代数学 III 演習 (橋本)　第 4 回

問題 4.1. $\mathbb{Z}[\omega]$ はユークリッド環であることを示せ. ここに $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

問題 4.2. m^2 (m は自然数) の形の約数を持たない, 0 でない整数は square-free であるという. 210 は square-free であるが, 24 は square-free ではない. さて, square-free な 0 でない整数 n について, $A = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ とおく. このとき, $A^\times$ が有限集合になる必要十分条件は $n < 0$ であることを示せ.

問題 4.3. 有限整域 (すなわち, 有限個しか元を持たない整域) は体であることを示せ.

問題 4.4 (Eisenstein の既約性判定法)**.** A が整域, P が A の素イデアルとし,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in A[x]$$

とする ($n \geq 1$). $a_1, \ldots, a_n \in P$ で $a_n \notin P^2$ であるとき, $f(x)$ は $A[x]$ の既約元であることを示せ.

問題 4.5. 素数は無限個存在することを示せ.

問題 4.6. $f : A \to B$ が環準同型とする. $B = A[b_1, \ldots, b_n]$ となる $b_1, \ldots, b_n \in B$ が存在するとき, B は A 上有限生成である, 有限型である, などという. 有理数体 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限型ではないことを示せ.

問題 4.7. 3 で割って 2 余り, 7 で割って 5 余り, 13 で割って 9 余る整数をすべて求めよ.

問題 4.8. 可換環 A に対して, A の素イデアルの全体からなる集合を $\operatorname{Spec} A$ で表す. A のイデアル I に対して,

$$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \supset I\}$$

とおく. $V(I)$ の形の $\operatorname{Spec} A$ の部分集合を閉集合として, $\operatorname{Spec} A$ は位相空間になることを示せ. この位相を $\operatorname{Spec} A$ の Zariski 位相という.

問題 4.9. 位相空間 X が T_0 空間であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して,「x を含む開集合は y も含み, かつ, y を含む開集合は x も含むならば, $x = y$」が成立するとき, T_0 空間という. $\operatorname{Spec} A$ はコンパクトな T_0 空間であることを示せ.

問題 4.10. 空でないコンパクトな T_0 空間は閉点を持つことを示せ.

問題 4.11. 位相空間 X が既約であるとは, $X \neq \emptyset$ であり, かつ, F_1, F_2 が X の閉部分集合で $X = F_1 \cup F_2$ であれば, $X = F_1$ か $X = F_2$ のいずれかが成立することをいう. $x \in X$ が X の生成点であるとは, $\{x\}$ の閉包が X 全体であることをいう. 生成点を持つ位相空間は既約であることを示せ.

問題 4.12. 整域 A について, $\operatorname{Spec} A$ は既約であることを示せ.

問題 4.13. 位相空間 X の部分空間 Y が稠密であるとは, Y の閉包が X 全体であることをいう. X が既約で稠密な部分空間 Y を持つとき, X も既約であることを示せ.

本演習では, 位相空間 X が連結とは, $X \neq \emptyset$ であって, $X = U_1 \cup U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_1 と U_2 は X の開部分集合と表されるならば, $U_1 = X$ または $U_2 = X$ であることを意味するものとする (多くの本では空集合も連結だとしているが, 本演習では排除する).

問題 4.14. 零環ではない可換環は極大イデアルを持つことを示せ.

問題 4.15. 可換環 A の元 e がベキ等元であるとは, $e^2 = e$ が成立することをいう. 可換環 A について, $\operatorname{Spec} A$ が連結であるための必要十分条件は, A のベキ等元が 2 個 (すなわち 0 と 1) であることである.

問題 4.16. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i]$ の元を分類せよ. ただし i は虚数単位とする.