ホモロジー代数入門

橋本 光靖

〒 700–8530 岡山市北区津島中
岡山大学理学部数学科

1　Introduction

(1.1)　集合の概念が確立し, それが数学の基礎とみなされるようになった 19 世紀末以降, その基礎の上に立った抽象代数学が急速に発展した. 一方, ホモロジーの考え方は Riemann, Betti, Poincaré らによって, 19 世紀に現されたものである. 初期の段階では homology number という量として捉えられていたものが, 抽象代数学の考え方を取り入れて整備され, 位相幾何学の中で重要な位置を占めるようになった.

このように位相幾何学に端を発して現れたホモロジー代数であるが, 1930 年代ごろから位相幾何学と直接関係ないといえる代数学にも広がりを見せ始め, Lie 環, 結合代数等の cohomology も調べられるようになる. これらばらばらに現れたホモロジー代数も Cartan–Eilenberg の教科書の登場で, 射影分解, 入射分解を使って統一的に論じられるようになった. ホモロジー代数はその後も圏と関手の考え方を取り入れて大きく発展し, 環論, 代数幾何学, 整数論といった代数学の諸分野をはじめ, 数学の幅広い分野で役に立つことが実証されて来た.

本講義ではホモロジー代数への入門を, あまり深く圏論に立ち入らずに講義することが目的である. 位相幾何学的側面についても位相幾何学の授業にゆずり, ほとんど触れない.

2　（コ）チェイン複体と完全系列

(2.1)　R が環のとき, $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, d)$ が左 R 加群の**コチェイン複体 (cochain complex)** であるとは, $\mathbb{M}$ は各整数 n に左 R 加群 $\mathbb{M}^n$ を対応させる対応で

あって, $d = (d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ で, $d^n : \mathbb{M}^n \to \mathbb{M}^{n+1}$ は R 準同型で, $d^{n+1} \circ d^n = 0$ であることをいう.

通常, 一見してわかるように,

$$\mathbb{M} = \cdots \to \mathbb{M}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathbb{M}^n \xrightarrow{d^n} \mathbb{M}^{n+1} \to \cdots \tag{2.1.1}$$

と書く. ここで注意したいのは, 各 $\mathbb{M}^n$ が n 番目の場所にある, という n が指定してある点で, 一斉にずらして, $\mathbb{M}^n$ は $n-1$ 番目にある, とした複体は異なる複体とみなされる.

しかし, 各加群が何番目の場所にあるかを曖昧にした, 単なる列もたまには考えることがある. こちらは単に列と読んで区別する. 複体は列に加群の位置の情報が加わったものだから, 列の一種と考える.

(2.2) (2.1.1) において, $\mathbb{M}^i = 0$ $(i > n)$ の場合には,

$$\mathbb{M} = \cdots \to \mathbb{M}^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathbb{M}^n \to 0$$

と 0 をひとつだけ書いて, あとを省略することが許される. $\mathbb{M}^i = 0$ $(i < n)$ の場合も同様に,

$$\mathbb{M} = 0 \to \mathbb{M}^n \xrightarrow{d^n} \mathbb{M}^{n+1} \to \cdots$$

と 0 をひとつだけ書いて, 左側を省略することが許される.

(2.3) R が環のとき, $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, d)$ が左 R 加群の**チェイン複体 (chain complex)** であるとは, $\mathbb{M}$ は各整数 n に左 R 加群 $\mathbb{M}_n$ を対応させる対応であって, $d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ で, $d_n : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_{n-1}$ は R 準同型で, $d_{n-1} \circ d_n = 0$ であることをいう. このとき

$$\mathbb{M} = \cdots \to \mathbb{M}_n \xrightarrow{d_n} \mathbb{M}_{n-1} \to \cdots \tag{2.3.1}$$

などと書く.

(2.4) コチェイン複体 (2.1.1) が与えられた時, $\mathbb{M}_n = \mathbb{M}^{-n}$, $d^n = d_{-n}$ とおくことにより, チェイン複体と思える. 逆も然りであり, 本講義では, コチェイン複体は随時チェイン複体とみなされるし, 逆もしかりである. 従ってこれらを単に**複体 (complex)** と呼ぶこともある. R 加群の複体の全体を $C(R)$ で表す.

$\mathbb{M} \in C(R)$ に対して, 各 $d_n : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_{n-1}$ を $\mathbb{M}$ の**バウンダリ写像**, **境界写像**と呼ぶ. どの複体のバウンダリ写像かを表すために $d_n(\mathbb{M})$ などという表し方も用いる. コチェイン複体については**コバウンダリ写像**と呼ぶ場合もある.

(2.5) 複体 (2.1.1) が与えられたとき, $d^n \circ d^{n-1} = 0$ であるから, $\operatorname{Im} d^{n-1} \subset \operatorname{Ker} d^n$ である. さらに $\operatorname{Im} d^{n-1} = \operatorname{Ker} d^n$ が成立するとき, (2.1.1) は $\mathbb{M}^n$ において**完全 (exact)** であるという. 一般に列

$$\cdots \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to \cdots$$

が (M において) 完全であるとは, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ であることをいう. 列がすべての場所で完全なとき, 列は**完全列**または**完全系列**という.

2.6 例. **1** $0 \to M \xrightarrow{g} N$ が完全であることは $\operatorname{Ker} g = 0$ と同じで, これは g が単射であることと同値.

2 $L \xrightarrow{f} M \to 0$ が完全であることは $\operatorname{Im} f = M (= \operatorname{Ker} 0)$ であることと同じで, これは f が全射であることと同値.

3 $0 \to M \xrightarrow{g} N \to 0$ が完全であることと g が同型であることは同値である.

4 列

(2.6.1) $$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

が完全であるとき, **短完全列 (short exact sequence)** であるという. これは f が単射で g が全射で, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ であることと同値である.

5 整数 $n \neq 0$ について,

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

は短完全列の例である.

(2.7) コチェイン複体 (2.1.1) について, $Z^n = Z^n(\mathbb{M}) := \operatorname{Ker} d^n$, $B^n = B^n(\mathbb{M}) := \operatorname{Im} d^{n-1}$, $H^n = H^n(\mathbb{M}) = Z^n(\mathbb{M})/B^n(\mathbb{M})$ とおく. $Z^n(\mathbb{M})$ の元を $\mathbb{M}$ の n-**コサイクル (cocycle)**, $B^n(\mathbb{M})$ の元を $\mathbb{M}$ の n-**コバウンダリ (coboundary)** とよぶ. $H^n(\mathbb{M})$ は $\mathbb{M}$ の n 番目の**コホモロジー加群 (cohomology module)** という.

(2.8) チェイン複体 (2.3.1) について, $Z_n = Z_n(\mathbb{M}) := \operatorname{Ker} d_n$, $B_n = B_n(\mathbb{M}) := \operatorname{Im} d_{n+1}$, $H_n = H_n(\mathbb{M}) = Z_n(\mathbb{M})/B_n(\mathbb{M})$ とおく. $Z_n(\mathbb{M})$ の元を $\mathbb{M}$ の n-**サイクル (cycle)**, $B_n(\mathbb{M})$ の元を $\mathbb{M}$ の n-**バウンダリ (boundary)** とよぶ. $H_n(\mathbb{M})$ は $\mathbb{M}$ の n 番目の**ホモロジー加群 (homology module)** という. したがって, コチェイン複体 (2.1.1) を (2.4) に従ってチェイン複体とみなすとき, $Z_n = Z^{-n}$, $B_n = B^{-n}$, $H_n = H^{-n}$ であるが, コチェイン複体として扱っている場合はコホモロジー加群と呼ぶし, チェイン複体として扱っているときはホモロジー加群と呼ぶといった具合に区別して扱うのが普通である.

(2.9) 定義から, $B^n(\mathbb{M}) \subset Z^n(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}^n$ であり, 短完全列

$$0 \to Z^n(\mathbb{M}) \xrightarrow{j^n(\mathbb{M})} \mathbb{M}^n \xrightarrow{p^n(\mathbb{M})} B^{n+1}(\mathbb{M}) \to 0 \tag{2.9.1}$$

および

$$0 \to B^n(\mathbb{M}) \xrightarrow{k^n(\mathbb{M})} Z^n(\mathbb{M}) \xrightarrow{q^n(\mathbb{M})} H^n(\mathbb{M}) \to 0 \tag{2.9.2}$$

が存在する. ここに $j^n(\mathbb{M})$, $k^n(\mathbb{M})$ は自然な包含写像, $p^n(\mathbb{M})(m) = d^n(m)$, $q^n(\mathbb{M})$ は自然な射影である.

(2.10) $V = \{1, 2, \ldots, d\}$ とする. ベキ集合 $\mathcal{P}(V)$ は包含関係によって順序集合をなす. Δ が V の上の (抽象的) **単体複体 (simplicial complex)** であるとは, $\emptyset \neq \Delta \subset \mathcal{P}(V)$ であって, Δ が順序イデアルである (つまり, $\tau \subset \sigma \in \Delta$ ならば $\tau \in \Delta$ が成立) ことをいう. Δ の元を Δ の**面 (face)** という. σ が Δ の面のとき, σ の元数引く 1, つまり $\#\sigma - 1$ を σ の**次元 (dimension)** という. 次元 n の face は n-face と呼ばれる. 極大な face を facet という. 0 次元の面を**頂点 (vertex)** という.

(2.11) $V = \{1, 2, \ldots, r\}$ の上の単体的複体 Δ に対して, $\tilde{\mathbb{C}}_n = \tilde{\mathbb{C}}_n(\Delta, \mathbb{Z})$ を Δ の n-face 全体を基底とした $\mathbb{Z}$ 自由加群 $\bigoplus_{\sigma \in \Delta(n)} \mathbb{Z} \cdot [\sigma]$ とする. ここに, $\Delta(n)$ は Δ の n-face 全体の集合である. $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $d_n : \tilde{\mathbb{C}}_n \to \tilde{\mathbb{C}}_{n-1}$ を $\sigma = \{i_0 < i_1 < \cdots < i_n\}$ とするとき, $d_n([\sigma]) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j ([\sigma \setminus \{i_j\}])$ で定める. $d_{n-1} \circ d_n = 0$ は容易に確認され,

$$\tilde{\mathbb{C}}(\Delta, \mathbb{Z}) : 0 \to \tilde{\mathbb{C}}_r \xrightarrow{d_r} \tilde{\mathbb{C}}_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} \tilde{\mathbb{C}}_0 \xrightarrow{d_0} \tilde{\mathbb{C}}_{-1} \to 0 \tag{2.11.1}$$

はチェイン複体である. $H_n(\tilde{\mathbb{C}}(\Delta, \mathbb{Z}))$ を $\tilde{H}_n(\Delta, \mathbb{Z})$ で表し, Δ の**簡約ホモロジー群 (reduced homology group)** と呼ぶ. (2.11.1) の $C_{-1} = \mathbb{Z}[\emptyset]$ を 0 で, d_0 を 0 写像で置き換えた複体

$$\mathbb{C}(\Delta, \mathbb{Z}) : 0 \to \mathbb{C}_r \xrightarrow{d_r} \mathbb{C}_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} \mathbb{C}_0 \to 0 \tag{2.11.2}$$

のホモロジー $H_n(\mathbb{C}(\Delta, \mathbb{Z}))$ は $H_n(\Delta, \mathbb{Z})$ と表され, Δ の**ホモロジー群 (homology group)** と呼ばれる. ここに $\mathbb{C}_j = \tilde{\mathbb{C}}_j$ $(0 \leq j \leq r)$ である.

2.12 演習. $V = \{1, 2, 3, 4\}$ とし, Δ は $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ を facet とする V 上の simplicial complex とする.

1 $d_2([\{1, 2, 3\}])$ を計算せよ.

2 $d_1 d_2([\{1,2,3\}]) = 0$ を確認せよ.

3 $Z_1(\mathbb{C}(\Delta, \mathbb{Z}))$ は $[\{2,3\}] - [\{1,3\}] + [\{1,2\}]$ および $[\{3,4\}] - [\{2,4\}] + [\{2,3\}]$ で生成される階数 2 の $\mathbb{Z}$ 自由加群であることを示せ.

4 $B_1(\mathbb{C}(\Delta, \mathbb{Z}))$ は $[\{2,3\}] - [\{1,3\}] + [\{1,2\}]$ で生成されることを示せ.

5 $H_1(\Delta, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を示せ.

2.13 補題 (準同型定理)**.** $f : M \to N$ を R 加群の全射準同型とし, $g : M \to X$ を準同型とする. このとき $h : N \to X$ で $hf = g$ となる R 準同型は高々ひとつ存在する. h が存在することと $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Ker} f$ は同値である. h が存在して単射であることと $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ は同値である. □

2.14 補題. $f : M \to N$ を R 加群の単射準同型とし, $g : X \to N$ を準同型とする. このとき $h : X \to M$ で $fh = g$ となる R 準同型が高々ひとつ存在する. h が存在することと $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$ は同値である. h が存在して全射であることと $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ は同値である.

証明. 容易なので省略. □

(2.15)

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{d} & M_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} \\ N_1 & \xrightarrow{d'} & N_0 \end{array}$$

が R 加群の可換図式とする. つまり $\varphi_0 d = d' \varphi_1$ とする. このとき

2.16 演習. 次を確かめよ.

1 $\varphi_1(\operatorname{Ker} d) \subset \operatorname{Ker} d'$.

2 $\varphi_0(\operatorname{Im} d) \subset \operatorname{Im} d'$.

3 $f : \operatorname{Im} d \to \operatorname{Im} d'$ で $fp = p' \varphi_1$ となるものが一意的に存在する. ここに $p : M_1 \to \operatorname{Im} d$ は $p(m) = d(m)$ で与えられ, $p' : N_1 \to \operatorname{Im} d'$ は $p'(n) = d'(n)$ で与えられる.

3' $f' : \operatorname{Im} d \to \operatorname{Im} d'$ で $\nu' f' = \varphi_0 \nu$ となるものが一意的に存在する. ここに $\nu : \operatorname{Im} d \to M_0$ および $\nu' : \operatorname{Im} d' \to N_0$ は埋入である.

4 $f = f'$ である.

5 (行が完全列である) 図式

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{d} & M_0 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} d & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d' & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{d'} & N_0 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} d' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を可換にする $h : \operatorname{Ker} d \to \operatorname{Ker} d'$ および $g : \operatorname{Coker} d \to \operatorname{Coker} d'$ が一意的に存在する.

(2.17) $\mathbb{M}, \mathbb{N} \in C(R)$ とする. $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ が**チェイン写像**であるとは, $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ で, 各 n について $f^n : \mathbb{M}^n \to \mathbb{N}^n$ は R 準同型であり, $d^n(\mathbb{N}) \circ f^n = f^{n+1} \circ d^n(\mathbb{M})$ が成立することをいう. コチェイン複体についてはチェイン写像とは呼ばずに**コチェイン写像**と呼ぶこともある. 演習 2.16 から,

$$\begin{array}{ccc} Z^n(\mathbb{M}) & \xrightarrow{j^n(\mathbb{M})} & \mathbb{M}^n \\ \downarrow{\scriptstyle Z^n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle f^n} \\ Z^n(\mathbb{N}) & \xrightarrow{j^n(\mathbb{N})} & \mathbb{N}^n \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{M}^{n-1} & \xrightarrow{p^n(\mathbb{M})} & B^n(\mathbb{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle B^n(f)} \\ \mathbb{N}^{n-1} & \xrightarrow{p^n(\mathbb{N})} & B^n(\mathbb{N}) \end{array} \quad ,$$

$$\begin{array}{ccc} B^n(\mathbb{M}) & \xrightarrow{k^n(\mathbb{M})} & Z^n(\mathbb{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle B^n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle Z^n(f)} \\ B^n(\mathbb{N}) & \xrightarrow{k^n(\mathbb{N})} & Z^n(\mathbb{N}) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} Z^n(\mathbb{M}) & \xrightarrow{q^n(\mathbb{M})} & H^n(\mathbb{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle Z^n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H^n(f)} \\ Z^n(\mathbb{N}) & \xrightarrow{q^n(\mathbb{N})} & H^n(\mathbb{N}) \end{array}$$

を可換にするような $Z^n(f) : Z^n(\mathbb{M}) \to Z^n(\mathbb{N})$, $B^n(f) : B^n(\mathbb{M}) \to B^n(\mathbb{N})$, $H^n(f) : H^n(\mathbb{M}) \to H^n(\mathbb{N})$ が一意的に存在する.

(2.18) もう少しわかりやすく $H^n(f)$ を記述すると, $\alpha \in H^n(\mathbb{M})$ に対して, α は $Z^n(\mathbb{M})$ の元で代表される. つまり, $\alpha = z \bmod B^n(\mathbb{M})$ $(z \in Z^n(\mathbb{M}))$ と書ける. このとき, $f(z) \in Z^n(\mathbb{N})$ であり,

$$H^n(f)(\alpha) = f(z) \bmod B^n(\mathbb{N}) \in H^n(\mathbb{N})$$

である (z の選び方によらない). これによって $H^n(f)$ が定まっている.

3 $\otimes$ と Hom

(3.1) R が環, M が右 R 加群, N が左 R 加群とする. このとき, $M \times N$ を形式的な基底とする $\mathbb{Z}$ 自由加群 $F = \mathbb{Z} \cdot (M \times N)$ を考える. F の部分集合

$$\Gamma_1 = \{(m, n + n') - (m, n) - (m, n') \mid m \in M,\ n, n' \in N\},$$

$$\Gamma_2 = \{(m+m',n)-(m,n)-(m',n) \mid m,m' \in M,\ n \in N\},$$
$$\Gamma_3 = \{(mr,n)-(m,rn) \mid m \in M,\ r \in R,\ n \in N\}$$

を考え, 和集合 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ で生成される F の $\mathbb{Z}$-submodule G を考える. F/G を M と N の R 上の**テンサー積 (tensor product)** (または**テンソル積**) と呼んで, $M \otimes_R N$ で表す. 射影 $F \to F/G = M \otimes_R N$ を $\pi = \pi(M,N)$ と表すことにしよう. $\pi(m,n)$ を $m \otimes n$ と表す.

$\pi((m,n+n')-(m,n)-(m,n')) = 0$ だから, $m\otimes(n+n')-m\otimes n-m\otimes n' = 0$, つまり $m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n'$ ($m \in M$, $n,n' \in N$) である.

同様にして, $(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$ ($m,m' \in M$, $n \in N$) だし, $mr \otimes n = m \otimes rn$ ($m \in M$, $r \in R$, $n \in N$) である.

3.2 定義. M, N は上の通り, W は $\mathbb{Z}$ 加群とする. $\psi : M \times N \to W$ が R **バランス写像 (balanced map)** であるとは,

$$\begin{aligned} \psi(m,n+n') &= \psi(m,n)+\psi(m,n') && (m \in M, n,n' \in N), \\ \psi(m+m',n) &= \psi(m,n)+\psi(m',n) && (m,m' \in M, n \in N), \\ \psi(mr,n) &= \psi(m,rn) && (m \in M, r \in R, n \in N) \end{aligned}$$

が成立することをいう.

3.3 定理 (テンソル積の**普遍性 (universality)**)**.** M は右 R 加群, N は左 R 加群とする.

1 π の $M \times N$ への制限を $\pi_0 = \pi_0(M,N)$ と書くとき, $\pi_0 : M \times N \to M \otimes_R N$ ($\pi_0(m,n) = m \otimes n$) はバランス写像である.

2 $M \otimes_R N$ の任意の元は $m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_2 + \cdots + m_r \otimes n_r$ の形で書ける.

3 W が $\mathbb{Z}$ 加群で $\psi : M \times N \to W$ が R バランス写像のとき, ある $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $h = h_\psi : M \otimes_R N \to W$ で $h\pi_0 = \psi$, すなわち $h(m \otimes n) = \psi(m,n)$ ($m \in M$, $n \in N$) であるものが一意的に存在する.

証明. **1** は既に見たことから明らかであろう. **2** は $M \otimes_R N$ の定義から容易である. **3** ψ は $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\tilde{\psi} : F \to W$ に一意的に拡張される. つまり, $\tilde{\psi}(\sum_{(m,n)} c_{(m,n)}(m,n)) = \sum_{(m,n)} c_{(m,n)}\psi(m,n)$ と定義すれば良く, またそう定義するしかない. ψ がバランス写像であったことから, $\tilde{\psi}(G) = 0$ が容易に従う. 準同型定理 (2.13) によって, $h\pi = \tilde{\psi}$ である $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $h : M \otimes_R N = F/G \to W$ が一意的に存在する. 定義域を $M \times N$ に制限して $h\pi_0 = \psi$ を得る. また, $M \times N$ は F を生成するので, $h\pi_0 = \psi$ から $h\pi = \tilde{\psi}$ が出てしまう. よって h の一意性も従う. □

(3.4) M, M' は右 R 加群, N, N' が左 R 加群で $f : M \to M'$ は R 準同型, $g : N \to N'$ も R 準同型とする. このとき, $\psi_{f,g} : M \times N \to M' \otimes_R N'$ を $\psi_{f,g}(m,n) = f(m) \otimes g(n)$ で定義すると R バランス写像である.

3.5 演習. これを確かめよ.

(3.6) よって, $m \otimes n$ を $f(m) \otimes g(n)$ に写す $\mathbb{Z}$ 準同型写像が一意的に存在する. これを $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ で表す.

3.7 補題 (関手性)**.** M, M', M'' は右 R 加群, N, N', N'' は左 R 加群, $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$, $g : N \to N'$, $g' : N' \to N''$ は R 準同型とする. このとき,

1 $1_M \otimes 1_N : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ は恒等写像 $1_{M \otimes_R N}$ である.

2 $(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g$ である.

証明. $M \otimes_R N$ は $m \otimes n$ の形の元で生成されるので, この形の元の写る先が一致すれば良い.

1 $(1_M \otimes 1_N)(m \otimes n) = 1_M m \otimes 1_N n = m \otimes n = 1_{M \otimes_R N}(m \otimes n)$.

2 $(f' \otimes g')(f \otimes g)(m \otimes n) = (f' \otimes g')(fm \otimes gn) = f'fm \otimes g'gn = (f'f \otimes g'g)(m \otimes n)$. □

(3.8) R, S は環とする. M が左 S 右 R **両側加群 (bimodule)** であるとは, M は左 S 加群であると同時に右 R 加群でもあり, $s(mr) = (sm)r$ ($s \in S$, $m \in M$, $r \in R$) が成立することをいう. このとき $s(mr) = (sm)r$ は smr と書いてよいものとする. (S, R) 両側加群ともいう. M, N が (S, R) 両側加群のとき, $f : M \to N$ が (S, R) 準同型であるとは, f が S 準同型であると同時に R 準同型であることをいう. つまり $f(smr) = sf(m)r$ が成立することをいう.

(3.9) 任意の加法群 M は $0m = 0$, $nm = m + m + \cdots + m$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$, n 回の和) $(-n)m = -(nm)$ と定義すると $\mathbb{Z}$ 加群であり, そう定義する以外に M を $\mathbb{Z}$ 加群にできない. ここに $\mathbb{Z}_{>0}$ は正整数の全体. 加法群と $\mathbb{Z}$ 加群は同一概念である. 容易に確かめられるように, 左 S 加群と $(S, \mathbb{Z})$ 両側加群は同一概念であり, 右 R 加群と $(\mathbb{Z}, R)$ 両側加群は同一概念である. したがって両側加群について一般的に述べられたことは, どちらかの環が $\mathbb{Z}$ となっている特別な場合を考えることにより, 片側加群に関しての主張としても読むことができる.

3.10 定理. R, S, T は環, M は (S,R) 両側加群, N は (R,T) 両側加群とする. このとき, $M\otimes_R N$ は

$$s(m\otimes n)=sm\otimes n,\qquad (m\otimes n)t=m\otimes nt\qquad (s\in S,\ t\in T,\ m\in M,\ n\in N)$$

によって, (S,T) 両側加群である.

証明. $s\in S$ を固定するとき, $f_s:M\to M$ を $f_s(m)=sm$ で定めると, これは R 準同型である. 同様に, $t\in T$ について $g_t:N\to N$ を $g_t(n)=nt$ で定めると, これも R 準同型. $s\in S$ の $M\otimes_R N$ への作用を $f_s\otimes 1:M\otimes_R N\to M\otimes_R N$ のことだと定めれば, 容易に $M\otimes_R N$ は左 S 加群である. $t\in T$ の $M\otimes_R N$ への作用を $1\otimes g_t$ の作用だとして定めれば $M\otimes_R N$ は右 T 加群である. つまり, $s(m\otimes n)=sm\otimes n$, $(m\otimes n)t=m\otimes nt$ であるように $M\otimes_R N$ への S の左作用と T の右作用が定まる.

$$(s(m\otimes n))t=(sm\otimes n)t=sm\otimes nt=s(m\otimes nt)=s((m\otimes n)t)$$

だからこれで両側加群である. □

(3.11) これまで 2 個の加群のテンソル積を考えたが, n 個の加群のテンソル積に一般化できる.

$R_0,R_1,\dots,R_n$ が環, M_i が (R_{i-1},R_i) 両側加群の時, F を $M_1\times\cdots\times M_n$ を基底とする $\mathbb{Z}$ 自由加群として, G を F の $\mathbb{Z}$ 部分加群で,

$$(m_1,\dots,m_j+m_j',\dots,m_n)-(m_1,\dots,m_j,\dots,m_n)-(m_1,\dots,m_j',\dots,m_n)$$
$$(1\le j\le n, m_i\in M_i\ (1\le i\le n), m_j'\in M_j)$$

の形の元すべてと

$$(m_1,\dots,m_jr,m_{j+1},\dots,m_n)-(m_1,\dots,m_j,rm_{j+1},\dots,m_n)$$
$$(1\le j\le n-1, m_i\in M_i\ (1\le i\le n), r\in R_j)$$

の形の元すべてで生成されるものとして, $M_1\otimes_{R_1}\cdots\otimes_{R_{n-1}}M_n=F/G$ と定義すれば良い. この場合も $(m_1,\dots,m_n)$ の $M_1\otimes_{R_1}\cdots\otimes_{R_{n-1}}M_n$ における像は $m_1\otimes\cdots\otimes m_n$ と表され, $M_1\otimes_{R_1}\cdots\otimes_{R_{n-1}}M_n$ の一般の元はこのような元の有限和で書ける.

「テンソル積の**普遍性 (universality)**」の一般化として, 次が成り立つ.

3.12 定理. $n \geq 1$, $R_0, \dots, R_n$ が環, M_i が (R_{i-1}, R_i) 両側加群, W は (R_0, R_n) 加群, $\psi : M_1 \times \cdots \times M_n \to W$ が $(R_1, \dots, R_{n-1})$ **多重バランス写像 (multi-balanced map)**, すなわち, $n = 1$ なら単に $\mathbb{Z}$ 加群の準同型で, $n \geq 2$ のときは, 各 $j = 1, \dots, n-1$ と $m_i \in M_i$ $(i \neq j, j+1)$ について, 写像

$$\psi(m_1, m_2, \dots, m_{j-1}, ?, ?, m_{j+2}, \dots, m_n) : M_j \times M_{j+1} \to W$$

が R_j バランス写像とする. このとき, $\mathbb{Z}$ 準同型

$$h : M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to W$$

であって

$$h(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) = \psi(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

であるものが一意的に存在する. さらにこのとき

$$r\psi(m_1, m_2, \dots, m_n) = \psi(rm_1, m_2, \dots, m_n)$$

が成り立つことと ψ が R_0 準同型であることは同値であり,

$$\psi(m_1, m_2, \dots, m_n r) = \psi(m_1, m_2, \dots, m_n)r$$

が成り立つことと ψ が R_n 準同型であることも同値である.

証明. $n = 2$ の場合とさして変わらない.

ψ は一意的に F から W への $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\tilde{\psi}$ に拡張され, 多重バランス性から $\tilde{\psi}(G) = 0$ であり, 準同型定理から, h が誘導される. 一意性は $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ の形の元が $M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_n} M_n$ を $\mathbb{Z}$ 生成することから明白.

「さらに」以下の主張を示す. $r\psi(m_1, m_2, \dots, m_n) = rh(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)$, $\psi(rm_1, m_2, \dots, m_n) = h(rm_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = hr(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)$ $(r \in R_0)$ だから $r\psi(m_1, m_2, \dots, m_n) = \psi(rm_1, m_2, \dots, m_n)$ と h が R_0 準同型であることは同値. もうひとつの主張も同様である. □

(3.13) $R_0, \dots, R_n$ は環とする.

$f_i : M_i \to M_i'$ が (R_{i-1}, R_i) 準同型とするとき,

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n : M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to M_1' \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n'$$

が $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f_1(m_1) \otimes \cdots \otimes f_n(m_n)$ によって定まり (R_0, R_n) 準同型. 実際 $\psi(m_1, \dots, m_n) = f_1(m_1) \otimes \cdots \otimes f_n(m_n)$ は多重バランス写像で $r_0\psi(m_1, \dots, m_n)r_n = \psi(r_0 m_1, \dots, m_n r_n)$.

(3.14) T が環のとき, 加法群としては T と同じものだが, 積 tt' とは, 元の T での $t't$ のことだと再定義したものを T^{op} と書く. T^{op} も環になり, T の**反対環 (opposite ring)** という. $T^{\mathrm{op\,op}}$ は環として T に一致する. T が可換環であることと $T = T^{\mathrm{op}}$ であることは同値である.

環 S に対して, S から T^{op} への準同型, 同型を S から T への**逆準同型 (anti-homomorphism)**, **逆同型 (anti-isomorphism)** と呼ぶ.

左 S 加群 M に対して, ms とは, もとの作用で sm のことである, と定義して, M は右 S^{op} 加群になる. 実際,

$$m(ss') = (s's)m = s'(sm) = (ms)s' \quad (s, s' \in S,\ m \in M).$$

右 S^{op} 加群と左 S 加群は本質的に同じものであり, 同一視する.

R が可換環のとき, $R = R^{\mathrm{op}}$ なので, 左 R 加群 M は $mr = rm$ と定義して右 R 加群でもある. さらに $mr = rm$ であるように (R, R) 両側加群にもなっている. 左右の区別無く単に R 加群と言った場合, $mr = rm$ をみたす (R, R) 加群であるとみなす. よって, 両側加群に関することは R 加群にも適用される.

(S, T) 両側加群と $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 両側加群は同じものである. (S, T) 両側加群 M を $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 両側加群と見たものは M^{op} と書く場合がある. M, N が (S, T) 両側加群で $f : M \to N$ が写像のとき, f が (S, T) 準同型であることと f が $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 準同型であることは同値である. $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 準同型 $M^{\mathrm{op}} \to N^{\mathrm{op}}$ であると見直した (S, T) 準同型 $f : M \to N$ は f^{op} と書く場合がある.

(3.15) $R_0, \ldots, R_n$ が環, M_i は (R_{i-1}, R_i) 両側加群とする.

$$\psi : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_n^{\mathrm{op}} \otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}} \cdots \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} M_1^{\mathrm{op}}$$

を $\psi(m_1, \ldots, m_n) = m_n \otimes \cdots \otimes m_1$ で定義すると多重バランス写像で

$$r_0 \psi(m_1, \ldots, m_n) r_n = \psi(r_0 m_1, \ldots, m_n r_n)$$

なので,

$$\tau_{M_1, \ldots, M_n} : M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to M_n^{\mathrm{op}} \otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}} \cdots \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} M_1^{\mathrm{op}}$$

なる (R_0, R_n) 準同型で $\tau_{M_1, \ldots, M_n}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = m_n \otimes \cdots \otimes m_1$ をみたすものが一意的に存在する. 定義から $\tau_{M_n^{\mathrm{op}}, \ldots, M_1^{\mathrm{op}}} = \tau_{M_1, \ldots, M_n}^{-1}$ であり, $\tau_{M_1, \ldots, M_n}$ は (R_0, R_n) 同型である.

(3.16) $R_0,\dots,R_n$ が環, $i=1,\dots,n$ について M_i は (R_{i-1},R_i) 両側加群とする. このとき

$$\psi : M_1\times\cdots\times M_n \to ((\cdots(M_1\otimes_{R_1} M_2)\otimes_{R_2}\cdots)\otimes_{R_{n-2}} M_{n-1})\otimes_{R_{n-1}} M_n$$

を

$$\psi(m_1,m_2,\dots,m_{n-1},m_n) = ((\cdots(m_1\otimes m_2)\otimes\cdots)\otimes m_{n-1})\otimes m_n$$

で定めると $(R_1,R_2,\dots,R_{n-1})$ 多重バランス写像で $\psi(r_0m_1,m_2,\dots,m_nr_n) = r_0((\cdots(m_1\otimes m_2)\otimes\cdots)\otimes m_n)r_n$ であることはみやすい. したがって

$$\begin{aligned}\gamma : M_1\otimes_{R_1} M_2\otimes_{R_2}\cdots\otimes_{R_{n-2}} M_{n-1}\otimes_{R_{n-1}} M_n \\ \to ((\cdots(M_1\otimes_{R_1} M_2)\otimes_{R_2}\cdots)\otimes_{R_{n-2}} M_{n-1})\otimes_{R_{n-1}} M_n\end{aligned}$$

なる (R_0,R_n) 線型写像で

$$\gamma(m_1\otimes m_2\otimes\cdots\otimes m_n) = (\cdots(m_1\otimes m_2)\otimes\cdots)\otimes m_n$$

であるものが一意的に存在する.

3.17 補題. $R_0,\dots,R_n$ が環, M_i は (R_{i-1},R_i) 両側加群, W は (R_0,R_n) 両側加群, $\psi : M_1\times\cdots\times M_n\to W$ は多重バランス写像で $r_0\psi(m_1,\dots,m_n)r_n = \psi(r_0m_1,\dots,m_nr_n)$ をみたすものとする. このとき, (R_0,R_n) 準同型

$$h' : ((\cdots(M_1\otimes_{R_1} M_2)\otimes_{R_2}\cdots)\otimes_{R_{n-2}} M_{n-1})\otimes_{R_{n-1}} M_n \to W$$

で

$$h'(((\cdots(m_1\otimes m_2)\otimes\cdots)\otimes m_{n-1})\otimes m_n) = \psi(m_1,\dots,m_n)$$

であるものが一意的に存在する.

証明. n についての帰納法. $n=1$ の場合は $h'=\psi$ でいい. $n=2$ の場合は (3.12) に含まれる. $n\geq 3$ としてよい. $m\in M_n$ について, $\psi_m : M_1\times\cdots\times M_{n-1}\to W$ を $\psi_m(m_1,\dots,m_{n-1}) = \psi(m_1,\dots,m_{n-1},m)$ で定義すると, これは $(R_1,\dots,R_{n-1})$ バランス写像で

$$\psi_m(r_0m_1,\dots,m_{n-1}r_{n-1}) = r_0\psi_{r_{n-1}m}(m_1,\dots,m_{n-1}) \tag{3.17.1}$$

をみたす. 帰納法の仮定によって,

$$h'_m((\cdots(m_1\otimes m_2)\otimes\cdots)\otimes m_{n-1}) = \psi_m(m_1,\dots,m_{n-1})$$

をみたす R_0 準同型

$$h'_m : (\cdots(M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} \cdots) \otimes_{R_{n-2}} M_{n-1} \to W$$

が一意的に存在する. (3.17.1) によって

$$h'_m((\cdots(m_1 \otimes m_2) \otimes \cdots) \otimes m_{n-1}r) = h'_{rm}((\cdots(m_1 \otimes m_2) \otimes \cdots) \otimes m_{n-1})$$

が容易に分かる. そこで

$$\rho : ((\cdots(M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} \cdots) \otimes_{R_{n-2}} M_{n-1}) \times M_n \to W$$

を $\rho(\xi, m) = h'_m(\xi)$ で定めると, 容易に分かるように ρ は R_{n-1} バランス写像で $\rho(r_0\xi, mr_n) = r_0\rho(\xi, m)r_n$ をみたす. よって $n = 2$ の場合によって,

$$h' : ((\cdots(M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} \cdots) \otimes_{R_{n-2}} M_{n-1}) \otimes_{R_{n-1}} M_n \to W$$

であって $h'(\xi \otimes m) = h'_m(\xi)$ であるものが一意的に存在する. 特に $\xi = (\cdots(m_1 \otimes m_2) \otimes \cdots) \otimes m_{n-1}$ の場合を考えると, h' が求めるものであることが分かる. h' の一意性は明らかであろう. $\square$

(3.18) 特に (3.17) において $W = M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n$ で

$$\psi(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$$

の場合を考えると,

$$h'((\cdots(m_1 \otimes m_2) \otimes \cdots) \otimes m_n) = m_1 \otimes \cdots \otimes m_n.$$

つまり h' は (3.16) における γ の逆写像である. まとめると,

3.19 定理. $R_0, \ldots, R_n$ は環, $i = 1, \ldots, n$ について M_i は (R_{i-1}, R_i) 両側加群とする. このとき, (R_0, R_n) 同型

$$\gamma : M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to (\cdots(M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} \cdots) \otimes_{R_{n-1}} M_n$$

で

$$\gamma(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) = (\cdots(m_1 \otimes m_2) \otimes \cdots) \otimes m_n$$

であるものが一意的に存在する.

(3.20)　特に $n=3$ の場合に

$$\gamma : M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} M_3 \to (M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} M_3$$

(ただし $\gamma(m_1 \otimes m_2 \otimes m_3) = (m_1 \otimes m_2) \otimes m_3$) が同型である．
　同様にして,

$$\delta : M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} M_3 \to M_1 \otimes_{R_1} (M_2 \otimes_{R_2} M_3)$$

ただし $\delta(m_1 \otimes m_2 \otimes m_3) = m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)$ も同型である．つなげると

$$\alpha_{M_1,M_2,M_3} = \alpha = \gamma \circ \delta^{-1} : M_1 \otimes_{R_1} (M_2 \otimes_{R_2} M_3) \to (M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} M_3$$

が同型である．$\alpha(m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3)) = (m_1 \otimes m_2) \otimes m_3$ で与えられる．

(3.21)　この α を用いると, 任意の括弧のつけかえが可能である．(3.19) によって自由に括弧をはずしてもよいので, 以後括弧のつけはずしは自由に行ってよいという立場に立ち, あまり気にしない．

(3.22)　(3.15) の

$$\tau = \tau_{M_1,\ldots,M_n} : M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to M_n^{\mathrm{op}} \otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}} \cdots \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} M_1^{\mathrm{op}},$$

(3.16) の

$$\begin{aligned}\gamma = \gamma_{M_1,M_2,\ldots,M_n} : M_1 \otimes_{R_1} M_2 \otimes_{R_2} \cdots \otimes_{R_{n-2}} M_{n-1} \otimes_{R_{n-1}} M_n \\ \to ((\cdots(M_1 \otimes_{R_1} M_2) \otimes_{R_2} \cdots) \otimes_{R_{n-2}} M_{n-1}) \otimes_{R_{n-1}} M_n,\end{aligned}$$

(3.20) の $\delta = \delta_{M_1,M_2,M_3}$ や $\alpha = \alpha_{M_1,M_2,M_3}$ などは**自然性 (naturality)** という性質をもつ．

　これを τ を例にとって述べる．$i = 1, \ldots, n$ について $f_i : M_i \to M_i'$ が (R_{i-1}, R_i) 準同型とする．このとき図式

$$\begin{tikzcd} M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \arrow[r, "\tau_{M_1,\ldots,M_n}"] \arrow[d, "f_1 \otimes \cdots f_n"] & M_n^{\mathrm{op}} \otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}} \cdots \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} M_1^{\mathrm{op}} \arrow[d, "f_n^{\mathrm{op}} \otimes \cdots f_1^{\mathrm{op}}"] \\ M_1' \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n' \arrow[r, "\tau_{M_1',\ldots,M_n'}"] & (M_n')^{\mathrm{op}} \otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}} \cdots \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} (M_1')^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

は可換であり, このことを指して τ は**自然変換 (natural transformation)** であるという．

　証明は容易で, $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ がどちらをたどっても $f_n(m_n) \otimes \cdots \otimes f_1(m_1)$ に写されることから明白である．

3.23 演習. R, T が環, N が (R,T) 両側加群とする. このとき, (R,T) 同型 $\lambda_N : R \otimes_R N \to N$ で $\lambda_N(r \otimes n) = rn$ $(r \in R,\ n \in N)$ であるものが存在する. λ_N は N について自然である. すなわち, $f : N \to N'$ が (R,T) 準同型のとき, $\lambda_{N'} \circ (1_R \otimes f) = f \circ \lambda_N$ である. 同様に (T,R) 両側加群 N について, (T,R) 加群の自然な同型 $\rho_N : N \otimes_R R \to N$ で $\rho_N(n \otimes r) = n$ $(r \in R,\ n \in N)$ であるものが存在する.

(3.24) R が可換環で $M_1, \ldots, M_n$ は R 加群とする. $M_1, \ldots, M_n$ は (R,R) 加群とみなせるので, テンサー積 $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$ が定義されて, これは (R,R) 両側加群である. しかし,

$$\begin{aligned} r(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= rm_1 \otimes \cdots \otimes m_n = m_1 r \otimes \cdots \otimes m_n = m_1 \otimes rm_2 \otimes \cdots \otimes m_n \\ &= \cdots == m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n r = (m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) r \end{aligned}$$

であるから, この (R,R) 作用は $r\alpha = \alpha r$ $(r \in R,\ \alpha \in M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n)$ をみたす. 左右の作用が同じだから $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$ は R 加群だといったとき, 左右どちらの作用を指しているのか迷う必要は無い.

これを可換環 R の上の R 加群 $M_1, \ldots, M_n$ のテンサー積とよぶ.

$\psi : M_1 \times \cdots \times M_n \to W$ が R **多重線型写像** (R**-multilinear map**) であるとは, $j = 1, \ldots, n$ と固定された m_i $(i \neq j)$ について,

$$\psi(m_1, \ldots, m_{j-1}, ?, m_{j+1}, \ldots, m_n) : M_j \to W$$

が R 線型なことをいう. $n = 2$ の場合には特に, R **双線型写像** (R**-bilinear map**) とよぶ. これは R 加群 $M_1, \ldots, M_n$ を (R,R) 両側加群とみなすとき, ψ が R バランス写像で, $\psi(rm_1, \ldots, m_n r') = r\psi(m_1, \ldots, m_n) r'$ が成立することと同値である. 従ってこのとき, テンソル積の普遍性により R 線型写像 $h : M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n \to W$ で $h(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \psi(m_1, \ldots, m_n)$ であるものが一意的に誘導される.

(3.25) R は可換環, S は環, $u : R \to S$ は環準同型とする. $u(R)$ が S の中心 $Z(S) = \{s \in S \mid \forall s' \in S\ ss' = s's\}$ に含まれるとき, S は (u によって) R **代数** (R**-algebra**) であるという. またの名を R **多元環** (R**-algebra**) という. これは S が左 R 加群で $r(ss') = (rs)s' = s(rs')$ が成立していると言っても同じである. 実際, このとき $u(r) = r1_S$ とおけば S は R 代数だし, 逆に S が $u : R \to S$ によって R 代数ならば, $rs = u(r)s$ と定めて S は左 R 加群で $r(ss') = (rs)s' = s(rs')$ が成立する.

(3.26) 任意の環 S に対して, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ から S へ向かって一意的な環準同型 ζ_S がある. $\zeta_S(0) = 0$, $\zeta_S(\pm n) = \pm(1_S + 1_S + \cdots + 1_S)$ (括弧内は 1_S を n 回足したもの) ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) と定義すれば良いし, またそう定義しないと環準同型にならない. $\zeta_S(\mathbb{Z}) \subset Z(S)$ なので, 環 S は一意的な方法で $\mathbb{Z}$ 代数になる. つまり, 環と $\mathbb{Z}$ 代数は同一概念である. 従って R 代数について述べられたことがらは, $R = \mathbb{Z}$ として単なる環についての主張に読み替えられる.

(3.27) R 代数 S, T と写像 $f : S \to T$ について, f が R 代数の準同型であるとは, f が環準同型でしかも R 加群の準同型であることをいう. つまり $f(s + s') = f(s) + f(s')$, $f(ss') = f(s)f(s')$, $f(1) = 1$, $f(rs) = rf(s)$ ($s, s' \in S$, $r \in R$) をみたすとき, f は R 代数の準同型という. さらに全単射でもあるとき, f は R 代数の同型という. R 代数の同型 f について, f^{-1} は存在し, f^{-1} も R 代数の同型になる.

(3.28) R 代数 T とその部分集合 S について, S が T の部分環であると同時に T の R 部分加群でもあるとき, S は T の R **部分代数 (subalgebra)** であるという.

3.29 例. 可換環 R に対して, R 上の全行列環 $S = \mathrm{Mat}(n, R)$ は行列の和, 積に関して環であるが, さらにスカラー倍 $r(a_{ij}) = (ra_{ij})$ によって R 加群でもあり, S は R 代数になっている.

3.30 例. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ なので, 自然に $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 代数である. 一方,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

は和, 積, スカラー倍で閉じていることが簡単に確かめられ, $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$ 部分代数である. $\varphi : \mathbb{C} \to A$ を $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定めると, これは $\mathbb{R}$ 代数の同型である.

(3.31) R 代数をテンソル積を使って理解する方法もある. S が R 代数の時, S は R 加群であり, $u = u_S : R \to S$ は R 加群の準同型である. また, 積 $\mu_S : S \times S \to S$ は容易に分かるように R バランス写像で $r\mu(s, s') = \mu(rs, s')$ をみたすので, R 加群の準同型 $m_S : S \otimes_R S \to S$ で $m_S(s \otimes s') = ss'$ であるものが一意的に存在する. 以上のようにして得られた R 加群 S と R 準同型

$u_S : R \to S$ および $m_S : S \otimes_R S \to S$ について, 次の図式は可換である.
(3.31.1)

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R S \otimes_R S \arrow[r, "m_S \otimes 1_S"] \arrow[d, "1_S \otimes m_S"] & S \otimes_R S \arrow[d, "m_S"] \\ S \otimes_R S \arrow[r, "m_S"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \otimes_R S \arrow[d, "m_S"] & \\ R \otimes_R S \arrow[ur, "u_S \otimes 1_S"] \arrow[r, "\lambda_S"] & S & S \otimes_R R \arrow[ul, "1_S \otimes u_S"'] \arrow[l, "\rho_S"'] \end{tikzcd}$$

第一の図式の可換性は**結合律 (associativity law)**, 第二の図式の可換性は S の**単位律 (unit law)** と呼ばれる. 実際, これらの図式の可換性は本質的に S の乗法の結合律, 単位律に他ならない. 逆に R 加群 S と R 加群準同型 $u_S : R \to S$ と $m_S : S \otimes_R S \to S$ で (3.31.1) の図式を可換にするものが与えられると, $s, s' \in S$ に対して積 ss' とは $m_S(s \otimes s')$ のことであると定義して S は環であり, u_S によって S は R 代数になることが容易に確かめられる. 以上のことは, 「R 代数は R 加群の (テンサー積による) **モノイダル圏 (monoidal category)** での**モノイド (monoid)** である」と短く表現される [McL] または [三高] 参照.

3.32 演習. R 代数 S について, 左 S 加群 M を与えることと, R 加群 M と R 準同型写像 $a_M : S \otimes_R M \to M$ であって図式

(3.32.1)
$$\begin{tikzcd} S \otimes_R S \otimes_R M \arrow[r, "m_S \otimes 1_S"] \arrow[d, "1_S \otimes a_M"] & S \otimes_R M \arrow[d, "a_M"] \\ S \otimes_R M \arrow[r, "a_M"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \otimes_R M \arrow[d, "a_M"] \\ R \otimes_R M \arrow[ur, "u_S \otimes 1_M"] \arrow[r, "\lambda_M"] & M \end{tikzcd}$$

が可換であるものを与えることは同じであることを確かめよ.

(3.33) R が可換環, S, T は R 代数とする. このとき,

$$S \times T \times S \times T \to S \otimes_R T \qquad (s, t, s', t') \mapsto ss' \otimes tt'$$

は R 多重線型であるので, $m_{S \otimes_R T} : S \otimes_R T \otimes_R S \otimes_R T \to S \otimes_R T$ が $m_{S \otimes_R T}(s \otimes t \otimes s' \otimes t') = ss' \otimes tt'$ で定まる. $u_{S \otimes_R T} : R \to S \otimes_R T$ は $u_{S \otimes_R T}(r) = r(1 \otimes 1)$ で定める. これで図式 (3.31.1) が可換になり, $S \otimes_R T$ は積 $(s \otimes t)(s' \otimes t') = ss' \otimes tt'$ によって R 代数になることがわかった.
容易に分かるように, S, T が可換環のとき, $S \otimes_R T$ も可換である.

(3.34) R が可換環, T が R 代数のとき, T^{op} は元の T と同じ R 加群の構造で (言い直すと元の $u_T : R \to T$ と同じ写像を用いて) 積だけ変えて R 代数になっている. このとき T^{op} は T の**反対多元環 (opposite algebra)** と呼ばれる. S, T が R 代数で $f : S \to T$ が写像のとき, f が R 代数の準同型であるためには, $f : S^{\mathrm{op}} \to T^{\mathrm{op}}$ が R 代数の準同型であることが必要十分である.

(3.35) R が可換環, S, T が R 代数, M が (S,T) 両側加群であって $rm = u_S(r)m = mu_T(r) = mr$ $(r \in R,\ m \in M)$ をみたすものとすると,

$$S \otimes_R T^{\mathrm{op}} \otimes_R M \to M$$

が $s \otimes t \otimes m \mapsto smt$ で定まる. これによって M は左 $S \otimes_R T^{\mathrm{op}}$ 加群である. すなわち, $(s \otimes t)m = smt$. 逆に左 $S \otimes_R T^{\mathrm{op}}$ 加群 M が与えられると, $sm = (s \otimes 1)m$, $mt = (1 \otimes t)m$ と定義して M は (S,T) 両側加群になり, $u_S(r)m = mu_T(r)$ が成立する.

以後本講義では $rm = u_S(r)m = mu_T(r) = mr$ $(r \in R,\ m \in M)$ をみたす (S,T) 両側加群と左 $S \otimes_R T^{\mathrm{op}}$ 加群を区別しない.

なお, $R = \mathbb{Z}$ の場合を考え, 環 S, T に対して, (S,T) 両側加群は, 左 $S \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\mathrm{op}}$ 加群と同じことである.

(3.36) M, N は左 R 加群とする. M から N への R 準同型全体の集合を $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ と表す. $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ について, $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$ と定義することによって, 和 $\varphi + \psi$ が定義される.

3.37 演習. 上のように $\varphi + \psi$ を定義すると, $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ である. また, この和によって $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は加法群である. このことを証明せよ.

3.38 演習. R, S, T が環とする. M が (R,S) 両側加群, N が (R,T) 両側加群とする. このとき $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ について, $(s\varphi)(m) = \varphi(ms)$ $(s \in S,\ m \in M)$ と定めることにより, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は左 S 加群である. また, $(\varphi t)(m) = (\varphi m)t$ とおくことにより, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は右 T 加群である. これらにより, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は (S,T) 両側加群となる. 以上を確かめよ.

(3.39) R が可換環, M, N が R 加群のとき, これらは (R,R) 加群だから, (3.38) によって $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は (R,R) 両側加群となるが,

$$(r\varphi)(m) = \varphi(mr) = \varphi(rm) = r(\varphi(m)) = (\varphi(m))r = (\varphi r)(m)$$

なので, $r\varphi = \varphi r$ が成立しており, 単に $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は R 加群であると呼んで何の誤解も起きない.

(3.40) R, S, T が環, M, M' が (R,S) 両側加群, N, N' が (R,T) 両側加群, $f : M' \to M$ が (R,S) 準同型, $g : N \to N'$ が (R,T) 準同型とせよ.

このとき, $\mathrm{Hom}_R(f,g) : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M',N')$ が $\mathrm{Hom}_R(f,g)(h) = ghf$ で定まり, $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ は (S,T) 準同型である.

$M = M'$ のときに $\mathrm{Hom}_R(1_M, g)$ は $\mathrm{Hom}_R(M,g)$ とか, g_* などと書かれることがある. $N = N'$ のときに $\mathrm{Hom}_R(f, 1_N)$ は $\mathrm{Hom}_R(f,N)$ とか, f^* などと書かれることがある.

3.41 演習 (Hom の関手性)**.** R が環, M, M', M'', N, N', N'' が R 加群で, $f : M' \to M$, $f' : M'' \to M'$, $g : N \to N'$, $g' : N' \to N''$ が R 線型写像とする. このとき,

1 $\mathrm{Hom}_R(1_M, 1_N) = 1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$ である.

2 $\mathrm{Hom}_R(f', g') \circ \mathrm{Hom}_R(f, g) = \mathrm{Hom}_R(ff', g'g)$.

3.42 定理. S, R, T, U は環, L は (S, R) 両側加群, M は (R, T) 両側加群, N は (S, U) 両側加群とするとき, (T, U) 加群の同型

$$\Phi_{L,M,N} : \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(L, N))$$

で
(3.42.1)
$$(\Phi_{L,M,N}(\varphi)(m))(l) = \varphi(l \otimes m) \qquad (\varphi \in \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N), m \in M, l \in L)$$

をみたすものが一意的に存在する. その逆写像は

$$(\Phi^{-1}_{L,M,N}(\psi))(l \otimes m) = (\psi(m))(l)$$

で与えられる. さらに, $\Phi_{L,M,N}$ は L, M, N について自然である. つまり, $f : L' \to L$, $g : M' \to M$ および $h : N \to N'$ がそれぞれ (S, R), (R, T), (S, U) 準同型のとき,

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\Phi_{L,M,N}} & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(L, N)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_S(f \otimes g, h)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Hom}_S(f,h))} \\
\mathrm{Hom}_S(L' \otimes_R M', N') & \xrightarrow{\Phi_{L',M',N'}} & \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Hom}_S(L', N'))
\end{array}$$

は可換図式である.

証明. $\varphi(s(l + l') \otimes m) = s(\varphi(l \otimes m) + \varphi(l' \otimes m))$ なので (3.42.1) によって $\Phi = \Phi_{L,M,N}$ は $\mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N)$ から $\mathrm{Map}(M, \mathrm{Hom}_S(L, N))$ への写像として定まる.

$$\begin{aligned}
((\Phi(\varphi))(r(m + m')))(l) &= \varphi(l \otimes r(m + m')) = \varphi(lr \otimes m) + \varphi(lr \otimes m') \\
&= ((\Phi(\varphi))(m))(lr) + ((\Phi(\varphi))(m'))(lr) = (r(\Phi(\varphi)(m) + \Phi(\varphi)(m')))(l)
\end{aligned}$$

なので, $\Phi(\varphi)$ は R 準同型であり, Φ は $\mathrm{Hom}_S(L\otimes_R M, N)$ を $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(L, N))$ へ写すことがわかった. Φ が (T, U) 加群の準同型であることをいう.

$$\begin{aligned}((\Phi(t\varphi u))(m))(l) &= (t\varphi u)(l\otimes m) = \varphi(l\otimes mt)u \\ &= (((\Phi(\varphi))(mt))u)(l) = ((t(\Phi(\varphi))u)(m))(l)\end{aligned}$$

($\varphi \in \mathrm{Hom}_S(L\otimes_R M, N)$, $t\in T$, $u\in U$, $m\in M$, $l\in L$) であるから

$$\Phi(t\varphi u) = t(\Phi(\varphi))u \qquad (t\in T, u\in U, \varphi\in \mathrm{Hom}_S(L\otimes_R M, N))$$

であり, Φ は (T, U) 加群の準同型である.

あとは $(\Psi(\psi))(l\otimes m) = (\psi(m))(l)$ で $\Psi : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(L, N)) \to \mathrm{Hom}_S(L\otimes_R M, N)$ が定まり, $\Psi = \Psi_{L,M,N}$ が $\Phi = \Phi_{L,M,N}$ の逆写像であればよい. $x_\psi(l, m) = (\psi(m))(l)$ で x_ψ を定めると R バランスで $x_\psi(sl, m) = sx_\psi(l, m)$ はすぐ分かるので, Ψ は well-defined である.

$$(\Psi\Phi\varphi)(l\otimes m) = ((\Phi\varphi)(m))(l) = \varphi(l\otimes m)$$

および

$$((\Phi\Psi\psi)(m))(l) = (\Psi\psi)(l\otimes m) = (\psi(m))(l)$$

から Ψ が Φ の逆写像であることが従う. □

(3.43) R が環, M, N が R 右加群とする. このとき, M から N への R 準同型全体を左加群の場合と同じ記号で $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ と書く. M が (S, R) 両側加群, N が (T, R) 両側加群のとき, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は (T, S) 両側加群である.

このとき $\mathrm{Hom}_R(M, N)^{\mathrm{op}} = \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}, N^{\mathrm{op}})$ と同一視される[1]. しかもこの同一視は自然同型である. つまり, $f : M' \to M$ と $g : N \to N'$ がそれぞれ (S, R) 準同型, (T, R) 準同型のとき,

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_R(M,N)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}} & \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}},N^{\mathrm{op}}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(f,g)^{\mathrm{op}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(f^{\mathrm{op}},g^{\mathrm{op}})} \\ \mathrm{Hom}_R(M',N')^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{1_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}} & \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(M'^{\mathrm{op}},N'^{\mathrm{op}})\end{array}$$

は $(S^{\mathrm{op}}, T^{\mathrm{op}})$ 両側加群の可換図式である. この事実により, 右加群に関する Hom に関する主張は, 左加群に関する Hom に関する主張に翻訳されるし, 逆もしかりである. たとえば, 次は (3.42) の右加群の Hom についての主張への翻訳にすぎない.

[1]前回配布資料にあった同型 τ については, $\tau = \tau_{M_1,\dots,M_n} : (M_1\otimes_{R_1}\cdots\otimes_{R_{n-1}} M_n)^{\mathrm{op}} \to M_n^{\mathrm{op}}\otimes_{R_{n-1}^{\mathrm{op}}}\cdots\otimes_{R_1^{\mathrm{op}}} M_1^{\mathrm{op}}$ であるとすべきでした. 訂正してお詫びします.

3.44 定理. S, R, T, U は環, L は (R,S) 両側加群, M は (T,R) 両側加群, N は (U,S) 両側加群とするとき, (U,T) 加群の同型

$$\Phi'_{L,M,N} : \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R L, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(L,N))$$

で

(3.44.1) $$(\Phi'_{M,L,N}(\varphi)(m))(l) = \varphi(m \otimes l)$$

をみたすものが一意的に存在する. その逆写像は

$$((\Phi'_{M,L,,N})^{-1}(\psi))(m \otimes l) = (\psi(m))(l)$$

で与えられる. さらに $\Phi'_{M,L,N}$ は自然である.

証明. 自然同型の合成

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R L, N) \xrightarrow{1} \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}((M \otimes_R L)^{\mathrm{op}}, N^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{(\tau^{-1})^*} \\
&\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(L^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} M^{\mathrm{op}}, N^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\Phi^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(L^{\mathrm{op}}, N^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}} \\
&\xrightarrow{1} \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Hom}_R(L,N)^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{1} \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_R(L,N))
\end{aligned}$$

は明らかに自然同型であるが, これを $\Phi' = \Phi'_{M,L,N}$ とおけば, (3.44.1) をみたしているのは容易である. 逆写像も同様の議論で (3.42) を用いて決定される. □

3.45 演習. R が環, $f : M \to M'$ は右 R 加群の同型, $g : N \to N'$ は左 R 加群の同型とする. このとき $f \otimes g$ は同型であり, $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$ が成立する.

3.46 演習. R が環, $f : M' \to M$, $g : N \to N'$ は左 R 加群の同型とする. このとき, $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ は同型であり, $\mathrm{Hom}_R(f,g)^{-1} = \mathrm{Hom}_R(f^{-1}, g^{-1})$.

3.47 補題. 環 R, T と (R,T)-bimodule M について, (R,T) 同型 $\eta = \eta_M : \mathrm{Hom}_R(R,M) \to M$ であって $\eta(\varphi) = \varphi(1)$ であるものが存在する. $(\eta^{-1}(m))(r) = rm$ である. η_M は M について自然である.

証明. η が (R,T) 準同型であることは

$$\eta(r\varphi t) = (r\varphi t)(1) = (\varphi(1 \cdot r))t = r(\varphi(1))t = r(\eta(\varphi))t$$

から分かる.

$(\omega(m))(r) = rm$ とおくと $\omega(m) \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ は容易である．よって ω は M を $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ に写す．$((\omega\eta)(\varphi))(r) = r\varphi(1) = \varphi(r)$ なので, $\omega\eta = 1$. また, $(\eta\omega)(m) = (\omega(m))(1) = m$ なので $\eta\omega = 1$. η は逆写像 ω をもつので同型で $\eta^{-1}(m)(r) = rm$.

自然性について, $f : M \to M'$ が準同型とする．$f\eta_M(\varphi) = f(\varphi(1))$. $\eta_{M'}f_*(\varphi) = \eta_{M'}(f\varphi) = f\varphi(1)$. よって $f\eta_M = \eta_{M'}f_*$. これが示すべきことであった． □

3.48 命題 (Hom の左完全性 (1))**.** R が環,

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \tag{3.48.1}$$

は左 R 加群の列とする．このとき, 次は同値である.

1 (3.48.1) は完全列である．

2 任意の左 R 加群 W について

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(W, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(W, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(W, N) \tag{3.48.2}$$

は完全である．

3 列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(R, N) \tag{3.48.3}$$

は完全である．

証明．**1**⇒**2**．$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(W, L)$, $f_*\varphi = 0$, $w \in W$ とする．$(f_*\varphi)(w) = f(\varphi(w)) = 0$ であるが, f が単射なので $\varphi(w) = 0$. $w \in W$ は任意だったから $\varphi = 0$. これは f_* が単射であることを示す．つぎに, $gf = 0$ だから, 関手性によって $g_*f_* = (gf)_* = 0_* = 0$. いいかえると $\mathrm{Im}\, f_* \subset \mathrm{Ker}\, g_*$. つぎに, $\psi \in \mathrm{Ker}\, g_*$, つまり $g\psi = 0$ とせよ．$\mathrm{Im}\, \psi \subset \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ なので, (2.14) によって, ある $h \in \mathrm{Hom}_R(W, L)$ が存在して $fh = \psi$. つまり $\psi = f_*(h) \in \mathrm{Im}\, f_*$. つまり $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Im}\, f_*$. 以上により $\mathrm{Im}\, f_* = \mathrm{Ker}\, g_*$. 以上によって (3.48.2) は完全列である．

2⇒**3** $W = R$ とおけばよいので明らかである．

3⇒**1** 図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R, L) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\eta_L"] & \mathrm{Hom}_R(R, M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_M"] & \mathrm{Hom}_R(R, N) \arrow[d, "\eta_N"] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

は η が自然同型なので可換で, 縦の射は同型であり, 第 1 行は仮定によって完全である. よって第 2 行の完全性が容易に従う. □

3.49 命題 (Hom の左完全性 (2))**.** R は環,

$$N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} L \to 0 \tag{3.49.1}$$

は左 R 加群の列とする. このとき次は同値である.

1 列 (3.48.1) は完全列である.

2 任意の左 R 加群 W に対して,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(L, W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(N, W) \tag{3.49.2}$$

は完全列である.

証明. **1⇒2** $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(L, W)$, $f^*\varphi = 0$, $l \in L$ とする. このとき, f の全射性により, $l = f(m)$ $(m \in M)$ と書ける. すると, $\varphi(l) = \varphi(f(m)) = (f^*\varphi)(m) = 0$. よって $\varphi = 0$ であり, f^* は単射だとわかった.

次に, 関手性によって, $g^*f^* = (fg)^* = 0^* = 0$. よって $\mathrm{Im}\, f^* \subset \mathrm{Ker}\, g^*$. 逆に $\psi \in \mathrm{Ker}\, g^*$, つまり $\psi g = 0$ とせよ. $\psi(\mathrm{Ker}\, f) = \psi(\mathrm{Im}\, g) = 0$ なので, 準同型定理 (2.13) によって, ある $h \in \mathrm{Hom}_R(L, W)$ が存在して, $hf = \psi$. つまり, $\psi = f^*(h) \in \mathrm{Im}\, f^*$. よって $\mathrm{Ker}\, g^* \subset \mathrm{Im}\, f^*$. 以上により, $\mathrm{Ker}\, g^* = \mathrm{Im}\, f^*$. 以上により, (3.49.2) は完全.

2⇒1. $C = \mathrm{Coker}(f) = L/\mathrm{Im}\, f$ とおく. $\pi : L \to C$ を自然な射影とする. つまり, $\pi(l) = l + \mathrm{Im}\, f \in L/\mathrm{Im}\, f = C$ である. あきらかに $\pi f = 0$ であるが, $W = C$ とおいて, $f^* : \mathrm{Hom}_R(L, C) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ は単射なので, $f^*(\pi) = \pi f = 0$ から $\pi = 0$ が出る. π は全射なので $C = 0$ であり, これは $L = \mathrm{Im}\, f$, つまり f の全射性を示す.

つぎに, $W = L$ とおいて, $g^*f^* : \mathrm{Hom}_R(L, L) \to \mathrm{Hom}_R(N, L)$ は 0 だから, $fg = g^*f^*(1_L) = 0$. とくに $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$. つぎに, $D = \mathrm{Coker}\, g = M/\mathrm{Im}\, g$ とし, $q : M \to D$ を自然な射影とする. $qg = g^*(q) = 0$ だから $q \in \mathrm{Ker}\, g^* = \mathrm{Im}\, f^*$. つまり, ある $\bar{q} \in \mathrm{Hom}_R(L, D)$ があって, $q = f^*(\bar{q}) = \bar{q}f$. これは $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}(\bar{q}f) \supset \mathrm{Ker}\, f$ を示す. 以上により, $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f$. 以上により, (3.49.1) は完全. □

3.50 命題 (テンサー積の右完全性 (1))**.** R が環,

$$N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} L \to 0 \tag{3.50.1}$$

が左 R 加群の列とするとき, 次は同値である.

1 (3.50.1) は完全列である.

2 任意の右 R 加群 E に対して

$$E \otimes_R N \xrightarrow{1_E \otimes g} E \otimes_R M \xrightarrow{1_E \otimes f} E \otimes_R L \to 0 \tag{3.50.2}$$

は完全列.

3 列

$$R \otimes_R N \xrightarrow{1_E \otimes g} R \otimes_R M \xrightarrow{1_E \otimes f} R \otimes_R L \to 0 \tag{3.50.3}$$

は完全.

証明. **1⇒2** W を任意の $\mathbb{Z}$ 加群とする. このとき,

$$\begin{CD}
0 @>>> \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E \otimes_R L, W) @>{(1_E \otimes f)^*}>> \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E \otimes_R M, W) @>{(1_E \otimes g)^*}>> \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E \otimes_R N, W) \\
@. @VV{\Phi_{E,L,W}}V @VV{\Phi_{E,M,W}}V @VV{\Phi_{E,N,W}}V \\
0 @>>> \mathrm{Hom}_R(L, E') @>{f^*}>> \mathrm{Hom}_R(M, E') @>{g^*}>> \mathrm{Hom}_R(N, E')
\end{CD}$$

は Φ の自然性から可換で, 縦の射はすべて同型で, 第 2 行は (3.49) によって完全であるから, 第 1 行も完全列である. ここに $E' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, W)$. すると, W は任意だったから, 再び (3.49) によって, (3.50.2) は完全である.

2⇒3 $E = R$ とすればよいので明白である.

3⇒1 λ が自然同型なので,

$$\begin{CD}
R \otimes_R N @>{1_E \otimes g}>> R \otimes_R M @>{1_E \otimes f}>> R \otimes_R L @>>> 0 \\
@VV{\lambda_N}V @VV{\lambda_M}V @VV{\lambda_L}V \\
N @>{g}>> M @>{f}>> L @>>> 0
\end{CD}$$

は可換で縦の射はすべて同型, 仮定によって第 1 行は完全. だから第 2 行も完全. □

3.51 系 (テンサー積の右完全性 (2))**.** R が環,

$$N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} L \to 0 \tag{3.51.1}$$

が右 R 加群の列とするとき, 次は同値である.

1 (3.51.1) は完全列である.

2 任意の左 R 加群 E に対して

$$N \otimes_R E \xrightarrow{g\otimes 1_E} M \otimes_R E \xrightarrow{f\otimes 1_E} L \otimes_R E \to 0 \tag{3.51.2}$$

は完全列.

3 列

$$N \otimes_R R \xrightarrow{g\otimes 1_E} M \otimes_R R \xrightarrow{f\otimes 1_E} L \otimes_R R \to 0 \tag{3.51.3}$$

は完全.

証明. **1⇒2** 左 R^{op} 加群の列

$$N^{\mathrm{op}} \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} M^{\mathrm{op}} \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} L^{\mathrm{op}} \to 0$$

は完全. (3.50) により,

$$\begin{array}{ccccccc}
(E \otimes_R N)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{(1_E\otimes g)^{\mathrm{op}}} & (E \otimes_R M)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{(1_E\otimes f)^{\mathrm{op}}} & (E \otimes_R L)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\
E^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} N^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{g^{\mathrm{op}}} & E^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} M^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{op}}} & E^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} L^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

の第 2 行は完全だが, τ が自然同型だから, 第 1 行も完全. これは (3.51.2) の完全性を示す.

2⇒3 は $E = R$ とおけばよく, 自明である.

3⇒1 は (3.50) の証明で λ を用いたところを ρ を用いれば同様に示される. □

3.52 演習. m, n が整数のとき, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})$ である. とくに m と n が互いに素のとき, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong 0$ である. これを示せ.

4 直積と直和と分裂する完全列

(4.1) S, R は環, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は (S,R) 両側加群の族とする. このとき, 直積集合 $M=\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$ に $(m_\lambda)+(m'_\lambda)=(m_\lambda+m'_\lambda)$, $s(m_\lambda)r=(sm_\lambda r)$ なる算法を入れて, 再び (S,R) 両側加群になる. これを**直積加群**という.

4.2 補題. S, R, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は上の通り, W は左 (S,T) 両側加群とするとき, (T,R) 両側加群の同型

$$\varpi=\varpi_{(W,M_\lambda)}:\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_S(W,M_\lambda)\to\mathrm{Hom}_S(W,\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)$$

で $(\varpi(f_\lambda))(w)=(f_\lambda(w))$ $((f_\lambda)\in\prod_\lambda\mathrm{Hom}_S(W,M_\lambda),\ w\in W)$ をみたすものが一意的に存在する.

証明. $\varpi(f_\lambda)(w)=(f_\lambda(w))$ によって $\varpi:\prod_\lambda\mathrm{Hom}_S(W,M_\lambda)\to\mathrm{Map}(W,\prod_\lambda M_\lambda)$ が定まる. $(f_\lambda(s(w+w')))=(s(f_\lambda(w)+f_\lambda(w')))=s(f_\lambda(w))+s(f_\lambda(w))$ であるから, ϖ は $\mathrm{Hom}_S(W,\prod_\lambda M_\lambda)$ への写像である.

$t\in T$, $r\in R$, $(f_\lambda)\in\prod_\lambda\mathrm{Hom}_S(W,M_\lambda)$, $w\in W$ について,

$$\begin{aligned}(\varpi(t(f_\lambda)r))(w)&=(\varpi(tf_\lambda r))(w)=((tf_\lambda r)(w))=(f_\lambda(wt)r)\\&=(f_\lambda(wt))r=(\varpi(f_\lambda)(wt))r=(t(\varpi(f_\lambda))r)(w)\end{aligned}$$

なので ϖ は (T,R) 準同型である.

同型であることを示すには, 逆写像の存在をいえばよい. まず, 射影

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\to M_\lambda\quad((m_\lambda)\mapsto m_\lambda)$$

を p_λ で表そう. p_λ は容易に分かるように (S,R) 準同型である.

$$\vartheta:\mathrm{Hom}_S(W,\prod_\lambda M_\lambda)\to\prod_\lambda\mathrm{Hom}_S(W,M_\lambda)$$

を $\vartheta(f)=((p_\lambda)_*(f))$ で定義する.

ϑ が求める ϖ の逆写像であることを言う.

$$(p_\lambda(\vartheta\varpi(f_\lambda)))(w)=(p_\lambda(\varpi(f_\lambda)))(w)=f_\lambda(w)$$

なので, $\vartheta\varpi(f_\lambda)=(f_\lambda)$. $(\varpi\vartheta(f))(w)=((p_\lambda f)(w))=f(w)$. よって $\varpi\vartheta(f)=f$. 以上により, $\vartheta=\varpi^{-1}$ である. □

(4.3) Λ は集合, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ および $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Λ を添字集合に持つ集合族とする．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して, $f_\lambda : M_\lambda \to N_\lambda$ は写像のとき, 族 (f_λ) は (M_λ) から (N_λ) への集合族の射であるうと称し, 単に $(f_\lambda) : (M_\lambda) \to (N_\lambda)$ と書いたりする．このとき, 写像 $\prod f_\lambda : \prod M_\lambda \to \prod N_\lambda$ を $(\prod f_\lambda)((m_\lambda)) = (f_\lambda(m_\lambda))$ で定義する．これを**写像の直積**という．

4.4 演習. 以上の状況で, さらに環 S, R が与えられ, (M_λ), (N_λ) が (S,R) 両側加群で, 各 f_λ が (S,R) 準同型だとする．(このとき $(f_\lambda) : (M_\lambda) \to (N_\lambda)$ が (S,R) 加群の族の射であるということにする)．このとき, $\prod f_\lambda : \prod M_\lambda \to \prod N_\lambda$ も (S,R) 準同型であることを示せ.

(4.5) $\prod_\lambda$ は関手性をもつ． $\prod_\lambda 1_{M_\lambda} = 1_{\prod_\lambda M_\lambda}$ だし, $(\prod_\lambda g_\lambda)\circ(\prod_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda(g_\lambda\circ f_\lambda)$. 各自確かめよ.

4.6 演習. (4.2) の同型

$$\varpi : \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_S(W, M_\lambda) \to \operatorname{Hom}_S(W, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$$

は自然同型である．つまり, (ϖ は同型であって) $h : W' \to W$ が (S,T) 準同型, $(g_\lambda) : (M_\lambda) \to (M'_\lambda)$ が (S,R) 加群の族の射であるとするときに, 図式

$$\begin{CD}
\prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_S(W, M_\lambda) @>{\varpi}>> \operatorname{Hom}_S(W, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)\\
@V{\prod_\lambda \operatorname{Hom}_S(h, g_\lambda)}VV @VV{\operatorname{Hom}_S(h, \prod g_\lambda)}V\\
\prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_S(W', M'_\lambda) @>{\varpi}>> \operatorname{Hom}_S(W', \prod_{\lambda\in\Lambda} M'_\lambda)
\end{CD}$$

は可換である (数学の問題で主張だけ示されている形のものは, 「. . . であることを示せ」が省かれていると思って下さい).

4.7 定理 (直積の完全性 (exactness))**.** Λ は集合, $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Λ を添字集合に持つ $\mathbb{Z}$ 加群の族であり, 各 $(f_\lambda) : (L_\lambda) \to (M_\lambda)$ および, $(g_\lambda) : (M_\lambda) \to (N_\lambda)$ は $\mathbb{Z}$ 加群の族の射とする．このとき, もし各 λ について

$$L_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} N_\lambda$$

が完全列ならば,

$$\prod L_\lambda \xrightarrow{\prod f_\lambda} \prod M_\lambda \xrightarrow{\prod g_\lambda} \prod N_\lambda$$

も完全列である.

証明. 関手性によって, $(\prod g_\lambda)(\prod f_\lambda) = \prod(g_\lambda f_\lambda) = \prod 0 = 0$. よって $\operatorname{Ker}(\prod g_\lambda) \supset \operatorname{Im}(\prod f_\lambda)$.

次に $(m_\lambda) \in \operatorname{Ker}(\prod g_\lambda)$ とする. $(\prod g_\lambda)(m_\lambda) = (g_\lambda m_\lambda) = 0$ なので, 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $m_\lambda \in \operatorname{Ker} g_\lambda = \operatorname{Im} f_\lambda$. よって, 各 λ について $f_\lambda^{-1}(m_\lambda)$ は空ではないので, 直積集合 $\prod_\lambda f_\lambda^{-1}(m_\lambda)$ も選択公理によって空ではない. よって, ある $(l_\lambda) \in \prod_\lambda f_\lambda^{-1}(m_\lambda)$ がとれるが, $(\prod f_\lambda)(l_\lambda) = (f_\lambda(l_\lambda)) = (m_\lambda)$ なので, $(m_\lambda) \in \operatorname{Im}(\prod f_\lambda)$. よって $\operatorname{Ker}(\prod g_\lambda) \subset \operatorname{Im}(\prod f_\lambda)$.

以上により, $\operatorname{Ker}(\prod g_\lambda) = \operatorname{Im}(\prod f_\lambda)$ が示され, 問題の列は完全列であることがわかった. □

(4.8) (M_λ) が左 R 加群の族とする. $\delta_{\mu\lambda} : M_\lambda \to M_\mu$ を $m \in M_\lambda$ について $\delta_{\mu\lambda}(m) = m$ $(\lambda = \mu)$, $\delta_{\mu\lambda}(m) = 0$ $(\lambda \neq \mu)$ で定めることにより, 定義する. $\delta_{\mu\lambda}$ は左 R 加群の準同型である. (4.2) により, 左 R 加群の準同型 $\iota_\lambda : M_\lambda \to \prod_\lambda M_\lambda$ が $\iota_\lambda = \varpi((\delta_{\mu\lambda}))$ で定まる. すなわち, $\iota_\lambda(m) = (\delta_{\mu\lambda}(m))$ である. $p_\lambda\iota_\lambda(m) = \delta_{\lambda\lambda}(m) = m$ なので, $p_\lambda\iota_\lambda = 1_{M_\lambda}$ である. 1_{M_λ} は単射なので, ι_λ も単射である. そこで, 以後 M_λ と $\iota_\lambda(M_\lambda)$ を同一視し, $M_\lambda \subset \prod_\lambda M_\lambda$ であるとみなす.

(4.9) M が左 R 加群とする. M の R 部分加群の集合 Γ に対して, $\bigcup_{N\in\Gamma} N$ で生成される M の部分加法群を $\sum_{N\in\Gamma} N$ と書いて, Γ に属する N の**和** **(sum)** という. Γ の和ともいう. これは M の R 部分加群にもなっているので, $\bigcup_{N\in\Gamma} N$ で生成される M の R 部分加群でもある. $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が M の R 部分加群の族のときは, 集合 $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の和を $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ で表し, (M_λ) の和, もしくは M_λ の和という.

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{m \in M \mid \exists r \geq 0\ \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda\ \exists m_i \in M_{\lambda_i}\ m = m_1 + \cdots + m_r\}.$$

(4.10) $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が左 R 加群の族のとき, 直積 $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ 内での M_λ の和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ を (M_λ) の, あるいは M_λ の**直和** **(direct sum)** と呼んで, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ で表す. あとで出てくる内部直和と区別したいときは **外部直和** **(external direct sum)** と呼んでも良い. したがって, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ であり, $(m_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ に属する必要充分条件は有限個の λ を除くと $m_\lambda = 0$ となっていることである. $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ の元 (m_λ) (ただし $m_\lambda \neq 0$ である λ は有限個) はしばしば $\sum_\lambda m_\lambda$ とも書かれる. この和は実質有限和であるから錯覚の心配はないが, $\prod_\lambda M_\lambda$ の一般の元 (m_λ) を $\sum_\lambda m_\lambda$ と書くことは本講義では避ける.

(4.11) 特に $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ が有限集合のとき, 直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ と直和 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は等しくなる. 直積とみればもちろん $M_{\lambda_1} \times \cdots \times M_{\lambda_n}$ と書いて

よいが, 直和とみるときは $M_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_n}$ とも書く.

(4.12) M_λ から $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ への包含は i_λ と表すことにする.

(4.13) $(f_\lambda) : (M_\lambda) \to (N_\lambda)$ が左 R 加群の族の射であるとき, 容易に分かるように, $\prod f_\lambda$ は $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ を $\bigoplus_\lambda N_\lambda$ に写す. 誘導される準同型 $\bigoplus_\lambda M_\lambda \to \bigoplus_\lambda N_\lambda$ を $\bigoplus f_\lambda$ で表す. これを準同型の**直和**という. 直和は関手性を持つ. $\bigoplus 1_{M_\lambda} = 1_{\bigoplus M_\lambda}$ であり, $(\bigoplus g_\lambda)(\bigoplus f_\lambda) = \bigoplus(g_\lambda f_\lambda)$.

4.14 補題. $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が (S, R) 両側加群の族とする. W は左 (S, T) 両側加群とする. このとき,

$$\nu = \nu_{(M_\lambda),W} : \mathrm{Hom}_S(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, W) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W)$$

が $(p_\lambda\nu(f))(m) = f(i_\lambda(m)) = f(m)$ で定まり, ν は (R, T) 加群の同型である. ここに $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W) \to \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W)$ は射影である. ν は自然同型である. すなわち, $h : W \to W'$ が (S, T) 準同型, $(g_\lambda) : (M_\lambda) \to (M'_\lambda)$ が (S, R) 両側加群の族の射とするとき,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, W) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_S(\bigoplus_\lambda g_\lambda, h)"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W) \arrow[d, "\prod \mathrm{Hom}_S(g_\lambda, h)"] \\
\mathrm{Hom}_S(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M'_\lambda, W') \arrow[r, "\nu"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M'_\lambda, W')
\end{tikzcd}$$

は可換である.

証明. 各 λ に対して $p_\lambda\nu(f) \in \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W)$ を定義したのだから, $\nu(f) = (p_\lambda\nu(f)) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W)$ が定義された. $r \in R$, $t \in T$ に対して, $\nu(rft) = r\nu(f)t$ であるかどうかは, $(p_\lambda\nu(rft)) = (p_\lambda(r\nu(f)t))$ と同じなので, 両辺に任意の λ についての p_λ をかけて確認される. $(p_\lambda\nu(rft))(m) = (rft)(m) = f(mr)t$, $(p_\lambda(r\nu(f)t))(m) = (r\nu(f)t)(m) = (\nu(f)(mr))t = f(mr)t$ なので確認された.

ν が逆写像を持つことを示せば良い.

$$\mu : \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_S(M_\lambda, W) \to \mathrm{Map}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, W)$$

を $(\mu((f_\lambda)))(m_\lambda) = \sum_\lambda f_\lambda m_\lambda$ で定める. この右辺は $m_\lambda \neq 0$ となる λ が有限

個なので, 実質有限和で意味を持つ.

$$\mu((f_\lambda))(s((m_\lambda)+(m'_\lambda)))=\mu((f_\lambda))((s(m_\lambda+m'_\lambda)))=\sum_\lambda f_\lambda(s(m_\lambda+m'_\lambda))$$
$$=s((\sum_\lambda m_\lambda)+(\sum_\lambda m'_\lambda))=s(\mu((f_\lambda))(m_\lambda)+\mu(f_\lambda)(m'_\lambda))$$

であり, $\mu(f_\lambda)\in \operatorname{Hom}_S(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, W)$ であるので, μ は $\prod_{\lambda\in\Lambda}\operatorname{Hom}_S(M_\lambda, W)$ から $\operatorname{Hom}_S(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, W)$ への写像である.

$\sum_\lambda m_\lambda \in \bigoplus_\lambda M_\lambda$ のとき,

$$(\mu\nu(f))(\sum_\lambda m_\lambda)=\sum_\lambda (p_\lambda\nu(f))m_\lambda=\sum_\lambda f(m_\lambda)=f(\sum_\lambda m_\lambda).$$

また, $m\in M_\lambda$ に対して, $(p_\lambda\nu\mu(f_\lambda))(m)=(\mu(f_\lambda))(m)=f_\lambda(m)$ となり, $\nu\mu(f_\lambda)=(f_\lambda)$ がわかる. 以上により, μ は ν の逆写像であり, したがって ν は同型である.

次に自然性を示す. $f\in\operatorname{Hom}_S(\bigoplus_\lambda M_\lambda, W)$ と $\lambda\in\Lambda$ と $m'\in M'_\lambda$ に対して,

$$(p_\lambda(\prod \operatorname{Hom}_S(g_\lambda,h))\nu f)(m')=(\operatorname{Hom}_S(g_\lambda,h)p_\lambda\nu f)(m')=(hfg_\lambda)(m').$$

一方,

$$(p_\lambda\nu\operatorname{Hom}_S(\bigoplus_\lambda g_\lambda,h)f)(m')=(\operatorname{Hom}_S(\bigoplus_\lambda g_\lambda,h)f)(m')=(hfg_\lambda)(m').$$

両者が一致するので可換性が示された. □

4.15 補題. R が環, M が左 R 加群, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が M の R 部分加群の族とする. $j_\lambda: M_\lambda\to M$ を埋入とするとき, $f:=\nu^{-1}(j_\lambda):\bigoplus_\lambda M_\lambda\to M$ を考える. 次は同値.

1 f は単射.

2 $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ が Λ の相異なる元で, $m_i\in M_{\lambda_i}$ $(i=1,\dots,r)$ のとき, M において $m_1+\cdots+m_r=0$ ならば $m_1=\cdots=m_r=0$ である.

3 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して, M の中で $M_\lambda\cap(\sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} M_\mu)=0$.

これらのとき, $f:\bigoplus_\lambda M_\lambda\to\sum_\lambda M_\lambda$ は同型である. ここに $\sum_\lambda M_\lambda$ は M 内での和である.

補題の条件が成立するとき, $f : \bigoplus_\lambda M_\lambda \to \sum_\lambda M_\lambda$ が同型であることから, 和 $\sum_\lambda M_\lambda$ が直和であるといい, M の部分加群 $\sum_\lambda M_\lambda$ のことを記号 $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ で表す. これを (M_λ) の (または M_λ の) 直和または**内部直和 (internal direct sum)** という. 同型なので, 内部直和と外部直和は区別しないことが多い. ただし, つぎの証明では直和はすべて外部直和を表す (まだ補題が証明されていない以上, 混同はよくない).

証明. **1**$\Rightarrow$**2**. $\lambda \in \Lambda$ について, $m_\lambda = m_i$ $(\lambda = \lambda_i)$, $m_\lambda = 0$ (それ以外) とおいて (m_λ) を決めるとこれは $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ の元であり, $f(m_\lambda) = m_1 + \cdots + m_r$. f が単射なので, $m_1 + \cdots + m_r = 0$ と仮定すると, $(m_\lambda) = 0$. よって, $m_1 = \cdots = m_r = 0$.

2$\Rightarrow$**1**. f が単射でないとして, $(m_\lambda) \in \operatorname{Ker} f \setminus 0$ とする. このとき, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} = \{\lambda \in \Lambda \mid m_\lambda \neq 0\}$ ととれる. $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なるようにとれ, $r \geq 1$ である. $f((m_\lambda)) = m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_r} = 0$. よって $m_{\lambda_1} = \cdots = m_{\lambda_r} = 0$. これは $(m_\lambda) \neq 0$ に反する.

2$\Rightarrow$**3**. そうでないとすると, $m \in (M_\lambda \cap (\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} M_\mu)) \setminus \{0\}$ がとれ, $m \in M_\lambda$ であると同時に $m = m_1 + \cdots + m_r$ ($m_i \in M_{\mu_i}$, $\mu_i \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ で, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ は相異なる) と表示出来る. このとき, $m - m_1 - m_2 - \cdots - m_r = 0$ であることと, $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_r$ が相異なることから, $m = m_1 = \cdots = m_r = 0$ となり, m の取り方に反する.

3$\Rightarrow$**2**. **2** が不成立として, そのような $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ と $m_1, \ldots, m_r$ の中で r が最小のものをとる. すると $m_i \neq 0$ である. ところが, $m_1 = -(m_2 + \cdots + m_r) \in M_{\lambda_1} \cap (\sum_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda_1\}} M_\mu)$ だから $m_1 = 0$ でなければならず, これは矛盾である.

これで 3 条件の同値が示された. これらの条件が成り立つ時, 一般に f は全射なので, f は全単射となり, 同型である. $\square$

4.16 定理 (直和の完全性)**.** Λ は集合, $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は Λ を添字集合に持つ $\mathbb{Z}$ 加群の族であり, 各 $(f_\lambda) : (L_\lambda) \to (M_\lambda)$ および, $(g_\lambda) : (M_\lambda) \to (N_\lambda)$ は $\mathbb{Z}$ 加群の族の射とする. このとき, もし各 λ について

$$L_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} N_\lambda$$

が完全列ならば,

$$\bigoplus L_\lambda \xrightarrow{\bigoplus f_\lambda} \bigoplus M_\lambda \xrightarrow{\bigoplus g_\lambda} \bigoplus N_\lambda$$

も完全列である.

証明. 今度は直積の場合とは違い, 選択公理は不要である.

関手性によって, $(\bigoplus g_\lambda)(\bigoplus f_\lambda) = \bigoplus(g_\lambda f_\lambda) = \bigoplus 0 = 0$. よって $\mathrm{Ker}(\bigoplus g_\lambda) \supset \mathrm{Im}(\bigoplus f_\lambda)$.

次に $m = (m_\lambda) \in \mathrm{Ker}(\bigoplus g_\lambda)$ とする. $(\bigoplus g_\lambda)(m_\lambda) = (g_\lambda m_\lambda) = 0$ なので, 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $m_\lambda \in \mathrm{Ker}\, g_\lambda = \mathrm{Im}\, f_\lambda$.

ところで, $(m_\lambda) \in \bigoplus M_\lambda$ だから, ある相異なる有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が存在して, $m = m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_r}$ である. 各 i について, $m_{\lambda_i} = f_\lambda(l_{\lambda_i})$ と書けるので, $m = (\bigoplus f_\lambda)(l_{\lambda_1} + \cdots + l_{\lambda_r})$ であり, $m \in \mathrm{Im}(\bigoplus f_\lambda)$. これは $\mathrm{Ker}(\bigoplus g_\lambda) \subset \mathrm{Im}(\bigoplus f_\lambda)$ を示す.

以上により, $\mathrm{Ker}(\bigoplus g_\lambda) = \mathrm{Im}(\bigoplus f_\lambda)$ であり, 求める完全性が示された. □

(4.17) R が環, $f : M \to N$ が左 R 加群の準同型とする. f が**分裂単射** **(split monomorphism)** であるとは, ある R 準同型 $g : N \to M$ が存在して $gf = 1_M$ であることをいう. f が**分裂全射** **(split epimorphism)** であるとは, ある R 準同型 $g : N \to M$ が存在して $fg = 1_N$ であることをいう. 簡単に分かるように, 分裂単射は単射だし, 分裂全射は全射である.

4.18 定理. R は環とする. 左 R 加群の列

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0 \tag{4.18.1}$$

について, 次は同値である.

1 (4.18.1) は完全で i は分裂単射である.

2 (4.18.1) は完全で p は分裂全射である.

3 ある R 準同型 $q : M \to L$ および $j : N \to M$ が存在して, $qi = 1_L$, $pj = 1_N$, $iq + jp = 1_M$ である.

これらの同値な条件をみたすとき, 列 (4.18.1) は**分裂する短完全列**という.

証明. **3⇒1,2**. 定義から明らかに i は分裂単射で p は分裂全射である. よって, $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, p$ をいえばよい. $pi = piqi = p(1-jp)i = (p-pjp)i = (p-p)i = 0$. よって, $\mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}\, p$. 一方, $\alpha \in \mathrm{Ker}\, p$ なら, $\alpha = (iq + jp)\alpha = iq\alpha \in \mathrm{Im}\, i$. よって $\mathrm{Im}\, i \supset \mathrm{Ker}\, p$. 以上により, $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, p$.

1⇒3. 定義により, ある R 準同型 $q : M \to L$ が存在して, $qi = 1_L$ である. そこで, $1_M - iq : M \to M$ を考えると, $(1_M - iq)i = i - iqi = i - i1_L = i - i = 0$. よって, $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, i \subset \mathrm{Ker}(1_M - iq)$ で p は全射だから, ある R 準同型 $j : N \to M$ であって, $jp = 1_M - iq$ であるものが一意的に存在する. $(1_N - pj)p = p - pjp = p(1_M - jp) = piq = 0$. p は全射なので, $1_N - pj = 0$. 求めるものが構成された.

2⇒3. 定義により, ある R 準同型 $j : N \to M$ が存在して, $pj = 1_N$ である. $p(1_M - jp) = p - pjp = 0$. よって, $\mathrm{Im}(1_M - jp) \subset \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, i$. i は単射だから, ある R 準同型 $q : M \to L$ であって $iq = 1_M - jp$ であるものが存在する. $i(1_L - qi) = i - iqi = (1_M - qi)i = jpi = 0$. i が単射なので, $1_L - qi = 0$. 求めるものが構成された. □

4.19 注意. 左 R 加群の列 (4.18.1) が完全かどうかは, R 加群の構造を忘れて, $\mathbb{Z}$ 加群とみて判定しても事情は変わらない. ところが, (4.18.1) が左 R 加群の分裂する短完全列であれば, $\mathbb{Z}$ 加群の列としても分裂する短完全列であるが, 逆は一般には成り立たない. R 加群の列として分裂することは, q や j が R 準同型であることまで要請するからである.

4.20 演習. S, R, T が環, 列 (4.18.1) が分裂する (S, R) 両側加群の短完全列とする. このとき, (R, T) 両側加群 W について,

$$0 \to L \otimes_R W \xrightarrow{i \otimes 1_W} M \otimes_R W \xrightarrow{p \otimes 1_W} N \otimes_R W \to 0 \tag{4.20.1}$$

は (S, T) 両側加群の分裂する短完全列である.

4.21 演習. 列 (4.18.1) が (分裂しない) 短完全列で, (4.20.1) が完全列ではないような例を示せ.

4.22 演習. 体上の加群の短完全列は分裂する.

4.23 演習. $R = k[x]$ は体 k 上 1 変数多項式環とする. このとき完全列

$$0 \to R \xrightarrow{x} R \to R/xR \to 0$$

について, k 加群の完全列としては分裂するが, R 加群の完全列としては分裂しない.

4.24 補題. R, S, T は環, (M_λ) は (R, T) 両側加群の族, E は (S, R) 両側加群とする. $i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ を埋入とする. このとき, (S, T) 加群の準同型

$$\nu^{-1}_{(E \otimes_R M_\lambda), E \otimes_R (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda)}((1_E \otimes i_\lambda)) : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (E \otimes_R M_\lambda) \to E \otimes_R (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda)$$

は自然同型である. この同型によって, $e \otimes m$ ($e \in E$, $m \in M_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$)) は $e \otimes m$ に写る.

証明. $f=\nu^{-1}_{(E\otimes_R M_\lambda),E\otimes_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda)}((1_E\otimes i_\lambda))$ が実際に $e\otimes m$ を $e\otimes m$ に写すことは定義に戻れば明らかである.

f の逆写像を構成しよう. $i'_\lambda : E\otimes_R M_\lambda\to\bigoplus(E\otimes_R M_\lambda)$ を自然な埋入とする. これによって,

$$\Phi(i'_\lambda) : M_\lambda\to\mathrm{Hom}_S(E,\bigoplus(E\otimes_R M_\lambda))$$

が定まる. 具体的には, $(\Phi(i'_\lambda)(m))(e)=e\otimes m$ である. これにより,

$$(\Phi(i'_\lambda))\in\prod_\lambda\mathrm{Hom}_R(M_\lambda,\mathrm{Hom}_S(E,\bigoplus(E\otimes_R M_\lambda)))$$

が定まったので, (R,T) 準同型

$$\nu^{-1}(\Phi(i'_\lambda)) : \bigoplus M_\lambda\to\mathrm{Hom}_S(E,\bigoplus(E\otimes_R M_\lambda))$$

が定まった. 具体的には $\nu^{-1}(\Phi(i'_\lambda))(m)(e)=e\otimes m$ ($\lambda\in\Lambda$, $m\in M_\lambda$, $e\in E$) である. 随伴性により,

$$g=\Phi^{-1}(\nu^{-1}(\Phi(i'_\lambda))) : E\otimes_R(\bigoplus M_\lambda)\to\bigoplus(E\otimes_R M_\lambda)$$

が定まった. Φ の定義によって $g(e\otimes m)=e\otimes m$ ($\lambda\in\Lambda$, $m\in M_\lambda$, $e\in E$) である.

このことから f と g が互いに逆写像であることは容易である.

自然性も生成元の写る場所をみれば良いので容易である. □

4.25 例. R が環, F が左 R 加群, $B\subset F$ とする. F が B を基底 (または 1 次独立基) にもつ左 R 自由加群であるとは, B が F を生成し, かつ B が 1 次独立であることであった. これは, 各 $b\in B$ について $m_b : R\to F$ ($m_b(r)=rb$) が単射で, かつ, $F=\bigoplus_{b\in B}Rb$ であることと同じである.

4.26 演習. 上記を証明せよ.

4.27 例. R が可換環, F_1, F_2 がそれぞれ, B_1, B_2 を基底に持つ R 自由加群とする. このとき, $F_1\otimes_R F_2$ は

$$\{b_1\otimes b_2\mid(b_1,b_2)\in B_1\times B_2\}$$

を基底にもつ自由加群である. 実際

$$F_1\otimes_R F_2\cong(\bigoplus_{b_1\in B_1}Rb_1)\otimes_R(\bigoplus_{b_2\in B_2}Rb_2)\cong\bigoplus_{(b_1,b_2)\in B_1\times B_2}Rb_1\otimes_R Rb_2$$

であり, 各 $(b_1,b_2)\in B_1\times B_2$ について, $Rb_1\otimes_R Rb_2\cong R\otimes_R R\cong R$ である.

(4.28) R が環, M が左 R 加群のとき, $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ を $\mathrm{End}_R(M)$ で表す. これはもちろん $\mathbb{Z}$ 加群であるが, さらに, 写像の合成を積として環である. この環を M の**自己準同型環 (endomorphism ring)** または End **環**という. $\mathrm{End}_R(M)$ は自然に M に作用しており, M は左 $\mathrm{End}_R(M)$ 加群である. R が可換環のときには $\mathrm{End}_R(M)$ は R 代数になっている. M が右 R 加群であっても M は左 (写像はいつも左から作用することにしているので) $\mathrm{End}_R(M)$ 加群であるが, このとき, M は $(\mathrm{End}_R(M), R)$ 両側加群である.

(4.29) 環 R の元 e が**ベキ等元 (idempotent)** であるとは, $e^2 = e$ であることをいう. 0 と 1 はベキ等元である. e がベキ等元であれば, $1-e$ もベキ等元である. また, $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$. 同様に, $(1-e)e = 0$ である. $e_1, \ldots, e_n$ が R の**直交ベキ等元 (orthogornal idempotent)** であるとは, $e_1, \ldots, e_n$ が R のベキ等元で, $e_ie_j = 0$ $(i \neq j)$ が成立することをいう. このとき, $i_1, \ldots, i_l$ が $\{1, \ldots, n\}$ の相異なる元ならば, $e_{i_1} + \cdots + e_{i_l}$ も R のベキ等元である. R の直交ベキ等元 $e_1, \ldots, e_n$ が**完全系**をなすとは, $e_1 + \cdots + e_n = 1$ であることをいう. $e_1, \ldots, e_n$ が直交ベキ等元ならば, $e_1, \ldots, e_n, 1 - e_1 - \cdots - e_n$ は直交ベキ等元の完全系になる.

左 R 加群 M について, $\mathrm{End}_R M$ のベキ等元とは, R 準同型 $e : M \to M$ で $e^2 = e$ をみたすもののことである. このような e を M の**射影子 (projector)** という.

4.30 命題. R が環, M は左 R 加群とし, $n \geq 1$ とする. このとき, 次のデータは (本質的に) 等価であり, (本質的に) 1 対 1 に対応する.

1 M の R 部分加群 $M_1, \ldots, M_n$ であって, $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ であるもの.

2 R 加群 $M_1, \ldots, M_n$ と, $i = 1, \ldots, n$ について与えられた R 準同型 $j_i : M_i \to M$ と $p_i : M \to M_i$ であって, $p_ij_i = 1_{M_i}$, $p_ij_l = 0$ $(i \neq l)$, $j_1p_1 + \cdots + j_np_n = 1_M$ をみたすもの.

3 $\mathrm{End}_R M$ の直交ベキ等元の完全系 $e_1, \ldots, e_n$. いいかえると, M の射影子 $e_1, \ldots, e_n$ で $e_ie_l = 0$ $(i \neq l)$ と $e_1 + \cdots + e_n = 1$ をみたすもの.

証明. **1⇒2** $M_1, \ldots, M_n$ は与えられている. また, $m \in M$ は $m = m_1 + \cdots + m_n$ $(m_i \in M_i)$ と一意的に表されるので, m から m_i が一意的に決まり, $p_i : M \to M_i$ が $p_i(m) = m_i$ によって得られるが, これが R 準同型であることは容易である. $j_i : M_i \hookrightarrow M$ を埋入とすれば, 条件が成り立つことは容易である.

2⇒3 $e_i = j_ip_i$ とおけば容易である.

3⇒1 $M_i = e_iM = \operatorname{Im} e_i$ とおけば, M_i は M の R 部分加群である. $m \in M$ は $m = 1m = e_1m + \cdots + e_nm \in M_1 + \cdots + M_n$ と書けるので, $M_1 + \cdots + M_n = M$. また, $i = 1, \ldots, n$ について, $\sum_{l \neq i} e_l = 1 - e_i$ なので, $m \in M_i \cap \sum_{l \neq i} M_l$ とすると, $m = e_im_1 = (1 - e_i)m_2$ と書ける. すると, $m = e_im_1 = e_i^2m_1 = e_i(e_im_1) = e_i(1 - e_i)m_2 = 0$. よって, $M_i \cap \sum_{l \neq i} M_l = 0$ であり, $M = M_1 + \cdots + M_n$ は直和であり, $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

上の対応で, **1⇒2⇒3⇒1** とたどると元にもどる. 実際, $e_i(m_1 + \cdots + m_n) = m_i$ であるので, $e_iM = M_i$ に戻ることは容易.

次に, **3⇒1⇒2⇒3** とたどっても元にもどる. 実際, $m = e_1m + \cdots + e_nm$ が $m \in M$ の $M_1, \ldots, M_n$ の元による一意的な表示なので, $p_i(m) = e_im$, $j_i(e_im) = e_im$. すると, $j_ip_i(m) = e_im$ なので, $j_ip_i = e_i$ となって元の e_i に戻っている.

次に, **2⇒3⇒1⇒2** とたどってみよう. このとき, 最終的に得られる M_i の方を M_i' と書くと, p_i は分裂全射なので, $M_i' = \operatorname{Im}(j_ip_i) = \operatorname{Im}(j_i)$. よって, $h_i : M_i \to M_i'$ (ただし $h_i(m) = j_i(m)$) は同型であり, まったく同一の加群にもどってはいないが, 本質的には元に戻っている. 最終的に得られた j_i を j_i' とおくと, $j_i' : M_i' \hookrightarrow M$ は埋入であり, $j_i'h_i = j_i$ なる関係があるので, 同型 h_i を通した同一視によって, j_i' と j_i は同一視される. 最終的に得られる $p_i : M \to M_i'$ を p_i' と書くと, $p_i'm = (j_ip_i)(m) = h_ip_im$ なので, $p_i' = h_ip_i$ であり, h_i を通した同一視によって, p_i' と p_i は同一視される.

「本質的に」という言葉の意味は以上のことを指している. □

4.31 系. R が環,

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$$

が分裂する左 R 加群の完全列とするとき, $M \cong L \oplus N$ である.

証明. (4.18) によって, $q : M \to L$ と $j : N \to M$ であって, $qi = 1_L$, $pj = 1_N$, $iq + jp = 1_M$ をみたすものが存在する. また, $pi = 0$ である. また, $qj = qjpj = q(1 - iq)j = (q - q)j = 0$. よって, $M_1 = L$, $M_2 = N$, $i_1 = i$, $i_2 = j$, $p_1 = q$, $p_2 = p$ とおいて, (4.30) を用いれば, $M \cong L \oplus N$ である ($i(L)$ を L に, $j(N)$ を N に, それぞれ同一すれば, $M = L \oplus N$ と思える). □

5　多重複体と複体の $\otimes$ と Hom

(5.1)　R は環とする．$r \geq 0$ に対して，$\mathbb{E} = (\mathbb{E}, d(1), d(2), \ldots, d(r))$ が左 R 加群の r **重複体 (r-fold complex)** であるとは，各 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ に対して $\mathbb{E}^\lambda$ が与えられ，各 $1 \leq i \leq r$ と各 λ に対して $d(i)^\lambda : \mathbb{E}^\lambda \to \mathbb{E}^{\lambda+\varepsilon_i}$ は R 準同型で，$d(i)^{\lambda+\varepsilon_i} d(i)^\lambda = 0$, $d(j)^{\lambda+\varepsilon_i} d(i)^\lambda = d(i)^{\lambda+\varepsilon_j} d(j)^\lambda$ $(i \neq j)$ が成立することをいう．ここに $\varepsilon_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (ただし，1 は第 i 成分)．したがって，複体と 1 重複体は同じことである．また，$r = 0$ の場合，$\mathbb{Z}^0 = \{0\}$ であるので，左 R 加群 $\mathbb{E}^0$ が与えられ，$d(i)$ は一切考えない．結局 0 重複体を与えることは，単に加群をひとつ与えることに他ならない．

今はコチェイン複体のように上ツキで表示した index を下付きにして，index が ε_i ずつ減っていく，チェイン複体式の表示も随時行う．つまり，$\mathbb{E}_\lambda = \mathbb{E}^{-\lambda}$, $d(i)_\lambda = d(i)^{-\lambda}$ と取り決めする．

(5.2)　特に $r = 2$ の場合が大事で，2 重複体は **double complex** ともいう．2 重複体 $(\mathbb{E}, d, d')$ を図示すると，

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{E}^{i-1,j+1} & \xrightarrow{d^{i-1,j+1}} & \mathbb{E}^{i,j+1} & \xrightarrow{d^{i,j+1}} & \mathbb{E}^{i+1,j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i-1,j}} & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i,j}} & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i+1,j}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{E}^{i-1,j} & \xrightarrow{d^{i-1,j}} & \mathbb{E}^{i,j} & \xrightarrow{d^{i,j}} & \mathbb{E}^{i+1,j} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i-1,j-1}} & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i,j-1}} & & \uparrow{\scriptstyle (d')^{i+1,j-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{E}^{i-1,j-1} & \xrightarrow{d^{i-1,j-1}} & \mathbb{E}^{i,j-1} & \xrightarrow{d^{i,j-1}} & \mathbb{E}^{i+1,j-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

といった感じになる．ここで，各列および行はそれぞれ複体になっており，しかもすべての小さい四角形は可換図式になっていることが要請されている．

ただし，2 重複体を図示する方法は定番があるという訳では無いようである．複体を図示するには，矢印は左から右に向かって進む，というのが基本だが，2 重複体を図示するには，第 1 成分 (ここでは i) が増える (コチェイン複体的にでなく，チェイン複体風に書けば減る) のが左から右への矢印なのは良いとして，第 2 成分 (ここでは j) が増える (つまり矢印が進んで行く) 向きがここでは下から上であるが，上から下という流儀もある．教科書 [Kaw1],

[Kaw2] では両方の流儀が混在している. ここでは, 座標平面で座標 (i,j) の位置に $\mathbb{E}^{i,j}$ が置かれているかのように加群を配置している. この流儀はスペクトル系列を扱うときにはみな大体そうしているように思える.

(5.3) S, R, T が環, $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}}(1), \dots, d_{\mathbb{E}}(r))$ が (S,R) 両側加群の r 重複体, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, d_{\mathbb{F}}(1), \dots, d_{\mathbb{F}}(s))$ が (R,T) 両側加群の s 重複体のとき, $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ の R 上の**ジョインされたテンサー積 (joined tensor product)**

$$\mathbb{E} \otimes_R^J \mathbb{F} = (\mathbb{E} \otimes_R^J \mathbb{F}, (d_{\mathbb{E}\otimes_R\mathbb{F}}(j))_{j=1,\dots,r+s})$$

を $(\mathbb{E} \otimes_R^J \mathbb{F})^{(\lambda,\mu)} = \mathbb{E}^\lambda \otimes_R \mathbb{E}^\mu$ で定め,

$$d^{(\lambda,\mu)}_{\mathbb{E}\otimes_R^J\mathbb{F}}(j) = \begin{cases} d^\lambda_{\mathbb{E}}(j) \otimes 1_{\mathbb{F}^\mu} & (j = 1, \dots, r), \\ 1_{\mathbb{E}^\lambda} \otimes d^\mu_{\mathbb{F}}(j-r) & (j = r+1, \dots, r+s) \end{cases}$$

で定義すると (S,T) 両側加群の $r+s$ 重複体になっていることが容易に確かめられる. ここに, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ と $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ に対して, $(\lambda, \mu) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Z}^{r+s}$ (λ と μ の**ジョイン**) である. 特に $r = s = 1$ の場合を考えると, 複体と複体のテンソル積で 2 重複体が得られる.

(5.4) もっと一般に, $R_0, \dots, R_n$ が環で, $\mathbb{E}(k)$ $(k = 1, \dots, n)$ が (R_k, R_{k+1}) 両側加群の r_k 重複体の時, 同様の方法で (R_0, R_n) 両側加群の $r_1 + \cdots + r_n$ 重複体 $\mathbb{E}(1) \otimes^J_{R_1} \cdots \otimes^J_{R_{n-1}} \mathbb{E}(n)$ を得る.

(5.5) (R,S) 両側加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ に対して, $(S^{\mathrm{op}}, R^{\mathrm{op}})$ 両側加群の r 重複体 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}$ ($\mathbb{F}$ の**逆 (opposite)**) を $(\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^\lambda = (\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}$ で定める. ここに, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して, $\lambda^{\mathrm{op}} = (\lambda_r, \dots, \lambda_1) \in \mathbb{Z}^r$ (λ の**逆 (opposite)**) である. 言い換えると, $\lambda^{\mathrm{op}}_i = \lambda_{r+1-i}$ である.

$$d_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}(j)^\lambda : (\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} \to (\mathbb{F}^{(\lambda+\varepsilon_j)^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} = (\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}+\varepsilon_{r+1-j}})^{\mathrm{op}}$$

は $(d_{\mathbb{F}}(r+1-j)^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}$ のことであると定義する.

たとえば, $\mathbb{F}$ が 2 重複体の時, $(\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^{(3,8)} = (\mathbb{F}^{(8,3)})^{\mathrm{op}}$ である. 番号付けの順番を逆にする理由は, 次の通りである.

(5.6) 上の通りに約束すると, (S,R) 両側加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ と (R,T) 加群の s 重複体 $\mathbb{G}$ に対して, $\tau : (\mathbb{F} \otimes^J_R \mathbb{G})^{\mathrm{op}} \to \mathbb{G}^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} \mathbb{F}^{\mathrm{op}}$ は $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 両側加群の $r+s$ 重複体の同型である.

$$\begin{aligned}((\mathbb{F} \otimes^J_R \mathbb{G})^{\mathrm{op}})^{(\mu,\lambda)} &= ((\mathbb{F} \otimes^J_R \mathbb{G})^{(\lambda^{\mathrm{op}},\mu^{\mathrm{op}})})^{\mathrm{op}} = (\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}} \otimes^J_R \mathbb{G}^{\mu^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} \\ &\cong (\mathbb{G}^{\mu^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} \otimes_{R^{\mathrm{op}}} (\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} = (\mathbb{G}^{\mathrm{op}})^\mu \otimes_{R^{\mathrm{op}}} (\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^\lambda = (\mathbb{G}^{\mathrm{op}} \otimes^J_{R^{\mathrm{op}}} \mathbb{F}^{\mathrm{op}})^{(\mu,\lambda)}\end{aligned}$$

順番を逆にしないとうまくいかない.

(5.7) R, S, T が環, $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, (d_{\mathbb{E}}(j)))$ が (R, S) 両側加群の s 重複体, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, (d_{\mathbb{F}}(j)))$ が (R, T) 両側加群の r 重複体のとき, 左加群の **ジョインされた** Hom **複体 (joined Hom complex)**

$$\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = (\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E}, \mathbb{F}), (d_{\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(j)))$$

は

$$\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E}, \mathbb{F})^{(\lambda,\mu)} = \mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E}^{-\mu}, \mathbb{F}^{\lambda})$$

および

$$d_{\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(j)^{(\lambda,\mu)} = \begin{cases} \mathrm{Hom}_R^{J,l}(1_{\mathbb{E}^{-\mu}}, d_{\mathbb{F}}(j)^{\lambda}) & (j = 1, \ldots, r) \\ \mathrm{Hom}_R^{J,l}(d_{\mathbb{E}}(j-r)^{-\mu}, 1_{\mathbb{F}^{\lambda}}) & (j = r+1, \ldots, r+s) \end{cases}$$

によって (S, T) 両側加群の $r + s$ 重複体である.

(5.8) R, S, T が環, $\mathbb{E} = (\mathbb{E}, (d_{\mathbb{E}}(j)))$ が (S, R) 両側加群の s 重複体, $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, (d_{\mathbb{F}}(j)))$ が (T, R) 両側加群の r 重複体のとき,

$$\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = (\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E}, \mathbb{F}), (d_{\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(j)))$$

は

$$\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E}, \mathbb{F})^{(\mu,\lambda)} = \mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E}^{-\mu}, \mathbb{F}^{\lambda})$$

および

$$d_{\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(j)^{(\mu,\lambda)} = \begin{cases} \mathrm{Hom}_R^{J,r}(d_{\mathbb{E}}(j)^{-\mu}, 1_{\mathbb{F}^{\lambda}}) & (j = 1, \ldots, s) \\ \mathrm{Hom}_R^{J,r}(1_{\mathbb{E}^{-\mu}}, d_{\mathbb{F}}(j-s)^{\lambda}) & (j = s+1, \ldots, r+s) \end{cases}$$

によって (T, S) 両側加群の $r + s$ 重複体である. こちらは右加群のジョインされた Hom 複体 (joined Hom complex) と呼ぶ. 左加群の $\mathrm{Hom}^{J,l}$ と右加群の $\mathrm{Hom}^{J,r}$ とで次数付けが違う. その理由は次の通りである.

(5.9) R, S, T が環, $\mathbb{E}$ が (R, S) 両側加群の s 重複体, $\mathbb{F}$ が (R, T) 両側加群の r 重複体のとき, 自然な同一視

$$1 : \mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{E}, \mathbb{F})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}^{J,r}(\mathbb{E}^{\mathrm{op}}, \mathbb{F}^{\mathrm{op}})$$

は $(T^{\mathrm{op}}, S^{\mathrm{op}})$ 両側加群の $r + s$ 重複体の同型になっている.

(5.10)　R が環, $\mathbb{E}$ が右 R 加群の複体, $\mathbb{F}$ が左 R 加群の複体 (つまり $r = s = 1$) の場合に $\mathbb{E} \otimes_R^J \mathbb{F}$ を図示すると

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{E}^{i-1} \otimes_R \mathbb{F}^{j+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i-1}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i} \otimes_R \mathbb{F}^{j+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i+1} \otimes_R \mathbb{F}^{j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{E}^{i-1} \otimes_R \mathbb{F}^{j} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j}"'] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i-1}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i} \otimes_R \mathbb{F}^{j} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j}"'] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i+1} \otimes_R \mathbb{F}^{j} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{E}^{i-1} \otimes_R \mathbb{F}^{j-1} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j-1}"'] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i-1}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i} \otimes_R \mathbb{F}^{j-1} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j-1}"'] \arrow[r, "d_{\mathbb{E}}^{i}\otimes 1"] & \mathbb{E}^{i+1} \otimes_R \mathbb{F}^{j-1} \arrow[u, "1\otimes d_{\mathbb{F}}^{j-1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

となっている. これは確かに ($\mathbb{Z}$ 加群の) 2 重複体である.

(5.11)　R が環, $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ が右 R 加群の複体 ($r = s = 1$) の場合に $\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ を図示すると

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i-1)}, \mathbb{F}^{j+1}) \arrow[u] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-(i-1)})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-i}, \mathbb{F}^{j+1}) \arrow[u] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-i})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i+1)}, \mathbb{F}^{j+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i-1)}, \mathbb{F}^{j}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j})_*"'] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-(i-1)})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-i}, \mathbb{F}^{j}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j})_*"'] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-i})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i+1)}, \mathbb{F}^{j}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j})_*"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i-1)}, \mathbb{F}^{j-1}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j-1})_*"'] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-(i-1)})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-i}, \mathbb{F}^{j-1}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j-1})_*"'] \arrow[r, "(d_{\mathbb{E}}^{-i})^*"] & \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^{-(i+1)}, \mathbb{F}^{j-1}) \arrow[u, "(d_{\mathbb{F}}^{j-1})_*"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

となっている. これは確かに 2 重複体である.

(5.12)　r 重複体から自然に複体 (つまり 1 重複体) を得る方法がある. まず, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して, $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ と定義する.

$\mathbb{E}$ を左 R 加群の r 重複体とする．このとき，左 R 加群の複体 $\mathrm{Tot}\,\mathbb{E}$ を $(\mathrm{Tot}\,\mathbb{E})^n = \prod_{|\lambda|=n} \mathbb{E}^\lambda$ と直積で定める．$d^n((e^\lambda))$ は，各 $\mu \in \mathbb{Z}^r$, $|\mu| = n+1$ に対して，$d^n((e^\lambda))$ の第 μ 成分 $p_\mu d^n((e^\lambda))$ とは

$$
\begin{aligned}
d(1)^{\mu-\varepsilon_1}(e^{\mu-\varepsilon_1}) + (-1)^{\mu_1} d(2)^{\mu-\varepsilon_2}(e^{\mu-\varepsilon_2}) + (-1)^{\mu_1+\mu_2} d(3)^{\mu-\varepsilon_3}(e^{\mu-\varepsilon_3})& \\
+ \cdots + (-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{r-1}} d(r)^{\mu-\varepsilon_r}(e^{\mu-\varepsilon_r})&
\end{aligned}
$$

のことである，と定義することによって定義する．これで確かに複体になっている．$d(i)$ の前についた符号 $(-1)^{\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}}$ は複体にするために必要だが，その符号の選び方には自由度があり，人によって好みがあるので，細かい議論が必要なときには注意が必要であるが，まずは何か符号がつくのだ，程度のおおざっぱな理解からはじめる方が全体像が理解しやすいと思う．$\mathrm{Tot}\,\mathbb{E}$ を $\mathbb{E}$ の**大全複体 (big total complex)** とよぶ．あとで出てくる全複体と混同しないよう注意が必要である．

(5.13) R が環，$\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ は左 R 加群の r 重複体とする．$f = (f^\lambda) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ が (左 R 加群の r 重複体の) **チェイン写像 (chain map)** であるとは，各 λ に対して，左 R 加群の準同型 $f^\lambda : \mathbb{E}^\lambda \to \mathbb{F}^\lambda$ が与えられ，各 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ と $i = 1, \ldots, r$ に対して，$d_{\mathbb{F}}(i)^\lambda f^\lambda = f^{\lambda+\varepsilon_i} d_{\mathbb{E}}(i)^\lambda$ が成立することをいう．コチェイン写像と呼んでも問題ない．これが $r = 1$ の場合の (コ) チェイン写像の概念を一般化していることに注意せよ．

恒等写像 $1_{\mathbb{E}^\lambda}$ を並べたもの $(1_{\mathbb{E}^\lambda})$ を $\mathbb{E}$ の**恒等射 (identity morphism)** といい，$1_{\mathbb{E}}$ と表す．$f = (f^\lambda) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ と $g = (g^\lambda) : \mathbb{F} \to G$ が与えられたとき，**合成 (composite)** gf または $g \circ f$ は $gf = (g^\lambda \circ f^\lambda)$ で定義される．容易にわかるように，$f 1_{\mathbb{E}} = f = 1_{\mathbb{F}} f$ である．また，合成に関する結合法則も明らかであろう．

左 R 加群の r 重複体 $\mathbb{E}$ から $\mathbb{F}$ へのチェイン写像全体のなす集合を $C(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ とか，$C_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $C_{R,r}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ と書く．$f + g = (f^\lambda + g^\lambda)$ を和とする $\mathbb{Z}$ 加群である．零元は**零射 (zero morphism)** $0 = (0) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ である．さらに $\mathbb{E}$ が (R, S) 両側加群の複体，$\mathbb{F}$ が (R, T) 両側加群の複体の場合には，$sft = (sf^\lambda t)$ で $C(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ は (S, T) 両側加群である．

(5.14) $\mathbb{M} = (\mathbb{M}^\lambda)$ が R 加群の r 重複体 $\mathbb{E}$ の**部分複体**とは，各 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ に対して，$\mathbb{E}^\lambda$ の R 部分加群 $\mathbb{M}^\lambda$ が与えられ，各 $i = 1, \ldots, r$ に対して，$d(i)^\lambda(\mathbb{M}^\lambda) \subset \mathbb{M}^{\lambda+\varepsilon_i}$ が成立することをいう．このとき，$d_{\mathbb{E}}(i)$ の制限を $d_{\mathbb{M}}(i)$ として，$\mathbb{M}$ 自身 r 重複体になる．また，$i_\lambda : \mathbb{M}^\lambda \to \mathbb{E}^\lambda$ を埋入とするとき，それを束ねたもの $i = (i_\lambda) : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ を $\mathbb{M}$ から $\mathbb{E}$ への埋入という．これはチェイン写像である．部分複体による商複体も定義される．商複体 $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ は $(\mathbb{E}/\mathbb{M})^\lambda = \mathbb{E}^\lambda/\mathbb{M}^\lambda$

で定義される．バウンダリ写像 $d(i)^\lambda_{\mathbb{E}/\mathbb{M}} : \mathbb{E}^\lambda/\mathbb{M}^\lambda \to \mathbb{E}^{\lambda+\varepsilon_i}/\mathbb{M}^{\lambda+\varepsilon_i}$ は $d(i)^\lambda_{\mathbb{E}} : \mathbb{E}^\lambda \to \mathbb{E}^{\lambda+\varepsilon_i}$ から誘導される写像である．

(5.15)　$f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ が環 R 上の左加群の r 重複体のチェイン写像とする．このとき, $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f^\lambda)$ は $\mathbb{E}$ の部分複体だし, $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Im} f^\lambda)$ は $\mathbb{F}$ の部分複体である．$\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ をそれぞれ f の**核 (kernel)**, **像 (image)** という．商複体 $\mathbb{F}/\operatorname{Im} f$ を $\operatorname{Coker} f$ で表し, f の**余核 (cokernel)** という．

(5.16)　チェイン写像のジョインされたテンサー積, Hom も加群の準同型のテンサー積, Hom とほぼ同様に定義される．

S, R, T が環, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ が (S, R) 両側加群の r 重複体, $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ が (R, T) 両側加群の s 重複体とし, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ が (S, R) 両側加群の r 重複体の間のチェイン写像, $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ が (R, T) 両側加群の s 重複体の間のチェイン写像のとき, $f \otimes^J g : \mathbb{E} \otimes^J_R \mathbb{F} \to \mathbb{E}' \otimes^J_R \mathbb{F}'$ が $(f \otimes^J g)^{(\lambda,\mu)} = f^\lambda \otimes g^\lambda$ で定義される．これは (S, T) 両側加群の $r+s$ 重複体の間のチェイン写像である．これを**チェイン写像のジョインされたテンサー積 (joined tensor product of chain maps)** という．加群のときと同様, $f \otimes^J g$ も関手性をもつ．

また, $f : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ が (R, S) 両側加群の r 重複体の間のチェイン写像, $g : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ が (R, T) 両側加群の s 重複体の間のチェイン写像のとき, $\operatorname{Hom}^{J,l}_R(f, g) : \operatorname{Hom}^{J,l}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to \operatorname{Hom}^{J,l}_R(\mathbb{E}', \mathbb{F}')$ が同様に $\operatorname{Hom}^{J,l}_R(f, g)^{(\mu,\lambda)} = \operatorname{Hom}_R(f^{-\lambda}, g^\mu)$ で定義され, (S, T) 両側加群の $r+s$ 重複体の間のチェイン写像であり, 関手性をもつ．これを**チェイン写像のジョインされた Hom (joined Hom of chain maps)** という．$\operatorname{Hom}^{J,l}_R(1_{\mathbb{E}}, g)$ を g_* と表したり, $\operatorname{Hom}^{J,l}_R(f, 1_{\mathbb{F}})$ を f^* と表したりすることは, 加群の場合と同様である．また, $\operatorname{Hom}^{J,r}_R$ も同様に定義される．

(5.17)　左 R 加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$(\operatorname{tot} \mathbb{F})^n = \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{F}^\lambda \subset \prod_{|\lambda|=n} \mathbb{F}^\lambda = (\operatorname{Tot} \mathbb{F})^n$$

とおく．容易に分かるように $\operatorname{tot} \mathbb{F} = ((\operatorname{tot} \mathbb{F})^n)$ は $\operatorname{Tot} \mathbb{F}$ の部分複体である．$\operatorname{tot} \mathbb{F}$ を $\mathbb{F}$ の**全複体 (total complex)** と呼ぶ．

(5.18)　R が環, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ が左 R 加群の r 重複体, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ がチェイン写像とする．このとき, $\operatorname{Tot} f : \operatorname{Tot} \mathbb{E} \to \operatorname{Tot} \mathbb{F}$ が

$$(\operatorname{Tot} f)^n = \prod_{|\lambda|=n} f^\lambda : (\operatorname{Tot} \mathbb{E})^n = \prod_{|\lambda|=n} \mathbb{E}^\lambda \to \prod_{|\lambda|=n} \mathbb{F}^\lambda = (\operatorname{Tot} \mathbb{F})^n$$

によって定義される. $\mathrm{Tot}\, f$ はチェイン写像である. Tot は関手性をもつ. つまり $\mathrm{Tot}\, 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathrm{Tot}\,\mathbb{F}}$ で $\mathrm{Tot}(gf) = \mathrm{Tot}(g)\,\mathrm{Tot}(f)$.

直積を直和でとりかえて, $\mathrm{tot}\, f$ も同様に定義され, やはり関手性を持つ.

(5.19) r 重複体の直積, 直和もしかるべく定義される. r 重複体の族 $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ に対して, $(\prod_{i\in I}\mathbb{F}_i)^\lambda = (\prod_{i\in I}\mathbb{F}_i^\lambda)$, $(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{F}_i)^\lambda = (\bigoplus_{i\in I}\mathbb{F}_i^\lambda)$ で定義される. 加群の間の準同型の直積や直和と同様に, r 重複体の族の射 $(f_i) : (\mathbb{E}_i) \to (\mathbb{F}_i)$ (つまり各 f_i がチェイン写像) に対して, チェイン写像の直積 $\prod f_i$ および直和 $\bigoplus f_i$ が明らかな仕方で定義され, チェイン写像になり, 関手性を持つ.

(5.20) 左 R 加群の r 重複体の間のチェイン写像 $f = (f^\lambda) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ が (左 R 加群の r 重複体の) 全射, 単射, 同型であるとは, すべての $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ について f^λ がそれぞれ全射, 単射, 同型であることをいう. $f = (f^\lambda) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ が同型のとき, **逆 (inverse)** f^{-1} を $f^{-1} = ((f^\lambda)^{-1})$ で定めると, f^{-1} もチェイン写像で, $ff^{-1} = 1_{\mathbb{F}}$, $f^{-1}f = 1_{\mathbb{E}}$ である. $\mathbb{E}$ から $\mathbb{F}$ への同型が存在するとき $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ は同型であるという.

(5.21) 今まで学んだ加群の $\otimes$ や Hom の関係する自然変換をもとに, ジョインされた $\otimes$ や Hom の関係する多重複体の自然変換がほとんど何の苦労も無く構成される. 網羅的に述べるのは無駄な感じがするので, $\Phi = \Phi_{L,M,N}$ を例にとって述べよう.

R, S, T は環, $\mathbb{L}$ は (S, R) 両側加群の l 重複体, $\mathbb{M}$ は (R, T) 両側加群の m 重複体, $\mathbb{N}$ は (S, U) 両側加群の n 重複体とする. このとき, (S, U) 両側加群の $l + m + n$ 重複体の間の自然同型

$$(5.21.1)\qquad \Phi^{J,l} = \Phi^{J,l}_{\mathbb{L},\mathbb{M},\mathbb{N}} : \mathrm{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L} \otimes^J_R \mathbb{M}, \mathbb{N}) \to \mathrm{Hom}^{J,l}_R(\mathbb{M}, \mathrm{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L}, \mathbb{N}))$$

が

$$\begin{aligned}(\Phi^{J,l}_{\mathbb{L},\mathbb{M},\mathbb{N}})^{(\nu,\lambda,\mu)} = \Phi^{J,l} i_{\mathbb{L}^\lambda,\mathbb{M}^\mu,\mathbb{N}^\nu} : \mathrm{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L}\otimes^J_R\mathbb{M}, \mathbb{N})^{(\nu,\lambda,\mu)} = \mathrm{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L}^\lambda\otimes_R\mathbb{M}^\mu, \mathbb{N}^\nu)\\ \to \mathrm{Hom}_R(\mathbb{M}^\mu, \mathrm{Hom}_S(\mathbb{L}^\lambda, \mathbb{N}^\nu)) = \mathrm{Hom}^{J,l}_R(\mathbb{M}, \mathrm{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L}, \mathbb{N}))^{(\nu,\lambda,\mu)}\end{aligned}$$

によって定義され, $\Phi^{J,l}$ は自然同型である.

5.22 演習. R_0, R_1, R_2, R_3 が環, $\mathbb{F}_i$ は (R_{i-1}, R_i) 両側加群の r_i 重複体とする. このとき, (R_0, R_3) 両側加群の $r_1 + r_2 + r_3$ 重複体の間のチェイン写像

$$\alpha^J_{\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3} : \mathbb{F}_1 \otimes^J_{R_1} (\mathbb{F}_2 \otimes^J_{R_2} \mathbb{F}_3) \to (\mathbb{F}_1 \otimes^J_{R_1} \mathbb{F}_2) \otimes^J_{R_2} \mathbb{F}_3$$

が $(\alpha^J_{\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3})^{(\lambda,\mu,\nu)} = \alpha_{\mathbb{F}_1^\lambda,\mathbb{F}_2^\mu,\mathbb{F}_3^\nu}$ によって定義され, 自然同型になる.

5.23 演習. R_0, R_1, R_2 が環, $\mathbb{F}_i$ は (R_{i-1}, R_i) 両側加群の r_i 重複体とする. このとき, $(R_2^{\mathrm{op}}, R_0^{\mathrm{op}})$ 両側加群の $r_1 + r_2$ 重複体の間の自然同型

$$\tau^J : (\mathbb{F}_1 \otimes_{R_1}^J \mathbb{F}_2)^{\mathrm{op}} \to \mathbb{F}_2^{\mathrm{op}} \otimes_{R_1^{\mathrm{op}}}^J \mathbb{F}_1^{\mathrm{op}}$$

を構成せよ.

(5.24) R, S, T が環のとき, (S, R) 両側加群の複体 $\mathbb{F}$ と (R, T) 両側加群の複体 $\mathbb{G}$ について, (S, T) 両側加群の複体 $\mathbb{F} \otimes_R \mathbb{G}$ を $\mathrm{tot}(\mathbb{F} \otimes_R^J \mathbb{G})$ として定義し, $\mathbb{F}$ と $\mathbb{G}$ の**テンサー積 (tensor product)** という. また, チェイン写像 $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ および $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ に対して, **チェイン写像のテンサー積** $f \otimes g = \mathrm{tot}(f \otimes^J g) : \mathbb{F} \otimes_R \mathbb{G} \to \mathbb{F}' \otimes_R \mathbb{G}'$ が定義され, 関手性を持つ.

(5.25) (R, S) 両側加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ と (R, T) 両側加群の s 重複体 $\mathbb{G}$ について, $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ を $\mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ で表す. また, (S, R) 両側加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ と (T, R) 両側加群の s 重複体 $\mathbb{G}$ について, $\mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_R^{J,r}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ を $\mathrm{Hom}_R^r(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ で表す.

(5.26) R が可換環, $\mathbb{F}$ と $\mathbb{G}$ が R 加群の複体の場合を特に考えよう. このとき, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i, \mathbb{G}^j)$ について, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i}$ だと思ったときは, $d\varphi = (d_{\mathbb{G}}^j)_* \varphi + (-1)^j (d_{\mathbb{F}}^{i-1})^* \varphi$. また, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R^r(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i}$ だと思ったときは, $d\varphi = (d_{\mathbb{F}}^{i-1})^* \varphi + (-1)^i (d_{\mathbb{G}}^j)_* \varphi$. $\mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i}$ と $\mathrm{Hom}_R^r(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i}$ は異なるものであり, 一応区別してかかる必要がある.

(5.27) R が環, $\mathbb{F}$ と $\mathbb{G}$ は左または右 R 加群の複体とする. このとき, 複体 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ を,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})^n = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i, \mathbb{G}^j)$$

と

$$d^n = (d_{\mathbb{F}})^* + (-1)^{n+1} (d_{\mathbb{G}})_*$$

で定義し, $\mathbb{F}$ から $\mathbb{G}$ への Hom **複体 (Hom complex)** という. $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})^n$ はしばしば $\mathrm{Hom}_R^n(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ とも書かれる. 左 R 加群を考えている場合,

$$\mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i} \supset \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i, \mathbb{G}^j) \xrightarrow{h_{ij}} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i, \mathbb{G}^j) \subset \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})^{j-i}$$

を $h_{ij} = (-1)^{\binom{j}{2} + j(i+1)}$ で定めると

$$h = \bigoplus h_{ij} : \mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \to \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})$$

はチェイン同型であることは容易である. ここに $\binom{j}{2}$ は２項係数. また, 右 R 加群を考えている場合,

$$\mathrm{Hom}_R^r(\mathbb{F},\mathbb{G})^{j-i} \supset \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i,\mathbb{G}^j) \xrightarrow{h'_{ij}} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i,\mathbb{G}^j) \subset \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F},\mathbb{G})^{j-i}$$

を $h'_{ij}=(-1)^{\binom{j+1}{2}}$ で定めると $h'=\bigoplus h'_{ij}$ はチェイン同型であることもまた容易である. つまり, 符号付きの恒等写像で

$$\mathrm{Hom}_R^l(\mathbb{F},\mathbb{G}) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F},\mathbb{G}) \cong \mathrm{Hom}_R^r(\mathbb{F},\mathbb{G}) \tag{5.27.1}$$

であり, これらは同一視される.

(5.28) チェイン写像の Hom も $\mathrm{Hom}_R^l(f,g)=\mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_R^{J,l}(f,g)$ などとして定義され, 関手性を持つチェイン写像になることはいうまでもないだろう. このとき, 3 つの Hom の同一視 (5.27.1) は自然同型になる.

5.29 演習. R, S, T は環とする. 次の自然同型が存在することを示せ.

1 左 R 加群の複体の同型 $\mathrm{Tot}(\prod_{i\in I}\mathbb{F}_i)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Tot}\,\mathbb{F}_i$ ここに $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ は左 R 加群の r 重複体の族.

2 左 R 加群の複体の同型 $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{F}_i\cong\mathrm{tot}(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{F}_i)$. ここに $(\mathbb{F}_i)_{i\in I}$ は左 R 加群の r 重複体の族.

3 (S,T) 両側加群の複体の同型 $\mathrm{Hom}_R^l(\mathrm{tot}\,\mathbb{F},\mathrm{Tot}\,\mathbb{G})\cong\mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_R^{J,l}(\mathbb{F},\mathbb{G})$. ここに $\mathbb{F}$ は (R,S) 両側加群の r 重複体, $\mathbb{G}$ は (R,T) 両側加群の s 重複体.

4 (S,T) 両側加群の複体の同型 $\mathrm{tot}\,\mathbb{F}\otimes_R\mathrm{tot}\,\mathbb{G}\to\mathrm{tot}(\mathbb{F}\otimes_R^J\mathbb{G})$.

以上の同型は極めて自然に, ほとんど何の技巧もなしに構成されるが, 次については符号についての多少の工夫が必要であり, それがチェイン複体に関する議論を面白いものにしている.

(5.30) R が環, $\mathbb{F}$ が左 R 加群の r 重複体のとき, 自然同型

$$\xi=\xi_{\mathbb{F}}:\mathrm{Tot}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}})\to(\mathrm{Tot}\,\mathbb{F})^{\mathrm{op}}$$

であって, $\mathrm{tot}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}})$ と $(\mathrm{tot}\,\mathbb{F})^{\mathrm{op}}$ の同型を引き起こすものを構成したい. 一見

$$\begin{aligned}\xi':(\mathrm{Tot}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}))^n=\prod_{|\lambda|=n}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^\lambda=\prod_{|\lambda|=n}(\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}\\=(\prod_{|\lambda|=n}\mathbb{F}^{\lambda^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}}=((\mathrm{Tot}\,\mathbb{F})^n)^{\mathrm{op}}=((\mathrm{Tot}\,\mathbb{F})^{\mathrm{op}})^n\end{aligned}$$

とつなげた同一視で何の問題もないように思えるがそうではない. ξ' はチェイン写像になっていないのだ.

$r = 2$ の場合を考えると, $a \in (\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^{(\lambda_1,\lambda_2)}$ をとると, $\xi'(a)$ とは a を $(\mathbb{F}^{(\lambda_2,\lambda_1)})^{\mathrm{op}}$ の元とみたもので, $d\xi'(a) = d(1)^{\lambda_2}(a) + (-1)^{\lambda_2}d(2)^{\lambda_1}(a)$. 一方, $\xi'd(a) = d(2)^{\lambda_1}(a) + (-1)^{\lambda_1}d(1)^{\lambda_2}(a)$. 符号が合わない.

(5.31) 一般に, $\xi((a_\lambda)) = ((-1)^{\sum_{1\leq s<t\leq r}\lambda_s\lambda_t}a_{\lambda^{\mathrm{op}}})$ ($\lambda \in \mathbb{Z}^r$, $a_\lambda \in (\mathbb{F}^{\mathrm{op}})^\lambda$) とおけば符号が合ってチェイン写像になる. また, $\xi^{\mathrm{op}}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}$ は $\xi_{\mathbb{F}}$ の逆射であり, $\xi_{\mathbb{F}}$ は同型である.

5.32 演習. これを確かめよ.

(5.33) ジョインされた $\otimes$ や Hom に関する自然同型は, (大) 全複体をとる操作を用いると, 複体の $\otimes$ や Hom に関する自然同型を生み出す.

例として, (5.21) に現れた同型 (5.21.1) に Tot をかけて, 自然同型

$$\operatorname{Tot}\Phi^{J,l} : \operatorname{Tot}\operatorname{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L}\otimes^J_R\mathbb{M},\mathbb{N}) \to \operatorname{Tot}\operatorname{Hom}^{J,l}_R(\mathbb{M},\operatorname{Hom}^{J,l}_S(\mathbb{L},\mathbb{N}))$$

を得るが, これを定義に従って, (5.29) を勘案しつつ変形すると, 容易に自然同型

$$\Phi^l_{\mathbb{F},\mathbb{G}} : \operatorname{Hom}^l_S(\mathbb{L}\otimes_R\mathbb{M},\mathbb{N}) \to \operatorname{Hom}^l_R(\mathbb{M},\operatorname{Hom}^l_S(\mathbb{L},\mathbb{N}))$$

を得る. $a \in \mathbb{L}^l, b \in \mathbb{M}^m, \varphi \in \operatorname{Hom}_S(\mathbb{L}\otimes_R\mathbb{M},\mathbb{N})^n$ について, $(\Phi(\varphi)(b))(a) = \varphi(a\otimes b)$ である. Hom^l と Hom は適当に同一視できるので, 結局自然同型

$$\Phi_{\mathbb{F},\mathbb{G}} : \operatorname{Hom}_S(\mathbb{L}\otimes_R\mathbb{M},\mathbb{N}) \to \operatorname{Hom}_R(\mathbb{M},\operatorname{Hom}_S(\mathbb{L},\mathbb{N}))$$

$a \in \mathbb{L}^l, b \in \mathbb{M}^m, \varphi \in \operatorname{Hom}^n_S(\mathbb{L}\otimes_R\mathbb{M},\mathbb{N})$ について, $(\Phi(\varphi)(b))(a) = \pm\varphi(a\otimes b)$ である.

5.34 演習. (5.22) の状況で, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ とする. このとき, 自然同型

$$\alpha_{\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_3} : \mathbb{F}_1\otimes_{R_1}(\mathbb{F}_2\otimes_{R_2}\mathbb{F}_3) \to (\mathbb{F}_1\otimes_{R_1}\mathbb{F}_2)\otimes_{R_2}\mathbb{F}_3$$

を具体的に構成せよ.

5.35 注意. 我々は上記演習の α に奇怪な符号がついてしまわないように, 符号の体系を選んでいる. Tot の定義において無計画な符号の選び方をすると, 大体この辺で無理を来すことになっている. しかしながら, 次の τ では, 符号がつくのは避けられない. この符号がつくのは本質的なことであり, どう符号体系を選ぼうと避けられないはずである.

5.36 演習. (5.23) の状況で, $r_1 = r_2 = 1$ とする. このとき, 自然同型

$$\tau_{\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2} : (\mathbb{F}_1\otimes_{R_1}\mathbb{F}_2)^{\mathrm{op}} \to \mathbb{F}_2^{\mathrm{op}}\otimes_{R_1^{\mathrm{op}}}\mathbb{F}_1^{\mathrm{op}}$$

を具体的に構成せよ.

(5.37) R が環とする. $\mathbb{F} = (\mathbb{F}^\lambda, (d(i)^\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}^r})$ が左 R 加群の s **重複体の** r **重複体** (**r-fold complex of s-fold complexes**) であるとは, 各 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ に対して, $\mathbb{F}^\lambda$ は左 R 加群の s 重複体で, 各 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ および $1 \le i \le r$ に対して, $d(i)^\lambda : \mathbb{F}^\lambda \to \mathbb{F}^{\lambda+\varepsilon_i}$ は左 R 加群の s 重複体の間のチェイン写像であり, $d(i)^{\lambda+\varepsilon_i} d(i)^\lambda = 0$, $d(j)^{\lambda+\varepsilon_i} d(i)^\lambda = d(i)^{\lambda+\varepsilon_j} d(j)$ が成立することをいう.

(5.38) 上記は今まで加群 (つまり $s = 0$ の場合の s 重複体) だったものを一般の s 重複体に置き換えた定義であるが, 本質的に新しいものを生み出さない. 実際, $\mathbb{F}$ が上の通りの時, $\mathbb{H}^{(\lambda,\mu)} = (\mathbb{F}^\lambda)^\mu$ (つまり, 複体 $\mathbb{F}^\lambda$ の μ 次の成分) とおき,

$$d_{\mathbb{H}}(i)^{(\lambda,\mu)} = (d_{\mathbb{F}}(i)^\lambda)^\mu : (\mathbb{F}^\lambda)^\mu \to (\mathbb{F}^{\lambda+\varepsilon_i})^\mu \quad (1 \le i \le r)$$

とし, また,

$$d_{\mathbb{H}}(i)^{(\lambda,\mu)} = d_{\mathbb{F}^\lambda}(i-r)^\mu : (\mathbb{F}^\lambda)^\mu \to (\mathbb{F}^\lambda)^{\mu+\varepsilon_{i-r}} \quad (r+1 \le i \le r+s)$$

だと定義すると容易に, $\mathbb{H}$ は左 R 加群の $r+s$ 重複体になる. 通常 $\mathbb{H}$ は $\mathbb{F}$ と同一視され, 別の記号は用いない.

(5.39) 例として, $r = s = 1$ の場合を考えると, 左 R 加群の **複体の複体** (**complex of complexes**) を得る. これは, 場所の指定された複体の列

$$\cdots \to \mathbb{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathbb{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathbb{F}^{i+1} \to \cdots$$

(各 φ^i はチェイン写像) で $\varphi^i \varphi^{i-1} = 0$ をみたすもののことである. 見方を変えて, 2 重複体とみれば,

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & (\mathbb{F}^{i-1})^{j+1} \arrow[u] \arrow[r, "(\varphi^{i-1})^{j+1}"] & (\mathbb{F}^i)^{j+1} \arrow[u] \arrow[r, "(\varphi^i)^{j+1}"] & (\mathbb{F}^{i+1})^{j+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (\mathbb{F}^{i-1})^{j} \arrow[u, "d^j_{\mathbb{F}^{i-1}}"'] \arrow[r, "(\varphi^{i-1})^{j}"] & (\mathbb{F}^i)^{j} \arrow[u, "d^j_{\mathbb{F}^{i}}"'] \arrow[r, "(\varphi^i)^{j}"] & (\mathbb{F}^{i+1})^{j} \arrow[u, "d^j_{\mathbb{F}^{i+1}}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (\mathbb{F}^{i-1})^{j-1} \arrow[u, "d^{j-1}_{\mathbb{F}^{i-1}}"'] \arrow[r, "(\varphi^{i-1})^{j-1}"] & (\mathbb{F}^i)^{j-1} \arrow[u, "d^{j-1}_{\mathbb{F}^{i}}"'] \arrow[r, "(\varphi^i)^{j-1}"] & (\mathbb{F}^{i+1})^{j-1} \arrow[u, "d^{j-1}_{\mathbb{F}^{i+1}}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

と書ける. 縦の列が左から, $\mathbb{F}^{i-1}$, $\mathbb{F}^i$, $\mathbb{F}^{i+1}$ をそれぞれ表している.

(5.40) 左 R 加群の s 重複体 $\mathbb{F}$ は, $\mathbb{H}^0 = \mathbb{F}$, $\mathbb{H}^\lambda = 0$ $(\lambda \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\})$ だと定義した s 重複体の r 重複体 $\mathbb{H}$ と同一視される. したがって これはまた $r+s$ 重複体と思える.

(5.41) 特に $s = 0$ の場合を考え, 左 R 加群 M は, しばしば $\mathbb{M}^0 = M$, $\mathbb{M}^\lambda = 0$ $(\lambda \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\})$ で定まる r 重複体 $\mathbb{M}$ と同一視される. 特にこの同一視は $r = 1$ の場合には頻出である.

たとえば, R が可換環, $\mathbb{F}$ が R 加群の複体, M が R 加群とするとき, $\mathbb{F} \otimes_R M$ は M を 0 次に集中した複体だとみなして, 複体と複体のテンソル積をとったものだと思う. 得られる複体は,

$$\cdots \to \mathbb{F}^{n-1} \otimes_R M \xrightarrow{d^{n-1}\otimes 1_M} \mathbb{F}^n \otimes_R M \xrightarrow{d^n \otimes 1_M} \mathbb{F}^{n+1} \otimes_R M \to \cdots$$

であり, これは $\mathbb{F}$ に $\otimes_R M$ を一斉に施して得られる複体だともいえる. $\mathrm{Hom}_R(M, \mathbb{F})$ に関しても大体事情は同じである. 多少の符号がついてしまうが, $\mathrm{Hom}^l_R(M, \mathbb{F}) = \mathrm{Hom}^r_R(M, \mathbb{F})$ であり, これらには余計な符号はつかない. $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, M)$ では $\mathrm{Hom}_R(?, M)$ が反変 (矢の向きが変わる) なので

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^{-(n-1)}, M) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^{-n}, M) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^{-(n+1)}, M) \to \cdots$$

となる.

5.42 例. 左 R 加群の r 重複体の間のチェイン写像 $f : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ を考える. このとき, $C^J(f)^{-1} = \mathbb{F}$, $C^J(f)^0 = \mathbb{G}$, $C^J(f)^i = 0$ $(i \neq 0, -1)$ とおき, $d^{-1}_{C^J(f)} = f$, $d^i_{C^J(f)} = 0$ $(i \neq -1)$ とおけば, $C^J(f)$ は r 重複体の複体であり, $r+1$ 重複体である. 図示すると,

$$C^J(f) = \cdots \to 0 \to \mathbb{F} \xrightarrow{f} \mathbb{G} \to 0 \to \cdots$$

である. ただし, $\mathbb{G}$ は 0 番目に位置する. これを **ジョインされた f の写像錐 (joined mapping cone)** と呼ぶことにする.

特に $r = 1$ の場合を考える. $i \in \mathbb{Z}$ に対して, $C^J(f)^i = \mathbb{G}^i \oplus \mathbb{F}^{i+1}$ であるので, $\mathrm{tot}\, C^J(f) = \mathrm{Tot}\, C^J(f)$ である. $\mathrm{Tot}\, C^J(f)$ を $C(f)$ で表し, f の**写像錐 (mapping cone)** という.

(5.43) R が可換環, $a \in R$ とするとき, a 倍写像 $a_R : R \to R$ $(x \mapsto ax)$ は複体とみなせる:

$$\cdots \to 0 \to R \xrightarrow{a_R} R \to 0 \to \cdots$$

ただし, R は 0 番目と -1 番目に位置する. この複体を $K(a; R)$ と書くことにする.

一般に, R 加群の r 重複体 $\mathbb{F}$ についても, チェイン写像 $a_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ が定義される. このとき, $C^J(a_{\mathbb{F}}) \cong K(a; R) \otimes_R^J \mathbb{F}$ である. 実際, $K(a; R) \otimes_R^J \mathbb{F}$ は

$$0 \to R \otimes_R \mathbb{F} \xrightarrow{a_R \otimes 1} R \otimes_R \mathbb{F} \to 0$$

という形をしているが, $a_R \otimes 1$ は a 倍である.

(5.44) R は可換環, M は R 加群, $a_1, \ldots, a_r \in R$ とする. このとき, 複体 $K(a_1; R) \otimes_R K(a_2; R) \otimes_R \cdots \otimes_R K(a_r; R)$ を $K(a_1, \ldots, a_r; R)$ で表し, $a_1, \ldots, a_r$ に関する **Koszul 複体 (Koszul complex)** という. また, $K(a_1, \ldots, a_r; R) \otimes_R M$ を $K(a_1, \ldots, a_r; M)$ で表す.

$K(a_1, \ldots, a_r; R)$ をわかりやすく記述することを考えよう. この複体はコチェイン複体としてではなく, チェイン複体として扱うのが通常なので, 以後, そう扱う. まず, $K(a; R)$ は $0 \to R \to R \to 0$ であるが, どちらの R も同じ記号で書くと紛らわしいので, 次数 0 の R の生成元は e_0 で, 次数 1 の R の生成元は e_1 で書くことにしよう. したがって, $d(e_1) = ae_0$ である. 次に,

$$\begin{aligned} K_n(a_1, \ldots, a_r; R) &= \bigoplus_{\lambda \in \{1,0\}^r,\ |\lambda| = n} K(a_1; R)^{\lambda_1} \otimes_R \cdots \otimes_R K(a_r; R)^{\lambda_r} \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \{1,0\}^r,\ |\lambda| = n} R(e_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_r}) = \bigoplus_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r} Re_{i_1, \ldots, i_n}. \end{aligned}$$

ここに, $1 \le i_i < \cdots < i_n \le r$ には, $\lambda_l = 1$ と $l \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ が同値になるような $\lambda \in \{1, 0\}^r$ が対応し, $e_{i_1, \ldots, i_n}$ は $e_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes e_{\lambda_r}$ を意味する. 以上により, $K_n(a_1, \ldots, a_r; R)$ は階数 $\binom{r}{n}$ の R 自由加群である. バウンダリ写像は

$$d(e_{i_1, \ldots, i_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{i_j} e_{\{i_1, \ldots, i_n\} \setminus \{i_j\}}$$

で与えられる.

(5.45) 自然同型 τ によって, テンサー積の順番を入れ替えることができるので, 任意の r 次の置換 σ に対して, $K(a_1, \ldots, a_r; M) \cong K(a_{\sigma 1}, \ldots, a_{\sigma r}; M)$ である.

(5.46) $r \ge 2$ のとき,

$$K(a_1, \ldots, a_r; M) \cong K(a_1, R) \otimes_R K(a_2, \ldots, a_r; M) \cong C(a_{K(a_2, \ldots, a_r; M)})$$

と写像錐になっている. これは Koszul 複体について何か証明するときに帰納法で議論を進めるための基本である.

参考文献

[Kaw1] 河田敬義, 「ホモロジー代数 I」, 岩波 (1976).

[Kaw2] 河田敬義, 「ホモロジー代数 II」, 岩波 (1977).

6 チェインホモトピー (鎖ホモトピー)

(6.1) 前回の訂正を行う.

R が環, $\mathbb{F}$ と $\mathbb{G}$ は左または右 R 加群の複体とする. このとき, 複体 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ を,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})^n = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{F}^i, \mathbb{G}^j)$$

と

$$d^n = (d_{\mathbb{F}})^* + (-1)^{n+1}(d_{\mathbb{G}})_*$$

(つまり, $d^n(f) = fd + (-1)^{n+1}df$) で定義し, $\mathbb{F}$ から $\mathbb{G}$ への Hom **複体 (Hom complex)** という. と定義した. このように定義している本もあるにはあるのだが, $d^n(f) = (-1)^{n+1}fd + df$ と定義する方がわずかに優れていると思われる. このように定義し直したとき, 新しい d^n は元の d^n の $(-1)^{n+1}$ 倍にほかならない. したがって, $\mathrm{Hom}^n_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ の上で $(-1)^{\binom{n+1}{2}}$ 倍をするという写像をチェイン同型として, 元の複体と新しい複体は同型になる.

優れている点としては, 自然同型 $\mathrm{Hom}_R(R, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ に符号がつかないで済む点が挙げられる. (5.27) で行った古い定義は破棄し, 今後は新しい定義を採用する.

(6.2) R が環, $\mathbb{F}$ が左 R 加群の複体とする. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 新しい左 R 加群の複体 $\mathbb{F}[n]$ を $\mathbb{F}[n]^i = \mathbb{F}^{n+i}$, $d^i_{\mathbb{F}[n]} = (-1)^n d^{n+i}_{\mathbb{F}}$ によって定義する. $\mathbb{F}[n]$ を $\mathbb{F}$ の n **シフト (n-shift)** という. チェイン写像 $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ に対して, $f[n]^i = f^{n+i}$ によって, チェイン写像 $f[n] : \mathbb{E}[n] \to \mathbb{F}[n]$ が定まり, $[n]$ は関手性を持つ.

6.3 補題. **1** $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して, $(\mathbb{E}[n])[m] = \mathbb{E}[n+m]$ であり, $(f[n])[m] = f[n+m]$.

2 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}[m], \mathbb{F}[n]) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})[n-m]$.

3 $\mathbb{E}[m] \otimes_R \mathbb{F}[n] \cong (\mathbb{E} \otimes_R \mathbb{F})[m+n]$.

証明. **1** は明らかである. **2,3** の同型は多少の符号はつくものの, ほぼ恒等写像で良い. 詳細は読者に委ねる. □

(6.4) R は環, $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ は左 R 加群の複体とする. $f \in Z^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ であるとは,

$$d_{\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E},\mathbb{F})}(f) = d_{\mathbb{F}} f - f d_{\mathbb{E}} = 0$$

であることである. つまり, これは $fd = df$ が成立することであり, $f = (f^n) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ がチェイン写像であることに他ならない. すなわち, $C_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = Z^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$.

(6.5) $f \in \mathrm{Hom}_R^0(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = \prod_i \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}^i, \mathbb{F}^i)$ が **null-homotopic** であるとは, $f \in B^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ であることをいう. これはある $s \in \mathrm{Hom}_R^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ が存在して, $d(s) = d^* s + d_* s = sd + ds = f$ となることをいう.

(6.6) $H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ を $K_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ と表す. チェイン写像 $f \in Z^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ の $H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})) = K_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ における類を f の**ホモトピー類 (homotopy class)** という. 本講義では $[f]$ で表す. $[f] = [g]$ のとき, 2 つのチェイン写像は**ホモトピック (homotopic)** であるといわれる. つまり, $f - g = sd + ds$ となる $\mathrm{Hom}_R^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ が存在するとき, f と g はホモトピックであるという.

6.7 補題. R は環, $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ は左 R 加群の複体のチェイン写像とする. もし f が null-homotopic ならば, $n \in \mathbb{Z}$ について, $f(Z^n(\mathbb{E})) \subset B^n(\mathbb{F})$ である. 言い換えると, $H^n(f) = 0$ である. $g, h : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ がチェイン写像で $[g] = [h]$ とすると, $H^n(g) = H^n(h)$ となる.

証明. $f = sd + ds$ ($s \in \mathrm{Hom}_R^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$) とせよ. $a \in Z^n(\mathbb{E})$ とすると, $da = 0$ なので, $f(a) = sd(a) + ds(a) = d(s(a)) \in B^n(\mathbb{F})$. $H^n(f) = 0$ はこのことから直ちに従う ((2.18) 参照). $H^n(g) = H^n(g - h) + H^n(h) = H^n(h)$ なので, 最後の主張が従う. □

補題によって, $[f] \in K_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ に対して, R 準同型 $H^n([f]) : H^n(\mathbb{E}) \to H^n(\mathbb{F})$ が well-defined に定まる.

(6.8) R が環, $\mathbb{E}$ は左 R 加群のチェイン複体とする. $\mathbb{E}$ が**ホモトピー的に自明 (homotopically trivial)** であるとは, 恒等射 $1_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ が null-homotopic であることをいう. 言い直すと, ある $s \in \mathrm{Hom}_R^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ が存在して, $1_{\mathbb{E}} = sd + ds$ となることをいう. このような s を $\mathbb{E}$ の**チェイン変形 (chain deformation)** という.

6.9 補題. R が環, $\mathbb{E}$ は左 R 加群のチェイン複体とする. 次は同値.

1 $\mathbb{E}$ はホモトピー的に自明.

2 $\mathbb{E}$ は完全列で, すべての n について, 完全列

$$0 \to Z^n(\mathbb{E}) \xrightarrow{j^n(\mathbb{E})} \mathbb{E}^n \xrightarrow{p^n(\mathbb{E})} B^{n+1}(\mathbb{E}) \to 0 \tag{6.9.1}$$

は分裂する短完全系列である.

証明. **1⇒2**. $1_{H^n(\mathbb{E})} = H^n(1_{\mathbb{E}}) = H^n(0_{\mathbb{E}}) = 0$ であるので, すべての n について $H^n(\mathbb{E}) = 0$ である. つまり $\mathbb{E}$ は完全列になる. また, $a \in B^{n+1}(\mathbb{E})$ について, $a = (sd + ds)(a) = ds(a) = p^n s^{n+1}(a)$ である. したがって, p^n は分裂全射であり, (6.9.1) は分裂する.

2⇒1. 完全性の仮定により, すべての n について, $B^n(\mathbb{E}) = Z^n(\mathbb{E})$ である. また, (6.9.1) が分裂するから, 各 n について, $q^n : \mathbb{E}^n \to Z^n(\mathbb{E})$ および $\iota^{n+1} : Z^{n+1}(\mathbb{E}) \to \mathbb{E}^n$ が存在し, $q^n j^n = 1_{Z^n(\mathbb{E})}$, $p^n \iota^{n+1} = 1_{Z^{n+1}(\mathbb{E})}$, $j^n q^n + \iota^{n+1} p^n = 1_{\mathbb{E}^n}$ をみたす. このとき, $s^n : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^{n-1}$ を $s^n = \iota^n q^n$ として定義すると, $a \in \mathbb{E}^n$ について,

$$d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n = j^n p^{n-1} \iota^n q^n + \iota^{n+1} q^{n+1} j^{n+1} p^n = j^n q^n + \iota^{n+1} p^n = 1_{\mathbb{E}^n}$$

であり, $s = (s^n) \in \mathrm{Hom}^{-1}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ は $\mathbb{E}$ のチェイン変形となり, $\mathbb{E}$ はホモトピー的に自明であることが分かった. $\square$

6.10 演習. R は環, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ は左 R 加群の複体とし, $[f] \in K_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, $[g] \in K_R(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ とする. このとき, $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ でホモトピー類 $[f]$ と $[g]$ との合成を定義すると, well-defined である.

6.11 演習. S, R, T が環, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ が (S, R) 両側加群の複体, $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ が (R, T) 両側加群の複体とし, $[f] \in K_{S \otimes_{\mathbb{Z}} R^{\mathrm{op}}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, $[g] \in K_{R \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\mathrm{op}}}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')$ とするとき, $[f] \otimes [g] \in K_{S \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\mathrm{op}}}(\mathbb{E} \otimes_R \mathbb{F}, \mathbb{E}' \otimes_R \mathbb{F}')$ が $[f \otimes g]$ として well-defined に定まる. また, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ が (R, S) 両側加群の複体, $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ が (R, T) 両側加群の複体とし, $[f] \in K_{R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}}(\mathbb{E}', \mathbb{E})$, $[g] \in K_{R \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\mathrm{op}}}(\mathbb{F}, \mathbb{F}')$ とするとき, $\mathrm{Hom}_R([f], [g]) \in K_{S \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}), \mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}', \mathbb{F}'))$ が $[\mathrm{Hom}_R(f, g)]$ として well-defined に定まる.

(6.12) 上記演習により, $H^0(\mathrm{Hom}_R([f], [g])) : H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}, \mathbb{F})) \to H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{E}', \mathbb{F}'))$ が定まる. この準同型を

$$K_R([f], [g]) : K_R(\mathbb{E}, \mathbb{F}) \to K_R(\mathbb{E}', \mathbb{F}')$$

と書く. 定義により, $K_R([f], [g])([h]) = [ghf]$ である.

一般に $K_R(R, \mathbb{E}[n]) \cong H^0(\mathrm{Hom}_R(R, \mathbb{E}[n])) \cong H^n(\mathbb{E})$ であり, チェイン写像 $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ に対して, $K_R(1_R, [f[n]])$ は $H^n([f])$ と同一視される. 一般にチェイン写像 f, g について, $[f] = [g]$ と $[f[n]] = [g[n]]$ は同値であり, 特に, $[f] = [0]$ ならば, $H^n([f]) = K_R(1_R, 0) = 0$ であり, (6.7) が再確認される.

(6.13) $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ が左 R 加群のチェイン複体の間のチェイン写像で, ある $g:\mathbb{F}\to\mathbb{E}$ が存在して, $[g]\circ[f]=[1_{\mathbb{E}}]$, $[f]\circ[g]=[1_{\mathbb{F}}]$ が成立する時, $[g]$ を $[f]$ の**ホモトピー逆 (homotopy inverse)** という. ホモトピー逆が存在する時, f または $[f]$ は (チェイン) **ホモトピー同値 (homotopy equivalence)** という. $\mathbb{E}$ から $\mathbb{F}$ へのホモトピー同値が存在する時, 複体 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ は**ホモトピー同値 (homotopically equivalent)** であるという.

(6.14) チェイン写像 $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ が**擬同型 (quasi-isomorphism)** であるとは, 任意の n について, $H^n(f):H^n(\mathbb{E})\to H^n(\mathbb{F})$ が同型であることをいう. 同型は擬同型である. 擬同型の合成は擬同型である. また, ホモトピー同値は擬同型である. 実際, $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ がホモトピー同値で, $g:\mathbb{F}\to\mathbb{E}$ がそのホモトピー逆であるとすると, $H^n(g)H^n(f)=H^n(gf)=H^n(1_{\mathbb{E}})=1$, $H^n(f)H^n(g)=H^n(fg)=H^n(1_{\mathbb{F}})=1$ となり, $H^n(f)$ は逆写像 $H^n(g)$ を持つから同型である. また, 擬同型かどうかは, $H^n(f)$ に関する性質なので, f のホモトピー類 $[f]$ のみにしかよらない性質であり, $[f]$ が擬同型である, という主張も意味を持つ.

(6.15) R は環とする. $(\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G},[f],[g],[h])$ が左 R 加群の複体の**ホモトピー３角形 (homotopy triangle)** であるとは, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ は左 R 加群の複体で, $[f]\in K_R(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $[g]\in K_R(\mathbb{F},\mathbb{G})$, $[h]\in K_R(\mathbb{G},\mathbb{E}[1])$ であることをいう. 以後, この講義では, 単に３角形という場合もある. ホモトピー類ではなく, チェイン写像について, $(\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G},f,g,h)$ が３角形である, という言い方も許すことにする. 図で書いて,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[rr, "{[f]}"] & & \mathbb{F} \arrow[dl, "{[g]}"] \\ & \mathbb{G} \arrow[ul, "{[h]}"] \arrow[u, phantom, "(1)"] & \end{tikzcd}$$

などと表す. $\mathbb{G}$ から $\mathbb{E}$ への矢印の上の (1) は, h が実は $\mathbb{G}$ から $\mathbb{E}[1]$ へのチェイン写像であることを表現している. 場所を節約して, 1 行で書いて

$$\mathbb{E}\xrightarrow{[f]}\mathbb{F}\xrightarrow{[g]}\mathbb{G}\xrightarrow{[h]}\mathbb{E}[1]$$

などとも書く.

(6.16) 複体のホモトピー３角形の射とは, 図式

(6.16.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[\alpha]}"] & \mathbb{F} \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\beta]}"] & \mathbb{G} \arrow[r, "{[h]}"] \arrow[d, "{[\gamma]}"] & \mathbb{E}[1] \arrow[d, "{[\alpha[1]]}"] \\ \mathbb{E}' \arrow[r, "{[f']}"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "{[g']}"] & \mathbb{G}' \arrow[r, "{[h']}"] & \mathbb{E}'[1] \end{tikzcd}$$

をホモトピー可換 (つまり $[\beta][f]=[f'][\alpha]$ などであって, $\beta f=f'\alpha$ までは要求しない) であるような $([\alpha],[\beta],[\gamma])$ のことをいう. $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ がすべてホモトピー同値のとき, $([\alpha],[\beta],[\gamma])$ は３角形の**同型**であるという. ３角形の同型が存在する２つの３角形は同型であるという.

(6.17) r 重複体の複体

$$\cdots \to \mathbb{F}^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{\partial^n} \mathbb{F}^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

が**完全 (exact)** であるとは, すべての n について $B^n(\mathbb{F})=\operatorname{Im}\partial^{n-1}=\operatorname{Ker}\partial^n=Z^n(\mathbb{F})$ が成立することをいう.

(6.18) $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ がチェイン写像とする. 写像錐 $C(f)$ を $\mathbb{C}$ と書くことにする. 各 n について, $\mathbb{C}^n=\mathbb{F}^n\oplus\mathbb{E}^{n+1}$ であるが, $d^n_{\mathbb{C}}(a+b)=d^n_{\mathbb{F}}(a)+f^{n+1}(b)-d^{n+1}_{\mathbb{E}}(b)$ ($a\in\mathbb{F}^n$, $b\in\mathbb{E}^{n+1}$) である. よって, $\mathbb{F}$ は $\mathbb{C}$ の部分複体であり, 商複体 $\mathbb{C}/\mathbb{F}$ は $\mathbb{E}[1]$ と自然に同一視される. $i(f):\mathbb{F}\to\mathbb{C}$ を埋入, $p(f):\mathbb{C}\to\mathbb{E}[1]$ を自然な射影とするとき, ３角形

$$\mathbb{E} \xrightarrow{[f]} \mathbb{F} \xrightarrow{[i(f)]} \mathbb{C} \xrightarrow{[p(f)]} \mathbb{E}[1]$$

を得る. この３角形を f に付随する**標準３角形 (standard triangle)** といい, $T(f)$ で表す. あるチェイン写像 f に付随する標準３角形 $T(f)$ に同型な３角形を**卓越した３角形** (または**完全３角形**, **正規３角形**) と呼ぶ. 従って特に, $T(f)$ は卓越している.

6.19 補題 (ホモトピー圏は３角圏)**.** R は環とする. 左 R 加群のチェイン複体のホモトピー３角形について, 次が成立する.

TR0 卓越した３角形と同型な３角形は卓越している. また, $\mathbb{F}\in C(R)$ とするとき,

(6.19.1) $$\mathbb{F} \xrightarrow{[1_{\mathbb{F}}]} \mathbb{F} \to 0 \to \mathbb{F}[1]$$

は卓越している.

TR1 任意のチェイン写像 $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ に対して,

$$\mathbb{E} \xrightarrow{[f]} \mathbb{F} \xrightarrow{[g]} \mathbb{G} \xrightarrow{[h]} \mathbb{E}[1]$$

が卓越した３角形となるような $\mathbb{G}$ および g, h が存在する.

TR2 3角形

$$T : \mathbb{E} \xrightarrow{[f]} \mathbb{F} \xrightarrow{[g]} \mathbb{G} \xrightarrow{[h]} \mathbb{E}[1]$$

が卓越しているための必要十分条件は,

$$Q(T) : \mathbb{F} \xrightarrow{[-g]} \mathbb{G} \xrightarrow{[-h]} \mathbb{E}[1] \xrightarrow{[-f[1]]} \mathbb{F}[1]$$

が卓越していることである.

TR3 図式

(6.19.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[\alpha]}"] & \mathbb{F} \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\beta]}"] & \mathbb{G} \arrow[r, "{[h]}"] & \mathbb{E}[1] \arrow[d, "{[\alpha[1]]}"] \\
\mathbb{E}' \arrow[r, "{[f']}"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "{[g']}"] & \mathbb{G}' \arrow[r, "{[h']}"] & \mathbb{E}'[1]
\end{tikzcd}$$

がホモトピー可換で, 2つの行が卓越した3角形であるとき, あるチェイン写像 $\gamma : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ が存在して,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "{[f]}"] \arrow[d, "{[\alpha]}"] & \mathbb{F} \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\beta]}"] & \mathbb{G} \arrow[r, "{[h]}"] \arrow[d, "{[\gamma]}"] & \mathbb{E}[1] \arrow[d, "{[\alpha[1]]}"] \\
\mathbb{E}' \arrow[r, "{[f']}"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "{[g']}"] & \mathbb{G}' \arrow[r, "{[h']}"] & \mathbb{E}'[1]
\end{tikzcd}$$

がホモトピー可換であり, 全体が3角形の射になる.

TR4 $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ と $g : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ がチェイン写像のとき, ホモトピー可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{F} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{G}' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{E}[1] \arrow[d, "1"] \\
\mathbb{E} \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{G} \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{F}' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{E}[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\
\mathbb{F} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"] & \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & \mathbb{E}' \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \mathbb{F}[1] \arrow[d, "{\eta[1]}"] \\
\mathbb{G}' \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{F}' \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{E}' \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{G}'[1]
\end{tikzcd}$$

であって, 各行が卓越した3角形であるものが存在する.

証明. **TR0** の前半は卓越の定義と, 同型の合成が同型であることから容易である. (6.19.1) が卓越していることをいうには, これが $T(1_{\mathbb{F}})$ と同型であれば良い. そのためには, $C(1_{\mathbb{F}})$ が null-homotopic であればよい. $C(1_{\mathbb{F}})$ は

$$\cdots \to \mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F}^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} d^{n-1} & 1_{\mathbb{F}^n} \\ 0 & -d^n \end{pmatrix}} \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d^n & 1_{\mathbb{F}^{n+1}} \\ 0 & -d^{n+1} \end{pmatrix}} \mathbb{F}^{n+1} \oplus \mathbb{F}^{n+2} \to \cdots$$

という形をしているが, $s = (s^n)$ を

$$s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\mathbb{F}^n} & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{F}^n \oplus \mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^{n-1} \oplus \mathbb{F}^n$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\mathbb{F}^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^n & 1_{\mathbb{F}^{n+1}} \\ 0 & -d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^{n-1} & 1_{\mathbb{F}^n} \\ 0 & -d^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{\mathbb{F}^n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}^n} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbb{F}^{n+1}} \end{pmatrix}$$

だから s は $C(1_{\mathbb{F}^n})$ の鎖変形である.

TR1. これも卓越の定義から自明である. $\mathbb{G} = C(f)$, $g = i(f)$, $h = p(f)$ でよい.

TR2. まず, 一般に 2 つのチェイン写像 α, α' について, $[\alpha] = [\alpha']$ と $[\alpha[1]] = [\alpha'[1]]$ が同値であることに注意する. これはホモトピーの定義から自明だろう (したがって, $[\alpha][1]$ という書き方が意味を持つ).

TR2 の必要性を示す. 主張を示すには T と同型な 3 角形でとりかえて議論してもかまわない (T と T' が同型なら, $Q(T)$ と $Q(T')$ も同型なので). $T = T(f)$ としてもかまわない. つまり,

$$\mathbb{F} \xrightarrow{[-i(f)]} C(f) \xrightarrow{[-p(f)]} \mathbb{E}[1] \xrightarrow{[-f[1]]} \mathbb{F}[1]$$

が卓越していれば良い. そのために,

(6.19.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "{[-i(f)]}"] \arrow[d, "{[1]}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(a)}"] & C(f) \arrow[r, "{[-p(f)]}"] \arrow[d, "{[1]}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(b)}"] & \mathbb{E}[1] \arrow[r, "{[-f[1]]}"] \arrow[d, "{[\varphi]}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(c)}"] & \mathbb{F}[1] \arrow[d, "{[1]}"] \\
\mathbb{F} \arrow[r, "{[-i(f)]}"] & C(f) \arrow[r, "{[i(-i(f))]}"] & C(-i(f)) \arrow[r, "{[p(-i(f))]}"] & \mathbb{F}[1]
\end{tikzcd}$$

を (ホモトピー) 可換にするようなホモトピー同値 φ が存在することをいえば良い.

$$\varphi^n : \mathbb{E}[1]^n = \mathbb{E}^{n+1} \to F^n \oplus E^{n+1} \oplus F^{n+1} = C(-i(f))^n$$

を ${}^t(0,-1,-f^{n+1})$ として定義する.

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1}d^n_{\mathbb{E}[1]} = -\varphi^{n+1}d^{n+1}_{\mathbb{E}} = {}^t(0, d^{n+1}, f^{n+2}d^{n+1}) &= {}^t(0, d^{n+1}, d^{n+1}f^{n+1}) \\ &= \begin{pmatrix} d^n_{\mathbb{F}} & f^{n+1} & -1 \\ 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{E}} & 0 \\ 0 & 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -f^{n+1} \end{pmatrix} = d^n_{C(-i(f))}\varphi^n\end{aligned}$$

だから φ はチェイン写像である. 次に $\psi : C(-i(f)) \to \mathbb{E}[1]$ を

$$\psi^n : C(-i(f))^n = F^n \oplus E^{n+1} \oplus F^{n+1} \to \mathbb{E}^{n+1} = \mathbb{E}[1]^n$$

を $(0,-1,0)$ と定義することによって定義する.

$$\begin{aligned} d^n_{\mathbb{E}[1]}\psi^n = -d^{n+1}_{\mathbb{E}}(0,-1,0) &= (0, d^{n+1}, 0) \\ &= (0,-1,0)\begin{pmatrix} d^n_{\mathbb{F}} & f^{n+1} & -1 \\ 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{E}} & 0 \\ 0 & 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} = \psi^{n+1}d^n\end{aligned}$$

なので ψ もチェイン写像. $\psi\varphi = 1_{\mathbb{E}[1]}$ なので $[\psi][\varphi] = [1]$. 一方

$$(1-\varphi\psi)^n = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -f^{n+1} \end{pmatrix}(0,-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f^{n+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

$s = (s^n) \in \mathrm{Hom}^{-1}_R(C(-i(f)), C(-i(f)))$ を

$$s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : F^n \oplus E^{n+1} \oplus F^{n+1} \to F^{n-1} \oplus E^n \oplus F^n$$

で定めると,

$$\begin{aligned} s^{n+1}d^n + d^{n-1}s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^n_{\mathbb{F}} & f^{n+1} & -1 \\ 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{E}} & 0 \\ 0 & 0 & -d^{n+1}_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} d^{n-1}_{\mathbb{F}} & f^n & -1 \\ 0 & -d^n_{\mathbb{E}} & 0 \\ 0 & 0 & -d^n_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f^{n+1} & 1 \end{pmatrix} = (1-\varphi\psi)^n.\end{aligned}$$

よって $[1]=[\varphi][\psi]$ となり, ψ は φ のホモトピー逆であり, φ はホモトピー同値となった.

次に (6.19.3) の (ホモトピー) 可換性をいう. (a) の可換性は自明である. (b) の可換性を言う. まず, $\psi\circ i(-i(f))=-p(f)$ は容易に分かる. よって,

$$[i(-i(f))][1]=[\varphi][\psi][i(-i(f))]=[\varphi][-p(f)].$$

(c) の可換性は $p(-i(f))\circ\varphi=-f[1]$ だから明らかである.

以上により, **TR2** の必要性の部分は証明された. 次に十分性を証明する.

$Q(T)$ が卓越しているとせよ. このとき, すでに証明されている必要性の部分により, $Q^2(T)$ が, したがって

$$Q^3(T):\mathbb{E}[1]\xrightarrow{[-f[1]]}\mathbb{F}[1]\xrightarrow{[-g[1]]}\mathbb{G}[1]\xrightarrow{[-h[1]]}\mathbb{E}[2]$$

が卓越している. したがって, これから元の T が卓越していることを示すには, $f:\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ がチェイン写像のとき,

$$\text{(6.19.4)}\qquad \mathbb{E}[-1]\xrightarrow{[-f[-1]]}\mathbb{F}[-1]\xrightarrow{[-i(f)[-1]]}C(f)[-1]\xrightarrow{[-p(f)[-1]]}\mathbb{E}$$

も卓越していることを言えば良い. しかし, $\theta:C(f)[-1]\to C(-f[-1])$ を

$$\theta^n:C(f)[-1]^n=\mathbb{E}^n\oplus\mathbb{F}^{n-1}\to\mathbb{E}^n\oplus\mathbb{F}^{n-1}=C(-f[-1])^n$$

を -1 として定めるとチェイン同型で, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}[-1] \arrow[r, "-f[-1]"] \arrow[d, "1"] & \mathbb{F}[-1] \arrow[r, "-i(f)[-1]"] \arrow[d, "1"] & C(f)[-1] \arrow[r, "-p(f)[-1]"] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{E} \arrow[d, "1"] \\
\mathbb{E}[-1] \arrow[r, "-f[-1]"] & \mathbb{F}[-1] \arrow[r, "i(-f[-1])"] & C(-f[-1]) \arrow[r, "p(-f[-1])"] & \mathbb{E}
\end{tikzcd}$$

は可換であるから, (6.19.4) は卓越している.

TR3. 同型な 3 角形でとりかえて議論しても構わないことは容易に分かるので, (6.19.2) の第 1 行は $T(f)$, 第 2 行は $T(f')$ の形をしているとして構わない. すなわち, $\mathbb{G}=C(f)$, $g=i(f)$, $h=p(f)$, $\mathbb{G}'=C(f')$, $g'=i(f')$, $h'=p(f')$ としてよい. ホモトピー可換性により, $\beta f-f'\alpha=sd+ds$ となる $s\in\mathrm{Hom}_R^{-1}(\mathbb{E},\mathbb{F}')$ が存在する. $\gamma=\gamma(f,f',\alpha,\beta,s):\mathbb{G}=C(f)\to C(f')$ を

$$\gamma^n=\begin{pmatrix}\beta^n & s^{n+1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}:C(f)^n=\mathbb{F}^n\oplus\mathbb{E}^{n+1}\to(\mathbb{F}')^n\oplus(\mathbb{E}')^{n+1}$$

で定義する.

$$d^n_{C(f')}\gamma^n - \gamma^{n+1}d^n_{C(f)} = \begin{pmatrix} d & f' \\ 0 & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & s \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta & s \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & f \\ 0 & -d \end{pmatrix} = 0$$

なので, γ はチェイン写像である.

$$(\gamma i(f))^n = \begin{pmatrix} \beta & s \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\beta = (i(f')\beta)^n$$

なので, $\gamma i(f) = i(f')\beta$. 同様にして, $p(f')\gamma = \alpha[1]p(f)$ も容易である.

以上により, γ は求めるものである.

TR4. まず第1行, 第2行, 第3行はそれぞれ $T(f)$, $T(gf)$, $T(g)$ とする. α は **TR3** の証明に現れた $\gamma(f, gf, 1, g, 0)$ とし, β は $\gamma(gf, g, f, 1, 0)$ とする. $\delta = \eta[1]p(g)$ とおく. これにより, 図式がすべて (単なるホモトピー可換よりも強く) 可換になることは **TR3** の証明により明らかである.

残るは, これにより, 第4行も卓越していることの証明だけである. そこで, $\varphi : \mathbb{E}' = C(g) \to C(\alpha)$ を

$$\varphi^n C(g)^n = \mathbb{G}^n \oplus \mathbb{F}^{n+1} \to C(\alpha)^n = (\mathbb{F}')^n \oplus (\mathbb{G}')^{n+1} = \mathbb{G}^n \oplus \mathbb{E}^{n+1} \oplus \mathbb{F}^{n+1} \oplus \mathbb{E}^{n+2}$$

を $\varphi^n(g^n, f^{n+1}) = (g^n, 0, f^{n+1}, 0)$ で定義する. また, $\psi : C(\alpha) \to C(g)$ を $\psi^n(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2}) = (g^n, f^{n+1} + f(e^{n+2}))$ で定める.

$$\begin{aligned} d^n\psi^n(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2}) &= d^n(g^n, f^{n+1} + f(e^{n+1})) \\ &= (d^n g^n + g(f^{n+1} + f(e^{n+1})), -d^{n+1}(f^{n+1} + f(e^{n+1}))). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} &\psi^{n+1}d^n(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2}) = \psi^{n+1}(d^n g^n + gf(e^{n+1}) + g(f^{n+1}), \\ &\qquad - d^{n+1}(e^{n+1}) + e^{n+2}, -d^{n+1}(f^{n+1}) - f(e^{n+2}), d^{n+2}(e^{n+2})) \\ &= (d^n g^n + gf(e^{n+1}) + g(f^{n+1}), -d^{n+1}(f^{n+1}) - f(e^{n+2}) + f(-d^{n+1}(e^{n+1}) + e^{n+2})). \end{aligned}$$

従って ψ はチェイン写像である. $\psi\varphi = 1$ は明白だろう. また, $s \in \mathrm{Hom}^{-1}_R(C(\alpha), C(\alpha))$ を $s^n(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2}) = (0, 0, 0, e^{n+1})$ で定義すると,

$$(1-\varphi\psi)(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2}) = (0, e^{n+1}, -f(e^{n+2}), e^{n+2}) = (sd+ds)(g^n, e^{n+1}, f^{n+1}, e^{n+2})$$

は容易なので, ψ は φ のホモトピー逆. $\psi i(\alpha) = \beta$ も容易なので, $[\varphi][\beta] = [\varphi][\psi][i(\alpha)] = [i(\alpha)]$. また,

$$\delta^n(g^n, f^{n+1}) = (f^{n+1}, 0) \in C(f)[1]^n = \mathbb{F}^{n+1} \oplus \mathbb{E}^{n+2}$$

は定義から明らかであるが,

$$p(\alpha)^n\varphi^n(g^n, f^{n+1}) = p(\alpha)(g^n, 0, f^{n+1}, 0) = (f^{n+1}, 0).$$

よって $\delta = p(\alpha)\varphi$.

以上により, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}' = C(f) \arrow[r, "{[\alpha]}"] \arrow[d, "{[1]}"] & \mathbb{F}' = C(gf) \arrow[r, "{[\beta]}"] \arrow[d, "{[1]}"] & \mathbb{E}' = C(g) \arrow[r, "{[\delta]}"] \arrow[d, "{[\varphi]}"] & C(f)[1] \arrow[d, "{[1]}"] \\
\mathbb{C}(f) \arrow[r, "{[\alpha]}"] & C(gf) \arrow[r, "{[i(\alpha)]}"] & C(\alpha) \arrow[r, "{[p(\alpha)]}"] & C(f)[1]
\end{tikzcd}$$

はホモトピー可換であり, 3 角形の同型を与える. 第 2 行は $T(\alpha)$ なので, 第 1 行は卓越している. これが示すべきことであった. □

7 コホモロジー長完全列

7.1 系. R は環, $\mathbb{W}$ は左 R 加群の複体,

$$\mathbb{E} \xrightarrow{[f]} \mathbb{F} \xrightarrow{[g]} \mathbb{G} \xrightarrow{[h]} \mathbb{E}[1]$$

は卓越した 3 角形とする. このとき, 列

$$\begin{aligned}(7.1.1)\qquad \cdots &\xrightarrow{[h[-1]]_*} K_R(\mathbb{W}, \mathbb{E}) \xrightarrow{[f]_*} K_R(\mathbb{W}, \mathbb{F}) \xrightarrow{[g]_*} K_R(\mathbb{W}, \mathbb{G}) \\ &\xrightarrow{[h]_*} K_R(\mathbb{W}, \mathbb{E}[1]) \xrightarrow{[f[1]]_*} K_R(\mathbb{W}, \mathbb{F}[1]) \xrightarrow{[g[1]]_*} \cdots\end{aligned}$$

は完全である.

A　演習問題解答

必ず自分で考えてから解答を見てください.

講義ノートは http://www.math.okayama-u.ac.jp/~hashimoto/LN.html からも入手可能です.

(A.1) (2.12) の解答.

1 $d_2([\{1,2,3\}]) = [\{2,3\}] - [\{1,3\}] + [\{1,2\}]$.

2 $d_1 d_2([\{1,2,3\}]) = d_1([\{2,3\}] - [\{1,3\}] + [\{1,2\}]) = [\{3\}] - [\{2\}] - [\{3\}] + [\{1\}] + [\{2\}] - [\{1\}] = 0$.

3 $\alpha = d_2[\{1,2,3\}] = [\{2,3\}] - [\{1,3\}] + [\{1,2\}]$, $\beta = [\{3,4\}] - [\{2,4\}] + [\{2,3\}]$ とおくと, $\alpha, \beta \in Z_1$ は直接示される (α については **2** で示した).

$\Delta(1)$ は $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$ の 5 つの元からなるので, $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}(\Delta, \mathbb{Z})_1$ はこれらを基底に持つ rank 5 の $\mathbb{Z}$ 自由加群である.

一方, $\gamma = [\{1,2\}]$, $\delta = [\{1,3\}]$, $\epsilon = [\{3,4\}]$ とおくと, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ は $\mathbb{C}_1$ の別の基底になっていることは容易に分かる. 実際, $[\{2,3\}] = \alpha + \delta - \gamma$ だし, $[\{2,4\}] = -\beta + \epsilon + \alpha + \delta - \gamma$. よって, $\xi \in Z_1$ とすると,

$$\xi = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma + c_4\delta + c_5\epsilon$$

とかける. d_1 を作用させると, $\xi, \alpha, \beta \in Z_1$ なので,

$$\begin{aligned} d_1(\xi) &= c_3 d_1(\gamma) + c_4 d_1(\delta) + c_5 d_1(\epsilon) \\ &= -(c_3 + c_4)[\{1\}] + c_3[\{2\}] + (c_4 - c_5)[\{3\}] + c_5[\{4\}] = 0. \end{aligned}$$

これから $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ が従い, $\xi = c_1\alpha + c_2\beta$ とかけるから, Z_1 は α と β で生成される. α, β が 1 次独立なのは容易なので, Z_1 は α, β を基底に持つ階数 2 の $\mathbb{Z}$ 自由加群である.

4 $\mathbb{C}_2$ が $[\{1,2,3\}]$ で生成されることと **1** から明白である.

5 **3,4** の結果によって $H_1 \cong Z_1/B_1$ は β の像で生成される rank 1 の自由加群であり, $\mathbb{Z}$ と同型である.

(A.2) (2.16) の解答.

1 $m \in \operatorname{Ker} d$ とする. $d'(\varphi_1(m)) = \varphi_0(d(m)) = \varphi_0(0) = 0$. よって $\varphi_1(m) \in \operatorname{Ker} d'$ である. m は $\operatorname{Ker} d$ の任意の元なので, $\varphi_1(\operatorname{Ker} d) \subset \operatorname{Ker} d'$.

2 $m \in M$ とすると, $\varphi_0(d(m)) = d'(\varphi_1(m)) \in \operatorname{Im} d'$. $\operatorname{Im} d$ の元は一般に $d(m)$ $(m \in M)$ の形で書けるので, $\varphi_0(\operatorname{Im} d) \subset \operatorname{Im} d'$.

3 p はその定義によって全射なので, (2.13) によって, $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker}(p'\varphi_1)$ をいえば良い. $z \in \operatorname{Ker} p$ とすると, $d(z) = p(z) = 0$. よって $p'\varphi_1(z) = d'\varphi_1(z) = \varphi_0 d(z) = 0$. よって $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker}(p'\varphi_1)$ がわかった.

3' ν' は埋入なので単射であり, (2.14) によって, $\mathrm{Im}\,\varphi_0\nu \subset \mathrm{Im}\,\nu'$ を言えばよい. $d(m) \in \mathrm{Im}\,d$ $(m \in M_1)$ に対して,

$$\varphi_0\nu(d(m)) = \varphi_0(d(m)) = d'(\varphi_1(m)) = \nu'(d'(\varphi_1(m))) \in \mathrm{Im}\,\nu'.$$

4 $\nu' f p = \nu' p' \varphi_1 = d'\varphi_1 = \varphi_0 d = \varphi_0 \nu p = \nu' f' p$. p が全射なので (2.13) によって $\nu' f = \nu' f'$. ν' が単射なので (2.14) によって $f = f'$.

5 h については **1** と (2.14) から明白. g については **2** と (2.13) から明白. □

(A.3) (3.5) の解答.

$n, n' \in N$, $m \in M$ について, $\psi_{f,g}(m, n+n') = f(m) \otimes g(n+n') = f(m) \otimes (g(n)+g(n')) = f(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes g(n') = \psi_{f,g}(m,n) + \psi_{f,g}(m,n')$.

$m, n' \in M$, $n \in N$ について, $\psi_{f,g}(m+m', n) = f(m+m') \otimes g(n) = (f(m)+f(m')) \otimes g(n) = f(m) \otimes g(n) + f(m') \otimes g(n) = \psi_{f,g}(m,n) + \psi_{f,g}(m',n)$.

$m \in M$, $n \in N$, $r \in R$ について, $\psi_{f,g}(mr, n) = f(mr) \otimes g(n) = f(m)r \otimes g(n) = f(m) \otimes rg(n) = f(m) \otimes g(rn) = \psi_{f,g}(m, rn)$.

以上により, $\psi_{f,g}$ はバランス写像である. □

(A.4) (3.23) $L : R \times N \to N$ を $L(r,n) = rn$ $(r \in R, n \in N)$ で定めるとこれは R バランス写像で $r'L(r,n)t = r'(rn)t = (r'r)(nt) = L(r'r, nt)$ $(r, r' \in R, n \in N, t \in T)$ であるから (R,T) 準同型 $\lambda_N : R \otimes_R N \to N$ で $\lambda_N(r \otimes n) = rn$ であるものが一意的に存在する. $l : N \to R \otimes_R N$ を $l(n) = 1 \otimes n$ で定めると $\lambda_N l(n) = \lambda_N(1 \otimes n) = 1n = n$ であり, $l\lambda_N(r \otimes n) = l(rn) = 1 \otimes rn = r \otimes n$ であるから l は λ_N の逆写像であり, λ_N は同型.

ρ_N についても左右対称的に, ほぼ同様に示される.

(A.5) (3.32) の解答. 左 S 加群 M が与えられたとき, $rm = u_S(r) \cdot m$ と定めることによって M は R 加群にもなっていることに注意する. $\psi : S \times M \to M$ を $\psi(s,m) = sm$ で定義すると R バランス写像で $r\psi(s,m) = \psi(rs, m)$ であることは容易である. 従って R 準同型 $a_M : S \otimes_R M \to M$ で $a_M(s \otimes m) = sm$ であるものが一意的に定まる. 図式の可換性は, 第一のものについては $s, s' \in S$, $m \in M$ について $s \otimes s' \otimes m$ の行き着く先がどちらの辺をたどっても $(ss')m = s(s'm)$ であることから明白で, 第二のものについては, $r \in R$, $m \in M$ についてどちらをたどっても $r \otimes m$ の行き先が rm であることから明白である.

逆に R 加群 M と R 準同型 $a_M : S \otimes_R M \to M$ で図式を可換にするものが与えられたとすると, $sm := a_M(s \otimes m)$ と定義して M は左 S 加群である.

これらの対応がたがいに逆の対応になっているのは明らかで, 左 S 加群 M を与えることと, R 加群 M と R 線型写像 $a_M : S \otimes_R M \to M$ で図式 (3.32.1) を可換にするものを与えることは同じである.

(A.6) (3.37) の解答.

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(r(m+n)) &= \varphi(r(m+n)) + \psi(r(m+n)) \\ &= r(\varphi(m)+\varphi(n)) + r(\psi(m)+\psi(n)) = r((\varphi+\psi)(m+n)).\end{aligned}$$

よって $\varphi+\psi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

$\varphi, \psi, \theta \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ とせよ. $((\varphi+\psi)+\theta)(m) = \varphi(m)+\psi(m)+\theta(m) = (\varphi+(\psi+\theta))(m)$ なので, $(\varphi+\psi)+\theta = \varphi+(\psi+\theta)$. また, $(\varphi+\psi)(m) = \varphi(m)+\psi(m) = \psi(m)+\varphi(m) = (\psi+\varphi)(m)$. よって $\varphi+\psi = \psi+\varphi$. **零写像** 0 を $0m = 0$ $(m \in M)$ で定めると, $(\varphi+0)(m) = \varphi(m)+0(m) = \varphi(m)+0 = \varphi(m)$. よって $\varphi+0 = \varphi$.

また, $\theta(m) = -\varphi(m)$ と定めると, $\theta(r(m+m')) = -\varphi(r(m+m')) = r(-\varphi(m)-\varphi(m')) = r(\theta(m)+\theta(m'))$ なので $\theta \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. $(\varphi+\theta)(m) = \varphi(m)-\varphi(m) = 0$ なので, $\varphi+\theta = 0$.

以上により, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は加法群である.

(A.7) (3.38) $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は (3.37) によって, $(\varphi+\psi)(m) = \varphi(m)+\psi(m)$ なる和によって加法群である. $s, s' \in S$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $m \in M$ とせよ.

$$\begin{aligned}((s+s')\varphi)(m) &= \varphi(m(s+s')) = \varphi(ms+ms') = \varphi(ms)+\varphi(ms') \\ &= (s\varphi)(m)+(s'\varphi)(m) = (s\varphi+s'\varphi)(m).\end{aligned}$$

よって $(s+s')\varphi = s\varphi+s'\varphi$ である. また $(1_S\varphi)(m) = \varphi(m1_S) = \varphi(m)$. よって $1_S\varphi = \varphi$. また, $((ss')\varphi)(m) = \varphi(m(ss')) = \varphi((ms)s') = (s'\varphi)(ms) = (s(s'\varphi))(m)$. よって $(ss')\varphi = s(s'\varphi)$. 以上により, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は左 S 加群となった. 右 T 加群になることも同様である. $((s\varphi)t)(m) = ((s\varphi)(m))t = (\varphi(ms))t = (\varphi t)(ms) = (s(\varphi t))(m)$. よって $(s\varphi)t = s(\varphi t)$ であり, $\mathrm{Hom}_R(S,T)$ は (S,T) 両側加群である.

(A.8) (3.41) の解答.

1. $\mathrm{Hom}_R(1_M, 1_N)(f) = 1_N f 1_M = f = 1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}(f)$. よって $\mathrm{Hom}_R(1_M,1_N) = 1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$.

2. $(\mathrm{Hom}_R(f',g') \circ \mathrm{Hom}(f,g))(h) = \mathrm{Hom}_R(f',g')(ghf) = (g'(ghf)f') = (g'g)h(ff') = \mathrm{Hom}_R(ff', g'g)(h)$. よって $\mathrm{Hom}_R(f',g') \circ \mathrm{Hom}_R(f,g) = \mathrm{Hom}_R(ff', g'g)$.

(A.9)　(3.45) の解答.

(3.7) により, $(f^{-1}\otimes g^{-1})(f\otimes g) = f^{-1}f\otimes g^{-1}g = 1_M\otimes 1_N$. また, $(f\otimes g)(f^{-1}\otimes g^{-1}) = ff^{-1}\otimes gg^{-1} = 1_{M'}\otimes 1_{N'}$. 以上により, $f^{-1}\otimes g^{-1} = (f\otimes g)^{-1}$ である. 従って $f\otimes g$ は同型である.

(A.10)　(3.46) の解答.

(3.41) により, $\mathrm{Hom}_R(f^{-1},g^{-1})\circ\mathrm{Hom}_R(f,g) = \mathrm{Hom}_R(ff^{-1},g^{-1}g) = \mathrm{Hom}_R(1_M,1_N) = 1_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$. また,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(f,g)\circ\mathrm{Hom}_R(f^{-1},g^{-1}) &= \mathrm{Hom}_R(f^{-1}f,gg^{-1})\\ &= \mathrm{Hom}_R(1_{M'},1_{N'}) = 1_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}.\end{aligned}$$

以上により, $\mathrm{Hom}_R(f^{-1},g^{-1}) = \mathrm{Hom}_R(f,g)^{-1}$ であり, $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ は同型である.

(A.11)　(3.52) の解答.

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{m}\mathbb{Z}\xrightarrow{\pi}\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\to 0$$

は完全である. 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "m\otimes 1"] \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] & \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\otimes Z/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\theta"] & 0 \\
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "m"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "p"] & \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

のうち, 実線で表された部分は可換であり, 実線で表された縦の写像は同型である. また, 第 1 行は (3.50) により完全である. また, 第 2 行は p は明らかに全射で, $\mathrm{Ker}\,p = (n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z})/n\mathbb{Z} = m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ だから完全である. また,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(p\lambda) &= \lambda^{-1}(\mathrm{Ker}\,p) = \lambda^{-1}(\mathrm{Im}\,m) = \mathrm{Im}(\lambda^{-1}m)\\ &= \mathrm{Im}((m\otimes 1)\lambda^{-1}) = \mathrm{Im}(m\otimes 1) = \mathrm{Ker}(\pi\otimes 1)\end{aligned}$$

だから, (2.13) によって, 図式全体を可換にする破線の写像 θ が存在して単射である. ところが $\theta(\pi\otimes 1) = p\lambda$ は (p も λ も全射だから) 全射であり, 従って, θ も全射である. 結局 θ は同型である.

m と n が互いに素ならば, $am+bn = 1$ となる $a,b\in\mathbb{Z}$ が存在する. よって $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ であり, $\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}) = 0$ である. θ が同型なので, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\otimes Z/n\mathbb{Z}\cong 0$.

(A.12)　(4.4) の解答.

$$
\begin{aligned}
(\prod f_\lambda)(s(m_\lambda)r) &= (\prod f_\lambda)((sm_\lambda r)) = (f_\lambda(sm_\lambda r)) \\
&= (sf_\lambda(m_\lambda)r) = s(f_\lambda(m_\lambda))r = s((\prod f_\lambda)(m_\lambda))r.
\end{aligned}
$$

よって $\prod f_\lambda$ は (S, R) 準同型である. $\square$

(A.13)　(4.6) の解答. $(f_\lambda) \in \prod_\lambda \mathrm{Hom}_S(W, M_\lambda)$ と $w' \in W'$ に対して,

$$
\begin{aligned}
((\mathrm{Hom}_S(h, \prod g_\lambda)\varpi)((f_\lambda)))(w') &= (\prod g_\lambda)(\varpi((f_\lambda)))(hw') \\
&= (\prod g_\lambda)(\varpi((f_\lambda)))(hw') = (\prod g_\lambda)((f_\lambda(hw'))) = (g_\lambda f_\lambda(hw')).
\end{aligned}
$$

一方,

$$
((\varpi \prod_\lambda \mathrm{Hom}_S(h, g_\lambda))((f_\lambda)))(w') = (\varpi((g_\lambda f_\lambda h)))(w') = (g_\lambda f_\lambda hw').
$$

以上により, $\mathrm{Hom}_S(h, \prod g_\lambda)\varpi = \varpi \prod_\lambda \mathrm{Hom}_S(h, g_\lambda)$ であり, ϖ は自然である. $\square$

(A.14)　(4.20) の解答. (3.51) によって, $i \otimes 1_W$ が (S, T) 両側加群の分裂単射であることをいえば十分である. $q : M \to L$ を (S, R) 両側加群の準同型で $qi = 1_L$ であるものとする. このとき, $q \otimes 1_W : M \otimes_R W \to L \otimes_R W$ は (S, T) 準同型であり, 関手性によって $(q \otimes 1_W)(i \otimes 1_W) = qi \otimes 1_W = 1_L \otimes 1_W = 1_{L \otimes W}$. したがって $i \otimes 1_W$ は (S, T) 両側加群として分裂する単射である. $\square$

(A.15)　(4.21) の解答. 完全列

$$
0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0
$$

を考え, これに $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をテンサーすると,

$$
0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0
$$

を得るが, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で 2 倍と 0 倍は同じことだから, $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は 0 であり, 単射ではない. したがってこの列は完全ではない. $\square$

(A.16) (4.22) の解答. 任意の単射が分裂単射ならばよい. $i : L \to M$ が k 線型な単射とせよ. B を L の基底とすると $i(B)$ は単射性によって一次独立であり, $i(B)$ を延長して, M の基底 $i(B) \coprod B'$ を得る. M から L への k 線型写像 q を $q(i(b)) = b$ $(b \in B)$, $q(b') = 0$ で定める. すると $qi(b) = b$ $(b \in B)$ によって $qi = 1_L$. つまり, i は分裂単射である. □

(A.17) (4.23) の解答. k 加群の完全列として分裂することは (4.22) による. もしこの列が R 加群の完全列として分裂したとすると, ある単射 R 準同型 $j : R/xR \to R$ が存在する. $a \in R/xR$ について, $xj(a) = j(xa) = j(0) = 0$ であるが, R は整域なので, $j(a) = 0$. つまり $j = 0$. j は単射なので, $R/xR = 0$. これは矛盾. □

(A.18) (4.26) の解答. B が F の基底とせよ. $b \in B$ に対して, $\{b\}$ は B の部分集合だから一次独立であり, $m_b(r) = rb = 0$ ならば, $r = 0$. つまり, m_b は単射. 次に, B は F を生成するから $F = \sum_{b \in B} Rb$ である. この和が内部直和であることを示そう. $b_1, \ldots, b_n$ が B の相異なる元とせよ. $\sum_i r_i b_i = 0$ とすると, 一次独立性により, すべての r_i は 0 である. よって, 特に $r_i b_i = 0$ となり, 和は直和である.

逆に $F = \bigoplus_{b \in B} Rb$ であって, 各 r_b が単射とする. このとき, 明らかに B は F を生成している. また, $b_1, \ldots, b_n$ が B の相異なる元で, $\sum_i r_i b_i = 0$ とせよ. 和が直和なので, 各 $r_i b_i$ が 0 である. 各 r_{b_i} が単射なので, 各 r_i は 0 である. よって, B は一次独立である.

B 目次

C　記号の一覧表

D 参考文献

[BB] S. Brenner and M. C. R. Butler, Generalizations of the Bernstein–Gel'fand–Ponomarev reflection functors, *Representation Theory, II* (Ottawa, 1979), pp. 103–169.

[Frk] J. Franke, On the Brown representability theorem for triangulated categories, *Topology* **40** (2001), 667–680.

[Gab] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[Gro] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.

[Har] R. Hartshorne, *Residues and Duality, Lect. Notes Math.* **20**, Springer Verlag, (1966).

[Har2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math.* **52**, Springer Verlag (1977).

[Hat] 服部晶夫, 「位相幾何学 I」, 岩波 (1977).

[Ivr] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves,* Springer (1986).

[Kaw1] 河田敬義, 「ホモロジー代数 I」, 岩波 (1976).

[Kaw2] 河田敬義, 「ホモロジー代数 II」, 岩波 (1977).

[McL] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician,* 2nd ed. *Graduate Texts in Math.* **52**, Springer Verlag (1998).

[三高] S. マックレーン著, 三好博之, 高木理訳, 「圏論の基礎」, シュプリンガー (1998), [McL] の邦訳.

[Miy] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, *Math. Z.* **193** (1986), 113–146.

[Muk] S. Mukai, Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves, *Nagoya Math. J.* **81** (1981), 153–175.

[Nee] A. Neeman, The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 205–236.

[Ric] J. Rickard, Morita theory for derived categories, *J. London Math. Soc.* **39** (1989), 436–456.

[Spl] N. Spaltenstein, Resolutions of unbounded complexes, *Compositio Math.* **65** (1988), 121–154.

[谷堀] 谷崎俊之, 堀田良之, 「D 加群と代数群」, シュプリンガー (1995).

[Wbl] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra,* Cambridge (1994).

E 索引