代数学 III 演習 (橋本)　第 11 回

今回は A, B は可換環を表すとする.

問題 11.1 (局所化の完全性)**.** A が可換環, S がその積閉集合,

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

が A 加群の完全列とするとき, その局所化

$$0 \to (M_1)_S \xrightarrow{f_S} (M_2)_S \xrightarrow{g_S} (M_3)_S \to 0$$

も完全であることを証明せよ.

問題 11.2 (テンソルの右完全性)**.** A 加群 M と A 加群の完全列

$$N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \to 0$$

に対して, 列

$$M \otimes_A N_1 \xrightarrow{1_M \otimes f} M \otimes_A N_2 \xrightarrow{1_M \otimes g} M \otimes_A N_3 \to 0$$

も完全列であることを示せ.

問題 11.3. A 加群 M が平坦加群であるとは, 任意の A 加群の単射 $f : N_1 \to N_2$ について, $1_M \otimes f : M \otimes_A N_1 \to M \otimes_A N_2$ が単射であることをいう. 可換 A 代数 B が平坦代数であるとは, B を A 加群とみて平坦であることをいう. S が A の積閉集合であるとき, A_S は平坦 A 代数であることを証明せよ.

問題 11.4. 自由加群は平坦加群であることを示せ. A 上の多項式環 $A[x_1, \ldots, x_n]$ は A 上平坦であることを示せ.

問題 11.5. k が体で, $A = k[x, y]$ が 2 変数の多項式環, $B = k[x, y, z]/(xy - z^n)$ であるとき, B が A 上自由加群であることを示し, とくに B は A 平坦であることを示せ.

問題 11.6. M が A 加群のとき, 標準的写像 $A \otimes_A M \to M$ $(a \otimes m \mapsto am)$ は A 加群の同型であることを示せ.

問題 11.7. A 加群 M について, 次が同値であることを示せ.

(1) M は平坦である.

(2) 任意の A の有限生成イデアル I に対して, $I \otimes_A M \to M$ $(a \otimes m \mapsto am)$ は単射である.

問題 11.8. M が A 加群で $m \in M$ とする. m がねじれ元であるとは, ある A の非零因子 a が存在して, $am = 0$ となることをいう. M がねじれ元を持たないとき, M はねじれがない (torsion-free) という. A が PID のとき, M が平坦であることと, M にねじれがないことは同値であることを示せ.

問題 11.9. $(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/64\mathbb{Z})$ を求めよ.

問題 11.10. B が平坦 A 代数で, I, J が A のイデアルのとき,

$$IB \cap JB = (I \cap J)B$$

であることを示せ. B が平坦と仮定しないと, 必ずしもこの等式は成立しないことを例によって示せ.

問題 11.11. A 加群 M が有限表示とは, 完全列

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} M \to 0$$

で F_0 と F_1 は有限生成自由 A 加群であるようなものが存在することをいう. A がネーター環のとき, 任意の有限生成 A 加群は有限表示であることを示せ.

問題 11.12 (5 項補題)**.**

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_5} \\
N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5
\end{array}$$

は各行が完全列であるような A 加群の可換図式とする. このとき, 次が成立することを示せ.

(1) f_1 が全射, f_2 と f_4 が単射ならば, f_3 は単射である.

(2) f_2 と f_4 が全射で, f_5 が単射ならば, f_3 は全射である.

(3) f_1 が全射, f_2 と f_4 が同型, f_5 が単射ならば, f_3 は同型である.

問題 11.13. $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は A 加群の族とする. N が A 加群のとき,

$$\rho : N \otimes_A \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (N \otimes_A M_\lambda)$$

なる A 準同型で, $\rho(n \otimes (m_\lambda)) = (n \otimes m_\lambda)$ であるものが一意的に存在することを示せ. また, N が有限表示ならば ρ は同型であることを示せ.

問題 11.14 (Chase の定理)**.** A がネーター環, $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が平坦 A 加群の族であれば, 直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ も平坦である.

問題 11.15. A がネーター環のとき, ベキ級数環 $A[[x_1, \ldots, x_n]]$ は平坦代数である.