代数学 III 演習 (橋本)　第 1 回

問題 1.1. $f: X \to Y$ が写像で, $A \subset X$ のとき,

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \in Y \mid \exists a \in A \; y = f(a)\}$$

とおいて, $f(A)$ を A の f による像という. $f(X)$ を $\operatorname{Im} f$ で表し, f の像という. $A, B, \ldots$ が X の部分集合のとき, 次を示せ.

(1) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.

(2) より一般に, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が X の部分集合の族とするとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) = f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$.

(3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(4) 上の (3) において, 一般には等号は成立しない.

(5) f が単射であることと, 任意の $A, B \subset X$ に対して $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成立することが同値である.

問題 1.2. $f: X \to Y$ が写像で, $B \subset Y$ のとき,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

とおいて, $f^{-1}(B)$ を B の f による逆像という. $A, B, \ldots$ が Y の部分集合のとき, 次を示せ.

(1) $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$.

(2) より一般に, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が Y の部分集合の族とするとき, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$.

(3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(4) より一般に, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が Y の部分集合の族とするとき, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) = f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$.

問題 1.3. $f: X \to Y$ は写像とする. 以下を示せ.

(1) $A \subset X$, $B \subset Y$ のとき, $f(A) \subset B$ と $A \subset f^{-1}(B)$ は同値である.

(2) $A_1 \subset A_2 \subset X$ のとき, $f(A_1) \subset f(A_2)$ である.

(3) $B_1 \subset B_2 \subset Y$ のとき, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ である.

(4) $A \subset X$, $B \subset Y$ のとき, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

問題 1.4. $f: X \to Y$ および $g: Y \to Z$ は写像とする.

(1) $A \subset X$ に対して, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

(2) $B \subset Z$ に対して, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

問題 1.5. $f: G \to G'$ が群準同型で, N' が G' の正規部分群のとき, $f^{-1}(N')$ は G の正規部分群であることを証明せよ.

問題 1.6. 算法を $+$ で表す可換な半群を加法的半群という. 加法的半群 S について, 集合 $S \times S$ に関係 $\sim$ を $(a,b),(a',b') \in S \times S$ について $(a,b) \sim (a',b')$ であるとはある $c \in S$ が存在して $a+b'+c = b+a'+c$ であることであるとして定める.

(1) $\sim$ は $S \times S$ の同値関係であることを示せ.

(2) $G(S) = (S \times S)/\sim$ とおく. $(a,b) \in S \times S$ の $G(S)$ における像を $a-b$ と表す. $G(S)$ の和を $(a-b)+(a'-b') = (a+a')-(b+b')$ であるとして定めると well-defined であり, $G(S)$ は加法群になる.

(3) $\varphi_S : S \to G(S)$ を $\varphi_S(s) = (s-0)$ と定義することにより, φ_S は S から $G(S)$ への半群準同型であることを示せ.

(4) G' が加法群で, $f : S \to G'$ が半群準同型のとき, 群準同型 $\tilde{f} : G(S) \to G'$ で $\tilde{f} \circ \varphi_S = f$ をみたすものが一意的に存在することを証明せよ.

問題 1.7. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ は写像とする. 次を示せ.

(1) f と g が全射であれば, $g \circ f$ も全射である.

(2) $g \circ f$ が全射であれば, g は全射である.

(3) f と g が単射であれば, $g \circ f$ も単射である.

(4) $g \circ f$ が単射であれば, f は単射である.

問題 1.8. $e \in 7\mathbb{Z}$, $e' \in 9\mathbb{Z}$ で $e+e'=1$ であるような $e, e' \in \mathbb{Z}$ をひとくみ与えよ. また, 7 で割って 3 余り, 9 で割って 6 余る自然数をひとつ与えよ.