代数学 III 演習 (橋本)　第 9 回

問題 9.1. $x^4+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ が既約であることを示せ. また, このことを用いて $3x^4+2x^3-6x^2-x+1 \in \mathbb{Q}[x]$ が既約であることを示せ.

問題 9.2. $x^2y+xy^2+y^3+xy+y^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x,y]$ が既約であることを示せ.

問題 9.3. 環 R に対して, ある一意的な環準同型 $h_R : \mathbb{Z} \to R$ が存在することを示せ. また, $h_R(\mathbb{Z}) \subset Z_R$ を示せ. ここに Z_R は R の中心 $\{r \in R \mid \forall a \in R\ ar = ra\}$ である.

$\mathbb{Z}$ は PID なので, $\mathbb{Z}$ のイデアル $\operatorname{Ker} h_R$ を生成する非負整数 ν_R が一意的に存在する. この ν_R を R の標数という. 言い換えると, $1+1+\cdots+1=0$ (和は n 個) となる自然数 n の中で最小のもののことである. ただし, そのような n がない場合は標数は 0 である.

問題 9.4. 整域の標数は 0 または素数であることを示せ.

問題 9.5. 局所環の標数は 0 または素数ベキであることを示せ. ただし, 素数ベキとは, ある素数 p とある自然数 $e \geq 1$ によって, p^e と表される自然数のことである.

問題 9.6. p が素数, R は標数 p の可換環とする. このとき, $F_R : R \to R$ を $F_R(x) = x^p$ で定義すると F_R は環準同型であることを示せ. F_R をフロベニウス写像という.

$f : A \to B$ が可換環の準同型とする. B が A 上有限型あるいは有限生成とは, $B = A[b_1, \ldots, b_n]$ となる $b_1, \ldots, b_n \in B$ が存在することをいう. B が A 上有限であるとは, B を A 加群とみて有限生成であることをいう.

$b \in B$ が A 上整であるとは, あるモニック多項式 $f(x) \in A[x]$ が存在して, $f(b) = 0$ となることをいう. B が A 上整であるとは, 任意の B の元が A 上整であることをいう. なお, たまに f が有限, 有限型, 整であるなどという言い方をすることもある.

環 A と左 A 加群 M について, M が忠実であるとは, $a \in A$ で任意の $m \in M$ について $am = 0$ であれば, $a = 0$ であることをいう.

問題 9.7. $b \in B$ に対して, 次が同値であることを示せ.

(1) b は A 上整.

(2) $A[b]$ は A 上有限である.

(3) $A[b] \subset C \subset B$ なる B の部分環 C で A 上有限なものが存在する.

(4) 忠実 $A[b]$ 加群 C で, A 加群としては有限であるものが存在する.

問題 9.8. $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が可換環の準同型とする. 次に答えよ.

(1) f と g が有限型であれば, $g \circ f$ も有限型である.

(2) f と g が有限であれば, $g \circ f$ も有限である.

(3) f と g が整であれば, $g \circ f$ も整である.

問題 9.9. $f: A \to B$ が可換環の準同型とするとき,

$$C = \{b \in B \mid b \text{ は } A \text{ 上整 }\}$$

とおくと, C は $f(A)$ を含む B の部分環であることを示せ. C を B における A の整閉包という. $C = f(A)$ のとき, A は B において整閉であるという.

問題 9.10. $f: A \to B$ が可換環の準同型とするとき, 次が同値であることを示せ.

(1) B は A 上有限型かつ整.

(2) B は A 上有限.

問題 9.11. 整域 R はその商体 $Q(R)$ 内で整閉であるとき, 単に整閉整域であるという. UFD は整閉整域であることを示せ.

一般に整域 R のその商体内での整閉包を単に R の整閉包ということがある.

問題 9.12. $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ の整閉包を求めよ. また, t が変数のとき, $\mathbb{Q}[t^2, t^3]$ の整閉包を求めよ.

問題 9.13. $f: A \to B$ は可換環の準同型とし, C は A の B 内での整閉包とする. S が A の積閉集合とするとき, $f_S: A_S \to B_S$ を $f_S(a/s) = f(a)/s$ で定まる準同型とすると, A_S の B_S における整閉包は C_S であることを示せ.

問題 9.14. $A \to B$ は整域の整拡大（整な単射準同型）とする. このとき, 次が同値であることを示せ.

(1) A が体.

(2) B が体.

問題 9.15 (Lying-over theorem)**.** $f: A \to B$ は整域の整拡大とする. このとき, ${}^a f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を ${}^a f(P) = f^{-1}(P)$ で定めると ${}^a f$ は全射である.

問題 9.16 (Going-up theorem)**.** $f: A \to B$ は整な可換環の準同型とする. このとき, 任意の $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec} A$ と任意の $P_0 \in \operatorname{Spec} B$ について, もし $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$ で $P_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$ であるならば, ある $P_1 \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $P_0 \subset P_1$ かつ $P_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ であることを示せ.

問題 9.17. $f: A \to B$ が整な可換環の準同型とするとき, ${}^a f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ は閉写像であることを示せ.