代数学 III 演習 (橋本)　第 6 回

X が位相空間のとき, X の既約閉集合の列

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \supsetneq X_r$$

について, r をその列の**長さ** (length) という. X の既約閉集合の列の長さの上限を X の**組合せ次元** (combinatorial dimension) または単に次元 (dimension) と呼んで, $\dim X$ で表す.

問題 6.1. 可換環 A に対して, A の Krull 次元 $\dim A$ は $\operatorname{Spec} A$ の組合せ次元 $\dim \operatorname{Spec} A$ と一致することを示せ.

問題 6.2. 位相空間 X とその部分空間 Y について, $\dim X \geq \dim Y$ であることを示せ.

問題 6.3. X が位相空間で, Λ が空ではない全順序集合で $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は Λ で添字付けられた X の部分集合族で, $\lambda \leq \mu$ のとき $X_\lambda \subset X_\mu$ をみたすものとする. $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とするとき, もし 各 X_λ が既約とすると, X も既約であることを示せ.

問題 6.4. X が位相空間で Y が X の既約な部分空間の時, Y を含む X の既約成分が存在することを示せ.

注意 6.5. X が位相空間で Y は X の既約な閉集合とする. このとき, Y の X での**余次元** (codimension) $\operatorname{codim}(Y, X)$ を

$$Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_r$$

なる X の既約閉集合列の列の長さ r の上限として定義する.

Z が X の閉部分集合とするとき, $\operatorname{codim}(Z, X)$ は $\inf_Y \operatorname{codim}(Y, X)$ として定義する. ここに Y は Z に含まれる X の既約閉集合全部を渡る.

問題 6.6. 上で $\operatorname{codim}(Z, X) = \inf_{Y_0} \operatorname{codim}(Y_0, X)$ を示せ. ここに, Y_0 は Z の既約成分を渡る.

問題 6.7. 位相空間 X とその閉部分空間 Z に対して,

$$\dim Z + \operatorname{codim}(Z, X) \leq \dim X$$

であることを示せ.

問題 6.8. 可換環 A と $X = \operatorname{Spec} A$ の部分空間 $Z = V(I)$ で

$$\dim Z + \operatorname{codim}(Z, X) < \dim X < \infty$$

となる例を挙げよ.

問題 6.9. 可換環 A のイデアル I に対して,

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n \geq 1\ x^n \in I\}$$

とおいて, $\sqrt{I}$ を I の**根基** (radical) という. $I = \sqrt{I}$ であるイデアルを**根基イデアル** (radical ideal) という. $\sqrt{0}$ の元を**ベキ零元** (nilpotent element) という. 0 が根基イデアルである可換環は**被約** (reduced) であるという. I, J が A のイデアルとするとき, 次が成立することを示せ.

(1) $\sqrt{I}$ は A の根基イデアルである.

(2) $I \subset J$ ならば $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$.

(3) $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$.

(4) $V(I) = V(\sqrt{I})$.

(5) $I \subset J$ ならば, A/I のイデアルとして $\sqrt{J/I} = \sqrt{J}/I$.

(6) A/I が被約であることと I が根基イデアルであることは同値である.

$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き可換環とし, I は A のイデアルとする. $I = I^*$ であるとき, つまり, I がその斉次元によって生成されるとき, I は A の斉次イデアルであるという.

問題 6.10. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き可換環とし, I は A の斉次イデアルとする. このとき, I の極小素イデアル (すなわち, I を含む素イデアルの中で極小なもの) は A の斉次イデアルであることを示せ.

問題 6.11. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ が $\mathbb{Z}$ 次数付き可換環とし, I は A の斉次イデアルとする. このとき, $\sqrt{I}$ は A の斉次イデアルであることを示せ.

問題 6.12. A が可換環のとき, 次は同値であることを証明せよ.

(1) A は整域である.

(2) $\operatorname{Spec} A$ は既約で, A は被約.

問題 6.13. A が可換環で I が A のイデアルのとき, $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(I)$ に相対位相を入れたものは, $\operatorname{Spec} A/I$ と同相であることを示せ.

問題 6.14. $f : A \to B$ は可換環の間の環準同型とする. このとき, ${}^a f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を ${}^a f(P) = f^{-1}(P)$ で定義すると well-defined で, ${}^a f$ は連続写像であることを証明せよ.

問題 6.15. $f : A \to B$ は可換環の間の環準同型とし, I は B のイデアルとする. このとき, ${}^a f(V(I))$ の $\operatorname{Spec} A$ における閉包は $V(f^{-1}(I))$ であることを示せ. また, ${}^a f(V(I))$ が $\operatorname{Spec} A$ の閉集合でないような例を示せ.

問題 6.16. A が可換環で U が $\operatorname{Spec} A$ のコンパクトではない開集合であるような例を示せ.