代数学 III 演習 (橋本)　第 10 回

問題 10.1. A が整域, S がその 0 を含まない積閉集合とするとき, 局所化 $A \to A_S$ が整であれば, S は単元のみからなり, 従って $A_S = A$ であることを示せ.

問題 10.2. n が自然数, p が素数で, k が標数 p の体であるとき, $k[x]/(x^n - 1)$ が被約であるための条件を求めよ.

問題 10.3. R が可換環, M が R 加群とする. 次が同値であることを示せ.

(1) M の部分加群の全体は包含関係による順序で極大条件をみたす.

(2) M の任意の部分加群は有限生成である.

この同値な条件をみたすとき, M はネーター加群であるという. 環 R がネーター環であるとは R 加群 R がネーター R 加群であることをいう.

問題 10.4. $A \to B$ が可換環の準同型で, B の任意のイデアルは A のイデアルの拡大イデアルである, つまり, B の任意のイデアル J はある A のイデアル I によって $J = IB$ と表されるとする. このとき, もし A がネーター環であれば, B もネーター環であることを示せ.

問題 10.5. A がネーター環ならば, A のイデアル I と積閉集合 S に対して, A_S および A/I はともにネーター環であることを示せ.

問題 10.6. 可換環の準同型 $f : A \to B$ が cyclically pure であるとは, 任意の A のイデアル I がある B のイデアル J によって $I = J \cap A$ ($J \cap A$ は $f^{-1}(J)$ の略記) と表わされることをいう. B がネーターで f が cyclically pure であるとき, A はネーターであることを示せ.

問題 10.7 (Hilbert の基底定理)**.** R がネーターな可換環とするとき, 多項式環 $R[x]$ もネーター環であることを示せ.

問題 10.8. $f : A \to B$ が有限型な可換環の準同型で A がネーター環であれば, B もネーター環であることを示せ.

問題 10.9 (Artin-Tate の補題)**.** A がネーター環, B は A 上有限生成環, C は B の部分 A 代数とし, B は C 上整とする. このとき, C も A 上有限生成であり, 従ってネーター環となることを示せ.

問題 10.10. $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ は $R_n = 0$ ($n < 0$) であるような次数付可換環とする. このとき, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n > 0} R_n$ とおくと, $\mathfrak{m}$ は R の斉次イデアルであることを示せ. また, 次が同値であることを示せ.

(1) R はネーター環.

(2) R_0 はネーター環で, $\mathfrak{m}$ は R の有限生成なイデアル.

問題 10.11. A が UFD であるとき, A が単項な素イデアルを有限個しか持たないことと, 商体 $Q(A)$ が A 上有限型であることは同値であることを示せ. このことを用いて, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限型ではないことを示せ.

問題 10.12. k が体, $A = k[a_1, \dots, a_n]$ が k 上有限型な拡大整域とする. もし A が体であれば, A は k 上有限である.

問題 10.13. $\mathbb{Z}$ 上有限型な体は有限体に限ることを示せ.

問題 10.14 (Hilbert の零点定理)**.** k が体, A が k 上有限生成代数, I が A のイデアルとするとき,

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I} \mathfrak{m}$$

を示せ. ただし, 共通部分は I を含む A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を渡る.

R が可換環, M が R 加群とする. M の部分加群の全体が包含関係でなす順序集合が極小条件をみたすとき, M はアルティン加群であるという. R 加群 R がアルティン加群であるとき, R はアルティン環であるという.

問題 10.15. 0 次元の可換ネーター環はアルティン環であることを示せ.

問題 10.16 (秋月の定理)**.** 可換なアルティン環はネーター環である. 零環以外の可換アルティン環は 0 次元である.