代数学 III 演習 (橋本)　第 3 回

問題 3.1. 可換環 R のイデアル I に対して次は同値であることを示せ.

(1) $I = R$

(2) $1 \in R$

(3) $I \cap R^\times \neq \emptyset$

(4) R/I は零環である.

問題 3.2. 可換環 R について次は同値であることを示せ.

(1) $R^\times = R \setminus \{0\}$

(2) R は零環ではなく, $R \setminus \{0\} \subset R^\times$.

(3) R は零環ではなく, R のイデアルは 0 と R しかない.

問題 3.3. 可換環 R について, R の非零因子の全体を $R^\star$ で表すことにする. 次が同値であることを示せ.

(1) $R^\star = R \setminus \{0\}$

(2) R は零環ではなく, $a, b \in R$, $ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ が成り立つ.

問題 3.4. 体 K の部分集合 k が K の部分体であるとは, k が K の部分環で, かつ任意の $a \in k \setminus \{0\}$ に対して $a^{-1} \in k$ であることをいう. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ とおく. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ が $\mathbb{C}$ の部分体であることを示せ.

問題 3.5. 自然数 n について, 次の値は等しいことを示せ.

(1) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の位数 (すなわち元の個数).

(2) 自然数 $1, 2, \ldots, n$ の中で n と互いに素 (つまり最大公約数が 1) なものの個数.

上記の等しい値を $\varphi(n)$ で表す. φ はオイラー関数と呼ばれる.

問題 3.6. 可換環 R のイデアル I, J について, I と J が互いに素であるとは, $I + J = R$ であることをいう.

(1) I, J が互いに素のとき, 同型 $f : R/(I \cap J) \to R/I \times R/J$ $(f(a + (I \cap J)) = (a + I, a + J))$ が定まることを示せ.

(2) I, J が互いに素のとき, $IJ = I \cap J$ を示せ.

(3) $I_1, \ldots, I_n$ が R の 2 つずつ互いに素なイデアルとするとき, $I_1 \cdots I_n = I_1 \cap \cdots \cap I_n$ であって,

$$R/I_1 \cdots I_n \cong R/I_1 \times \cdots R/I_n$$

が同型であることを示せ.

問題 3.7. オイラー関数 φ について次に答えよ.

(1) 6 以下の n について $\varphi(n)$ を求めよ.

(2) m, n が互いに素な自然数のとき, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

(3) p が素数で $n = p^e$ のとき, $\varphi(n) = (p-1)p^{e-1}$.

(4) $\varphi(360)$ を求めよ.

問題 3.8. $\varphi(n) = 1000$ をみたす最小の自然数 n を求めよ.

問題 3.9. 体 K について $K^\times$ の有限部分群は巡回群であることを示せ.

問題 3.10. $R = \mathbb{Z}[i]$ (ただし i は虚数単位) と素数 p について, p が R の素元 (つまり pR が R の 0 でない素イデアル) であるための条件を求めよ.

問題 3.11. $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ は UFD ではないことを示せ. R の単項ではないイデアルをひとつ挙げよ.