代数学 III 演習 (橋本)　第 8 回

問題 8.1. A が環, M が左 A 加群, N はその部分加群とする. N が M の極大部分加群であるとは, (1) $N \neq M$ であり, (2) $N \subsetneq W \subsetneq W$ となる M の部分加群 W は存在しないことをいう. 0 が極大部分加群であるとき, M は**単純** (simple) であるという. M の部分加群 N が極大である必要十分条件は M/N が単純加群であることであることを示せ.

問題 8.2. A が環, M が左 A 加群のとき, M の極大部分加群すべての交わりを $\operatorname{rad} M$ で表す. $\operatorname{rad} M$ を M の**根基** (radical) という. $f : M \to N$ が左 A 加群の間の A 準同型のとき, $f(\operatorname{rad} M) \subset \operatorname{rad} N$ であることを示せ.

問題 8.3. A が環のとき, A の掛け算によって, A は左 A 加群である. これを ${}_AA$ と表す. 任意の A 加群 M に対して $(\operatorname{rad} {}_AA)M \subset \operatorname{rad} M$ であることを示せ. このことを用いて, $\operatorname{rad} {}_AA$ は A の両側イデアルであることを示せ.

問題 8.4. A は環, M は左 A 加群, S は M の部分集合とする.

$$AS = \{a_1s_1 + \cdots + a_rs_r \mid r \geq 0,\ a_1, \ldots, a_r \in A,\ s_1, \ldots, s_r \in S\}$$

とおくと, AS は S を含む最小の M の部分加群であることを示せ. AS を S で生成された M の部分加群という. $AS = M$ のとき, S が M を生成するという. ある有限集合で生成されるとき, M は有限生成であるという.

問題 8.5. A は環, M は左 A 加群, N は M の部分加群, P は $\operatorname{rad} M$ の部分加群とする. もし $P + N = M$ で P か M かどちらかが有限生成であれば, $N = M$ であることを示せ.

問題 8.6. A が環で, I が A の左イデアルであるとき, 次は同値であることを示せ.

(i) $I \subset \operatorname{rad} {}_AA$.

(ii) M が任意の有限生成左 A 加群で N がその部分加群で $N + IM = M$ と仮定すると $N = M$ が成立する.

(iii) $G = \{1 + x \mid x \in I\}$ は $A^\times$ の部分集合である.

問題 8.7. A が環のとき, $\operatorname{rad} {}_AA = \operatorname{rad} A_A$ であることを証明せよ. ここに, A_A は A の積を作用とする右 A 加群 A を表す.

環 A に対して, ${}_AA$ の部分加群を A の左イデアルという. 極大部分加群は極大左イデアルという.

問題 8.8. 環 A に対して次は同値であることを示せ.

(1) A は零環ではなく, A の任意の 0 でない元は逆元を持つ.

(2) ${}_AA$ は単純加群である.

(3) A_A は単純加群である.

ここに A_A は A の積を作用とする右 A 加群としての A である. これらの同値な条件をみたす環を斜体という.

問題 8.9. A が環とし, $J = \operatorname{rad} A$ とおくとき, 次は同値であることを証明せよ.

(1) A は唯一の極大左イデアルを持つ.

(2) A/J は斜体である.

(3) A は零環ではなく, $A \setminus A^\times$ は加法で閉じている.

(4) $A \setminus A^\times = J$ である.

(5) $n \geq 1$ で $a_1, \ldots, a_n \in A$ で $a_1 + \cdots + a_n \in A^\times$ ならば, ある i が存在して $a_i \in A^\times$ である.

これらをみたすとき, A は局所環であるという.

問題 8.10. A を環とする. A° は加法群としては A で, A° での元 a, b の積 ab とは, 元の環 A での積 ba のことである, と定義して, A° は環になることを示せ. A° を A の反対という. A がある性質をみたすことと A° がその性質をみたすことが同値になるとき, その性質は左右対称であるという. A が局所環であるという性質は左右対称であることを示せ.

問題 8.11. A が環, M が左 A 加群のとき, M に右 A° 加群としての構造を, ma とは, am のことである, と定義して導入することができることを示せ. また, $f : M \to N$ が左 A 加群の間の準同型とするとき, f は右 A° 加群の間の準同型であることを示せ. 逆に右 A 加群からは左 A° 加群が得られることを示せ.

問題 8.12. A が環, M が右 A 加群のとき, $\operatorname{Hom}_A(M, M)$ を $\operatorname{End}_A M$ と書く. $E = \operatorname{End}_A M$ は $f, g \in E$ について, $(f + g)(m) = fm + gm$, $(fg)(m) = f(g(m))$ によって環をなすことを示せ.

問題 8.13 (Schur の補題)**.** A が環, M が単純右 A 加群のとき, $\operatorname{End}_A M$ は斜体であることを示せ.

問題 8.14. A が環, M が単純右 A 加群のとき, $N = M^{\oplus n} = M \oplus M \oplus \cdots \oplus M$ に対して, $\operatorname{End}_A N$ は環として $M_n(\operatorname{End}_A M)$ と同型であることを示せ.

問題 8.15. A は環, M は右 A 加群とする. M 単純加群の和 (無限和も許す) であるとき, M は半単純加群であるという. M が半単純右 A 加群のとき, M は単純加群の直和として表しうることを示せ.

問題 8.16. A は環, M は半単純右 A 加群, N はその部分加群とする. このとき, M の半単純部分加群 N' が存在して, $M = N \oplus N'$ となることを証明せよ. このことを用いて M/N も N も半単純であることを示せ.

問題 8.17 (Wedderburn の構造定理)**.** 環 A について, 次は同値である.

(i) 任意の右 A 加群は半単純である.

(ii) A_A は半単純な右 A 加群である.

(iii) A_A は単純右 A 加群有限個の直和と同型である.

(iv) $A \cong M_{n_1}(E_1) \times \cdots \times M_{n_r}(E_r)$ となる $r \geq 0$, $n_1, \ldots, n_r \geq 1$ および斜体 $E_1, \ldots, E_r$ が存在する.

特に, 以上の条件は左右対称な条件である. 以上の条件が成立するとき, 環 A が半単純環であるという.