代数学 III 演習 (橋本)　第 2 回

問題 2.1. R が環, $a, b, c, \dots$ が R の元とするとき, 次を証明せよ.

(1) $a \cdot 0 = 0$. ただし, 0 は R の零元を表すとする.

(2) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$.

問題 2.2. $R = M_2(\mathbb{R})$ の部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

は R の部分環であることを証明せよ.

問題 2.3. R がのとき, 上半三角行列全体

$$U = \{(a_{ij}) \in M_n(R) \mid a_{ij} = 0 \quad (i > j)\}$$

は $M_n(R)$ の部分環であることを証明せよ.

問題 2.4. G が半群のとき,

$$G^\times = \{g \in G \mid g \text{ は逆元を持つ }\}$$

とおくと, $G^\times$ は G の部分群である, つまり, G の算法によって群になることを示せ.

問題 2.5. R が環のとき,

$$R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in R\}$$

は加法を

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

で, スカラー倍を

$$r(a_1, \dots, a_n) = (ra_1, \dots, ra_n)$$

で定めることにより, 左 R 加群となることを証明せよ.

問題 2.6. R が可換環, I, J が R のイデアルのとき,

$$I + J = \{a + b \mid a \in I,\ b \in J\}$$

とおくと, $I + J$ は R のイデアルであることを証明せよ.

問題 2.7. $\mathbb{Z}$ のイデアル $I = 24\mathbb{Z}$ と $J = 18\mathbb{Z}$ に対して, $I + J$ を求めよ.

問題 2.8. 環 R に対して, $I \subset R$ が R の両側イデアル (または単にイデアル) であるとは,

(1) $0 \in I$;

(2) $a, b \in I$ ならば $a + b \in I$;

(3) $a \in I$, $r, r' \in R$ ならば, $rar' \in I$.

が成立することをいう. 全行列環 $S = M_n(\mathbb{C})$ の両側イデアルは, $\{O\}$ と S に限ることを証明せよ.

問題 2.9. R が環で, $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が R の部分環の族のとき, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は R の部分環であることを示せ.

問題 2.10. R が可換環で Σ が R のイデアルからなる集合とする. Σ が空でなく, 包含関係による順序で全順序集合をなすとき, $\bigcup_{I\in\Sigma} I$ は R のイデアルであることを示せ.