代数学 III 演習 (橋本)　第 12 回

今回では, R, A, B は可換環を表すとする.

問題 12.1. 可換環 A が正規であるとは, 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ に対して, 局所化 A_P が整閉整域であることをいう. 整域について, 整閉整域であることと, 正規整域であることは同値であることを示せ.

問題 12.2. 整閉整域有限個の直積環は正規であることを証明せよ.

問題 12.3. A がネーター環であるとき, 次は同値であることを示せ.

(1) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P は整域である.

(2) A は被約であり, 任意の A の極小素イデアル P, Q について, $P + Q = A$ である.

(3) A は整域有限個の直積である.

問題 12.4. A がネーター環であるとき, 次は同値であることを示せ.

(1) A は正規環である.

(2) A はネーター整閉整域有限個の直積である.

問題 12.5. 群 G が可換環 A に (環の自己同型によって) 作用するとは, 作用 $G \times A \to A$ ($(g, a) \mapsto ga$) が与えられ, $g(1_A) = 1_A$, $g(a+b) = ga + gb$, $g(ab) = (ga)(gb)$, $ea = a$, $g(g'a) = (gg')a$ が成立することをいう. ここに, e は G の単位元である. このとき,

$$A^G = \{a \in A \mid \forall g \in G\ ga = a\}$$

は A の部分環であることを示せ.

問題 12.6. A が可換環, G が有限群で A に作用するとき, A は部分環 A^G 上整であることを示せ.

問題 12.7. A 加群の間の準同型 $f : M \to N$ が純であるとは, 任意の A 加群 W に対して, $1_W \otimes f : W \otimes_A M \to W \otimes_A N$ が単射であることをいう. 分裂単射は純であり, 純な準同型は単射であることを示せ.

問題 12.8. 可換環 B とその部分環 A について, A が B の直和因子部分環であるとは, A が A 加群 B の直和因子であることをいう. また, A が B の純部分環であるとは $A \to B$ が A 加群の準同型として純であることをいう. A が B の直和因子部分環であるが $A \neq B$ である例, A が B の純部分環であるが直和因子部分環ではない例をそれぞれ一つずつ挙げよ.

問題 12.9. B が可換環, A がその純部分環とするとき, $A \to B$ は cyclically pure であることを証明せよ. ここに, $A \to B$ が cyclically pure であるとは, 任意の A のイデアル I について, $IB \cap A = I$ が成立することをいう.

問題 12.10. B が整閉整域, A がその部分環で, $A \to B$ が cyclically pure と仮定する. このとき, A も整閉整域であることを証明せよ.

問題 12.11. R が可換環, B が R 代数とする. 群 G が B に R 作用するとは, G が B に作用し, 任意の $r \in R$ と任意の $b \in B$ と任意の $g \in G$ に対して, $g(rb) = r(gb)$ が成立することをいう. このとき, B^G は B の部分 R 代数であることを証明せよ.

問題 12.12. R がネーター環, B が有限生成 R 代数で, G が有限群で B に R 作用するとする. このとき, B^G も有限生成 R 代数であることを証明せよ.

問題 12.13. k が体, G が有限群で, k の標数は 0 か, G の位数を割らない素数とする. このとき,

$$\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

は群環 kG の中心的ベキ等元であることを証明せよ. ρ を G の Reynolds 作用素と呼ぶことがある.

問題 12.14. k, G, ρ は前問と同様とする. V が kG 加群のとき, ρ は V を $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$ に写すことを示せ. G が可換環 B に作用するとき, $A = B^G$ とし, $i : A \to B$ を埋入とするときに, $\rho : B \to A$ は $\rho i = 1_A$ をみたす A 加群の準同型であることを示せ. 従ってこのとき, A は B の直和因子部分環である.

問題 12.15. $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ は次数付き可換環とし, $r \geq 1$ は自然数とする. このとき, $A^{(r)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_{rn}$ は A の部分環であることを示せ. $A^{(r)}$ を A の r 次のベロネーゼ部分環という.

問題 12.16. $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$, $r \geq 1$ は前問のとおりとする. A が整閉整域であれば, $A^{(r)}$ も整閉整域であることを示せ.

問題 12.17. k が体のとき, $k[x, y, z]/(xy - z^2)$ は整閉整域であることを証明せよ.