代数学 III 演習 (橋本)　第 7 回

問題 7.1. A が可換環, S が A の積閉集合とするとき, $A \times S$ の関係 $\sim$ を $(a, s) \sim (b, t)$ とは, ある $u \in S$ が存在して $uta = usb$ であることと定める. このとき, $\sim$ は $A \times S$ の同値関係であることを示せ. 商集合 $A \times S/\sim$ を A_S で表し, A の S による**局所化** (localization) という. $(a, s) \in A \times S$ の A_S における像を a/s で表す.

問題 7.2. 前問の A_S に加法と乗法を

$$a/s + b/t = (at + bs)/st, \qquad (a/s)(b/t) = ab/st$$

によって定義すると, well-defined であり, これによって A_S が可換環になることを示せ. また, $f : A \to A_S$ を $f(a) = a/1$ $(a \in A)$ で定めると環準同型であることを示せ.

問題 7.3. k が無限体で $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ のとき, ある $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ が存在して $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ となることを示せ.

問題 7.4. X は集合, R は可換環, M, N は R 加群とする. 次を示せ.

(1) $\mathrm{Map}(X, N)$ は X から N への写像全体とする. $f, g \in \mathrm{Map}(X, N)$ について $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in X)$ と定め, また $a \in R$, $f \in \mathrm{Map}(X, N)$ について $(af)(x) = a(f(x))$ と定めることによって $\mathrm{Map}(X, N)$ に和とスカラー倍を定めると $\mathrm{Map}(X, N)$ は R 加群である.

(2) M から N への R 準同型全体を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ で定めるとこれは $\mathrm{Map}(M, N)$ の部分加群である. ここに $\mathrm{Map}(M, N)$ は (1) で $X = M$ として得られる R 加群である.

(3) $g : N_1 \to N_2$ が R 加群の間の R 準同型とするとき,

$$g_* : \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$$

を $g_*(\varphi) = g \circ \varphi$ $(\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1))$ と定めることにより, g_* は R 準同型である.

(4) $f : M_1 \to M_2$ が R 加群の間の R 準同型とするとき,

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(M_2, N) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, N)$$

を $f^*(\psi) = \psi \circ f$ $(\psi \in \mathrm{Hom}_R(M_2, N))$ と定めることにより, f^* は R 準同型である.

問題 7.5. R が可換環で M が R 加群で

$$0 \to N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3$$

が R 加群の完全列のとき,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N_1) \xrightarrow{(g_1)_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_2) \xrightarrow{(g_2)_*} \mathrm{Hom}_R(M, N_3)$$

も完全列であることを示せ.

問題 7.6. R が可換環で N が R 加群で

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$$

が R 加群の完全列のとき,

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_3, N) \xrightarrow{(f_2)^*} \mathrm{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{(f_1)^*} \mathrm{Hom}_R(M_1, N)$$

も完全列であることを示せ.

問題 7.7. R が可換環, M が R 加群, N がその部分加群, X が M の部分集合とするとき,

$$N :_R X = \{a \in R \mid \forall x \in X\ ax \in N\}$$

とおく. $N : X$ は R のイデアルであることを示せ. また, Y が R の部分集合のとき,

$$N :_M Y = \{m \in M \mid \forall y \in Y\ ym \in N\}$$

とおくと, $N :_M Y$ は M の R 部分加群であることを示せ.

R 加群 M に対して, $0 :_R M$ を $\mathrm{ann}_R M$ または $\mathrm{ann}\, M$ で表し, M の annihilator という. $\mathrm{ann}\, M$ は R のイデアルである.

問題 7.8. R は可換環, M は R 加群, $X \subset M$, N は M の部分加群とする. 以下を示せ.

(1) $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が M の部分加群の族とするとき,

$$\Bigl(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\Bigr) :_R X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (N_\lambda :_R X).$$

(2) X で生成した M の部分加群を RX で表すとき, $N :_R RX = N :_R X$.

(3) $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とするとき, $N :_R X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (N :_R X_\lambda)$.

(4) I, J が R のイデアルのとき, $(N :_M I) :_M J = N :_M IJ$.

問題 7.9. R が可換環, M が R 加群のとき,

$$\mathrm{supp}\, M = \{P \in \mathrm{Spec}\, R \mid M_P \neq 0\}$$

とおいて, $\mathrm{supp}\, M$ を M の**台** (support) という. $\mathrm{supp}\, M$ が空集合ならば $M = 0$ であることを示せ.

問題 7.10. R が可換環, M が有限生成 R 加群のとき, $\mathrm{supp}\, M = V(\mathrm{ann}\, M)$ であることを示せ. 特にこのとき $\mathrm{supp}\, M$ は $\mathrm{Spec}\, R$ の閉集合である.

R が可換環, M が R 加群のとき, $\mathrm{supp}\, M$ の次元を $\dim M$ で表し, M の次元という.

問題 7.11. A が可換環, S が A の積閉集合とする. A が被約ならば, A_S が被約であることを示せ.

問題 7.12. 可換環 A について, 次が同値であることを証明せよ.

(1) A は被約

(2) 任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ について A_P は被約

(3) 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $A_\mathfrak{m}$ は被約