代数学 III (橋本) 期末テスト

注意　すべての解答用紙の最上部に学籍番号・氏名を記入すること. 問題番号がわかるようにして解答を書くこと. 時間は 12:20 まで. 解答用紙右上に　ページ数／総ページ数　を記入すること. たとえば, 全部で 5 枚の場合, 1 ページ目から順に, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5 と記入する. ページ順に揃え, 他人の答案と混ざらないように提出する. 問題と計算用紙は提出せずに持ち帰ること.

問題 **1.** $f : A \to B$ は可換環の間の環準同型, I は A のイデアルとする.

(1) $B \otimes_A A/I \cong B/IB$ であることを示せ.

(2) $(\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ を求めよ.

問題 **2.** p は素数とし, $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ とする.

(1) $t = x - 1$ とおいて, $g(t) = f(t+1) = f(x)$ とおく. $g(t)$ を t の式で具体的に表せ.

(2) $f(x)$ が $\mathbb{Q}[x]$ の元として既約であることを示せ.

問題 **3.** 可換環について, 以下の問いに答えよ.

(1) ネーター環の定義を与えよ.

(2) 位相空間がネーター空間であることの定義を与えよ.

(3) A がネーター環ならば, $\operatorname{Spec} A$ はネーター空間であることを示せ.

問題 **4.** 101 で割って 73 余り, 250 で割って 144 余る整数をすべて求めよ.

問題 **5.** $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ とおく.

(1) A が整閉整域でないことを示せ.

(2) A の商体内での整閉包を求めよ.