代数学 III 演習 (橋本)　第 5 回

問題 5.1. 位相空間 X について, 次が同値であることを示せ.

(1) 閉部分集合について, 降鎖律が成立する. すなわち,

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$$

が X の閉部分集合の減少列であれば, ある自然数 N が存在して, $F_N = F_{N+1} = \cdots$ である.

(2) 開部分集合について昇鎖律が成立する. すなわち,

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$$

が X の開部分集合の増大列であれば, ある自然数 N が存在して, $U_N = U_{N+1} = U_{N+2} = \cdots$ である.

(3) 任意の X の開部分集合はコンパクトである.

以上の同値な条件が成り立つとき, X はネーター空間であるという.

問題 5.2. ネーター空間の部分空間はネーター空間であることを示せ.

問題 5.3. 位相空間 X について, X の既約な部分空間の中で極大なものを X の既約成分という. ネーター空間 X について, X の既約成分は有限個であり, X はそれらの和集合であることを示せ.

問題 5.4. ネーター環 A について, $\operatorname{Spec} A$ はネーター空間であることを示せ.

問題 5.5. 可換環 A と A の素イデアル P について, P に含まれる極小な素イデアルが存在することを示せ.

問題 5.6. ネーター環の極小な素イデアルは有限個であることを示せ.

問題 5.7. 極小な素イデアルが無限個ある可換環の例を挙げよ.

問題 5.8. $A = \mathbb{C}[x,y]/(x^2y^3(x^2+y^2+1))$ の極小な素イデアルをすべて求めよ.

問題 5.9. k は体とする. k 代数の同型 $k[x,y]/(y^2-x^3) \cong k[t^2,t^3]$ が存在することを示せ. ここに x,y,t は変数である.

問題 5.10. 位相空間 X について, X の既約閉集合の列

$$F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_r$$

の長さ r の上限を X の次元といい, $\dim X$ で表す. したがって, $\dim X$ は非負整数か, ∞ か, $-\infty$ である. $\dim \mathbb{Z}[i]$ を求めよ. ここに i は虚数単位である.

問題 5.11. q 個の元を持つ体を $\mathbb{F}_q$ で表すことにする. $\mathbb{F}_q[x,y]/(x^3,y^4) \times \mathbb{C}[z]/(z^5)$ はイデアルを有限個しか持たないことを示せ. $\mathbb{C}[x,y]/(x^3,y^4)$ はイデアルを無限個持つことを示せ.

問題 5.12. イデアルを有限個しかもたない可換環を特徴づけよ.

問題 5.13. A が可換環, I および $P_1, \ldots, P_n$ が A のイデアルで, どの P_i も I を含まないとする. また, $3 \leq i \leq n$ ならば P_i は素イデアルと仮定する. このとき, $I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ であることを示せ.

問題 5.14. $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き環であるとは, R が環で, R は加法群として直和分解 $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ を持ち, 整数 $i, j \in \mathbb{Z}$ に対して, $a \in R_i$, $b \in R_j$ ならば $ab \in R_{i+j}$ であることをいう. $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き環ならば, R の単位元 1_R は R_0 に属することを示せ.

問題 5.15. $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は可換な $\mathbb{Z}$ 次数付き環とする. このとき, $\operatorname{Spec} R$ が連結であることと $\operatorname{Spec} R_0$ が連結であることは同値であることを示せ.

$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は可換な $\mathbb{Z}$ 次数付き環とする. R_n の元を次数 n の斉次元という. ある n について R_n に属する R の元を R の斉次元という. 0 でない斉次元の次数は一意的に定まる. R のイデアル I に対して, I に属する R の斉次元すべてで生成される R のイデアルを I^* で表す. 定義から明らかに $I^* \subset I$ である.

問題 5.16. $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ は可換な $\mathbb{Z}$ 次数付き環とし, P を R の素イデアルとする. このとき, P^* も R の素イデアルであることを示せ.