代数学 III 演習 (橋本)　第 13 回

問題 13.1. $\mathbb{R}[x]/(x^3-1)$ はどのような環か記述せよ。また, $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]/(x^3-1))$ はどのような環か記述せよ。

問題 13.2. 5 で割って 3 余り, 7 で割って 2 余り, 17 で割って 10 余る整数をすべて求めよ。

問題 13.3. 30 で割って 7 余り, 24 で割って 13 余る整数をすべて求めよ。

問題 13.4. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ が UFD ではないことを証明せよ。

問題 13.5. 可換環 A から A 自身への全射準同型であって単射ではないものの例を構成せよ。

問題 13.6. A が可換ネーター環のとき, A から A 自身への全射準同型は同型であることを証明せよ。

問題 13.7. A が可換環, L, M, N が A 加群とするとき, A 準同型

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(L, M)\otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(L, M\otimes_A N)$$

であって, $\Phi(\psi\otimes n)(l)=\psi(l)\otimes n$ ($\psi\in\mathrm{Hom}_A(l,m)$, $n\in N$, $l\in L$) が成立するものが一意的に存在することを証明せよ。また, L が有限表示 A 加群で, N が平坦 A 加群のとき, Φ が同型であることを証明せよ。

問題 13.8. $(\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})$ を求めよ。

問題 13.9. k を体とするとき, $k[x,y,z,w]/(xy-zw)$ は UFD ではない整閉整域であることを証明せよ。

問題 13.10. ω を 1 の原始 n 乗根 $e^{2\pi i/n}$ とするとき, $\mathbb{Q}[\omega]\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\omega]$ を求めよ。

問題 13.11. k が標数 p の体の時, $k(x)\otimes_{k(x^p)}k(x)$ を求めよ。

問題 13.12. $k\subset K$ が体の拡大で, K が k 上整であるとき, K は k の代数拡大であるという. K が k の 代数拡大のとき, $k(x)\otimes_k K = K(x)$ であることを示せ.

問題 13.13. k が体の時, $k(x)\otimes_k k(y)$ は体ではないネーター整域であることを証明せよ。

問題 13.14. $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ はネーター環ではないことを示せ。

問題 13.15. R が環のとき, 加法群としては R であり, 乗法を ab とは, 元の R での ba のことである, として新たに定義しなおすと環になる。これを R° で表し, R の反対という。R と R° が環として同型ではない例を与えよ。