h_s\lambda^s}{(1-\lambda)^d}$$

と表すことが可能である. 但し, $d=\dim R$, $h_i\in\mathbb{Z}$ で $h_s\neq 0$ とする. 便宜上, $h(R):=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ を R の h-vector と呼ぶ. 今, R を Cohen-Macaulay 環とし, k を無限体とすれば, R_1 から R の正則列 θ_1, θ_2, $\cdots$, θ_d を選べる. そこで, Artin環 $R/(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ を S と置けば, S の Poincaré 級数 $F(S,\lambda)$ は, $\sum_{i=0}^{s}h_i\lambda^i$ となる. 従って, R の埋入次元 $\dim_k R_1$ を v と置けば, $h_1=v-d$ だから, h_i は $v-d$ 変数 i 次の単項式の個数を超えない. 換言すれば,

補題 Cohen-Macaulay 環 R の h-vector $h(R)=(h_0,h_1,\cdots,h_s)$ は

$$0\leqq h_i\leqq\binom{v-d+i-1}{i},\quad 0\leqq{}^{\forall}i\leqq s$$

を満たす. ここで, $d=\dim R$, $v=\dim_k R_1$ である.

この事実こそ，いわゆる"Upper Bound Conjecture for Spheres"を肯定的に解決した根本原理なのである．なお，与えられた有限数列 $(h_0, h_1, \cdots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$，$h_s \neq 0$，に対して，$h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ となる Cohen-Macaulay 環 R が存在する為の $h_0, h_1, \cdots, h_s$ に関する必要十分条件は，即に，Macaulay の仕事によって，完全に得られている（cf. [Sta_3]）．

さて，本講では，R が Cohen-Macaulay 整域の時，$h(R)$ に関して何が言えるかという問を提起したい．

$\boxed{\text{命題}}$ Cohen-Macaulay 整域 R の h-vector $h(R) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$，$h_s \neq 0$，に対して，不等式*)

$$h_0 + h_1 + \cdots + h_i \leqq h_s + h_{s-1} + \cdots + h_{s-i} \quad (0 \leqq {}^\forall i \leqq [s/2])$$

が成立する．

---

*) 本講では，Eisenbud-Stanley の不等式と呼ぶ．

証明.**) R の canonical module K_R の次数を、適当に shift して、$(K_R)_n=(0)$ $(\forall n<0)$、$(K_R)_0\neq(0)$ とし、$K_R\ni x\neq 0$ を取って、$M=K_R/xR$ と置く。R は Gorenstein 環でない、i.e.、$M\neq(0)$ と仮定してよい。xR 及び K_R は、R-加群として、Cohen-Macaulay で d $(=\dim R)$ 次元である。他方、R は整域だから、$\dim_R M<d$ である。すると、短完全系列

$$0\to xR\to K_R\to M\to 0$$

から導かれる、局所 cohomology 加群の長完全系列を考えて、$\dim_R M=d-1$ で M は Cohen-Macaulay 加群であることがわかる。すると、$xR\simeq R$ に注意すれば、

**) Eisenbud は、k が代数的閉体の時、Bertini の定理より $h_1\leq h_i$ $(1\leq\forall i<s)$ が従うことを Stanley に示唆した。少し後に、Stanley は、Bertini の定理を誤って使って、$h_0+\cdots+h_i\leq h_s+\cdots+h_{s-i}$ を導いた。今年の春、筆者が、その誤りの指摘を Stanley にしたところ、数日後に Stanley が得た証明がここで述べるものである。

$$F(M,\lambda) = F(K_R,\lambda) - F(R,\lambda)$$

$$= (\sum_{i=0}^{s} h_{s-i}\lambda^i)/(1-\lambda)^d - (\sum_{i=0}^{s} h_i\lambda^i)/(1-\lambda)^d$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{s}\{(h_s-h_0)+\cdots+(h_{s-i}-h_i)\}\lambda^i}{(1-\lambda)^{d-1}}$$

だから、 M が Cohen-Macaulay 加群であることにより $F(M,\lambda)$ の分子に現れる $^\forall$係数 $\geqq 0$ が従うことから、所期の不等式を得る。 Q.E.D.

ところで、[Sta_1]、[Gar] 及び、分配束上の ASL (algebnas with straightening laws) の研究 [H_1]、[H_2]、[H_4] 等から

$\boxed{\text{定理}}$ 任意の有限半順序集合 P に対して、 Cohen-Macaulay整域 R で、$h(R) = w(P)$ となるものが存在する。

が従う. すると、

系 P を有限半順序集合，$w(P)=(w_0, w_1, \cdots, w_s)$，$w_s \neq 0$，とする時，任意の $0 \leqq i \leqq [s/2]$ に対して，不等式

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_i \leqq w_s + w_{s-1} + \cdots + w_{s-i}$$

が成立する．

が得られる．なお，根拠は無いが，筆者は，$w(P)$ に関する予想の 1°）と 2°）の不等式は，実は，任意の Cohen-Macaulay 整域 R の h-vector に対して成立するのではないかという希望を持っている．即ち，

問題 Cohen-Macaulay 整域 R の h-vector $h(R)=(h_0, h_1, \cdots, h_s)$，$h_s \neq 0$，に対して，

1°）$h_i \leqq h_{s-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq [s/2])$

2°）$h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[s/2]}$

が成立するか？

話は変わるが，本講を終えるに際して，[H_3] の結果に言及しよう．変数 $X_1, X_2, \cdots, X_v$ $(\deg X_i = 1)$ の単項式

の有限集合 $\mathcal{M}$ $(\neq \phi)$ が，$M \in \mathcal{M}$ で，単項式 N が M を割り切れば，$N \in \mathcal{M}$ ―― なる条件を満たす時，$\mathcal{M}$ は，単項式の順序 ideal と呼ばれる．この時，$h_i = h_i(\mathcal{M}) = \#\{M \in \mathcal{M}; \deg M = i\}$，$s = \max\{i; h_i \neq 0\}$ とし，$h(\mathcal{M}) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$ と書く．また，$\mathcal{M}$ が pure であるとは，$\mathcal{M}$ の整除関係による極大元の次数が，すべて等しいことと定義する．この時，

$\boxed{\text{命題}}$ $\mathcal{M}$ が単項式の pure な順序 ideal で，$h(\mathcal{M}) = (h_0, h_1, \cdots, h_s)$，$h_s \neq 0$，の時，

i) $h_i \leqq h_{s-i}$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq [s/2])$

ii) $h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[s/2]}$

が成立する．

しからば，

$\boxed{\text{予想}}$ $\mathcal{M}$ が単項式の pure な順序 ideal の時，$h(\mathcal{M}) = h(R)$ となる Cohen-Macaulay 整域が存在する．

と予想するのは，如何であろうか．

参考文献

[Sta_1] R.Stanley, Ordered structures and partitions, Mem. Amer. Math. Soc. 119 (1972).

[Sta_2] ______, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Appl. Math. 54 (1975), 135-142.

[Sta_3] ______, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. 28 (1978), 57-83.

[Sta_4] ______, "Enumerative Combinatorics, Volume I", Wadsaorth, Monterey, Calif., 1986.

[Gar] A.Garsia, Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings, Advances in Math. 38 (1980), 229-266.

[H_1] T.Hibi, Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, in "Commutative Algebra and Combinatorics" (M.Nagata and H.Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math., Vol. 11 , North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 93-109.

[H_2] ______, Canonical ideals of Cohen-Macaulay partially ordered sets, to appear in Nagoya Math. J. 112 (1988).

[H_3] ______, What can be said about pure O-sequences ? , submitted.

[H_4] ______, Linear diophantine equations and Stanley's (P,ω)-partitions, in preparation.

Modules with Linear Resolution over a Polynomial Ring

吉野雄二（名大・理）

§1．2変数の場合の分類定理

以下では、kは任意の体、Sはk上n変数の多項式環$k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$とする。有限生成S加群Mが、module with linear resolution（以下LR加群と略す）とは、Mが次のようなS自由加群による分解を持つときをいう。

(1.1)
$$0 \to F_n \xrightarrow{f_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \to 0$$

但し、ここで各f_iはSの線型形式からなる行列である。

本稿の主な目的は、S上のLR加群を全て分類しようという試みについて述べることである。

先ず、2変数多項式環の場合には完全な分類が可能で、結果は以下に述べる(1.3)のようになるが、結果を述べる前に必要な記号を容易しておく。

(1.2)記号：$\mathbb{P}^1_k$＝｛k係数のmonic既約多項式$\in k[e_1]$の全部｝$\cup$｛∞｝

$p \in \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$が、$p = e_1^m + c_1 e_1^{m-1} + \ldots + c_m$のとき、

$$J(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -c_m & -c_{m-1} & -c_{m-2} & \ldots & -c_1 \end{pmatrix}$$

$$I(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$ （サイズは$m \times m$）

$E(p)=$ サイズが$m\times m$の単位行列

$p\neq\infty$のとき、整数nに対して、

$$A(n,p)=\begin{pmatrix} xE(p)+yJ(p) & yI(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & xE(p)+yJ(p) & yI(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & xE(p)+yJ(p) \end{pmatrix}$$

また、$p=\infty$のときには、

$$A(n,\infty)=\begin{pmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{pmatrix}$$

以上の記号のもとで、次の定理が成立する。

(1.3)<u>定理</u>： $S=k[x,y]$のときには、S上の直既約なLR加群は次の何れかに同型である。

(1.3.1) $S/(x,y)S\simeq k$

(1.3.2) $(x,y)^n$ $(n\in\mathbb{N})$

(1.3.3) 行列$A(n,p)$の余核として定義される加群$M(n,p)$。

但し、$n\in\mathbb{N}$、$p\in\mathbb{P}_k^1$。

以下では、このような分類が可能である理由について考察しよう。

§2. Grassmann代数

前節の定理(1.3)は、次に述べる定理(2.1)から得られる。

Vをk上n次元のベクトル空間で、その基底を$\{e_1,\ldots,e_n\}$とする。また、V^*でVの双対空間を表わし、$\{e_i\}$の双対基を$\{x_1,\ldots,x_n\}$とする。即ち、$x_i(e_j)=\delta_{ij}$である。n変数多項式環SをV^*上の対称代数と同一視しておく。従って、$S\simeq$

$k[x_1,\ldots,x_n]$である。またGをV上のGrassmann代数ΛVとする。各e_iの次数を1として、Gは$\mathbb{Z}$-gradedな斉次環であると見ておく。$M^f(G)$でG上の斉次加群の圏をあらわすものとする。

S上の自由加群からなる長さ有限の複体$F_.$が、(1.1)のような条件を充たすとき$F_.$をS上のlinear complexであると言う。そして、$L^b(S)$でS上の長さ有限のlinear complexの全体の圏を表わす。

このとき、次の定理が成立する。

(2.1)<u>定理</u>：$L^b(S)$と$M^f(G)$は圏同値である。

(2.1)の証明の概略を述べよう。そのために、関手$F: M^f(G)\to L^b(S)$を次のように構成する。

いま、$W=\oplus W_j$をG上の有限生成斉次加群であるとしよう。各$e_i\in V$のW上での作用は、k係数の行列$A_{ij}: W_j\to W_{j+1}$を導く。そのとき、S上の自由加群F_jを、

$$F_j = W_j \otimes_k S$$

と定義し、また、S上の行列Φ_jを、

$$\Phi_j = \Sigma_i A_{ij} x_i$$

で与える。これによって、S上の自由加群とその間の準同型写像からなる列$\{F_j, \Phi_j\}$が出来る。WがG上の加群であることから、この列がS上の複体を実際に与えていることは、容易に従う。これによって、関手$F: M^f(G)\to L^b(S)$を定義するのである。

逆関手$G: L^b(S)\to M^f(G)$は、上の構成の逆を辿ることによって得られる。

定理(2.1)を$n=2$（2変数）の場合に適用してみよう。

このときには、Grassmann代数Gは次のような基底を持つk上4次元の多元環である。

$$G = k\cdot 1 + k\cdot e_1 + k\cdot e_2 + k\cdot e_1\Lambda e_2$$

このGの表現の圏は、Euclidean diagram $\tilde{A}_1$ の表現の圏とstably equivalentであることが知られている。従って、この場合の$M^f(G)$の対象の分類は、次のような線型代数の問題に帰着されることが分る。

(2.2) <u>ある線型代数の問題</u>：$\mathfrak{M}(k)$で、サイズの等しいk上の行列のpair全体を表わすとする。即ち、

$$\mathfrak{M}(k)=\{(A,B)\mid A と B は共に k 上の n\times m 行列、n, m\in\mathbb{N}\}$$

この$\mathfrak{M}(k)$上に次の２つで生成される関係∼を考える。

(2.2.1)　$(A,B)\sim\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&0\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}B&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$

(2.2.2)　$P,Q\in GL(k)$が存在して、$A'=PAQ$ かつ $B'=PBQ$ となるとき、

$(A,B)\sim(A',B')$

ここで問題とは、$\mathfrak{M}(k)/\sim$の元を全て分類せよということである。

問題(2.2)は幸いにして、Kroneckerによって解が与えられている。それを利用して、$L^b(S)$の元を分類することができ、よって、S上のＬＲ加群の分類も可能となるのである。

しかし、$n\geqq 3$の場合には、対応する線型代数の問題は解くことが出来ない。そのことを次に考えてみよう。

§３．３変数の場合。

３変数多項式環の上のＬＲ加群の分類が不可能であろうという理由が、次の定理(3.1)から得られる。

ここでは、Sは３変数の多項式環$k[x,y,z]$とする。T(S)を次のような加群の全体から成る、(mod-S)の充満部分圏とする。

$M\in T(S)\rightleftarrows$ Mはtorsionを持つＬＲ加群で、$\{x,y\}$はM上の正則列を成し、

$M/(x,y)M$は体kの直和に同型である。

このとき、次の定理が成立する。

(3.1) <u>定理</u>：　上で定義した圏T(S)は、２変数のfree algebra上の有限生成加群の圏(mod-$k\langle e_1,e_2\rangle$)に同値である。

実際、定理(2.1)の対応において、e_3の作用がidentityであるような斉次Ｇ加群の全体

が丁度T(S)に対応している。一方で、e_3の作用がidentityであるならば、そのようなG加群にはe_1, e_2はfreeに作用している。このことから、定理(3.1)が導かれる。

REFERENCE

Yuji Yoshino ; Modules with linear resolution over a polynomial ring in two variables, To appear in Nagoya Math. Journal.

On relations on minors of generic symmetric matrices

京大 理　蔵野 和彦

§1. Introduction

Rを可換環、nを正整数、X_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$を不定元とする。$S = R[X_{ij}]_{1 \leq i \leq j \leq n}$を、$R$上の$\frac{n(n+1)}{2}$変数多項式環とする。$j > i$のとき、$X_{ji} = X_{ij}$と定めることにより、$(X_{ij})$は$n$次の generic symmetric matrix となる。J_pを、対称行列(X_{ij})のp次小行列式全体により生成されるSのイデアルとする。

S/J_pという形の環は、多くの数学者の研究対象となってきた。例えば、invariant theory の方面では、第1、第2基本定理([2], [12])により、ある多項式環に直交群を作用させたときの invariant subring はS/J_pという形をしているということがわかっている。そしてさらに、homological algebra の方面では、係数環Rが Cohen-Macaulay 環であるとき、S/J_pもそうであり、

$$\operatorname{depth}(J_p) = \operatorname{proj.dim}_S(S/J_p) = \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2}$$

となることが知られている([7])。さらに[5]で、Józefiak, Pragacz, Weyman は、Rが有理数体$\mathbb{Q}$を含む場合、全てのnとpに対して、S/J_pのS上の minimal free resolution を構成した。(minimal free resolution とは、graded free resolution で、その boundary map に対応する行列の各成分が定数項を持たないようなものである。)しかし、一般の環R上では、S/J_pのS上の minimal free resolution は、その存在性さえわかっていない。ただし、$p = 1$のnの場合は、

Koszul complex を用いて minimal free resolution を構成することができ、また $p=n-1$ の場合は、[3] や [4] により、minimal free resolution は具体的に作られている。

今回、次のようなことがわかりました。

任意の係数環 R 上で、J_p の生成元として小行列式全体をとったとき、その relation module は小行列式の 0 次と 1 次の relation たちにより生成される。さらに、J_p の生成元として、その minimal generator (任意の係数環 R 上で存在する) をうまくとれば、その relation module は 1 次の relation だけで生成される。そして、それらを使うことにより、$p=n-2$ のとき、任意の係数環 R 上で、S/J_{n-2} の S 上の minimal free resolution が存在することを証明することができる。

ここでは証明の概略だけを述べる。詳しい証明は、[6] を見ていただきたい。

§2. Main Theorems

自然数 n、p ($p \le n$) に対して、S、J_p を上のように定める。

S/J_p は graded module であるから、graded な free resolution が存在する。$n \times n$ 行列 (X_{ij}) の p 次小行列式の数は $\binom{n}{p}^2$ だから、

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow S(-p)^{\binom{n}{p}^2} \longrightarrow S \longrightarrow S/J_p \longrightarrow 0$$

という graded exact sequence がある。$M = \bigoplus_{i \ge 0} M_{p+i}$ が、対称行列 (X_{ij}) の p 次小行列式の relation module である。R-module M_{p+i} の各元を、p 次小行列式の i 次の relation ということにする。

<u>Theorem 1.</u> p 次小行列式の relation module は、0 次と 1 次の relation により生成される。すなわち、

$$M = S \cdot M_p + S \cdot M_{p+1}$$

（各 i に対して，$M_{p+i} = S_i \cdot M_p + S_{i-1} \cdot M_{p+1}$ ）

が成立する。

上の定理を用いて，直ちに次のことを証明することができる。

<u>Theorem 2.</u>　$p=n-2$ の場合，任意の係数環 R 上で，S/J_{n-2} の S 上の minimal free resolution が存在する。

以下，この２つの定理の証明の概略を述べる。

§3. Theorem 1 ⇒ Theorem 2.

[8] により，任意の n, p に対して，R が整域なら S/J_p も整域となることがわかっている。つまり，$R = \mathbb{Z}$（有理整数環）であるとき，S/J_p は $\mathbb{Z}$-free module となる。このことから，

$$0 \to P_\ell \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to S/J_p \to 0$$

が，$R=\mathbb{Z}$ の場合の minimal free resolution であれば，任意の係数環 R 上で，

$$0 \to P_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} R \to \cdots\cdots \to P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} R \to P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} R \to S \otimes_{\mathbb{Z}} R / J_p \otimes_{\mathbb{Z}} R \to 0$$

は，$S\otimes R / J_p \otimes R$ の $S \otimes R$ 上の minimal free resolution となることがわかる。

すなわち，$R=\mathbb{Z}$ の場合に S/J_p の minimal free resolution が存在することがわかれば，任意の係数環 R 上でそれが存在することがいえる。

$R=\mathbb{Z}$ の場合，minimal free resolution の存在性を判定するとき，次の命題が有効である。

Proposition (P. Roberts. [9])　T は $\mathbb{Z}$ 上の多項式環で、その不定元全体により生成されるイデアルを m とする。I を T の homogeneous ideal で、T/I は $\mathbb{Z}$-free とする。このとき、次は同値である。

(1). T/I の T 上の minimal free resolution は存在する。

(2). $\forall i$, $\mathrm{Tor}_i^T(T/I, T/m)$ は $\mathbb{Z}$-free.

(3). 素数 q に対して、$\mathbb{F}_q$ を q 個の元から成る体とすると、
$\forall i$, $\dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Tor}_i^{T\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q}((T/I)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q, (T/m)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q)$ は q に依らない。

以下、この section では、$R=\mathbb{Z}$ とする。

Remark　任意の素数 q に対して、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q$ は Gorenstein 環である。

([8] により、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q$ は、Cohen-Macaulay 整域であることがわかる。それ故に、この環が Gorenstein 環であるかどうかは、その Poincaré series により決定される([10])。ところが、S/J_{n-2} の各斉次成分は $\mathbb{Z}$-free であることより、k を体としたとき、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}k$ の Poincaré series は k に依らない。それ故、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ が Gorenstein であることがわかれば、任意の素数 q に対して、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_q$ もそうであることがわかる。[5] により、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の $S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 上の minimal free resolution を構成することができ、その Betti 数を計算することも可能である。そのことから、$S/J_{n-2}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は Gorenstein 環であることがわかる。)

定理 1 の結果を使って、定理 2 を証明する。

素数 q に対して、

$$\beta_q(i, n) = \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Tor}_i^{S\otimes\mathbb{F}_q}((S/J_{n-2})\otimes\mathbb{F}_q, (S/m)\otimes\mathbb{F}_q)$$

と定義する。ここで、m は、S のすべての不定元により生成されるイデアルを意味する。上の命題により、定理 2 を証明するためには、

各 n、i に対して、$\beta_q(i,n)$ が q に依らないことを示せばよい。[8] により、任意の素数 q に対して、$\mathrm{proj.dim}_{S\otimes \mathbb{F}_q}((S/J_{n-2})\otimes \mathbb{F}_q)=6$ となる。さらに、上の remark を考慮すれば、任意の素数 q に対して

$$\beta_q(i,n)=0 \quad \text{if } i<0,\ 6<i.$$

$$\beta_q(0,n)=\beta_q(6,n)$$

$$\beta_q(1,n)=\beta_q(5,n)$$

$$\beta_q(2,n)=\beta_q(4,n)$$

$$\beta_q(3,n)=2\cdot\beta_q(2,n)-2\cdot\beta_q(1,n)+2\cdot\beta_q(0,n)$$

が成立することが容易にわかる。故に、任意の n に対して、$\beta_q(0,n)$, $\beta_q(1,n)$, $\beta_q(2,n)$ が q に依らないことが示されれば、すべての i、n に対して、$\beta_q(i,n)$ は q に依らないことがわかり、定理 2 の証明が完了する。

定義により、$\beta_q(i,n)$ は、$(S/J_n)\otimes\mathbb{F}_q$ の $S\otimes\mathbb{F}_q$ 上の minimal free resolution の i 番目の free module の階数に他ならない。このことから、任意の n と q に対して、$\beta_q(0,n)=1$ となる。

また、$\beta_q(1,n)$ は、$S\otimes\mathbb{F}_q$ のイデアル $J_{n-2}\otimes\mathbb{F}_q$ の homogeneous minimal generator の数であることがわかる。

$\mathbb{Z}$-free module の完全列

$$0\to J_{n-2}\to S\longrightarrow S/J_{n-2}\to 0$$

は split exact であるから、任意の素数 q に対して、

$$0\to J_{n-2}\otimes\mathbb{F}_q\to S\otimes\mathbb{F}_q\to (S/J_{n-2})\otimes\mathbb{F}_q\to 0$$

が exact となる。このことから、$J_{n-2}=\bigoplus_{i\geq n-2}(J_{n-2})_i$ とおけば、

$$\beta_q(1,n)=\dim_{\mathbb{F}_q}(J_{n-2})_{n-2}\otimes\mathbb{F}_q$$

となる。$(J_{n-2})_{n-2}$ は $\mathbb{Z}$-free であるから、$\beta_q(1,n)$ は q に依らずに n だけで決定される。

あと、$\beta_q(2,n)$ が q に依らないことさえ示せばよい。

定理 1 より、$J_{n-2}\otimes\mathbb{F}_q$ の小行列式全体の relation module は、0次と1次の relation により生成される。このことから、$J_{n-2}\otimes\mathbb{F}_q$ の homogeneous minimal generator をとった場合、その relation module は 1次の relation だけで生成されることがわかる。つまり、$(S/J_{n-2})\otimes\mathbb{F}_q$ の $S\otimes\mathbb{F}_q$ 上の minimal free resolution の最初の部分は、次のような形をしていることがわかる。

$$\cdots \longrightarrow S(-n+1)^{\beta_q(2,n)}\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow S(-n+2)^{\beta_q(1,n)}\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow S\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow (S/J_{n-2})\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow 0$$

上の graded exact sequence の $(n-1)$次の部分を取り出すと、

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{F}_q^{\beta_q(2,n)}}{\underset{\parallel}{S_0^{\beta_q(2,n)}\otimes\mathbb{F}_q}} \longrightarrow S_1^{\beta_q(1,n)}\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow S_{n-1}\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow (S/J_{n-2})_{n-1}\otimes\mathbb{F}_q \longrightarrow 0$$

となっている。ここで、$\mathbb{F}_q^{\beta_q(2,n)}$ 以外の vector space の次元は、q に依らない。故に、$\beta_q(2,n)$ も q に依らないことがわかる。

以上で定理 2 の証明は完了した。

§4. 一般線形群の表現論からの準備 (Plethysm formulas)

定理 1 の証明の前にその準備をする。

R を可換環、E を階数 n の R-free module としたとき、E は $GL(E)$ 加群の構造を持つ。$S_i(E)$ を、E の i次 symmetric module, $\wedge^j E$ を j次 exterior module とする。$S_i(E)$, $\wedge^j E$ は R-free module であり、$GL(E)$ の E への作用から、$S_i(E)$, $\wedge^j E$ も $GL(E)$ 加群となる。これらの表現行列の各成分は、$GL(E)$ の元の各成分の多項式で書ける。このことから、$S_i(E)$ や $\wedge^j E$ は、$GL(E)$ の多項式表現となる。R が標数

0の体であれば、GL(E)の任意の多項式表現（次元が有限なもの）は完全可約であることがわかっている。（例えば[12]）さらに、その既約表現は、partition $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ で $\lambda_1\leq n=\mathrm{rank}\,E$ を満たすものと一対一に対応する。例えば、任意の自然数 r に対して、

$$S_r(S_2E)=\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_r}L_\lambda E$$

（$L_\lambda E$ は、partition λ に対応する既約表現）

$$\Gamma_r=\left\{\lambda:\text{partition}\;\middle|\;\begin{array}{l}\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)\text{ とすると、}\\ \lambda_1\leq n,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_s=2r\\ \lambda_1=\lambda_2,\ \lambda_3=\lambda_4,\cdots\quad\text{が成立}\end{array}\right\}$$

と分解することが、指標の計算（[11]）により示される。

しかし、一般の環R上では、GL(E)の多項式表現は必ずしも完全可約ではない。

GL(E)の表現論を一般の環R上で行なうためには、既約表現に代わる概念が必要である。それらの中で代表的なものがSchur functorと呼ばれるものである（[1]）。Schur functor $L_\lambda E$ は、Rが有理数体を含む体の場合の $L_\lambda E$ の概念の自然な拡張である。$L_\lambda E$ は必ずしも既約表現とはならないが、R-free moduleとなり、そのrankは環Rに依らない。完全可約でないGL(E)の表現も、GL(E)-加群のfiltrationを持ち、そのassociated graded moduleが $\bigoplus L_\lambda E$ という形になることがある。例えば $S_r(S_2E)$ もそのようなfiltrationを持ち、そのassociated graded moduleは、Rが標数0の体であるときの既約分解と同じ形をしている。そのfiltrationがPlethysm formulaであり、それは定理1の証明で本質的な役割を果たす。

Plethysm formulaは、[2]で（表現論の言葉では書いてないが）導入されている。

Proposition (Plethysm formulas)　rを自然数とする。このとき、$S_r(S_2E)$はGL(E)-加群のfiltration $\{\mathfrak{M}_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma_r}$を持ち、そのassociated graded moduleは $\bigoplus_{\lambda\in\Gamma_r} L_\lambda E$ となる。filtrationの順序は、Γ_rの辞書式順序と逆である。

証明は[6]を見ていただきたい。

ここでは、$\mathfrak{M}_\lambda$ $(\lambda\in\Gamma_r)$の定義だけをやることにする。

まず、$\varphi_t : \Lambda^t E \otimes \Lambda^t E \longrightarrow S_t(S_2E)$ を次のように定める。

$E = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$ としたとき、

$$\varphi_t(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_t}\otimes e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_t}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_t}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\cdot(e_{i_1}\times e_{j_{\sigma(1)}})\bullet\cdots\cdots\bullet(e_{i_t}\times e_{j_{\sigma(t)}})$$

($\mathfrak{S}_t$はt次対称群)

ここで、$\times$は、S_2Eの中でのかけ算、$\bullet$は$S(S_2E)$でのかけ算とする。容易にこれはwell-definedであることが示され、またGL(E)-加群の射となることもわかる。

Γ_rの各元は、定義より $\lambda=(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\lambda_s)$ という形をしていることがわかる。このとき、

$$\begin{array}{c}
\Lambda_\lambda E = (\Lambda^{\lambda_1}E\otimes\Lambda^{\lambda_1}E)\otimes(\Lambda^{\lambda_2}E\otimes\Lambda^{\lambda_2}E)\otimes\cdots\otimes(\Lambda^{\lambda_s}E\otimes\Lambda^{\lambda_s}E)\\
\big\downarrow \varphi_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{\lambda_s}\\
S_{\lambda_1}(S_2E)\otimes S_{\lambda_2}(S_2E)\otimes\cdots\otimes S_{\lambda_s}(S_2E)\\
\big\downarrow \bullet \leftarrow \text{multiplication}\\
S_r(S_2E)
\end{array}$$

の合成射をφ_λと表わす。φ_λもGL(E)-加群の射となる。このとき、

$$\mathfrak{M}_\lambda = \sum_{\substack{\mu\in\Gamma_r\\ \mu\geq\lambda}} \mathrm{Image}(\varphi_\lambda)$$

$\mu\geq\lambda$ ← 辞書式順序

と定義する。各 φ_λ ($\lambda\in\Gamma_r$) は $GL(E)$-加群の射であったから、$\mathfrak{M}_\lambda$ ($\lambda\in\Gamma_r$) は $S_r(S_2E)$ の $GL(E)$-submodule となる。

$\lambda, \mu\in\Gamma_r$ で $\lambda>\mu$ であれば、$\mathfrak{M}_\lambda\subseteq\mathfrak{M}_\mu$, $\lambda_0=(1,1,\cdots,1)\in\Gamma_r$ のとき、$\mathfrak{M}_{\lambda_0}=S_r(S_2E)$ となることがわかる。これで $GL(E)$-加群の filtration $\{\mathfrak{M}_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma_r}$ が構成された。

Γ_r の中で、λ の直後の元を λ' としたとき、$GL(E)$-加群の同型

$$\mathfrak{M}_\lambda/\mathfrak{M}_{\lambda'}\simeq L_\lambda E$$

が存在する。それは、

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_\lambda E \arrow[d, "d_\lambda"'] \arrow[dr] & \\
L_\lambda E \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathfrak{M}_\lambda/\mathfrak{M}_{\lambda'}
\end{tikzcd}$$

を可換にする同型である。(d_λ の定義は [1] を見よ。)

§5. Theorem 1の証明の概略

定理1の証明のアイディアは、[7] のものと同じである。[7] の中で Cauchy's formula を使う代わりに、Plethysm formula を使う。

証明の前にいくつかの定義をする。

$E=\bigoplus_{i=1}^{n}Re_i$ を階数 n の R-free module としたとき、$S(S_2E)=\bigoplus_{r\geq0}S_r(S_2E)$ は、係数環 R 上に generic symmetric matrix $(e_i\times e_j)$ の元を不定元として加えた多項式環である。$J_p=\bigoplus_{i\geq p}(J_p)_i$ を $S(S_2E)$ のイデアルで、$(e_i\times e_j)$ の p 次小行列式全体で定義されたものとする。(各 $e_i\times e_j$ を次数1として、$S(S_2E)$ を graded ring とみる)。このとき、$(J_p)_i$ は $S_i(S_2E)$ の $GL(E)$-submodule となる。

$(e_i \times e_j)$ の p 次小行列式を $f_1, \cdots, f_\ell$ とする ($\ell = \binom{n}{p}^2$)。このとき、次のような graded exact sequence がある。

$$0 \to M \to \bigoplus_{i=1}^{\ell} (S(S_2E))(-p) \xrightarrow{\rho} S(S_2E) \longrightarrow S(S_2E)/J_p \to 0$$

$$F_i \longmapsto f_i$$

ここで $F_1, \cdots, F_\ell$ は $\bigoplus_{i=1}^{\ell} (S(S_2E))(-p)$ の free basis, $M = \mathrm{Ker}(\rho)$ とする。
$M = \bigoplus_{i \geq 0} M_{p+i}$ とすれば M_p は小行列式の 0 次の relation、M_{p+1} は 1 次の relation となる。

定理 1 を証明するためには、$p+2$ 以上の任意の自然数 r に対して、

$$M_r = S_{r-p}(S_2E) \cdot M_p + S_{r-p-1}(S_2E) \cdot M_{p+1}$$

を示せばよい。

これを示すために、まずいくつかの写像を定義する。

t を p 以上の自然数とする。このとき、

$$\psi_t : \wedge^t E \otimes \wedge^t E \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} (S(S_2E))(-p) \right)_t$$

を次のように定める。

$\wedge^t E \otimes \wedge^t E$ の basis element $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_t}$ $(i_1 < \cdots < i_t, j_1 < \cdots < j_t)$ に対して、余因子展開

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_t \\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(t)}} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \otimes e_{j_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{j_{\sigma(p)}}) \cdot (e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \otimes e_{j_{\sigma(p+1)}} \wedge \cdots \wedge e_{j_{\sigma(t)}})$$

を考える。対称行列 $(e_i \times e_j)$ の第 $i_1, \cdots, i_p$ 行、第 $j_1, \cdots, j_p$ 列から成る小行列式に対応する $\bigoplus_{i=1}^{\ell} (S(S_2E))(-p)$ の basis element を $F_{i,j,\sigma}$ と表わす。このとき、

$$\psi_t(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_t}) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_t \\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(t)}} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \varphi_{t-p}(e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_t} \otimes e_{j_{\sigma(p+1)}} \wedge \cdots \wedge e_{j_{\sigma(t)}}) \cdot F_{i,j,\sigma}$$

と定める。これは base-wise に定めた射であるから、GL(E)-加群の射とはならない。

次のように partition の部分集合 $\Gamma_{r,p}$ を定める。

$$\Gamma_{r,p} = \{ \lambda \in \Gamma_r \mid \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s) \text{ であるとき、} \lambda_1 \geq p \}$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_s, \lambda_s) \in \Gamma_{r,p}$ であるとき、次の合成射を ψ_λ とする。

$$\begin{array}{c}
\Lambda_\lambda E = (\Lambda^{\lambda_1}E \otimes \Lambda^{\lambda_1}E) \otimes (\Lambda^{\lambda_2}E \otimes \Lambda^{\lambda_2}E) \otimes \cdots \otimes (\Lambda^{\lambda_s}E \otimes \Lambda^{\lambda_s}E) \\
\Big\downarrow \varphi_{\lambda_1} \otimes \varphi_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\lambda_s} \\
\left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} S(S_2E)(-p)\right)_{\lambda_1} \otimes S_{\lambda_2}(S_2E) \otimes \cdots \otimes S_{\lambda_s}(S_2E) \\
\Big\downarrow \cdot \\
\left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} S(S_2E)(-p)\right)_r .
\end{array}$$

$\lambda' = (p, p, 1, \cdots, 1) \in \Gamma_{r,p}$ とすると、$\psi_{\lambda'}$ は全射であることがわかる。(λ' は $\Gamma_{r,p}$ の中で辞書式順序で最小であることに注意.) また、任意の $\Gamma_{r,p}$ の元 λ に対して、

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_\lambda E \arrow[d, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"] & \\
\left(\bigoplus S(S_2E)(-p)\right)_r \arrow[r, "p_r"] & S_r(S_2E)
\end{tikzcd}$$

は可換となる。(p_r は、p の r 次斉次成分.)

Theorem 1 の証明

r を $p+2$ 以上の自然数とする。

$G \in M_r$ という $(r-p)$ 次 relation が与えられたとする。このとき、$G \in S_{r-p}(S_2E) \cdot M_p + S_{r-p-1}(S_2E) \cdot M_{p+1}$ を示したい。

$\psi_{\lambda'}$ は全射であるから、T という $\Lambda_{\lambda'}E$ の元が存在して、$G = \psi_{\lambda'}(T)$

と書ける。

　このとき、次の2つのことを示せば、$\Gamma_{r,p}$ の元の辞書式順序に関する帰納法で、定理2の証明ができる。

(1). $\quad G=\sum_{i=1}^{k}\psi_{\lambda_i}(T_i)\in M_r.\qquad \lambda_i\in\Gamma_{r,p}\ ,\ \lambda_1>\cdots>\lambda_k$

であるとき、$S_{r-p}(S_2E)\cdot M_p+S_{r-p-1}(S_2E)\cdot M_{p+1}$ の元 A が存在して、

$$G+A\in\sum_{\substack{\mu\in\Gamma_{r,p}\\ \mu>\lambda_k}}\mathrm{Image}(\psi_\mu)$$

(2). $\quad G=\psi_{(r,r)}(T')\in M_r$ なら、

$$G\in S_{r-p}(S_2E)\cdot M_p+S_{r-p-1}(S_2E)\cdot M_{p+1}.$$

(1)は次のように示す。

$G=\sum_{i=1}^{k}\psi_{\lambda_i}(T_i)\in M_r$ であるとき、

$$\rho(G)=\sum_{i=1}^{k}\rho\cdot\psi_{\lambda_i}(T_i)=\sum_{i=1}^{k}\varphi_{\lambda_i}(T_i)=0$$

となる。$\lambda_1>\cdots>\lambda_k$ であったから、$\sum_{i=1}^{k-1}\varphi_{\lambda_i}(T_i)\in\mathfrak{m}_{\lambda_{k-1}}$ となる。このことから、$\varphi_{\lambda_k}(T_k)\in\mathfrak{m}_{\lambda_{k-1}}$ がわかる。$\Gamma_{r,p}$ の中の λ_k の直後の元を λ'_k とする。このとき、$\lambda_{k-1}\geqq\lambda'_k$ より、$\varphi_{\lambda_k}(T_k)\in\mathfrak{m}_{\lambda'_k}$ となる。さらに、

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{\lambda_k}E \arrow[d, "d_{\lambda_k}"'] \arrow[dr] & \\
L_{\lambda_k}E \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathfrak{m}_{\lambda_k}/\mathfrak{m}_{\lambda'_k}
\end{tikzcd}$$

の可換性より、$d_{\lambda_k}(T_k)=0$ となる。

　故に、(1)を示すためには、$d_{\lambda_k}(T_k)=0$ となるような T_k に対して、$S_{r-p}(S_2E)\cdot M_p+S_{r-p-1}(S_2E)\cdot M_{p+1}$ の元 A が存在して、

$$\Psi_{\lambda_k}(T_k) + A \in \sum_{\substack{\mu \in P_{r,p} \\ \mu > \lambda_k}} \mathrm{Image}(\Psi_\mu)$$

を示せばよいのである。

$\mathrm{Ker}(d_\lambda)$ の元は、比較的によくわかっている（[1]）。それを使って (1) を示すのである。

References.

[1] K. Akin, D. Buchsbaum & J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, Adv. in Math. 44 (1982), 207-278.

[2] C. Deconcini & C. Proseci. A characteristic free approach to invariant theory, Adv. in Math. 21 (1976), 330-354.

[3] S. Goto & S. Tachibana, A complex associated with a symmetric matrix, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 51-54.

[4] T. Józefiak, Ideals generated by minors of a symmetric matrix, Commet. Math. Helv. 53 (1978), 596-607.

[5] T. Józefiak, P. Pragacz & J. Weyman, Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and antisymmetric matrices, Asterisque 87-88, 109-189

[6] K. Kurano, On relations on minors of generic symmetric matrices, preprint.

[7] K. Kurano, The first syzygies of determinantal ideals, preprint.

[8] R.E. Kutz, Cohen-Macaulay rings and ideal theory in rings of invariants of algebraic groups, Trans. Amer. Math. Soc. 194 (1974), 115-129

[9] P. Roberts, "Homological invariants of modules over commutative rings", Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal 1980.

[10] R. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[11] I. G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials", Clarendon Press, Oxford 1979.

[12] H. Weyl, "The classical groups". Princeton Univ. Press. Princeton, New Jerzy 1946.

近似定理

西村純一 ・ 京大理

代数学における近似定理について解説する。そもそも、「近似」とは、与えられたいくつかの函数（多項式）の共通解を、適当な近似解から、逐次近似することにより求めようということであった。ここでの近似定理も、ニュートン近似法あるいは、「陰函数定理」の代数版と考えられる。

この「代数的」近似定理は、「アルテイン近似定理」とも呼ばれるように、最初、M. Artinにより、その重要性が認識された。彼は、代数幾何学に於ける種々の函手（functor）の Algebraic Space としての表現可能性（representability）の判定条件を与えた。が、そこで、体、または excellent Dedekind 環上の有限生成環を、ある素イデアルで局所化して得られた局所環 A のヘンゼル化（henselization） ^{h}A に於て、近似定理が成り立つことが鍵であること、を示した。即ち、この近似定理は、^{h}A を係数とする有限個の多項式の「形式解」（A の完備化 $\hat{A}$ に於ける解）が存在すれば、それにいくらでも充分近い「代数解」（^{h}A に於ける解）も存在することを、保証する。そして、この事実が、明解で実用的な表現可能性の判定法を与えることを、示した。これらの結果、及び関連する事柄についての詳細は、[Ar1] － [Ar12]、[Bo]、[Kn]、[Ku-Pf-Ro]、[Sl] 等を参照のこと。

アルテイン近似定理の可換代数学への応用としては、C. Peskine、L. Szpiro、M. Hochsterらによるホモロジー予想に関する結果が、よく知られている。[Pe-Sz]、[Ho-Ro]、[Ho] 等を、参照のこと。

さて、アルテインはじめ多くの人々は、もう少し一般的な性質の良いヘンゼル環に於ても、「近似定理」が成立するのでは、と予想した。

また、「完備な」ネター環では、その上の方程式系に対し、「十分零に近い」近似解が存在すれば、その近似解に近い「本当の」解が、得られるのでは、と考えられた。逆に、「近似定理」が成立するヘンゼル環は、良い性質を持っているのでは、と期待された。

これらの予想については、多くの人々による種々の結果があるが、とりわけ、最近、D. Popescuによって示された諸定理は、非常に興味深い。彼は、ネター環の正則射が標準順滑代数（standard smooth algebras）の帰納的極限で表される、という定理を証明し、それから数々の結果が導かれる、ことを示した。

以下、上に述べた結果、予想等を、順を追って、「数学の言葉」で言い直す。

0. まず、本文で用いる記号、定義を与えよう。多項式系の「係数」、及び、「解」を与える位相環として、ネター環 A とそのイデアル $\mathfrak{a}$ の対（couple）$(A, \mathfrak{a})$ を考える。$\mathfrak{a}$-進位相により A は「距離空間」である。（通常、$\mathfrak{a}$ は、A の根基（radical）に含まれる、と仮定する。）また、A の $\mathfrak{a}$-進位相による完備化（$\mathfrak{a}$-adic completion）を $\hat{A}$ で、$\mathfrak{a}$ についてのヘンゼル化（$\mathfrak{a}$-adic henselization）を ${}^{h}A$ で表そう。

A 上 n-変数多項式環 $A[X_1, \dots, X_n]$（n は任意。以下、$A[X]$ と略。）の任意の多項式系

$$(f(X)) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$$

に対し、以下の各命題が成立するとき、対 $(A, \mathfrak{a})$ はそれぞれ、「弱近似定理」（WAP）、「近似定理」（AP）、「強近似定理」（SAP）を満たすという。

WAP：$(f(X))$ の $\hat{A}$ における解（以下、$\hat{A}$-解と略）

$$(\hat{y}) = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)、$$

即ち、$\hat{A}$ の元 $\hat{y}_i$ で、$f_1(\hat{y}) = \dots = f_m(\hat{y}) = 0$

を満たすもの、が存在するならばいつも、A-解

$$(y) = (y_1, \dots, y_n)、$$

つまり、A の元 y_i で、$f_1(y) = \dots = f_m(y) = 0$

を満たすもの、が存在する。

AP： $(f(X))$ の $\hat{A}$-解 $(\hat{y})$ と、任意の自然数 c に対し、いつも、A-解 (y) で、$(y) \equiv (\hat{y})$ $(\mathfrak{a}^c A)$、すなわち、

$$y_i \equiv \hat{y}_i \quad (\mathfrak{a}^c A) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

を満たすものが存在する。

SAP： 与えられた多項式系 $(f(X))$ に対し、写像 $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で、次の性質を持つものが存在する。

任意の自然数 c に対し、A の元の組 $(y^0) = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ が、

$$f_j(y^0) \equiv 0 \quad (\mathfrak{a}^{\nu(c)}) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

を満たせば、$(y^0) \equiv (y_c)$ $(\mathfrak{a}^c)$ である A-解 (y_c) が存在する。

注意： 上の三条件の関係は、SAP $\Rightarrow$ AP $\Leftrightarrow$ WAP。

問題： AP $\Leftarrow$ WAP を、示せ。

定義： $(A, \mathfrak{a})$ が AP、または、SAP を満たすとき、$(A, \mathfrak{a})$ を、それぞれ AP-対（AP-couple）、SAP-対（SAP-couple）と呼ぶ。
特に、局所環 A と極大イデアル $\mathfrak{m}$ の対 $(A, \mathfrak{m})$ が AP-対または、SAP-対なら、A をそれぞれ、AP-環（AP-ring）、SAP-環（SAP-ring）と呼ぶ。

問題： $(A, \mathfrak{a})$ が AP-対なら、A の任意のイデアル I に対し $(A/I, \mathfrak{a}+I/I)$ も AP-対である。

1. M. Artinの定理。 ここでは、M. Artinによって証明された定理のうち、次の三つのみを、挙げるにとどめる。

定理.（[Ar5], cf. [An], [Se]） K を自明でない付値を持つ標数 0 の体、K を係数体とする多変数収束ベキ級数環を $R = K\langle\langle T \rangle\rangle$、R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると、$(R, \mathfrak{m})$ は AP-環。

この定理の証明には、「Weierstrass予備定理」と「陰函数定理」が重要な役割を果たしている。

定理. （[Ar7]） 体、または excellent Dedekind 環の上の有限生成環を、ある素イデアルで局所化して得た局所環のヘンゼル化は AP-環。

この定理の証明には、第六節で述べるNéronによる、離散付値環上の有限生成代数の非特異化（「Néron desingularization」）と、「ニュートンの補題」（「Newton Lemma」）が用いられる。

定理. （[Ar7]） 体上の有限生成環を、ある極大イデアルで局所化して得た局所環のヘンゼル化は、SAP-環。

2. Elkikの定理。 次に、R. Elkikにより得られた結果は、単にArtinの定理の拡張にとどまらず、その証明に含まれていた内容共々、それ以後の「近似定理」の発展にとり、非常に示唆に富むものであった。

さて、可換環 A 上の有限生成代数 $C = A[X]/(f)$、

ただし、$(X) = (X_1, \ldots, X_n)$、$(f) = (f_1(X), \ldots, f_m(X))$

に於て、$(g) = (g_1, \ldots, g_r) \subset (f)$、$r \leqq n$

に対し、$\Delta_g =$ Jacobian matrix $(\partial g_i / \partial X_j)$ の r 次小行列式で生成された $A[X]$ のイデアル、

$$H_f = \sum_g \Delta_g((g):(f))$$

とすると、H_f は C の non-smooth locus を定める。

よって、$H_{C/A} = \sqrt{H_f \cdot C}$ は、C の A 上の有限生成代数としての表し方に依らない。

定義： $C = A[X]/(f)$ に於て、ある

$(g) = (g_1, \ldots, g_r) \subset (f)$、$r \leqq n$ に対し、

$\Delta_g((g):(f)) + (f) = A[X]$

であるとき、C を標準順滑 A-代数（standard smooth A-algebra）と云う。

定理.（[El]） ヘンゼル-couple（A，$\mathfrak{a}$）と任意の自然数 ν とに対し、自然数の組（c_0，r）で、次の条件を満たすものが存在する。

もし、A-代数 C = A[X]／(f) 及び、自然数 $c \geqq c_0$ に対し、A の元 $(y^\circ) = (y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ が、ある $(g) = (g_1, \ldots, g_r) \subset (f)$、$r \leqq n$ に対し、

$$g_i(y^\circ) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}^c),\ H_g(y^\circ) \supset \mathfrak{a}^\nu$$

であれば、A の元 $(y) = (y_1, \ldots, y_n)$ で、

$$(y) \equiv (y^\circ) \ (\mathfrak{a}^{c-r}),\ f_k(y) = 0$$

を満たすものが存在する。

3．AP-予想。 上に述べたArtin 及び Elkik の結果より、次の一般化された「近似定理」が成立するのでは、と期待された。

AP-予想： ヘンゼル対（A，$\mathfrak{a}$）に於て、環準同型 ρ：A → $\hat{A}$ が正則射であれば、（A，$\mathfrak{a}$）は AP-対。

特に、excellent ヘンゼル局所環は、AP-環。

この予想は、D. Popescuによる、非特異化予想（後述）の解決より、直ちに導かれるが、彼の論文には少しミスもあり、その結果を信用していない人達もいる。そこで、この節では、C. Rotthausによる、次の結果を述べるに止める。が、彼女の証明にも、Artin－Rotthausによる、非特異化予想の特別な場合の結果（後述）、及び、Elkikの定理が、本質的な役割を果たしていることを、注意しておこう。

定理.（[Ro2]） A が標数 0 の体を含む excellentヘンゼル半局所環、$\mathfrak{a}$ が A の Jacobson 根基であるとき、（A，$\mathfrak{a}$）は AP-対。

4．SAP-予想。 次の予想について、考える。

ＳＡＰ-予想：（Ａ，$\mathfrak{a}$）が $\mathfrak{a}$-進位相で完備なら、（Ａ，$\mathfrak{a}$）は ＳＡＰ-対。

上述のように、体上の有限生成環を、極大イデアルで局所化して得た局所環のヘンゼル化は、ＳＡＰ-環であることを、Ｍ．Ａｒｔｉｎが、最初に、示した。
次に、Ｐｆｉｓｔｅｒ－Ｐｏｐｅｓｃｕは、完備局所環が ＳＡＰ-環であることを、完備局所環の構造定理（正規化定理）を用いて、証明した。なお、この結果は、Ｂｅｃｋｅｒ－Ｄｅｎｅｆ－Ｌｉｐｓｈｉｔｚ－ｖａｎ ｄｅｎ Ｄｒｉｅｓ による ultraproduct を利用した証明もある。
ところで、Ｐｏｐｅｓｃｕは、非特異化予想の解決と separated ultraproduct の一般論が、excellent ヘンゼル局所環は ＳＡＰ-環である、ことを容易に導くと、注意している。

定理．（[Pf-Po]，cf．[Be-De-Li-vD]） 完備局所環は、ＳＡＰ-環。

５．逆ＡＰ-予想。 この予想は、ＡＰ-予想と併せ、ＡＰ-対を特徴付けようとするものである。従って、もしも、今後 ＡＰ-予想がより一層一般化され解決されれば、当然それに伴い、この予想も修正されねばならない。もっとも、この逆予想が、このままの形で示されれば、非常に結構なことである。

逆ＡＰ-予想：（Ａ，$\mathfrak{a}$）が ＡＰ-対なら、準同型 $\rho: A \to \hat{A}$ は正則射である。特に、ＡＰ-環は、excellent ヘンゼル局所環。

ＡＰ-環は、universally catenary ヘンゼル永田環であるが、実は、もう少し良い性質を持つことが、既に、知られている。（例えば、[Ku-Mo-Pf-Po-Ro]、[Pf] 等参照。）ここでは、次の二つの定理を参考までに、挙げておこう。

定理．（[Br]） 局所環 Ａ が ＡＰ-環なら、自然な準同型 $\rho: A \to \hat{A}$ は正規射。

定理. （［Rol］） 局所環 A 及び、A［［X］］が共に AP-環なら、Aは excellent ヘンゼル局所環。

6. 非特異化予想。 これまでにも見てきたように、Néron による非特異化を一般化した、次の予想が示されれば、「ニュートンの補題」とヘンゼル化の「定義」から、AP-予想が、直ちに、導かれることが、判っている。

非特異化予想： ネター環の準同型 $\rho: A \to B$ が、正則射であれば、任意の有限生成 A-代数 C と A-準同型 $\sigma: C \to B$ とに対し、次の図式を可換にする標準順滑 A-代数 D が存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & B \\ C \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

すなわち、B は標準順滑 A-代数の帰納的極限で表される。
特に、A のイデアルによる完備化 $\hat{A}$ への自然な準同型 $\rho: A \to \hat{A}$ が、正則射であれば、任意の有限生成 A-代数 C と A-準同型 $\sigma: C \to \hat{A}$ とに対し、次の図式を可換にする標準順滑 A-代数 Dが存在し、$\hat{A}$ は標準順滑 A-代数の帰納的極限で表される。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \hat{A} \\ C \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ここでは、次節で述べるPopescuの非特異化定理より以前に、得られていた（或は、以後に得られた）結果のうち、主なものを挙げる。

定理.（[Ne]） 離散付値環（DVR）の準同型 ρ：R → R' が、正則射であれば、R' は有限生成順滑 R-部分代数の帰納的極限で表される。

定理.（[Ar-De]） 次の場合、上の予想が成立する。

1） B = A 且つ ρ = id で、A が正規整域であるとき。

2） $(A, \mathfrak{m})$，$(B, \mathfrak{n})$ がともに局所環、且つ、$A/\mathfrak{m} \cong B/\mathfrak{n}$ で、
B が 2次元 excellent ヘンゼル正規整域であるとき。

定理.（[Ar-Ro]） excellent 離散付値環（R，pR）上の多項式環 A = R[X]、$X = (X_1, \ldots, X_n)$ から、A の (p, X)-位相による完備化 $\hat{A}$ = R[[X]] への自然な準同型が $\rho : A \to \hat{A}$ であれば、任意の有限生成 A-代数 C と、A-準同型 $\sigma : C \to \hat{A}$ とに対し、次の図式を可換にする標準順滑 A-代数 D が存在する。つまり、$\hat{A}$ は標準順滑 A-代数の帰納的極限で表される。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \hat{A} \\ C \arrow[r] \arrow[ur, "\sigma"'] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

7．Popescuの定理。 二、三年前、D．Popescu により、一般化された非特異化予想が肯定的に解かれ、従って、AP-予想 も解決された。が、先にも述べたように、彼の証明には、少々ギャップが含まれており、未だにその結果を認めない人々も、少なからずいる。しかし、最近では、それらのギャップも、ほぼ修正され得る、と信じられるようにもなってきた。
以下、「Popescuの非特異化定理」、及び、それから導かれる、いくつかの驚くべき結果を、列挙し、この小文を、終える。

Popescuの非特異化定理. （[Po3]，[Po4]，[Ni-Po]） ネター環 A，B 及び、準同型 ρ : A → B に対し、次の三条件は同値である。

1） ρ は、正則射である。

2） 任意の有限生成 A-代数 C と A-準同型 σ : C → B とに対し、次の図式を可換にする標準順滑 A-代数 D が、存在する。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & B \\ C \arrow[r] \arrow[ur, "\sigma"'] & D \arrow[u] \end{tikzcd}$$

3） B は標準順滑 A-代数の帰納的極限で表される。

定理. （[Po4]） $(A,\mathfrak{a})$ が、ヘンゼル-対で、ρ : A → $\hat{A}$ が正則射であれば、$(A,\mathfrak{a})$ は AP-対。

定理. （[Po4]） excellent ヘンゼル局所環は、SAP-環。

次の定理は、素元分解局所整域の完備化は、何時、再び素元分解局所整域になるか、というSamuelの問題に対する、ほぼ最上の解答と、考えられる。

定理. （[Po4],cf.[Bo]，[Da]，[Fo]） $(A,\mathfrak{m})$ が excellent ヘンゼル素元分解局所整域であれば、A の完備化 $\hat{A}$ も素元分解局所整域である。

定理. （cf. Bass-Quillen Conjecture） 体を含む正則局所環 R上の多項式環 $A = R[X]$，$X = (X_1,\ldots,X_n)$ に於て、A-射影加群は、A-自由加群である。

この定理は、「非特異化定理」より、素体上有限生成正則代数に於ける、同じ問題に帰着され、解かれる。

Refernces

[An] M. André: Artin's theorem on the solution of analytic equations in positive characterstic, Manuscripta Math. **15**(1975)314-348.

[Ar1] M. Artin: Grothendieck topologies, Mimeographed Notes Harvard 1962.

[Ar2] M. Artin: On algebraic extensions of local rings, Rend di Mat. **25**(1966)33-37.

[Ar3] M. Artin: Etale coverings of schemes over henselian rings, Amer. J. Math. **88**(1966)915-934.

[Ar4] M. Artin: The etale topology of schemes, Berichte des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Moskau 1966,44-56.

[Ar5] M. Artin: On the solution of analytic equations, Invent. math. **5**(1968)277-291.

[Ar6] M. Artin: Algebraic approximation of formal moduli I, Global Analysis, A Coliection of Math. Papers in Honor of K. Kodaira, Ed. by D. C. Spencer and S. Iyanaga, Tokyo 1969,21-71.

[Ar7] M. Artin: Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES **36**(1969)23-58.

[Ar8] M. Artin: The implicit function theorem in algebraic geometry, Bombay Colloq., Oxford-Bombay 1969,13-34.

[Ar9] M. Artin: Algebraic spaces, Whittemore Lectures, Yale 1969.

[Ar10] M. Artin: Algebraization of formal moduli II, Ann. Math. **91** (1970)88-135.

[Ar11] M. Artin: Construction techniques for algebraic spaces, Act. Congrès Intern. Math. 1970, Paris 1971, Tome 1,419-423.

[Ar12] M. Artin: Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques, Publ. Sém. Math. Sup. **44**, Les Presses de l'Université de Montréal 1973.

[Ar-De] M. Artin - J. Denef: Smoothing of a ring homomorphism along a section, Arithmetic and Geometry, vol. II, Birkhauser, Boston Progress in Math. **36**(1983)5-32.

[Ar-Ro] M. Artin - C. Rotthaus: A Structure Theorem for Power Series Rings, to appear.

[Be-De-Li-vD] J. Becker - J. Denef - L. Lipshitz - L. van den Dries: Ultraproducts and approximation in local rings I, Invent. math. **51**(1979)189-203.

[Bo] J.-F. Boutot: Schéma de Picard Local, Lecture Note in Math. **632** Springer Verlag, Berlin 1978.

[Br] M. L. Brown: Artin's approximation property, thesis.

[Da] V. I. Danilov: Rings with a discrete group of divisor classes, Math. USSR-Sb. **12**(1970)368-386; **17**(1972)228-236.

[De-Li] J. Denef - L. Lipshitz: Ultraproducts and approximation in local rings II, Math. Ann. **253**(1980)1-28.

[El] R. Elkik: Solution d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^{e} ser. **6**(1973)553-604.

[Fo] R. Fossum: The Divisor Class Group of a Krull Domain, Ergeb. Math. **74**, Springer Verlag, Berlin 1973.

[Gr] M. Greenberg: Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math. IHES **31**(1966)59-64.

[Ho] M. Hochster: Topics in the Homological Theory of Modules over Commutative Rings, Regional Confer. Series in Math. **24**, Amer. Math. Soc. 1975.

[Ho-Ro] M. Hochster - J. L. Roberts: Rings of invariants of reductive groups acting on regular local rings are Cohen-Macaulay, Adv. in Math. **13**(1974)115-175.

[Kn] D. Knutson: Algebraic Spaces, Lecture Note in Math. **203**, Springer Verlag, Berlin 1971.

[Ku-Mo-Pf-Po-Ro] H. Kurke - T. Mostowski - G. Pfister - D. Popescu - M. Roczen: Die Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Lecture Note in Math. **634**, Springer Verlag, Berlin 1978.

[Ku-Pf-Ro] H. Kurke - G. Pfister - M. Roczen: Henselische Ringe und algebraische Geometrie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[Ne] A. Néron: Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. IHES **21**(1964).

[Ni-Po] V. Nica - D. Popescu: A Structure Theorem on Formally Smooth Morphisms in Positive Characteristic, J. Algebra **100**(1986)436-455

[Pe-Sz] C. Peskine - L. Szpiro: Dimension projective finie et cohomologie locale, Publ. Math. IHES **42**(1973)323-395.

[Pf] G. Pfister: On three dimensional local rings with the property of approximation, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. t. **XXVI**, no.2 (1981)301-307.

[Pf-Po] G. Pfister - D. Popescu: Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe, Invent. math. **30**(1975)145-174.

[Po1] D. Popescu: Algebraically pure morphisms, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. t. **XXIV**, no.6(1979)947-977.

[Po2] D. Popescu: A remark on two dimensional local rings with the property of approximation, Math. Z. **173**(1980)235-240.

[Po3] D. Popescu: General Néron Desingularization, Nagoya Math. J. **100**(1985)97-126.

[Po4] D. Popescu: General Néron Desingularization and Approximation, Nagoya Math. J. **104**(1986)85-115.

[Ro1] C. Rotthaus: Potenzreihenerweiterung und formale Fasern in lokalen Ringen mit Approximationseigenschaft, Manuscripta Math. **42**(1983)53-65.

[Ro2] C. Rotthaus: On the approximation property for excellent rings, Invent. math. **88**(1987)39-63.

[Se] K. P. Schemmel: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Approximationseigenschaft analytischer Potenzreihenringe über einem Korper beliebiger characteristik, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. t. **XXVII**, no.8(1982)875-884.

[Sl] M. Schlessinger: Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc. **130**(1968)205-222.