線型代数学

橋本 光靖

2016 年度

目次

1　いくつかの約束事など

(1.1)　本講義を通しての約束事をいくつか述べる．そのすべてが数学全般である程度以上広く使われている決まりごとである．

(1.2)　不等号として, 本講義では $\leq$, $\geq$ を用いる．$a \leq b$ は a が b と等しいか, または小さいことを表しており, $a \leqq b$ とまったく同じ意味である．$a < b$ は a が b より小さいことを意味する．

(1.3)　本講義で正しい数学的主張を掲げるときに, 何種類かの名前を使い分ける．その使い分けには明確な根拠があるわけではないが, だいたい次の通りである．

定理 (theorem) 最も重要で, 証明も大変なもの．

命題 (proposition) 定理に次いで重要で, 証明が大変なもの．

補題 (lemma) 証明が簡単であるか, 証明が大変であるにしても補助的な位置づけの主張．

系 (corollary) すでに掲げた他の定理, 命題, 補題, 系から容易に証明できる主張．ただし, 容易に証明できるのにわざわざ掲げる訳だから, 重要度は低くないことが多い．

(1.4)　上記定理等の証明の最後に四角 $\square$ があるのは, 証明終わりを示すマークである．証明が伴わず, 定理等の主張のみで $\square$ があるのは, 証明を省略する, という意味である．本講義では用いないが, Q.E.D. (ラテン語の Quod erat demonstrandum の略で, 「これが証明すべきことであった」の意) と記される場合もある．

(1.5)　ギリシャ文字の一覧表を掲げる．本講義ではギリシャ文字を用いるので, 覚えておく必要がある．なお, 小文字の o （オミクロン) と大文字の幾つかはアルファベットと同じである．υ (ウプシロン) は数学記号としては普通は使用されない．以下の表では, 大は大文字, 小は小文字である．

大	小	発音	大	小	発音
A	α	alpha (アルファ)	N	ν	nu (ニュー)
B	β	beta (ベータ)	Ξ	ξ	xi (グザイ, クシー)
Γ	γ	gamma (ガンマ)	O	o	omicron (オミクロン)
Δ	δ	delata (デルタ)	Π	π, ϖ	pi (パイ)
E	ϵ, ε	epsilon (イプシロン)	P	ρ	rho (ロー)
Z	ζ	zeta (ゼータ, ジータ)	Σ	σ	sigma (シグマ)
H	η	eta (エータ, イータ)	T	τ	tau (タウ)
Θ	θ, ϑ	theta (テータ, シータ)	Υ	υ	upsilon (ウプシロン)
I	ι	iota (イオタ)	Φ	ϕ, φ	phi (ファイ, フィー)
K	κ	kappa (カッパ)	X	χ	chi (カイ)
Λ	λ	lambda (ラムダ)	Ψ	ψ	psi (プサイ, プシー)
M	μ	mu (ミュー)	Ω	ω	omega (オメガ)

2　序—線型代数への誘い

(2.1)　この序では, この講義の全体像を述べる.

(2.2)　線型代数とは何か. 数と数の, あるいは量と量の関係の中で比例は最も重要なものの中のひとつだろう. 数 x に数 $y = ax$ (a は定数, ここでは一応 $a = 0$ も許す) を対応させる対応である. これを多変数に一般化して調べるのが線型代数である [1].

(2.3)　上で数 x を考える代わりにベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を考え,

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

なる関係を考える. ここに $a_1, a_2, \ldots, a_n$ はあらかじめ与えられた定数である. このような関係というのは日常生活でも頻出である. a_1, a_2, a_3 がそれぞれがある店でのりんご, みかん,ももの 1 個の値段だとして, x_1, x_2, x_3 をそれぞれを買った個数とすると, $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は, それらの総額である. 一般に $z = ax + by$ (a, b は定数) で定まる図形が (x, y, z を座標に持つ) 空間内の平面であることはよく知られている.

[1] 線形代数と表記されることもある.

(2.4) 上では元になる変量 $\boldsymbol{x}$ の方をベクトルで考えたが, 出力の方の y も多変量にして $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の場合を考えることによって, 線型代数の世界はさらに意義のあるものになる. すなわち, 関係

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & & \cdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right. \tag{2.4.1}
$$

を考えることが線型代数の中で重要となる. このような関係は日常生活で頻出の関係が複数並んでいるだけなので, 例を考えることは容易だろう. ここに現れる数 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ およびその並び具合 (長方形型に並んでいる) がこの関係を決定づける重要なものであることは比例関係 $y = ax$ にとって比例定数 a が極めて重要であるのと同様である. そこで, 次の定義に至る.

2.5 定義. 数を長方形型に並べ, 括弧で括ったものを**行列 (matrix)** と呼ぶ. 行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

について, 数の横の並び $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, \ldots, m)$ を A の**行 (row)** と呼ぶ. 数の縦の並び $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm}$ $(j = 1, \ldots, n)$ を A の**列 (column)** と呼ぶ. 第 i 行, 第 j 列に位置する数 a_{ij} のことを A の (i, j) 成分と呼ぶ. 行数が m で列数が n の行列は $m \times n$ 行列とか, (m, n) 行列などと呼ぶ.

(2.6) 列ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は $(n, 1)$ 行列と捉えることができるし, 行ベクトル $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ は $(1, n)$ 行列と捉えることができる. これらを総称して数ベクトルという.

(2.7) 上では, 行列 A は数ベクトル (数を並べたもの) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y}$ に変換している. このこと (すなわち式 (2.4.1)) は $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ と短く表される. 変換という捉えにくいものを数の並びという極めて具体的で計算可能なもので表しているところが行列の優れた点である.

(2.8) 線型代数には様々な概念や量が現れるが, それらの多くは行列によって捉えたり計算したりすることができる. したがって, 抽象的なことは抜きにして, 行列の取り扱いを学ぶことによって, 線型代数の本質的な部分の多くを学ぶことができる上に, 計算ができる, という極めて重要な要素を押さえることができる. よって線形代数を学ぶ場合にまず行列の取り扱いから入り, 必要に応じて抽象的な取り扱いも学ぶという道筋を辿るのが普通であり, 我々もこの順序で線型代数を学ぶ.

(2.9) 行列の取り扱いで重要なのは基本変形であり, 基本変形によって連立方程式を解いたり, 階数, 逆行列, 行列式などを具体的に求めたりすることができる. 行列式は与えられた行列によって定まる一つの数であるが, 線型代数の中で重要な位置を占めており, 我々も時間をかけて学ぶ. これらの中で行列式以外の内容はおおむね線形代数学 Ia で行い, 行列式については線形代数学 Ib で学ぶ.

(2.10) この講義は数学科・物理学科向けなので, 行列の取り扱いだけに終始することはできない. 数学ではベクトルにしても, 線型な変換にしても, 常に最初から数ベクトルと行列の顔をして現れる訳ではないので, ベクトルとは何か, 線型とはなにか, といったことを十分な形で一般的に定式化してとらえ, それを必要に応じて行列と数ベクトルの話に翻訳できる能力を身につけることは重要である. そうすることによって, 応用範囲が広がり, 行列の計算で得られたものへの意味づけも十分となり, 線型代数が楽しくなることであろう.

(2.11) 線形代数学 IIa では, 上記の目的のために抽象ベクトル空間を導入し, 線型代数の抽象的取り扱いに踏み込む. その上で, それまでに学んだ行列の計算に抽象ベクトル空間の言葉を用いた意味づけを行う. すなわちこれは, 抽象的に定義された量などが行列による計算で得られることを学ぶことでもある.

(2.12) ベクトルと内積は切っても切れない. 線形代数学 IIb では, 内積の入ったベクトル空間—計量ベクトル空間—を扱う. また, 固有値と固有空間, 行列の対角化の問題も扱う.

3　集合と写像からの準備

(3.1)　「任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して $\varepsilon > \delta$」は正しい. ε を決めるごとに δ を後出しで決めて良いからで, $\delta = \varepsilon/2$ とおけば良い. このことは, 「任意の正の実数 ϵ に対して, 「ある正の実数 δ が存在して $\varepsilon > \delta$」」のように, 括弧をもうひとつ補って考えるべきである, とも説明できよう.

(3.2)　「ある正の実数 δ が存在して, 任意の正の実数 ε に対して $\varepsilon > \delta$」は正しくない. 今度も括弧を補って「ある正の実数 δ が存在して, 「任意の正の実数 ε に対して $\varepsilon > \delta$」」とすれば, そんな δ が存在しないことがはっきりするであろう.

(3.3)　上の 2 つの命題の違いは「任意の ε」と「ある δ」の順番の違いだけである. じゃんけんが後出しして良いかどうかで全然違うのと同じように, 命題もこの順序の違いで真偽が入れ替わることがあるので特に注意してほしい.

(3.4)　$P(x)$ が変数 x についての条件 (たとえば「x は偶数である」など) のとき, 「任意の x について $P(x)$」というのは命題である. この主張を $\forall x\ P(x)$ と書くことがある. どんな x についても $P(x)$ が成立する時にこの命題は正しく, ひとつでも反例となる x があればこの命題は正しくない. 「ある x について $P(x)$」という主張は $\exists x\ P(x)$ と書くことがある. $P(x)$ をみたす x がひとつでもあればこの命題は正しく, すべての x について $P(x)$ が誤りであるとき, この命題も誤りである. 命題の否定を $\neg$ で表す時, $\neg[\forall x\ P(x)]$ は $\exists x[\neg P(x)]$ である.

(3.5)　$\exists x\, \forall y\ P(x,y)$ は $P(x,y)$ を成立させる x が y に依存せずに一律に取れる, という意味であり, $\forall y\, \exists x\ P(x,y)$ は y に依存して $P(x,y)$ を成立させる $x = x_y$ がそれぞれ取れる, という意味であり, 前者の方が後者より強い条件である.

(3.6)　範囲の明確なものの集まりを**集合 (set)** という. 集合に属するものをその集合の**元 (げん, element)** という. もの a が集合 X に属することを $a \in X$ と表す.

(3.7)　たとえば, 1 以上 7 以下の整数の集まり X は集合である. この集合に属するのは $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ であるから,

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

のように元を並べて括弧で括って X を表す.

(3.8)　偶数の全体を Y とすると,

$$Y = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$$

のように書くことができる.

(3.9)　上のように元を並べて書くのではなく, 条件 $P(x)$ をみたすもの x の全体のなす集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

のように表すという方法がある. たとえば, 上の例でいうと

$$X = \{n \mid n \text{ は整数で } 1 \leq n \leq 7\}$$

であるし,

$$Y = \{n \mid n \text{ は偶数 }\}$$

である. 集合 A と条件 $P(x)$ に対して,

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } P(x)\}$$

は

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

と表して良い. 整数の全体の集合を $\mathbb{Z}$ で表す.

$$X = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 7\}$$

と表して良い.

(3.10)　集合 A と B に対して, A が B の**部分集合 (subset)** であるとは, $a \in A$ ならば $a \in B$ であることをいい, このことを $A \subset B$ または $B \supset A$ と表す. たとえば,

$$\{2, 6, 10\} \subset \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset Y$$

である. 一方, $1 \in \{1, 2, 3\}$ であるが $1 \notin Y$ なので $\{1, 2, 3\} \not\subset Y$ である.

(3.11)　複素数の全体を $\mathbb{C}$ で, 実数の全体を $\mathbb{R}$ で, 自然数の全体 $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$ を $\mathbb{N}$ で表す.

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

であることはいうまでもない.

(3.12) 集合 A と B が等しいとは, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立することである. たとえば,

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$$

である. 等しい以上, 両者は数学的に区別されない.

(3.13) 集合 A と集合 B の両方に属するものを集めると集合であり, これを $A \cap B$ で表して A と B の**交わり** **(intersection)** という. 上の例で

$$X \cap Y = \{2, 4, 6\}$$

であることを確かめよ. 集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ すべてに属するものの集まりは $A_1, \ldots, A_n$ の交わりと呼んで $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ または $\bigcap_{i=1}^n A_i$ と表す. 一般に

$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$$

である.

(3.14) 集合 A と 集合 B の少なくとも一方に属するものの集まりは集合であり, これを $A \cup B$ で表して A と B の**和集合** **(union)** という. たとえば,

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

である. 集合 $A_1, \ldots, A_n$ の和集合も定義され, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ または $\bigcup_{i=1}^n A_i$ で表される. 一般に

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$

である.

(3.15) 集合 A に属し, かつ集合 B に属さないものの集まりは集合であり, これを $A \setminus B$ と表し, A と B の**差集合** **(difference set)** という. たとえば,

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$$

である.

(3.16) いかなるものも属さないようなものの集まりも集合であり, 空集合と呼ばれる. 空集合を本講義では $\emptyset$ で表す. この記号はギリシャ文字の ϕ とは別のものであるから「ファイ」と呼ぶべきではない.

(3.17) $a_1, \ldots, a_n$ がもののとき, これらを並べた $(a_1, \ldots, a_n)$ はひとつのものであると考えられる. $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ であるのは $a_i = b_i$ が $i = 1, \ldots, n$ に対して成立することであると定める.

(3.18)　集合 $A_1, \ldots, A_n$ の元をひとつずつ並べた列 $(a_1, \ldots, a_n)$ (ただし $a_i \in A_i$) の集まり

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ または $\prod_{i=1}^n A_i$ で表して $A_1, \ldots, A_n$ の**直積 (direct product)** という.

(3.19)　上で $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ のときは, $\prod_{i=1}^n A_i$ を A^n と表す. たとえば $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ は平面であり, $\mathbb{R}^3$ は空間である.

(3.20)　3 つ組 $f = (A, B, \Gamma)$ が**対応 (correspondence)** であるとは, A, B が集合で Γ が $A \times B$ の部分集合であることをいう. A を f の**定義域 (domain (of definition))** と呼んで $\mathrm{Dom}(f)$ で, B を f の**終域 (codomain)** と呼んで $\mathrm{Codom}(f)$ で, Γ を f の**グラフ (graph)** と呼んで Γ_f で表す. このとき, f は A から B への対応であると呼んで, $f : A \to B$ が対応である, という. $(a, b) \in A \times B$ について, $(a, b) \in \Gamma$ であるとき, f によって a に b が対応するという.

(3.21)　$f = (A, B, \Gamma)$ が対応で, 任意の $a \in A$ に対し, f によって a に対応する $b \in B$ がただひとつ存在するとき, f は**写像 (map)** であるという. このとき, $a \in A$ に対応する (ただひとつの) B の元を $f(a)$ で表し, a の f による像という. このとき

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

であるので, $f : A \to B$ は, 各 $a \in A$ の像 $f(a)$ を決めることによって決まる. f, g がともに A から B への写像の時, $f = g$ であることは, $\Gamma_f = \Gamma_g$ であることと同じであり, これは, 任意の $a \in A$ について $f(a) = g(a)$ であることに他ならない. **何を代入しても等しくなる 2 つの写像は等しい**, と記憶されたい. このことから, $f : A \to B$ を定義するのに, 各 $a \in A$ に対して $f(a) \in B$ を明確に定めることが必要かつ十分であることが知れる.

(3.22)　B が数からなる集合のとき, f は B に値を持つ A 上の**関数 (function)** という. 関数とは写像の特殊なものである.

(3.23)　$f = (A, B, \Gamma)$ が対応, $C \subset A$ とする. このとき,

$$\{b \in B \mid \text{ ある } c \in C \text{ が存在して } (c, b) \in \Gamma\}$$

を $f(C)$ で表し, C の f による**像 (image)** という. $f(A)$ を f の像と呼んで $\mathrm{Im}\, f$ で表す.

(3.24) $f = (A, B, \Gamma)$ が対応の時, $\Gamma' = \{(b, a) \mid (a, b) \in \Gamma\}$ とおき, $f^{-1} = (B, A, \Gamma')$ とおくと, f^{-1} は B から A への対応である. これを f の**逆 (inverse)** という. 明らかに $(f^{-1})^{-1} = f$ である.

(3.25) f^{-1} による $D \subset B$ の像 $f^{-1}(D)$ (これは A の部分集合である) を f による D の**逆像 (inverse image)** という. f が写像のとき,

$$f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$$

である.

(3.26) f も f^{-1} もともに写像の時, f^{-1} は f の**逆写像 (inverse)** と呼ばれる. f が写像であっても f^{-1} は写像とは限らないので, 一般には $b \in B$ に対して $f^{-1}(b)$ が A の元として意味を持つとは限らないのだが, そんなときは $f^{-1}(\{b\})$ の意味だと解釈され, A の元ではなく部分集合として理解される.

(3.27) 集合 A に対して, $f : A \to A$ を $f(a) = a$ で定めると写像が得られる. この写像を id_A で表し, A の**恒等写像 (identity map)** という. id_A のグラフ $\{(a, a) \mid a \in A\}$ を A の**対角線 (diagonal)** と呼んで, Δ_A で表す.

(3.28) $f = (A, B, \Gamma)$ と $g = (B, C, \Delta)$ が対応の時,

$$\Xi = \{(a, c) \mid \text{ ある } b \in B \text{ が存在して, } (a, b) \in \Gamma \text{ かつ } (b, c) \in \Delta\}$$

とおき, (A, C, Ξ) を f と g の**合成 (composite)** と呼んで $g \circ f$ で表す. f も g も写像ならばその合成 $g \circ f$ も写像であり, $a \in A$ について

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

であることは容易だろう.

3.29 補題. $f : A \to B$ と $g : B \to A$ が写像とする. 次は同値である.

(1) g は f の逆写像である.

(2) f は g の逆写像である.

(3) $g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ である.

□

3.30 補題. 写像 $f : A \to B$ に対して, 次の条件は同値である.

(1) 任意の $a, a' \in A$ について, $f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$ である.

(2) 任意の $a, a' \in A$ について, $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$ である.

(3) 任意の $b \in B$ に対して, $f^{-1}(\{b\})$ は高々 1 個の元からなる.

$\square$

(3.31) これらの条件をみたすとき, f は**単射 (injective map)** であるという.

3.32 補題. 写像 $f : A \to B$ に対して, 次の条件は同値である.

(1) 任意の $b \in B$ に対して, ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$.

(2) $f(A) = B$.

(3) 任意の $b \in B$ に対して $f^{-1}(\{b\})$ は少なくとも 1 個の元を持つ.

$\square$

(3.33) これらの条件をみたすとき, f は**全射 (surjective map)** であるという. 単射かつ全射である写像は**全単射 (bijective map)** と呼ばれる. 上の２つの補題から, 次は明白であろう.

3.34 補題. 写像 $f : A \to B$ に対して, 次は同値である.

(1) f は全単射である.

(2) 任意の $b \in B$ に対して $f^{-1}(\{b\})$ はちょうど 1 個の元を持つ.

(3) f の逆対応 f^{-1} は写像であり, f は逆写像 f^{-1} を持つ. $\square$

4　行列とその演算

(4.1)　以下, K で複素数の全体 $\mathbb{C}$ または実数の全体 $\mathbb{R}$ を表す. K の元を数と呼ぶ. あとで述べるベクトルや行列との対比で数のことを**スカラー (scalar)** と呼ぶ.

4.2 定義. 数を長方形型に並べ, 括弧で括ったものを**行列 (matrix)** と呼ぶ. 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

について, 数の横の並び $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, \ldots, m)$ を A の**行 (row)** と呼ぶ. 数の縦の並び $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm}$ $(j = 1, \ldots, n)$ を A の**列 (column)** と呼ぶ. 第 i 行, 第 j 列に位置する数 a_{ij} のことを A の (i, j) 成分と呼ぶ. 行数が m で列数が n の行列は $m \times n$ 行列とか, (m, n) 行列などと呼ぶ. (m, n) のことを行列の**サイズ (size)** または型という.

(4.3)　K の部分集合 Γ について, 行列 A の成分すべてが Γ の元の時, A は Γ 係数であるという. $\mathbb{R}$ 係数は実数係数または実係数, $\mathbb{Q}$ 係数は有理数係数, などと呼ばれる. 実数係数の行列は実行列と呼ばれる.

　たとえば, $(2, 2)$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ -1 & \pi + e \end{pmatrix}$$

は実係数であるが, 有理数係数ではない.

$$B = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1 \\ 1 & 9/4 & 2 \end{pmatrix}$$

は有理数係数であるが整数係数ではない. Γ 係数の (m, n) 行列全体のなす集合を $M_{m,n}(\Gamma)$ で表す.

(4.4)　(i, j) 成分が a_{ij} であるような (m, n) 行列を $(a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$, または単に (a_{ij}) と表すことがある. たとえば, $(i + j - 2)_{1 \le i \le 2,\, 1 \le j \le 4}$ は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を表している.

(4.5)　行列 $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$ と $B=(b_{ij})_{1\le i\le m',\,1\le j\le n'}$ とが等しいとは, サイズが等しく (すなわち $m=m'$ かつ $n=n'$) かつ, すべての (i,j) $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ に対して $a_{ij}=b_{ij}$ であることをいう. A と B が等しいことを $A=B$ と表す.

(4.6)　(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{ij})$ に対して, (m,n) 行列 $(a_{ij}+b_{ij})$ を $A+B$ で表し, A と B の**和 (sum)** という. A と B の **差 (difference)** $A-B$ も同様に (m,n) 行列 $(a_{ij}-b_{ij})$ として定義される. サイズが異なる行列の和, 差は定義しない.

(4.7)　(n,n) 行列を n 次正方行列という. ある n について n 次正方行列である行列を**正方行列 (square matrix)** という. 1 次の正方行列は (a) $(a\in K)$ の形をしているので, (a) と書く代わりに a と書いて数と区別しないことが多い. $\Gamma\subset K$ に対して, Γ 係数の n 次正方行列全体 $M_{n,n}(\Gamma)$ は単に $M_n(\Gamma)$ と表す.

(4.8)　$(n,1)$ 行列は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

の形をしている. これを n 次元列ベクトルという. $(1,n)$ 行列は $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ の形をしている. これを n 次元行ベクトルという. 列ベクトルと行ベクトルを総称して数ベクトルという. 本講義では特に断りの無い限り数ベクトルは列ベクトルを指すものとする.

(4.9)　$\alpha\in K$ で $A=(a_{ij})$ が (m,n) 行列の時, (m,n) 行列 (αa_{ij}) を αA で表し, A の α 倍 (スカラー倍) という.

(4.10)　すべての成分が 0 である行列を**零行列 (zero matrix)** という. サイズが (m,n) の零行列を $O_{m,n}$ または単に O で表す.

4.11 例.　**(1)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(3) $\sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(4) $O_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4.12) 行列 A に対して, $(-1)A$ を単に $-A$ で表すことにする.

4.13 補題. A, B, C が (m, n) 行列, $\alpha, \beta \in K$ のとき, 次が成立する.

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(2) $A + B = B + A$.

(3) $A - B = A + (-B)$.

(4) $A + O_{m,n} = A$.

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(4.14) $A = (a_{ij})$ が (m, n) 行列, $B = (b_{ij})$ が (n, p) 行列とするとき, 行列 A と B の積 AB を $AB = (\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq p}$ で定める. すなわち, 積 AB は (m, p) 行列で, その (i, j) 成分は

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

である.

4.15 例. **(1)** $A = (a_{ij})$ が (m, n) 行列, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が n 次元数ベクトルのとき,

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

であり, これは m 次元数ベクトルである.

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$. 一般に, n 次正方行列と n 次正方行列の積は定義され, n 次正方行列になる.

(3) $(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax+by \in K$.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(a,b) = \begin{pmatrix} ax & bx \\ ay & by \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

(4.16) 行列 $A=(a_{ij})$ の (i,j) 成分 a_{ij} を $A[i,j]$ と表して良いことにする.

4.17 補題. (m,n) 行列 $\Gamma=(\gamma_{ij})$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij} = \sum_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ij}.$$

□

4.18 命題. A, A' が (m,n) 行列, B, B' が (n,p) 行列, C が (p,q) 行列, $\alpha \in K$ とする. このとき, 次が成立する.

(1) $(A+A')B = AB + A'B$, $A(B+B') = AB + AB'$.

(2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(3) $(AB)C = A(BC)$.

証明. **(3)** のみ証明する.

$$((AB)C)[i,j] = \sum_{l=1}^{p}(AB)[i,l]\cdot C[l,j] = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}A[i,k]\cdot B[k,l]\cdot C[l,j]$$

であり,

$$(A(BC))[i,j] = \sum_{k=1}^{n}A[i,k]\cdot(BC)[k,j] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}A[i,k]\cdot B[k,l]\cdot C[l,j]$$

である. 補題 4.17 によって両者が一致することを確認せよ. □

4.19 注意. $AB = BA$ は一般には成立しない. 一般に AB が定義されていても BA は定義されるとは限らない. 定義されていても A, B が同じサイズの正方行列でない限りは AB と BA ではサイズが異なる. A, B が n 次正方行列の時, AB も BA も n 次正方行列だが, たとえば

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるが

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, $AB = BA$ が成立しない例となっている.

(4.20) n が自然数, $1 \leq i, j \leq n$ のとき,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で δ_{ij} を定める. この δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ (Kroneker's delta)** という. (i, j) 成分がクロネッカーのデルタ δ_{ij} である行列

$$(\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}$$

を E_n で表し, n 次の**単位行列**という.

4.21 補題. (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, $AE_n = A$ である. また, (n, p) 行列 $B = (b_{ij})$ に対して, $E_n B = B$ である.

証明. AE_n も A も (m, n) 行列で型は等しい.

$$(AE_n)[i, j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{ij} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = A[i, j]$$

で, (i, j) 成分が等しいから $AE_n = A$.

$E_n B = B$ も同様である. □

4.22 演習. 教科書 p. 12 の問 1, 問 2, 問 3 を解け.

5　さまざまな行列とその操作

(5.1)　(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ に対して, (n,m) 行列 (a_{ji}) ((i,j) 成分が a_{ji} である行列) を ${}^tA$ で表し, A の**転置 (transpose)** という.

5.2 例.　**(1)** ${}^t\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$.

(2) ${}^t\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, ${}^t(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. スペース節約のため列ベクトルを行ベクトルに転置記号をつけて表すことはみかけられる.

5.3 補題. A, A' は (m,n) 行列, B は (n,p) 行列, $\alpha\in K$ とする. このとき, 次が成立する.

(1) ${}^{tt}A=A$.

(2) ${}^t(\alpha A)=\alpha{}^tA$.

(3) ${}^t(A+A')={}^tA+{}^tA'$.

(4) ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$.

証明. **(4)** のみ示す. 両辺とも定義されていて (p,m) 行列になることは容易に分かる.

$$({}^t(AB))[i,j]=(AB)[j,i]=\sum_{k=1}^{n}A[j,k]\cdot B[k,i].$$

また,

$$({}^tB{}^tA)[i,j]=\sum_{k=1}^{n}{}^tB[i,k]\cdot{}^tA[k,j]=\sum_{k=1}^{n}B[k,i]\cdot A[j,k]$$

なので両者は一致し, (i,j) 成分が等しいから ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ である.　□

(5.4) $A = {}^tA$ が成立する行列を**対称行列** (**symmetric matrix**) という. 対称行列は正方行列である. $A = -{}^tA$ の成立する行列を**交代行列** (**alternating matrix**) という[2]. 交代行列も正方行列である.

5.5 例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ, 対称行列, 交代行列である.

(5.6) 行列の (i,i) 成分を対角成分という. 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を対角行列という. $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ である正方行列を**上半三角行列**という. $i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ である正方行列を **下半三角行列** という. 対角行列とは, 上半三角行列であり, かつ下半三角行列でもある正方行列のことである.

5.7 補題. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ は n 次の正方行列とする.

(1) A, B が上半（下半）三角行列の時, $A \pm B$, AB もそうである. このとき, $(AB)[i,i] = a_{ii}b_{ii}$ である.

(2) A, B が対角行列の時, $A \pm B$, AB もそうである. このとき, $(AB)[i,i] = a_{ii}b_{ii}$ である.

(3) A, B が対角行列の時, $AB = BA$ である.

証明. **(1)**. A, B が上半（下半）三角なら $A \pm B$ もそうであることは容易である.

$$(AB)[i,j] = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{5.7.1}$$

であるが, A, B が上半三角なら, $a_{i1} = \cdots = a_{i,i-1} = 0$ で, $b_{j+1,j} = \cdots = b_{nj} = 0$ なので, もし $i > j$ ならば, すべての項が 0 になって $(AB)[i,j] = 0$ となることが確かめられる. よって AB も上半三角となる. また, 上で $i = j$ とすると, (5.7.1) の右辺で 0 でない項は $a_{ii}b_{ii}$ のみであるから $(AB)[i,i] = a_{ii}b_{ii}$ となる. 下半三角行列についても同様である.

(2) は **(1)** から明らか.

(3). $i \neq j$ なら **(2)** によって $(AB)[i,j] = 0 = (BA)[i,j]$ である. $i = j$ なら, $(AB)[i,i] = a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii} = (BA)[i,i]$. 以上により, $AB = BA$ である. □

[2] 用語が分かる人向けに解説する. スカラーが一般の体の場合, 標数が 2 である場合を考慮して, 対角成分がすべて 0 であるという条件を加えないと正しい定義ではないが, 今は複素数体とその部分体を考えているので, この条件は自動的であるので省略できる.

(5.8) 上半三角, 下半三角, 対角行列の一般形は次の通りである.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(5.9) αE_n $(\alpha \in K)$ の形の行列を**スカラー行列 (scalar matrix)** という. スカラー行列は対角行列である.

(5.10) 複素数 $\alpha = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して, $a-bi$ を α の共役[3] (conjugate) または**複素共役 (complex conjugate)** と呼んで, $\bar{\alpha}$ で表す. 次は容易に確認できる.

5.11 補題. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成立する.

(1) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

(2) $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$.

(3) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$.

(4) $\overline{\alpha/\beta} = \bar{\alpha}/\bar{\beta}$ $(\beta \neq 0$ のとき$)$.

証明. **(3)**, **(4)** のみ示す.

(3). $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$ とおくとき,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+bi)(c+di)} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{\alpha}\bar{\beta}.\end{aligned}$$

(4). すでに示された **(3)** によって, $\overline{\alpha/\beta} \cdot \bar{\beta} = \overline{(\alpha/\beta) \cdot \beta} = \bar{\alpha}$. 両辺を $\bar{\beta}$ で割って求める結果を得る. □

(5.12) (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, $\bar{A}$ を同じ (m, n) 型の行列で (i, j) 成分が $\bar{a}_{ij}$ であるもの $(\bar{a}_{ij})$ として定義し, A の共役, 複素共役と呼ぶ.

5.13 補題. A, A' を (m, n) 行列, B を (n, p) 行列とする. $\alpha \in K$ とする. このとき次が成立する.

(1) $\bar{A} + \bar{A'} = \overline{A + A'}$.

[3]「共軛」の表記もある. いずれにしても「きょうやく」と読む.

(2) $\overline{\alpha A} = \bar{\alpha}\bar{A}$.

(3) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

(4) ${}^t\bar{A} = \overline{{}^tA}$.

証明. いずれも容易である. **(3)** のみ証明する. 両辺とも (m, p) 行列で型は一致する. また, 補題 5.11 によって,

$$\begin{aligned}\overline{AB}[i,j] = \overline{(AB)[i,j]} = \overline{\sum_{k=1}^{n} A[i,k] \cdot B[k,j]} &= \sum_{k=1}^{n} \overline{A[i,k]} \cdot \overline{B[k,j]} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \bar{A}[i,k] \cdot \bar{B}[k,j] = (\bar{A}\bar{B})[i,j]\end{aligned}$$

なので, $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$. □

(5.14) (m, n) 行列 A に対して, 補題 5.13, **(4)** の両辺を A^* で表し, A の**随伴行列 (adjoint matrix)** または**エルミート共役 (Hermitian conjugate)** と呼ぶ. 実行列 A については $A^* = {}^tA$ であることに注意する.

5.15 例.

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1+\sqrt{3}i & -i \\ -1 & 1+2i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ -1-\sqrt{3}i & 1-2i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

5.16 演習. (m, n) 行列 A, A', (n, p) 行列 B および $\alpha \in K$ に対して次が成立することを証明せよ.

(1) $(A + A')^* = A^* + (A')^*$.

(2) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$.

(3) $(AB)^* = B^*A^*$.

(4) $A^{**} = A$.

(5.17) $A^* = A$ となる行列を **エルミート行列** (**Hermitian matrix**) という．$A^* = -A$ となる行列を**反エルミート行列** (**Anti-Hermitian matrix**) または**歪エルミート行列** (**skew Hermitian matrix**) という．どちらも正方行列になる．実エルミート行列と実対称行列は同一概念である．実歪エルミート行列と実交代行列は同一概念である．

5.18 演習. **(1)** 教科書 p.17 問 15, 問 16 を解け.

(2) A が n 次正方行列のとき, $A + {}^tA$ は対称行列, $A - {}^tA$ は交代行列であることを示せ．このことから,

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

なので A は対称行列と交代行列の和に表せることがわかる.

(3) 教科書 p.18 問 18 を解け.

(4) 教科書 p.18 問 19 を解け.

6　行列の区分け

(6.1)　行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & a & 2 & x & 5 \\ c & y & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．この行列の行及び列に仕切り線をいくつか入れ，

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 9 & -1 & 2 & 6 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & a & 2 & x & 5 \\ c & y & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

のように，より小さい行列が並んだものと考えることができる． このことを行列の**区分け (partition)** といい，区分けされた行列を**区分行列 (block matrix)** という．

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad & A_{12} &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad & A_{13} &= \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & a \\ c & y & 1 \end{pmatrix}, \quad & A_{22} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad & A_{23} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくとき，

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

のように表して良いものとする．区分行列の各区画に現れる行列 A_{ij} は A の**ブロック (block)** という．

(6.2)　区分行列

$$A = (A_{st}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

について，A_{kl} が (m_k, n_l) 型のとき，この区分けの型は $(m_1, \ldots, m_s; n_1, \ldots, n_t)$ 型であると呼ぶことにする．たとえば (6.1) での区分けの型は $(1, 3; 3, 2, 1)$ 型である．

(6.3) m 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ を並べたもの $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ は $(m; 1, \dots, 1)$ 型に区分けされた (m, n) 行列である. n 次元行ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m$ を並べたもの $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix}$ は $(1, \dots, 1; n)$ 型に区分けされた (m, n) 行列である.

6.4 定理. $A = (A_{kl})$ および $A' = (A'_{kl})$ は $(m_1, \dots, m_s; n_1, \dots, n_t)$ 型に区分けされた行列, $B = (B_{lr})$ は $(n_1, \dots, n_t; p_1, \dots; p_u)$ 型に区分けされた行列とする. $\alpha \in K$ とするとき, 次が成立する.

(1)

$$A + A' = \begin{pmatrix} A_{11} + A'_{11} & A_{12} + A'_{12} & \cdots & A_{1t} + A'_{1t} \\ A_{21} + A'_{21} & A_{22} + A'_{22} & \cdots & A_{2t} + A'_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} + A'_{s1} & A_{s2} + A'_{s2} & \cdots & A_{st} + A'_{st} \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1t} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha A_{s1} & \alpha A_{s2} & \cdots & \alpha A_{st} \end{pmatrix}.$$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^t A_{1l} B_{l1} & \sum_{l=1}^t A_{1l} B_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^t A_{1l} B_{lu} \\ \sum_{l=1}^t A_{2l} B_{l1} & \sum_{l=1}^t A_{2l} B_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^t A_{2l} B_{lu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=1}^t A_{sl} B_{l1} & \sum_{l=1}^t A_{sl} B_{l2} & \cdots & \sum_{l=1}^t A_{sl} B_{lu} \end{pmatrix}.$$

証明. **(3)** のみ示す. $(AB)[i, j]$ を求める. $i \leq m_1 + \cdots + m_k$ となる最小の k および $j \leq p_1 + \cdots + p_r$ となる最小の r をとる. $i' = i - m_1 - \cdots - m_{k-1}$,

$j' = j - p_1 - \cdots - p_{r-1}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
(AB)[i,j] &= \sum_{h=1}^{n} A[i,h] \cdot B[h,j] \\
&= \sum_{h'=1}^{n_1} A_{k1}[i',h'] \cdot B_{1r}[h',j'] + \sum_{h'=1}^{n_2} A_{k2}[i',h'] \cdot B_{2r}[h',j'] + \cdots \\
&\qquad + \sum_{h'=1}^{n_t} A_{kt}[i',h'] \cdot B_{tr}[h',j'] = (\sum_{l=1}^{t}(A_{kl}B_{lr}))[i',j']
\end{aligned}
$$

であり, これが示すべきことであった. □

6.5 例. **(1)** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が n 次元行ベクトルで $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ が n 次元列ベクトルで $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p)$ とするとき,

$$
AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_p \end{pmatrix}.
$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ とするとき,

$$
\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_k = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = (AB)[i,k]
$$

であるから, これは行列の積の定義を繰り返したにすぎない.

(2) A が (m,n) 行列, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ が n 次元列ベクトルで $B = (\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p)$ とおくとき,

$$
AB = A(\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p) = (A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ ; A\boldsymbol{b}_p).
$$

(3) n 次の単位行列を $E_n = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ と $(n; 1, 1, \ldots, 1)$ 型に区分けして, n 次元列ベクトルの n 個の並びとみる. このとき $\boldsymbol{e}_j$ の第 i 成分は $E_n[i, j] = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) である. つまり,

$$\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{第 } j \text{ 成分のみ } 1)$$

である. $\boldsymbol{e}_j$ を第 j **単位ベクトル (unit vector)** という. A が任意の (m, n) 行列の時, **(2)** によって

$$A = AE_n = A(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n)$$

であるから, A の第 j 列は $A\boldsymbol{e}_j$ である.

(4) 教科書 p. 13 問 4 を解け.

6.6 演習. 定理 6.4 において, ${}^tA$, $\bar{A}$ および A^* は区分行列としてどう表されるかを考え, 証明せよ.

7　逆行列

(7.1)　$A \in M_n(K)$ に対して, $AB = BA = E_n$ をみたす $B \in M_n(K)$ を A の**逆行列 (inverse matrix)** という. 逆行列が存在するような正方行列を**正則行列 (regular matrix)** という.

7.2 補題. A が n 次正則行列の時, A の逆行列は一意的である.

証明. B, B' がともに A の逆行列とすると,

$$B' = B'E_n = B'(AB) = (B'A)B = E_nB = B.$$

これが示すべきことであった. □

(7.3)　A が正則行列の時, その逆行列を　A^{-1} で表す.

7.4 補題. $n \geq 1$, A, B は n 次正則行列とする. このとき,

(1) E_n は正則であり, $E_n^{-1} = E_n$.

(2) AB は正則であり, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) A^{-1} は正則であり, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(4) ${}^tA$ は正則であり, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(5) $\bar{A}$ は正則であり, $\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

証明. **(1)** $E_nE_n = E_nE_n = E_n$ だから.

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$ であり, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$ だから.

(3) $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$ だから.

(4) ${}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE_n = E_n$ であり, ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE_n = E_n$ だから.

(5) $\bar{A}\overline{A^{-1}} = \overline{AA^{-1}} = \bar{E}_n = E_n$ であり, $\overline{A^{-1}}\bar{A} = \overline{A^{-1}A} = \bar{E}_n = E_n$ だから. □

(7.5)　$A=(a)$, $B=(b)$ が 1 次の正方行列の時, $AB=(ab)=(ba)=BA$. これが $E_1=(1)$ になるということは $a\neq 0$ で $b=a^{-1}$ であるということである. 1 次の正則行列は零でない数のことであり, 逆行列は逆数に他ならない.

7.6 補題 (2 次行列の **ケイリー・ハミルトンの定理 (Cayley–Hamilton's theorem)**). $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が 2 次の正方行列のとき,

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E_2=O$$

である.

証明.

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A=A(A-(a+d)E_2)&=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & cb-ad \end{pmatrix}=-(ad-bc)E_2 \end{aligned}$$

から従う. □

7.7 定理. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(K)$ とする. このとき

(1) $\tilde{A}=(a+d)E_2-A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおくとき, $A\tilde{A}=\tilde{A}A=(ad-bc)E_2$.

(2) A が正則である必要十分条件は $ad-bc\neq 0$ である.

(3) $ad-bc\neq 0$ のとき,

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

証明. **(1)** はケイリー・ハミルトンの定理から従う.

(2), (3). **(2)** の十分性は $A\tilde{A}=\tilde{A}A=(ad-bc)E_2$ の各辺をスカラー $ad-bc$ で割ればわかり, **(3)** も従う. 一方 $ad-bc=0$ なのに A が正則だと仮定すると

$$\tilde{A}=\tilde{A}(AA^{-1})=(\tilde{A}A)A^{-1}=((ad-bc)E_2)A^{-1}=O.$$

よって $a=b=c=d=0$ となって $A=O$ であり, $E_2=AA^{-1}=OA^{-1}=O$. これは矛盾である. この矛盾は A が正則だとしたことが原因なので, $ad-bc=0$ ならば A は正則ではないとわかり, 必要性がいえた. □

(7.8)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

として $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に関する方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{7.8.1}$$

を考える (a, b, c, d, u, v は定数). 言い直すと連立方程式

$$\begin{cases} ax + by & = u \\ cx + dy & = v \end{cases} \tag{7.8.2}$$

を考える. この方程式は $ad - bc \neq 0$ のときは非常にすっきりしていて, (7.8.1) の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

と解ける (これが実際に解を与えることは代入すれば明らか). 成分を使って表示すると

$$\begin{cases} x & = \dfrac{ud - bv}{ad - bc} \\ y & = \dfrac{av - uc}{ad - bc} \end{cases}$$

以上のように, $ad - bc \neq 0$ の場合は連立方程式 (7.8.2) はちょうど一組の解を持つことが逆行列を使ってもわかる (普通に解いてもわかるが).

(7.9) $ad - bc$ を 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式 (determinant)** と呼ぶ. 行列式の定義は後に 3 次以上の行列に対しても与える.

8　K^n から K^m への線型写像

(8.1)　あいかわらず K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする．スカラーは K の元とする．

8.2 定義. 写像 $f : K^n \to K^m$ が K 線型であるとは，

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n) \tag{8.2.1}$$

$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) \quad (\alpha \in K,\ \boldsymbol{x} \in K^n) \tag{8.2.2}$$

が成立することをいう．K^n から K^m への K 線型写像[4] の全体の集合を $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ で表す．

(8.3)　$f : K^n \to K^m$ が K 線型写像で $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とするとき，

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{x}_r$$

とおく．このような形の元を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の**一次結合 (linear combination)** という．

(1), (2) を組み合わせて使うと

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{x}_r) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_r f(\boldsymbol{x}_r)$$

が容易に分かる．

(8.4)　$A \in M_{m,n}(K)$ に対して，$\Phi(A) : K^n \to K^m$ を $\Phi(A)(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定義する．

8.5 補題. 上で定義した $\Phi(A) : K^n \to K^m$ は K 線型写像である．Φ は $M_{m,n}(K)$ から $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ への写像である．

証明．**(1)**. $\Phi(A)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \Phi(A)(\boldsymbol{x}) + \Phi(A)(\boldsymbol{y})$.

(2). $\Phi(A)(\alpha\boldsymbol{x}) = A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A(\boldsymbol{x}) = \alpha\Phi(A)(\boldsymbol{x})$.

以上が示すべきことであった．□

8.6 補題. $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は K^n の単位ベクトルを，$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ は K^m の単位ベクトルをそれぞれ表すとする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対して

$$f(\boldsymbol{e}_j) = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{f}_i \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

[4] **一次写像**という呼び方もある．線型代数では「線型」と「一次」を取り替えても通じる場合が少なくない．

で定まる $(a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ を $\Psi(f)$ と表すことにする．このとき

$$\Psi : \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \to M_{m,n}(K)$$

は Φ の逆写像である．すなわち $\Psi(\Phi(A)) = A$ かつ $\Phi(\Psi(f)) = f$ が成立する．

証明．$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ が与えられた時, $\Phi(A)(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ は A の j 列目．よって $\Psi(\Phi(A)) = A$ である．

次に $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について，$\Psi(f) = A = (a_{ij})$ とおくと $j = 1, \ldots, n$ について

$$\Phi(\Psi(f))(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = f(\boldsymbol{e}_j).$$

したがって, 任意の $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j \in K^n$ に対して,

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(f))(\boldsymbol{x}) = \Phi(\Psi(f))(\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j) &= \sum_{j=1}^n x_j \Phi(\Psi(f))(\boldsymbol{e}_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{e}_j) = f(\sum_{j=1}^n x_j \boldsymbol{e}_j) = f(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので $\Phi(\Psi(f)) = f$．$\square$

(8.7) 以上によって, K 線型写像 $f : K^n \to K^m$ と K 係数 (m, n) 行列 A とは Φ と Ψ によって一対一に対応する．$A = \Psi(f)$ を f の (標準基底に関する) **表現行列 (representation matrix)** という．$f = \Phi(A)$ を A が表す線型写像と呼ぶことにしよう．

8.8 例. $\theta \in \mathbb{R}$ とする．$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f_\theta(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ を原点中心に反時計回りに角度 θ だけ回転して得られる点だとしよう．このとき, ベクトルの和, スカラー倍の幾何的な意味を考えれば明らかなように, f が $\mathbb{R}$ 線型である条件 (8.2.1), (8.2.2) は成立する．よって f_θ を表す行列 (表現行列) $R(\theta)$ が存在するはずである．$R(\theta) = \Psi(f_\theta)$ はその求め方により, $f_\theta(\boldsymbol{e}_1)$ を一列目に, $f_\theta(\boldsymbol{e}_2)$ を二列目に持つ行列である．ここに

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{e}_1$ を角度 θ だけ回転したら ${}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ であり, $\boldsymbol{e}_2$ を角度 θ だけ回転したら ${}^t(\cos(\theta+\pi/2), \sin(\theta+\pi/2)) = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ である. 以上により,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であることが分かった.

8.9 補題. $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$, $f \in \mathrm{Hom}_K(K^p, K^n)$, $g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ とする. このとき,

(1) $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$.

(2) $\Phi(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}$.

(3) C が n 次正則行列ならば $\Phi(C)$ は全単射で $\Phi(C^{-1}) = \Phi(C)^{-1}$.

(4) $\Psi(g \circ f) = \Psi(g)\Psi(f)$.

(5) $\Psi(\mathrm{id}_{K^n}) = E_n$.

(6) $h : K^n \to K^n$ が全単射である K 線型写像であるとき, $\Psi(h)$ は正則行列で $\Psi(h^{-1}) = \Psi(h)^{-1}$.

証明. **(1)**. 任意の $\boldsymbol{x} \in K^p$ に対して,

$$\Phi(AB)(\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x}) = \Phi(A)(\Phi(B)(\boldsymbol{x})) = (\Phi(A) \circ \Phi(B))(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので, $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$ を得る.

(2). 任意の $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して, $\Phi(E_n)(\boldsymbol{x}) = E_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathrm{id}_{K^n}(\boldsymbol{x})$. $\boldsymbol{x}$ は任意なので, $\Phi(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}$.

(3). すでに示した **(1)**,**(2)** により,

$$\begin{aligned} \Phi(C)\Phi(C^{-1}) &= \Phi(CC^{-1}) = \Phi(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}, \\ \Phi(C^{-1})\Phi(C) &= \Phi(C^{-1}C) = \Phi(E_n) = \mathrm{id}_{K^n}. \end{aligned}$$

従って $\Phi(C)$ は全単射で $\Phi(C^{-1}) = \Phi(C)^{-1}$.

(4). すでに示した **(1)** により,

$$\Psi(g \circ f) = \Psi(\Phi(\Psi(g)) \circ \Phi(\Psi(f))) = \Psi(\Phi(\Psi(g)\Psi(f))) = \Psi(g)\Psi(f).$$

(5). すでに示した **(2)** により,

$$\Psi(\mathrm{id}_{K^n}) = \Psi\Phi(E_n) = E_n.$$

(6). すでに示した **(4), (5)** により,

$$\Psi(h)\Psi(h^{-1}) = \Psi(h \circ h^{-1}) = \Psi(\mathrm{id}_{K^n}) = E_n,$$
$$\Psi(h^{-1})\Psi(h) = \Psi(h^{-1} \circ h) = \Psi(\mathrm{id}_{K^n}) = E_n.$$

□

(8.10)　行列は線型写像と対応しているが, その対応で行列の積は線型写像の合成に対応しているということがわかる.

8.11 例. 角度 θ, τ に対して $f_\theta \circ f_\tau$ は角度 τ だけ (原点中心に) 回転してから角度 θ だけさらに回転する, という操作なので, $f_{\theta+\tau}$ に一致する. 従って

$$R(\theta)R(\tau) = \Psi(f_\theta)\Psi(f_\tau) = \Psi(f_\theta \circ f_\tau) = \Psi(f_{\theta+\tau}) = R(\theta+\tau).$$

従って

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos(\theta+\tau) & -\sin(\theta+\tau)\\ \sin(\theta+\tau) & \cos(\theta+\tau)\end{pmatrix} &= R(\theta+\tau) = R(\theta)R(\tau)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau\\ \sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau & -(\cos\theta\sin\tau + \sin\theta\cos\tau)\\ \cos\theta\sin\tau + \sin\theta\cos\tau & \cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

成分を比較して, cos と sin の加法定理を得る.

8.12 例. $K = \mathbb{R}$, $n = m = 2$ として,

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

とし, 線型写像 $f = \Phi(A)$ を考える. つまり,

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\ x+y\end{pmatrix}$$

である. このとき, $ad - bc = 3 \neq 0$ となって A には逆行列があるので, $f = \Phi(A)$ は逆写像 $f^{-1} = \Phi(A^{-1})$ を持つ.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

なので,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u+v \\ -u+2v \end{pmatrix}$$

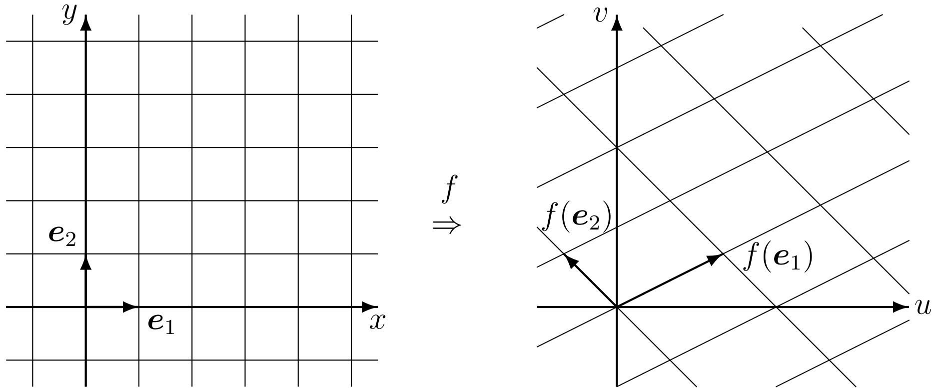
である. (x,y) 平面の直線

$$ax+by=c \qquad ((a,b)\neq(0,0))$$

は (u,v) 平面の直線

$$\frac{a}{3}(u+v)+\frac{b}{3}(-u+2v)=c$$

に写る. 容易に分かるように, 原点を通る直線は原点を通る直線に, 平行な直線は平行な直線に写る.



(8.13) 次の演習を通して, 行列の和とスカラー倍が線型写像の和とスカラー倍に対応することを学ぼう.

8.14 演習. f,g が K^n から K^m への写像とし, $\alpha\in K$ とするとき,

$$f+g: K^n\to K^m$$

を $(f+g)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義し, また

$$\alpha f: K^n\to K^m$$

を $(\alpha f)(\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x})$ で定義する. 次のことを示せ.

(1) $A,B\in M_{m,n}(K)$ のとき, $\Phi(A)+\Phi(B)=\Phi(A+B)$.

(2) $f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ ならば $f + g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ であり, $\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g)$.

(3) $A \in M_{m,n}(K)$, $\alpha \in K$ のとき, $\alpha\Phi(A) = \Phi(\alpha A)$.

(4) $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$, $\alpha \in K$ ならば, $\alpha f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ であり, $\Psi(\alpha f) = \alpha\Psi(f)$.

9　行基本変形と行階段標準形

(9.1)　$x_1, \ldots, x_n$ を変数とする連立一次方程式

(9.1.1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

を考える. この方程式は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと,

(9.1.2)
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書き直される. これが連立一次方程式の行列を使った表示の一般形である. A を連立方程式の**係数行列 (coefficient matrix)** という.

　この方程式を解こうとするとき, 次が基本的である.

9.2 補題. P を m 次正則行列とするとき, (9.1.2) と

(9.2.1)
$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

は同値である. 特にその解は同じである.

証明. (9.1.2) の両辺に左から P を掛けて (9.2.1) を得る. 逆に, (9.2.1) の両辺に P^{-1} を左から掛けて (9.1.2) を得る. □

(9.3)　解が同じになるのだから, PA が分かりやすい行列になるようにして, (9.1.2) を解く代わりに (9.2.1) を解けば良い.

　実際には一気に PA が分かりやすくなるように P を見つけることは難しく, A に比べて少し分かりやすいようにできるだけである. そこで (9.2.1) にさらに次の正則行列を左から掛け, 繰り返し A を改善するのである. A に P を掛けるとき, 右辺の $\boldsymbol{b}$ も変わるので, A と $\boldsymbol{b}$ を並べた行列 (区分行列) $\hat{A} = (A|\boldsymbol{b})$ ($(m, n+1)$ 行列になる) を考えるのが便利である. この行列を連立方程式 (9.1.2) の**拡大係数行列 (extended coefficient matrix)** という.

　以下の基本行列が A を改善するのに用いられる.

9.4 定義. 以下の 3 つのタイプの n 次正方行列を**基本行列 (elementary matrix)** という.

$$P(i;c) = P_n(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ただし $1 \leq i \leq n$, $c \in K$, $c \neq 0$ で c は i 行目に位置する. $P(i,c)$ は単位行列の i 行目を c 倍して得られる行列である. またこれは単位行列の i 列目を c 倍した行列とも見ることができる.

$$P(i,j) = P_n(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ただし $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ で対角成分が 0 になるのは i 行目と j 行目. $P(i,j)$ は単位行列の i 行目と j 行目を入れ換えて得られる行列である. またこれは単位行列の i 列目と j 列目を入れ換えて得られる行列と見ることもできる.

$$P(i,j;c) = P_n(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ただし $c \in K$ で c は (i,j) 成分に位置する. $P(i,j;c)$ は E_n の第 j 行目の c 倍を第 i 行目に足して得られる行列である. これは E_n の第 i 列目の c 倍を第 j 列目に足して得られる行列と見ることもできる.

(9.5) A を n 次元行ベクトルを m 個積み重ねて得られる行列 ($(1,1,\ldots,1;n)$ 型に区分けされた (m,n) 行列) $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$ とする. このとき, 区分行列の計算から次が分かる.

$$P_m(i;c)A = P_m(i;c)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}.$$

すなわち, A に左から $P_m(i;c)$ を掛ける操作は A の第 i 行を c 倍する. この操作を以後 $R_i \times c$ と表す.

また,

$$P_m(i,j)A = P_m(i,j)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}.$$

すなわち, A に左から $P_m(i,j)$ を掛ける操作は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えることである. この操作を以後 $R_i \leftrightarrow R_j$ と表す.

また,

$$P_m(i,j;c)A = P_m(i,j)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}.$$

すなわち, A に左から $P_m(i,j;c)$ を掛ける操作は A の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える操作である. この操作を以後 $R_i \leftarrow cR_j$ と表す.

以上の基本行列を行列に左から掛ける操作を**行基本変形 (elementary row operation)** という.

(9.6) 行基本変形を繰り返し施すとは, 基本行列をいくつか左から掛けることである. それは基本行列の積を左から掛けることと同じである.

9.7 補題. 次の公式が成立する. 特に基本行列は正則行列であり, その逆行列もまた基本行列である.

(1) $1 \le i \le n$, $c, d \in K$, $c, d \neq 0$ について, $P_n(i;c)P_n(i;d) = P_n(i;cd)$. 特に $P_n(i;c)$ は正則で $P_n(i;c)^{-1} = P_n(i;c^{-1})$.

(2) $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$ について, $P_n(i,j)^2 = E_n$. 従って $P_n(i,j)$ は正則で $P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j)$.

(3) $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, $c, d \in K$ について, $P_n(i,j;c)P_n(i,j;d) = P_n(i,j;c+d)$. 特に $P_n(i,j;c)$ は正則で $P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$.

証明. (1) のみ示す. $P_n(i;c)P_n(i;d)$ は $P_n(i;d)$ の i 行目を c 倍した行列なので $P_n(i;cd)$ になる. 特に $P_n(i;c)P_n(i;c^{-1}) = P_n(i;1) = E_n$, $P_n(i;c^{-1})P_n(i;c) = P_n(i;1) = E_n$ であるので, $P_n(i;c)$ は逆行列 $P_n(i;c^{-1})$ を持つ. $\square$

次に行基本変形によって行列がどのように簡単にできるかを考える.

9.8 定義. (m,n) 行列 $B = (b_{ij})$ について, B が**行階段行列 (row echelon matrix)** であるとは, ある整数 r で $0 \le r \le m$ であるものと, 列番号 $j_1, \ldots, j_r$ が存在して $1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n$ であって,

(1) 各 $i = 1, \ldots, r$ について, $j < j_i$ ならば $b_{ij} = 0$.

(2) 各 $i=1,\dots,r$ について, $b_{ij_i}\neq 0$.

(3) $i>r$ ならば $b_{ij}=0$

が成立することをいう. r は階段行列 B から一意的に決まる. r を B の**階数 (rank)** と呼ぶ. $(1,j_1),(2,j_2),\dots,(r,j_r)$ を B の角と呼ぶことにする.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & b_{2j_2} & & * & \\ & & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & & & 0 & b_{rj_r} \\ & & & O & & & & & \end{pmatrix} \qquad (b_{ij_i}\neq 0 \quad (i=1,\dots,r)).$$

B が**行階段標準行列 (row echelon canonical matrix)** であるとは, B が上の行階段行列の条件に加え, さらに, $b_{i'j_i}=\delta_{ii'}$ (クロネーッカーのデルタ. $i,i'=1,\dots,r$) をみたすことをいう. (m,n) 行列 A と 行階段行列 (行階段標準行列) B に対して, B が A の**行階段形 (row echelon form)** (**行階段標準形 (row echeleon canonical form)**) であるとは, ある基本行列の積 P が存在して $PA=B$ となる (つまり A に行基本変形を繰り返して B が得られる) ことをいう.

9.9 例.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき, A は行階段行列であり, その階数は 3, 角は $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,5)$ である. B は行階段標準行列であり, その階数は 4, 角は $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$ である.

(9.10) (m,n) 行列 A に対して, A の最初の j 列を取った (m,j) 行列を $A_{(\le j)}$ と表すことにする. A が行階段行列 (行階段標準行列) であれば $A_{(\le j)}$ もそうである. 区分行列に関する計算規則で,

$$(PA)_{(\le j)}=PA_{(\le j)}$$

であるから, B が A の行階段形 (行階段標準形) であれば, $B_{(\le j)}$ は $A_{(\le j)}$ の行階段形 (行階段標準形) である.

9.11 定理. $A \in M_{m,n}(K)$ に対して, A の行階段標準形 B が一意的に存在する.

証明. n についての数学的帰納法による. まず存在を示す. 帰納法の仮定で, $(PA)_{(\leq n-1)}$ が行階段標準形となる基本行列の積 P が存在する. A を PA でおきかえ, はじめから $A_{(\leq n-1)}$ は行階段標準行列と仮定して良い. r を $A_{(\leq n-1)}$ の階数とする. $A=(a_{ij})$ として, もし $a_{in}=0$ $(i>r)$ であれば A は行階段標準行列なので, 問題ない. もし $i>r$ で $a_{in}\neq 0$ となるものがあれば, A に左から $P(r+1,i)$ をかけて $a_{r+1,n}\neq 0$ としてよい. $P(r+1;a_{r+1,n}^{-1})$ を左から掛けて $a_{r+1,n}=1$ としてよい. 次に $i\neq r+1$ について左から $P(i,r+1;-a_{in})$ を掛けて, A の n 列目は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{r+1}$ であるとしてよい. 以上の操作で $A_{(\leq n-1)}$ は一切変化していないことに注意すると, A は階数 $r+1$ の行階段標準行列になっており, 行階段標準形の存在が示された.

　次に一意性を示す. $PA=B$, $QA=C$ はいずれも A の行階段標準形とする (P, Q は基本行列の積). $P_1=QP^{-1}$ とおいて, $P_1B=C$ である. 数学的帰納法の仮定により, $B_{(\leq n-1)}=C_{(\leq n-1)}$ である. これの階数を r とおき, 第 j_i 列が $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,\ldots,r)$ であるとする. $P_1\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_i$ なので,

$$P_1=\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & * \end{pmatrix}$$

であることが従う. なので, $B=(b_{ij})$ とするとき, $b_{in}=0$ $(i>r)$ であれば, B の第 n 列 $\boldsymbol{b}$ と C の第 n 列 $P_1\boldsymbol{b}$ は等しく, $B=C$ である. 同様に, $C=(c_{ij})$ とするとき, $c_{in}=0$ $(i>r)$ であれば, やはり $B=C$. 最後に, $b_{in}=0$ $(i>r)$ でもなければ $c_{in}=0$ $(i>r)$ でもないとき, B も C も行階段標準行列であることにより, B の n 列目も C の n 列目も共に $\boldsymbol{e}_{r+1}$ でなければならず, やはり $B=C$ である. □

9.12 命題. A が行階段行列である (m,n) 行列のとき, A の行階段標準形 B は A と同じ階数, 同じ角を持つ.

証明. j についての数学的帰納法で, ある基本行列の積 P が存在して, PA は A と同じ階数, 同じ角をもち, PA の最初の j 列 $(PA)_{(\leq j)}$ が行階段標準行列であるようにできることを示せば良い.

　j が小さい時には正しいとして, $j\geq 2$ の場合には基本行列の積 P で, PA が A と同じ階数, 同じ角をもち, $(PA)_{(\leq j-1)}$ が行階段標準行列となっている. A を PA で置き換え, はじめから $A_{(\leq j-1)}$ は行階段標準行列であるとしても一般性を失わない. r を $A_{(\leq j-1)}$ の階数とする. $(r+1,j)$ が角でなければ $A_{(\leq j)}$ も行階段標準行列で問題ない. $(r+1,j)$ が角の時, A に $P(r+1;A[r+1,j]^{-1})$

を左から掛けて $A[r+1,j]=1$ としてよく, さらに $i=1,\dots,r$ について $P(i,r+1;-A[i,j])$ を左から掛けて, $A_{(\leq j)}$ が行階段標準形になったが, 階数も角も変わっていない. $\square$

9.13 定義. (m,n) 行列 A に対して, A の行階段標準形の階数を A の階数と呼んで, $\operatorname{rank} A$ で表す. A がもともと階段行列である場合には命題 9.12 によって, これは行階段行列としての A の階数と一致している.

9.14 補題. (m,n) 行列 A と m 次の基本行列の積 P について, $\operatorname{rank}(PA)=\operatorname{rank} A$.

証明. A と PA は共通の行階段標準形を持つ. 実際, $B=QA$ (Q は m 次の基本行列の積) で B が行階段標準行列ならば, $B=(QP^{-1})(PA)$ であり, QP^{-1} も m 次基本行列の積である. 従って補題の主張は階数の定義から明白である. $\square$

9.15 例. 行列

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&0&1\\0&3&-2&5&1&5\\0&-1&2&-3&2&2\\0&1&0&1&2&4\end{pmatrix}$$

の行階段標準形を求めよう. A に行基本変形を加えてゆく.

$$\begin{pmatrix}0&1&-1&2&0&1\\0&3&-2&5&1&5\\0&-1&2&-3&2&2\\0&1&0&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\leftarrow(-3)R_1\\R_3\leftarrow R_1\\R_4\leftarrow(-R_1)}}\begin{pmatrix}0&1&-1&2&0&1\\0&0&1&-1&1&2\\0&0&1&-1&2&3\\0&0&1&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\leftarrow R_2\\R_3\leftarrow(-R_2)\\R_4\leftarrow(-R_2)}}\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&3\\0&0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\leftarrow(-R_3)\\R_2\leftarrow(-R_3)\\R_4\leftarrow(-R_3)}}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&2\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

最後の行列が A の階段標準形である. 従って A の階数は 3 である.

9.16 演習. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の行階段標準形と階数を求めよ.

9.17 演習. $(m_1, m_2; n_1, n_2)$ 型に区分された行列

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

について, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C$ であることを示せ. そのことを用いて, 教科書 p. 42, 演習問題 3.1 の (1), (2) を解答せよ.

10　逆行列の計算

(10.1)　前節で行階段標準形と階数の求め方を学んだが, その簡単な応用として逆行列の求め方がある. 次の命題で (1) の階数が n であるという条件は計算で確認できる条件であるので他の条件も計算で確認できることになる.

10.2 命題. A が n 次正方行列の時, 次は同値である.

(1) A は階数 n である.

(2) A は基本行列の積である.

(3) A は正則行列である.

証明. **(1)⇒(2)**. 階数 n の n 次正方行列である行階段標準行列とは単位行列 E_n に他ならない. 従って, ある基本行列の積 $P = P_1 \cdots P_r$ が存在して $PA = E_n$ である ($P_1, \ldots, P_r$ は基本行列). $P_1, \ldots, P_r$ は正則で $P_1^{-1}, \ldots, P_r^{-1}$ も基本行列だった. よって P も正則で $P^{-1} = P_r^{-1} \cdots P_1^{-1}$ も基本行列の積. よって $PA = E_n$ に左から P^{-1} を掛け, $A = P^{-1}E_n = P^{-1}$ は基本行列の積である.

　(2)⇒(3). これは明らかである.

　(3)⇒(1). もし A の階数が n 未満であるとすると, A の行階段標準形 $B = PA$ の最終行は零ベクトルである. A, P が正則なので B も正則であるが, $E_n = BB^{-1}$ の最終行は容易に分かるように零ベクトルで, これは矛盾. したがって A の階数は n でなければならない. □

10.3 定理. n 次正方行列 A, B について, $AB = E_n$ ならば, A も B も正則で $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$ である.

証明. $PA = C$ を A の行階段標準形とする (P は n 次正則行列). もし A が正則でないとすると, C の最終行は零ベクトルである. よってこれに右から BP^{-1} をかけた $CBP^{-1} = PABP^{-1} = PP^{-1} = E_n$ も最終行は零ベクトルとなり, 矛盾. したがって A は正則でなければならない. よって $B = A^{-1}AB = A^{-1}$. よって $B = A^{-1}$ も正則で, $B^{-1} = A$. □

10.4 系. n 次正方行列 A, B について, AB が正則ならば A も B も正則である.

証明. 各自確かめよ. □

(10.5) n 次正方行列 A に逆行列があるかを確かめ, もしある場合に A^{-1} を求める方法は以下の通りである. A の右隣に同じサイズの単位行列 E_n を並べた $(n, 2n)$ 行列 $B = (A|E_n)$ を考える. B に行基本変形を施して (基本行列の積 P を左から掛け), B の左半分を行基本標準形に変形していく. $PB = (PA|PE_n) = (PA|P)$ を得る. もし PA の最終行が零ベクトルになり, A の階数が n 未満になったら逆行列はない. 一方, A の階数が n のときは, $PA = E_n$ となっているはずで, このとき A は正則なので, A^{-1} を右から掛けて $P = A^{-1}$. つまり, PB の右半分に現れた行列 P が求める A^{-1} になっている.

10.6 例. 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよう.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{R_2 \leftarrow (-R_1) \\ R_1 \leftrightarrow R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow (-2)R_1 \\ R_3 \leftrightarrow (-5)R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow (-2)R_2 \\ R_3 \times (-1) \\ R_2 \leftrightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow 3R_2 \\ R_3 \leftarrow (-8)R_2 \\ R_3 \times 1/9}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/9 & -10/9 & 8/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow 3R_3 \\ R_2 \leftarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/9 & 6/9 & -3/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -5/9 & -10/9 & 8/9 \end{array}\right).$$

よって求める逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ -5 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

10.7 演習. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

11　列基本変形と行列の標準形

(11.1)　基本行列を行列の右から掛けることを**列基本変形 (column elementary operation)** という．(m, n) 行列に対する列基本変形は次の 3 つである．

$C_i \times c$　$P_n(i; c)$ を右から掛ける．これは第 i 列を c 倍する操作である．

$C_i \leftrightarrow C_j$　$P_n(i, j)$ を右から掛ける．これは第 i 列と第 j 列を入れ換える操作である．

$C_j \leftarrow cC_i$　$P_n(i, j; c)$ を右から掛ける．これは第 j 列に第 i 列の c 倍を加える操作である．

行基本変形と列基本変形を総称して**基本変形 (elementary operation)** という．行列 A に列基本変形を繰り返し行うことは, ある正則行列 Q を右から掛けることである．行列 A に基本変形を行うことは, ある正則行列 P とある正則行列 Q について, PAQ の形の行列を作ることである．

11.2 補題. 階数 r の行階段標準行列 B に列の入れ換え $C_i \leftrightarrow C_j$ を繰り返し行い

$$C = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形の行列を作ることができる．したがって, 任意の (m, n) 行列に行基本変形と列の入れ換えを行ってこの形の行階段行列を作ることができる．

証明. $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (r, j_r)$ が角だとすると, B の第 j_i 列は $\boldsymbol{e}_i$ なので, 第 1 列と第 j_1 列を入れ換え, 第 2 列と第 j_2 列を入れ換え,..., 第 r 列と第 j_r 列を入れ換えれば, $1 \leq j \leq r$ について第 j 列が $\boldsymbol{e}_j$ となり, 元々第 $r+1$ 行目以降は零ベクトルだったことと合わせて, 求める形になっていることが分かる．後半は定理 9.11 と前半から明白である． □

11.3 補題. A が (m, n) 行列, B が (n, p) 行列とするとき, $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}\, A$. さらに $n = p$ で B が正則行列のとき, $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}\, A$.

証明. 前半を示す．$r = \mathrm{rank}\, A$ とする．PA が A の行階段標準形とすると, PA の $r+1$ 行目以降は零ベクトルである．このことは右から B を掛けても変わらず, PAB の $r+1$ 行目以降は零ベクトルである．PAB を, $r+1$ 行目は一切触らずに行基本変形してその行階段標準形 $P'PAB$ を得られるが, その階数は明らかに r 以下である．よって $\mathrm{rank}(AB) \leq r = \mathrm{rank}\, A$.

後半は前半によって $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}(ABB^{-1}) \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}\, A$ だから明らか． □

11.4 定理. 任意の (m, n) 行列 A に対して, A に基本変形を施して

$$E_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形の行列を作ることができる. このとき r は A から一意的に定まり, A の階数である.

証明. まず前半を示す. 補題 11.2 によって,

$$A = \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

であるとして一般性を失わない. $B = (b_{ij})$ であるとするとき, A に $i = 1, \ldots, r$ と $j = 1, \ldots, n - r$ について $C_{j+r} \leftarrow -b_{ij} C_i$ をほどこして, $E_{m,n}(r)$ を得る.

後半を示す. $PAQ = E_{m,n}(r)$ (P は m 次正則行列, Q は n 次正則行列) だとせよ.

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} E_{m,n}(r)$$

であるが, $E_{m,n}(r)$ は階数 r の行階段行列であるので $\operatorname{rank} A = r$ を得た. □

(11.5) (m, n) 行列 A に対して $E_{m,n}(r)$ ($r = \operatorname{rank} A$) を A の標準形と呼ぶ. 定理によって, A の階数とは, A の標準形の対角線に並ぶ 1 の個数である.

11.6 系. (m, n) 行列 A に対して, $\operatorname{rank} {}^t\!A = \operatorname{rank} A$ である.

証明. $r = \operatorname{rank} A$ とすると, ある m 次正則行列 P とある n 次正則行列 Q が存在して $PAQ = E_{m,n}(r)$ である. これを両辺転置して,

$${}^tQ {}^tA {}^tP = {}^tE_{m,n}(r) = E_{n,m}(r).$$

${}^tQ$ および ${}^tP$ は正則なので,

$$\operatorname{rank} {}^tA = \operatorname{rank} {}^tQ {}^tA {}^tP = \operatorname{rank} E_{n,m}(r) = r = \operatorname{rank} A.$$

□

11.7 演習. A が (m, n) 行列, B が (n, p) 行列のとき, $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} B$ であることを証明せよ.

12　連立１次方程式

(12.1)　連立一次方程式

$$
\text{(12.1.1)}\qquad
\left\{
\begin{array}{llllllll}
4x & +3y & -z & +2u & -2v & = & -1 \\
x & & -2z & -u & -3v & = & 0 \\
-2x & -y & +2z & -3u & -v & = & 4 \\
-3x & -3y & +z & +u & -v & = & 3
\end{array}
\right.
$$

と

$$
\text{(12.1.2)}\qquad
\left\{
\begin{array}{llllllll}
4x & +2u & +3y & -2v & -z & = & -1 \\
x & -u & & -3v & -2z & = & 0 \\
-2x & -3u & -y & -v & +2z & = & 4 \\
-3x & +u & -3y & -v & +z & = & 3
\end{array}
\right.
$$

はまったく同じ方程式であり, 従って解も同じである. ところで (12.1.1), (12.1.2) それぞれの拡大係数行列は

$$
\left(
\begin{array}{ccccc|c}
4 & 3 & -1 & 2 & -2 & -1 \\
1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \\
-2 & -1 & 2 & -3 & -1 & 4 \\
-3 & -3 & 1 & 1 & -1 & 3
\end{array}
\right),
\qquad
\left(
\begin{array}{ccccc|c}
4 & 2 & 3 & -2 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\
-2 & -3 & -1 & -1 & 2 & 4 \\
-3 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3
\end{array}
\right)
$$

であり, 変数の順番を入れ換えたことにより, 列が入れ換えられている. 列の入れ換えによって行列が整理されて方程式が分かりやすくなる場合があるが, その際に変数の順番を明確にしておくために, 以下のように拡大係数行列の各列の上に変数を目印として書いておくと便利である.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x & y & z & u & v & \boldsymbol{b}
\end{array} \\
\left(
\begin{array}{ccccc|c}
4 & 3 & -1 & 2 & -2 & -1 \\
1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \\
-2 & -1 & 2 & -3 & -1 & 4 \\
-3 & -3 & 1 & 1 & -1 & 3
\end{array}
\right)
\end{array},
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x & u & y & v & z & \boldsymbol{b}
\end{array} \\
\left(
\begin{array}{ccccc|c}
4 & 2 & 3 & -2 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\
-2 & -3 & -1 & -1 & 2 & 4 \\
-3 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3
\end{array}
\right)
\end{array}
$$

(12.2)　さて, 一般の連立一次方程式

$$
\text{(12.2.1)}\qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
$$

を解くことを考える. ここに $A = (a_{ij})$ は (m, n) 行列, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ は未知変数からなる n 次元列ベクトル, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_m)$ は m 次元数ベクトルである. 拡大係数行列を $\hat{A} = (A|\boldsymbol{b})$ とする.

12.3 補題. $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \hat{A}$ のとき, (12.2.1) は解を持たない.

証明. 左から $\hat{A}$ に正則行列を掛けても階数は変わらないし, 方程式の解も変わらないので, $\hat{A}$ は行階段標準行列として良い. このとき, 補題の仮定から, $\operatorname{rank} A = r$ とすると $\hat{A}$ の $r+1$ 行目は $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ である. これは, $\hat{A}$ に対応する連立方程式の $r+1$ 個目の方程式が $0 = 1$ という方程式であることを示しており, この方程式は $\boldsymbol{x}$ が何であってもみたされないから, 解なしである. □

(12.4) そこで以下, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A}$ である場合を考える. $\hat{A}$ に左から正則行列を掛けても解が変わらないので, $\hat{A}$ が行階段行列の場合を考えれば良い. さらに変数を適当に入れ換えて $\hat{A}$ の (最終列を除く) 列を入れ換えて,

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} E_r & C & \boldsymbol{d} \\ O & O & \boldsymbol{0} \end{array}\right)$$

という形だとしてよい. ここに $C = (c_{ij}) \in M_{r,n-r}(K)$, $\boldsymbol{d} = {}^t(d_1, \ldots, d_r) \in K^r$. このとき, $\boldsymbol{u} = {}^t(x_1, \ldots, x_r)$, $\boldsymbol{v} = {}^t(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ とおけば $\hat{A}$ に対応する方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ は区分行列の計算から

$$\begin{pmatrix} E_r & C \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

つまり, $\boldsymbol{u} + C\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ の連立になる. 第二の式は無視して良いので,

$$\boldsymbol{u} = -C\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d} \tag{12.4.1}$$

となる. この方程式の解 $\boldsymbol{x} = {}^t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は, $\boldsymbol{v} = {}^t(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ を任意に決め, それに応じて $\boldsymbol{u}$ を (12.4.1) で一意的に決めたものとなる. これを

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{v} = \{x_{r+1}, \ldots, x_n\} \text{ は任意})$$

というように表す. 成分を使って表示すると,

$$\begin{cases} x_1 &= -c_{11}x_{r+1} - c_{12}x_{r+2} - \cdots - c_{1,n-r}x_n + d_1 \\ x_2 &= -c_{21}x_{r+1} - c_{22}x_{r+2} - \cdots - c_{2,n-r}x_n + d_2 \\ & \quad \cdots \\ x_r &= -c_{r1}x_{r+1} - c_{r2}x_{r+2} - \cdots - c_{r,n-r}x_n + d_r \\ x_{r+1} &= x_{r+1} \\ & \cdots \\ x_n &= x_n \end{cases}$$

となる.

解の表示で任意に決めて良い変数の個数 $n - r$ を解の自由度という.

(12.5) 以上から明らかなように, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A}$ のとき, 連立方程式 (12.2.1) は解を持つ. 従って次を得る.

12.6 定理. 連立一次方程式 (12.2.1) が解を持つ必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A}$ である. このとき, 解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$ である. 特に, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A} = n$ のとき, 一意的に解を持つ. また, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A} < n$ のとき, 無限個の解を持つ. □

(12.7) 連立一次方程式

$$\begin{cases} x & -y & -z & +u & -v & +w & = & -2 \\ -x & +y & & -u & & -w & = & 1 \\ 2x & -2y & -3z & +2u & -2v & +3w & = & -6 \\ x & -y & -3z & +u & -2v & +2w & = & -5 \end{cases}$$

を解いてみよう. 拡大係数行列を行基本変形して行階段標準形にする.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \cdots \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A} = 3$ であり, 解を持つ. 変数の順序を入れ換えて, 拡大係数行列の列を入れ換える.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & w & \boldsymbol{b} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & z & v & y & u & w & \boldsymbol{b} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

よって求める解は

$$\begin{cases} x & = & y - u - w - 1 \\ z & = & w + 2 \\ v & = & -w - 1 \\ y & = & y \\ u & = & u \\ w & = & w \end{cases} \qquad (y, u, w \text{ は任意の数}).$$

(12.8)　次は連立方程式

$$\begin{cases} 2x & -6y & -2z & -2u & -v & +5w & = & 1 \\ 3x & -9y & -2z & -u & -v & +7w & = & -1 \\ -3x & +9y & +2z & +u & +2v & -6w & = & 1 \\ -2x & +6y & +z & & +v & -4w & = & 1 \end{cases}$$

を解いてみよう.

拡大係数行列を行基本変形して行階段標準形

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を得る. $\operatorname{rank} A = 3 < 4 = \operatorname{rank} \hat{A}$ であり, この連立方程式は解なしである.

12.9 演習. 次の連立一次方程式を解け.

$$(1) \quad \begin{cases} x & -3y & & -2u & & -2w & = & 0 \\ -x & +3y & -z & +2u & +v & +5w & = & -4 \\ -x & +3y & +z & +u & -2v & -3w & = & 3 \\ -2x & +6y & -z & +5u & +2v & +9w & = & -3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x & +y & +3z & & -v & = & 2 \\ -x & & -2z & +u & -v & = & -1 \\ x & +3y & +5z & +3u & -4v & = & 3 \\ 2x & +y & +5z & -u & & = & 4 \end{cases}$$

(12.10)　連立１次方程式 (12.2.1) において, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とした形の方程式

(12.10.1) $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を**斉次連立１次方程式 (homogeneous simultaneous linear equation)** という. この方程式は明らかに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という解を持つ. この解を**自明な解 (trivial solution)** という. 定理 12.6 から次を得る.

12.11 命題. 連立方程式 (12.10.1) が自明でない解を持つための条件は, $n > \operatorname{rank} A$ である. □

12.12 演習. 教科書の次の問題を解け.

(1) p. 43, 3.3 の (3), (4).

(2) p. 43, 3.5 の (1), (2).

(3) p. 53, 4.4 の (1), (2).

13　n 次対称群

13.1 定義. 自然数の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ で表す. $[n]$ から $[n]$ への全単射全体のなす集合を S_n で表し, S_n を n 次**対称群 (symmetric group)** という. S_n の元を n 次の**置換 (permutation)** という.

(13.2)　$m < n$ のとき, $\sigma \in S_m$ に対しては $\sigma(j) = j$ $(m < j \leq n)$ と定義して, $\sigma \in S_n$ とみなす場合がある. 従ってこの約束のもとでは $S_m \subset S_n$ である.

(13.3)　$\sigma, \tau \in S_n$ に対して, 写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を σ と τ の積と呼んで, 単に $\sigma\tau$ と書く. S_n の元 σ は各 $i \in [n]$ の像が決まれば決まるので, これらを並べた列によって,

(13.3.1)
$$\sigma = [\sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n)]$$

のように表す. このことからもわかるように, S_n の元の個数は n 順列の個数 $n!$ と一致する. σ は時には

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように $(2, n)$ 行列によっても表される. 第 1 行の数の真下に位置する数が σ によって対応する, というのが約束で, 第 1 行は $1, 2, \ldots, n$ の順に必ずしもなっていなくてもよいものとする. また, 上下が同じ数になる列は省く場合がある. たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である. このように規約すると, $(2, n)$ 行列の上下を逆にすると置換の逆が得られることが分かる.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma 1 & \sigma 2 & \cdots & \sigma n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

(13.4)　(13.3.1) と少し紛らわしいが, $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_l)$ (ただし, $l \geq 1$, $1 \leq a_i \leq n$ で, $a_1, \ldots, a_l$ は相異なる) と書いたら, $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ で $\sigma(a_l) = a_1$ で, $b \in [n] \setminus \{a_1, \ldots, a_l\}$ ならば $\sigma(b) = b$ となるような置換 σ を表すとする. このような置換 σ は巡回置換とよばれ, l はその巡回置換の**長さ (length)** という. たとえば, S_6 の元として,

$$(5\ 3\ 1\ 4) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = [4\ 2\ 1\ 5\ 3\ 6]$$

である.

(13.5) 長さ 2 の巡回置換を**互換 (transposition)** という．互換は $(i\ j)$ $(1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j)$ の形をしており，この置換を s_{ij} で表し，(i, j) **互換**という．$s_{ij}(i) = j$, $s_{ij}(j) = i$, $s_{ij}(k) = k$ $(k \neq i, j)$ である．$1 \leq i < n$ について，$(i, i+1)$ 互換 $s_{i\,i+1}$ を特に s_i で表し，このような互換を**隣接互換 (adjacent transposition)** という．

13.6 定義. $\sigma \in S_n$ に対して，

$$I(\sigma) := \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

とおき，$I(\sigma)$ の元の個数 $\#I(\sigma)$ を $\ell(\sigma)$ で表し，σ の**転倒数 (inversion number)**[5] という．転倒数が偶数である置換を**偶置換 (even permutation)**，奇数である置換を**奇置換 (odd permutation)** という．

13.7 例. $n = 5$, $\sigma = [4\ 1\ 3\ 2]$ のとき，

$$I(\sigma) = \{(1,2), (1,3), (1,4), (3,4)\}.$$

で従って $\ell(\sigma) = 4$ で σ は偶置換.

置換 σ が転倒数 0 である条件は $\sigma = \mathrm{id}$ である．置換 σ が転倒数 1 である条件は σ が隣接互換であることである．

13.8 補題. $\sigma \in S_n$, $1 \leq i < n$ とする．このとき，

$$\ell(\sigma s_i) = \begin{cases} \ell(\sigma) + 1 & (\sigma(i) < \sigma(i+1)) \\ \ell(\sigma) - 1 & (\sigma(i) > \sigma(i+1)) \end{cases}$$

である．

証明．写像

$$\Phi : I(\sigma) \setminus \{(i, i+1)\} \to I(\sigma s_i) \setminus \{(i, i+1)\}$$

および

$$\Psi : I(\sigma s_i) \setminus \{(i, i+1)\} \to I(\sigma) \setminus \{(i, i+1)\}$$

を $\Phi(j, k) = (s_i j, s_i k)$ および $\Psi(j, k) = (s_i j, s_i k)$ で定めれば容易に分かるようにちゃんと定義になっていて，互いに逆写像である ($s_i^2 = \mathrm{id}$ に注意せよ).

$\sigma(i) < \sigma(i+1)$ のとき，$(i, i+1) \notin I(\sigma)$ かつ $(i, i+1) \in I(\sigma s_i)$．このとき，

$$\ell(\sigma s_i) = |I(\sigma s_i)| = |I(\sigma s_i) \setminus \{(i, i+1)\}| + 1 = |I(\sigma) \setminus \{(i, i+1)\}| + 1 = \ell(\sigma) + 1.$$

[5]長さ (length) と呼ばれる場合もあるが，巡回置換の長さと紛らわしいので本書では用いない.

$\sigma(i) > \sigma(i+1)$ のときは, $\sigma s_i(i) < \sigma s_i(i+1)$ だから上の議論を σs_i に適用して,

$$\ell(\sigma) = \ell(\sigma s_i) + 1$$

であるので, 求める結果を得る. □

13.9 定理. $\sigma \in S_n$ とする. このとき,

(1) $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)}}$ のように, σ を $\ell(\sigma)$ 個の隣接互換の積に表すことができる.

(2) $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_l}$ のように, σ を隣接互換 l 個の積で表わせたならば, $l \geq \ell(\sigma)$ であり, $l - \ell(\sigma)$ は偶数である.

証明. **(1)**. $r = \ell(\sigma)$ に関する数学的帰納法による. $r = 0$ の場合, $\sigma = \mathrm{id}$ なので, σ は隣接互換 0 個の積である. $r > 0$ とし, r が小さい時に主張は正しいとする. $\sigma \neq \mathrm{id}$ なので, $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$ ではありえず, $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ である i が存在する. すると, $\ell(\sigma s_i) = r - 1$ なので, 帰納法の仮定によって $\sigma s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ と表わせ, 従って $\sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}} s_i$ である.

(2). l についての数学的帰納法. $l = 0$ ならば $\sigma = \mathrm{id}$ であり, $l = \ell(\sigma)$. $l > 0$ とする. $\sigma s_{i_l} = s_{i_1} \cdots s_{i_{l-1}}$ なので, 帰納法の仮定により, $l - 1 = \ell(\sigma s_{i_l}) + 2u$, $u \geq 0$ と書ける. $\ell(\sigma s_{i_l}) = \ell(\sigma) \pm 1$ に注意して, $l = \ell(\sigma) + 2u$ または $l = \ell(\sigma) + 2(u+1)$ となり, 求める結果を得る. □

13.10 注意. 定理 13.9, (1) は, 任意の置換に対して, それを引き起こすあみだくじが (以下の例のように) 存在することを示している. あみだくじとは, 例 13.11 の図 (d) のように, 縦線を人数分だけ引き, 横線をいくつか隣り合う縦線のあいだに渡したものである. くじの引きかたは, (普通はくじの下の方は隠した状態で) 縦線のどれかを選ぶ. そして, 選んだ縦線の上端からはじめて, 下に向かって辿っていく. ただし, 横線に出会ったら, 下に向かわずにその横線を渡って, 渡った先からまた下に行く. 一番下までいったら, そこに書いてある内容がその人の引いたくじの結果である. たとえば, 図 (d) で上部に 4 のある縦線を選んだ人は, s_3, s_2, s_1 の横線を渡って, 一番左の列に行く.

13.11 例. 転倒数 5 の 5 次の置換 $\sigma = [4\ 1\ 5\ 2\ 3]$ を隣接互換の積で表そう. $\sigma s_3 = [4\ 1\ 2\ 5\ 3]$, $\sigma s_3 s_4 = [4\ 1\ 2\ 3\ 5]$, $\sigma s_3 s_4 s_1 = [1\ 4\ 2\ 3\ 5]$, $\sigma s_3 s_4 s_1 s_2 = [1\ 2\ 4\ 3\ 5]$, $\sigma s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 = [1\ 2\ 3\ 4\ 5] = \mathrm{id}$. 従って

$$\sigma = (s_3 s_4 s_1 s_2 s_3)^{-1} = s_3 s_2 s_1 s_4 s_3.$$

これは以下のような組み合わせを実現するあみだくじの作成と対応している (図 (a)).

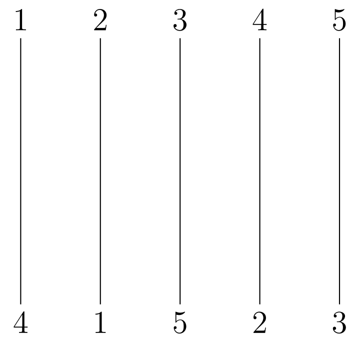


図 (a)

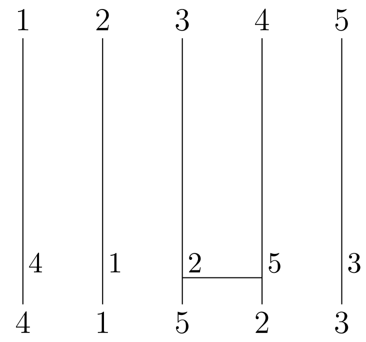


図 (b)

これを完成するには, 一番下の $\sigma = [4\ 1\ 5\ 2\ 3]$ をみて, 左の数字が右隣より大きくなっている 3 列目と 4 列目 $(5 > 2)$ にあみだくじの横棒 (隣接互換 s_3 に相当) を渡し, 入れ換えの結果の置換 $\sigma s_3 = [4\ 1\ 2\ 5\ 3]$ を横棒の少し上に書く (図 (b)). そしてまた, 左の数字が右隣より大きくなっている箇所を探し, 同様に続け, $\mathrm{id} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]$ が得られて, 左の数字が右隣より大きい箇所がなくなるまで続けると図 (c) のようになる. こうして作ったあみだくじが求めるものであることは明らかだろう.

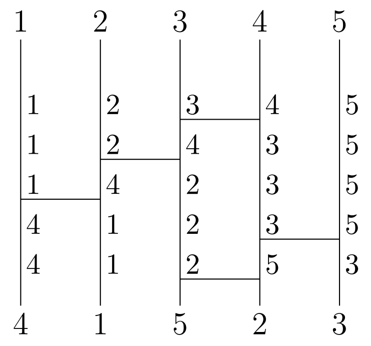


図 (c)

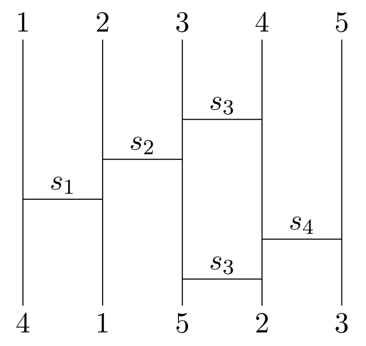


図 (d)

得られた結果を図 (d) のように書くと, σ は横棒を下から順に掛けて得られる $s_3 s_2 s_1 s_4 s_3$ であることがわかる (だからあみだくじ自体は σ^{-1} を引き起こしている).

(13.12) $\sigma \in S_n$ に対して, $\operatorname{sgn}\sigma := (-1)^{\ell(\sigma)}$ と定義し, $\operatorname{sgn}\sigma$ を σ の**符号 (signature)** という. 定義から, 偶置換の符号は 1 であり, 奇置換の符号は -1 である.

13.13 命題. $\sigma, \tau \in S_n$ に対して, $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$ である.

証明. $u = \ell(\sigma)$, $v = \ell(\tau)$ とおく. 定理 13.9, **(1)** により,

$$\sigma = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_u}, \quad \tau = s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_v}$$

と書くと,

$$\sigma\tau = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_u}s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_v}$$

と隣接互換 $u+v$ 個の積で書けるので, 定理 13.9, **(2)** により, $u+v = \ell(\sigma\tau) + 2r$, r は非負整数と書ける. 従って,

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{\ell(\sigma\tau)} = (-1)^{u+v-2r} = (-1)^u(-1)^v = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).$$

□

(13.14) S_n の偶置換全体を A_n で表す.

13.15 補題. σ_0 は奇置換とする. $\Phi : A_n \to S_n \setminus A_n$ を $\Phi(\sigma) = \sigma\sigma_0$ で, $\Psi : S_n \setminus A_n \to A_n$ を $\Psi(\tau) = \tau\sigma_0^{-1}$ で定義すると互いに逆であり, A_n と $S_n \setminus A_n$ は $1:1$ に対応する. 特に $n \geq 2$ のとき, $\#A_n = n!/2$ である.

証明. Φ, Ψ がそれぞれ定義されていることは, 命題 13.13 から明白であり, 互いに逆であることは定義から従う. 最後の主張を示す. $\sigma_0 = s_1$ とおけば, 前半の主張から $\#A_n = \#(S_n \setminus A_n)$ が得られ, 足して $\#S_n = n!$ になるのだから, $\#A_n$ はその半分の $n!/2$ である. □

13.16 例. $\#S_3 = 3! = 6$ で, $\#A_n = 6/2 = 3$ である. $\mathrm{id} = [1\ 2\ 3]$, $s_2s_1 = [3\ 1\ 2]$, $s_1s_2 = [2\ 3\ 1]$ が偶置換の全部である. これらに $\sigma_0 = s_1$ を右から掛けて, $s_1 = [2\ 1\ 3]$, $s_2 = [1\ 3\ 2]$, $s_1s_2s_1 = [3\ 2\ 1]$ が奇置換の全部である.

13.17 演習. 次を証明せよ.

(1) (i,j) 互換 s_{ij} は転倒数が $2|j-i|-1$ である. 特に, 互換は奇置換である.

(2) 互換偶数個の積は偶置換, 奇数個の積は奇置換である.

(3) 長さ r の巡回置換は r が偶数の時奇置換で, 奇数の時偶置換である.

13.18 演習. $\sigma \in S_n$ のとき, $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$ である.

14　行列式の定義と交代性

14.1 定義. $A=(a_{ij})\in M_n(K)$ に対して,

(14.1.1) $$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{\sigma 1\,1}a_{\sigma 2\,2}\cdots a_{\sigma n\,n}\in K$$

と定め, $\det A$ を A の**行列式 (determinant)** と呼ぶ. $\det A$ は $|A|$, $|a_{ij}|$ または

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などとも表される.

(14.2)　n が小さいときに $\det A$ がどのようなものかを見てみよう.
　$n=1$ のとき, $S_1=\{\mathrm{id}\}$ なので $\det(a)=a$. $n=2$ のとき, $S_2=\{\mathrm{id},[1\ 2]\}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

について, $\det A$ を定義する (14.1.1) の右辺の和の σ が id である項は $a_{11}a_{22}$. σ が $[1\ 2]$ である項は $-a_{21}a_{12}$ である. 従って $\det A=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. もちろん

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の場合は $\det A=ad-bc$ である.

(14.3)　$n=3$ のとき,

$$S_3=\{\mathrm{id},s_2s_1,s_1s_2,s_1,s_2,s_1s_2s_1\}=\{[1\ 2\ 3],[3\ 1\ 2],[2\ 3\ 1],[2\ 1\ 3],[1\ 3\ 2],[3\ 2\ 1]\},$$

ただしはじめの 3 つの元が偶置換, 残りの 3 つが奇置換である. 従って

$$\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

この和のはじめの 3 項は行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の一行目に位置する成分からはじめて, 右下方向に成分を掛けていったものになっている. ただし, 右側に突き抜けたら左端から続けるものとする (a_{11} からはじめた項が $a_{11}a_{22}a_{33}$, a_{12} からはじめた項は a_{12}, a_{23}, (右に突き抜け左から続け) a_{31} と掛けて $a_{12}a_{23}a_{31}$ で, a_{13} からはじめた項は同様に $a_{13}a_{21}a_{32}$ である. 残りの係数 -1 の 3 項は一行目の成分からはじめて, 左下方向に成分を掛けていったものの -1 倍である. これを**サラスの規則 (rule of Sarrus)** という.

(14.4) $n = 4$ だと $n! = 24$ なので, (14.1.1) の右辺の和の項数は 24 である. サラスの規則はもはや当てはまらない. 定義から直接行列式を求めるのは一般にはたいへんで, 後で述べるような計算方法を使うことが必要になってくる.

14.5 補題. $A = (a_{ij})$ が n 次正方行列の時,

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\,\sigma 1}a_{2\,\sigma 2}\cdots a_{n\,\sigma n} = \det {}^tA.$$

証明. 定義によって

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma 1\,1}a_{\sigma 2\,2}\cdots a_{\sigma n\,n}$$

であるが, 右辺の和の項に現れる積 $a_{\sigma 1\,1}a_{\sigma 2\,2}\cdots a_{\sigma n\,n}$ の順序を変え, 2 重添字の第一の添字が $1, 2, \ldots, n$ の順になるように並べ換えると, j 番目は $j = \sigma(\sigma^{-1}j)$ なので $a_{j\,\sigma^{-1}j}$ が来る. つまり, この積は $a_{1\,\sigma^{-1}1}a_{2\,\sigma^{-1}2}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}n}$ と一致する. 演習 13.18 によって $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$ であるので,

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma^{-1}) a_{1\,\sigma^{-1}1}a_{2\,\sigma^{-1}2}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}n}.$$

σ が S_n 全体をわたれば, σ^{-1} も S_n 全体を渡るので, 求める第一の等号を得る. 第二の等号は ${}^tA$ の定義と $\det A$ の定義から明らかである. □

14.6 補題. A のどれかの列が零ベクトルならば $\det A = 0$. また, A のどれかの行が零ベクトルならば $\det A = 0$.

証明. 前半は定義から容易である. 後半は補題 14.5 から従う. □

14.7 補題. 上半三角行列 $A = (a_{ij})$ に対して, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ である. 下半三角行列についてもまったく同じ式が成立する.

証明. 前半. $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma 1\,1} a_{\sigma 2\,2} \cdots a_{\sigma n\,n}$ の右辺の和で 0 にならない項を考えると, $\sigma j \leq j$ $(1 \leq j \leq n)$ が成立するので, $\sigma = \mathrm{id}$ でなければならず, 求める結果を得る. 後半は前半と補題 14.5 から明白である. $\square$

14.8 補題. n 個の n 次元数ベクトルの組に K の元を対応させる写像として, det は次の性質を持つ.

(1) (多重線型性) 各 j に対して, $\boldsymbol{a}_j = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$ であるとき,

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) + \mu \det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n). \end{aligned}$$

(2) 各 $1 \leq i < j \leq n$ に対して, $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}$ であるとき,

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a} \ \cdots \ \boldsymbol{a} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) = 0.$$

(3) (正規性) $\det(\boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n) = 1$, ただし $\boldsymbol{e}_i$ は第 i 単位ベクトル.

証明. $(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij})$ (つまり $\boldsymbol{a}_j = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$) とおく.

(1). $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$ とおくとき, $a_{ij} = \lambda a_i + \mu b_i$ なので,

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma 1\,1} \cdots (\lambda a_{\sigma j} + \mu b_{\sigma j}) \cdots a_{\sigma n\,n} \\ = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma 1\,1} \cdots a_{\sigma j} \cdots a_{\sigma n\,n} &+ \mu \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma 1\,1} \cdots b_{\sigma j} \cdots a_{\sigma n\,n} \\ &= \lambda \det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) + \mu \det(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n). \end{aligned}$$

(2). $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$ とおく. s を (i, j) 互換 $s_{ij} = (i\ j)$ とする. σ が偶置換全体 A_n を渡るとき, σs は奇置換全体を渡るのだった (補題 13.15 参照). よって

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a}_n) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in A_n} (a_{\sigma 1\,1} \cdots a_{\sigma i} \cdots a_{\sigma j} \cdots a_{\sigma n\,n} - a_{\sigma s 1\,1} \cdots a_{\sigma s i} \cdots a_{\sigma s j} \cdots a_{\sigma s n\,n}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in A_n} (a_{\sigma 1\,1} \cdots a_{\sigma i} \cdots a_{\sigma j} \cdots a_{\sigma n\,n} - a_{\sigma 1\,1} \cdots a_{\sigma j} \cdots a_{\sigma i} \cdots a_{\sigma n\,n}) = 0. \end{aligned}$$

(3) は $\det E_n = 1$ を主張していて, 補題 14.7 から明らかである. $\square$

15　交代形式と小行列式

(15.1)　写像 $f : M_{n,r}(K) \to K$ が**交代形式 (alternating form)** であるとは,

(1) $f(\boldsymbol{a}_1 \cdots (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) \cdots \boldsymbol{a}_r) = \lambda f(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a}_r) + \mu f(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{b} \cdots \boldsymbol{a}_r)$;

(2) $f(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a}_r) = 0$

の 2 条件が成立することをいう．さらに $n = r$ の場合に, $f(E_n) = 1$ であるとき, f は正規化されているという．この約束のもとで, 補題 14.8 は $\det : M_n(K) \to K$ が正規化された交代形式である, と言い表される.

15.2 補題. $f : M_{n,r}(K) \to K$ が交代形式のとき, 列を互換で入れ換えると f の値は -1 倍される. すなわち,

$$f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r) = -f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r).$$

証明.

$$\begin{aligned} 0 &= f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ \cdots\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r) \\ &= f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r) + f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r) \end{aligned}$$

から明白である. □

15.3 系. $f : M_{n,r}(K) \to K$ が交代形式のとき, $\sigma \in S_r$ について,

$$f(\boldsymbol{a}_{\sigma 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\sigma r}) = (\operatorname{sgn}\sigma) f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r).$$

特に,

$$\det(\boldsymbol{a}_{\sigma 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\sigma n}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n).$$

証明. $\ell(\sigma)$ についての帰納法. $\ell(\sigma) = 0$ のときは自明である. $\ell(\sigma) > 0$ のときは, $\ell(\sigma s_i) = \ell(\sigma) - 1$ である $1 \le i < n$ をとり, 補題 15.2 を適用して,

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{a}_{\sigma 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\sigma r}) = f(\boldsymbol{a}_{\sigma s_i s_i 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\sigma s_i s_i r}) \\ &= -f(\boldsymbol{a}_{\sigma s_i 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\sigma s_i r}) = -(\operatorname{sgn}(\sigma s_i)) f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r) = (\operatorname{sgn}\sigma) f(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r). \end{aligned}$$

□

15.4 例. $n \ge 1$, $\sigma \in S_n$ に対して,

$$E(\sigma) = (\boldsymbol{e}_{\sigma 1}\ \boldsymbol{e}_{\sigma 2}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{\sigma n}) = (\delta_{i\sigma j})$$

(δ はクロネッカーのデルタ) を符号行列と呼ぶ. $E(\sigma)\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_{\sigma j}$ なので, $E(\tau)E(\sigma) = E(\tau\sigma)$ ($\tau, \sigma \in S_n$) である. 系 15.3 により,

$$\det E(\sigma) = (\operatorname{sgn}\sigma)\det E_n = \operatorname{sgn}\sigma.$$

(15.5) (m,n) 行列 A に対して, A からいくつかの行を (とびとびでも良い) 選び, 同じ数のいくつかの列を選び, その行と列だけを抜き出して作った正方行列を A の**小行列 (minor matrix)** という. 小行列の行列式は**小行列式 (minor)** という. t 次正方行列であるような小行列の行列式を t **次小行列式** (t**-minor**) と呼ぶ. $i_1,\dots,i_t$ 行および, $j_1,\dots,j_t$ 列を抜き出した小行列を $A\langle i_1,\dots,i_t;j_1,\dots,j_t\rangle$ で, その行列式 $|A\langle i_1,\dots,i_t;j_1,\dots,j_t\rangle|$ を $[i_1,\dots,i_t;j_1,\dots,j_t]_A$ で表すことにする.

(15.6)

15.7 例.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{pmatrix}$$

に対して,

$$A\langle 1,4;3,5\rangle=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{15}\\ a_{43} & a_{45}\end{pmatrix},\qquad [1,4;3,5]_A=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{15}\\ a_{43} & a_{45}\end{vmatrix}$$

であり, これらはそれぞれ A の 2 次の小行列, 小行列式である.

15.8 定理. $f: M_{n,r}(K)\to K$ が交代形式のとき, $A\in M_{n,r}(K)$ に対して,

$$f(A)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_r})[i_1,\dots,i_r;1,\dots,r]_A$$

が成立する. 特に $r>n$ のとき, $f(A)=0$ である.

証明. $A=(a_{ij})$ のとき,

$$\begin{aligned} f(A)&=f(\sum_{j_1=1}^n a_{j_1\,1}\boldsymbol{e}_{j_1}\ \sum_{j_2=1}^n a_{j_2\,2}\boldsymbol{e}_{j_2}\ \cdots\ \sum_{j_r=1}^n a_{j_r\,r}\boldsymbol{e}_{j_r})\\ &=\sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n\cdots\sum_{j_r=1}^n a_{j_1\,1}a_{j_2\,2}\cdots a_{j_r\,r} f(\boldsymbol{e}_{j_1}\ \boldsymbol{e}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{j_r}).\end{aligned}$$

ここで, 交代性によって, $j_1,\dots,j_n$ に重複があるときは

$$f(\boldsymbol{e}_{j_1}\ \boldsymbol{e}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{j_r})=0$$

となり, $j_1, \ldots, j_r$ に重複がない列は, 一意的な単調増加列 $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ および $\sigma \in S_r$ によって $i_{\sigma 1}, \ldots, i_{\sigma r}$ と書ける列であることを用いると, 系 15.3 により,

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r} f(\boldsymbol{e}_{i_{\sigma 1}} \ \cdots \ \boldsymbol{e}_{i_{\sigma r}}) a_{i_{\sigma 1} 1} \cdots a_{i_{\sigma r} r} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma) f(\boldsymbol{e}_{i_1} \ \cdots \ \boldsymbol{e}_{i_r}) a_{i_{\sigma 1} 1} \cdots a_{i_{\sigma r} r} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} f(\boldsymbol{e}_{i_1} \ \cdots \ \boldsymbol{e}_{i_r}) [i_1, \ldots, i_r; 1, \ldots, r]_A.
\end{aligned}
$$

□

15.9 系. $f : M_n(K) \to K$ が交代形式のとき, $A \in M_n(K)$ に対して,

$$f(A) = f(E_n)(\det A)$$

が成立する. 特に f が正規化されている (つまり $f(E_n) = 1$) のとき, $f = \det$ である.

証明. 定理 15.8 において, $r = n$ の場合を考えると, $1 \le i_1 < \cdots < i_n \le n$ なる整数列は $1 < 2 < \cdots < n$ しかなく, 定理を適用して主張を得る. □

15.10 例. $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が正の向き (負の向き) であるとは, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は同一直線上になく, 原点から $\boldsymbol{a}$ の側を見たときに, $\boldsymbol{b}$ が原点と $\boldsymbol{a}$ を通る直線よりも左手 (右手) にあることをいう. これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を途中で同一直線上に並ぶことなく連続的に変形して $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ ($\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2$) に重ねることができることと同値である. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ として, $D : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$
D(\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b}) = \begin{cases} S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が正の向き}) \\ 0 & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が同一直線上にある} \\ -S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が負の向き}) \end{cases}
$$

で定めると, 幾何的考察により, D が正規化された交代形式であることが分かる. よって $D = \det$ である. 特に $|\det(\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b})| = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ であり, $\det(\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b})$ が正, 0, 負であるのに応じて, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は正の向き, 同一直線上, 負の向きとなる.

15.11 例. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が正の向き (負の向き), あるいは右手系 (左手系) であるとは, これらが同一平面上になく, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を途中で同一平面上に並ぶことなく連続的に変形して $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3$) に重ねることができ

ることと同値である．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積を $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ として, $D : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$D(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = \begin{cases} V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ が正の向き}) \\ 0 & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ が同一平面上にある}) \\ -V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ が負の向き}) \end{cases}$$

で定めると, 幾何的考察により, D が正規化された交代形式であることが分かる．よって $D = \det$ である．特に $|\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})| = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ であり, $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ が正, 0, 負であるのに応じて, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は正の向き, 同一平面上にある, 負の向きとなる．

15.12 命題. r, n が自然数の時, $A \in M_{r,n}(K)$ と $B \in M_{n,r}(K)$ について,

$$\det(AB) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} [1, \ldots, r; i_1, \ldots, i_r]_A \cdot [i_1, \ldots, i_r; 1, \ldots, r]_B.$$

特に $r > n$ ならば $\det(AB) = 0$.

証明．A を固定する時, $f(B) = \det(AB)$ とおくと, $f : M_{n,r}(K) \to K$ は写像である．f が交代的であることを示そう．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b})\ \cdots\ \boldsymbol{b}_r) &= \det(A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ A(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b})\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_r) \\ &= \det(A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ (\lambda A\boldsymbol{a} + \mu A\boldsymbol{b})\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_r) \\ &= \lambda \det(A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{a}\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_r) + \mu \det(A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{b}\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_r) \\ &= \lambda f(\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}; \cdots\ \boldsymbol{b}_r) + \mu f(\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{b}\ \cdots\ \boldsymbol{b}_r) \end{aligned}$$

で多重線型性が示された．また,

$$f(\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{a}\ \cdots\ \boldsymbol{b}_r) = \det(A\boldsymbol{b}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{a}\ \cdots\ A\boldsymbol{a}\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_r)$$

で, 同じ列が 2 つあるのでこれは 0 である．以上によって f は交代形式である．各単調増加列 $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ に対して,

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_r}) = \det(A(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_r})) = \det(A\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ A\boldsymbol{e}_{i_r}) = [1, \ldots, r; i_1, \ldots, i_r]_A$$

であるので, 定理 15.8 によって,

$$\begin{aligned} \det(AB) = f(B) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_r})[i_1, \ldots, i_r; 1, \ldots, r]_B \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} [1, \ldots, r\ i_1, \ldots, i_r]_A \cdot [i_1, \ldots, i_r; 1, \ldots, r]_B. \end{aligned}$$

□

15.13 系. $A, B \in M_n(K)$ のとき, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

証明. 命題 15.12 において $r = n$ の場合を考えると, $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ である列は $1 < \cdots < n$ しかなく, 求める結果を得る. □

15.14 演習. 奇数次の交代行列の行列式は 0 であることを証明せよ.

16 ラプラス展開

(16.1) m または n が 0 のとき, (m,n) 行列はただ一つだけ存在する (それは括弧だけ存在して成分を持たない行列である) $(0,0)$ 行列の行列式は 1 であると規約する. 0 次対称群は (空集合 $[0]=\emptyset$ の) 恒等写像のみからなると規約する.

(16.2) n が非負整数, $0 \le r \le n$ のときに,

$$S^{r,n-r} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma 1 < \cdots < \sigma r,\ \sigma(r+1) < \cdots < \sigma n\}$$

とおく.

16.3 定理 (列によるラプラス展開)**.** $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$ で $0 \le r \le n$, $\lambda \in S^{r,n-r}$ のとき,

$$(16.3.1)\quad |A| = \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\lambda)(\operatorname{sgn}\tau)[\tau 1,\ldots,\tau r;\lambda 1,\ldots,\lambda r]_A \cdot [\tau(r+1),\ldots,\tau n;\lambda(r+1),\ldots,\lambda n]_A$$

が成立する.

証明. $B=(\boldsymbol{a}_{\lambda 1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{\lambda n})$ とおくと, $|B|=(\operatorname{sgn}\lambda)|A|$ であるので, A を B で置き換えることによって, はじめから $\lambda=\mathrm{id}$ であると仮定して良い.

$A=(C|D)$ と $(n;r,n-r)$ 型に区分して考える. $\tau \in S^{r,n-r}$ を固定し, まず $C=(\boldsymbol{e}_{\tau 1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{\tau r})$ の場合を考える. このとき, $f(D)=\det(C|D)=|A|$ とおくと, 明らかに $f: M_{n,n-r}(K)\to K$ は交代形式である. $1 \le i_1 < \cdots < i_{n-r} \le n$ について,

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_{n-r}}) = |\boldsymbol{e}_{\tau 1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{\tau r}\ \boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_{n-r}}|.$$

これは $(i_1,\ldots,i_{n-r})=(\tau(r+1),\ldots,\tau n)$ のときのみ繰り返しが起こらず符号行列になるから $\operatorname{sgn}\tau$ であり, それ以外の場合は 0 である. よって, 定理 15.8 によって,

$$\begin{aligned}|A| = f(D) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-r}} f(\boldsymbol{e}_{i_1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{i_{n-r}})[i_1,\ldots,i_{n-r}\ 1,\ldots,n-r]_D \\ &= (\operatorname{sgn}\tau)[\tau(r+1),\ldots,\tau n; r+1,\ldots,n]_A\end{aligned}$$

を得た.

次に一般の $A=(C|D)$ を考える. D を固定して考え, $g(C)=\det(C|D)=|A|$ によって, $M_{n,r}(K) \to K$ を考えるとやはり明らかに交代形式である. $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ なる列は一意的な $\tau \in S^{r,n-r}$ によって $(i_1,\ldots,i_r)=(\tau 1,\ldots,\tau r)$ と表され, このとき上の結果により,

$$g(\boldsymbol{e}_{\tau 1}\ \cdots\ \boldsymbol{e}_{\tau r}) = (\operatorname{sgn}\tau)[\tau(r+1),\ldots,\tau n; r+1,\ldots,n]_A$$

と分かる. 従って定理 15.8 により,

$$\begin{aligned}
|A| &= g(C) \\
&= \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\tau)[\tau(r+1),\ldots,\tau n; r+1,\ldots,n]_A[\tau 1,\ldots,\tau r; 1,\ldots,r]_C \\
&\quad \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\tau)[\tau 1,\ldots,\tau r; 1,\ldots,r]_A \cdot [\tau(r+1),\ldots,\tau n; r+1,\ldots,n]_A.
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった. □

16.4 系 (行によるラプラス展開 (Laplace expansion))**.** n が自然数, $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$ で $0 \leq r \leq n$ で $\lambda \in S^{r,n-r}$ のとき,

$$\begin{aligned}
|A| = \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\lambda)(\operatorname{sgn}\tau)[\lambda 1,\ldots,\lambda r; \tau 1,\ldots,\tau r]_A \cdot& \\
[\lambda(r+1),\ldots,\lambda n; \tau(r+1),\ldots,\tau n]_A&
\end{aligned}$$

が成立する.

証明. 定理 16.3 により,

$$\begin{aligned}
|A| = |{}^tA| &= \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\lambda)(\operatorname{sgn}\tau)[\tau 1,\ldots,\tau r; \lambda 1,\ldots,\lambda r]_{{}^tA} \cdot \\
&\qquad [\tau(r+1),\ldots,\tau n; \lambda(r+1),\ldots,\lambda n]_{{}^tA} \\
&= \sum_{\tau \in S^{r,n-r}} (\operatorname{sgn}\lambda)(\operatorname{sgn}\tau)[\lambda 1,\ldots,\lambda r; \tau 1,\ldots,\tau r]_A \cdot \\
&\qquad\qquad [\lambda(r+1),\ldots,\lambda n; \tau(r+1),\ldots,\tau n]_A.
\end{aligned}$$

□

16.5 系. $1 \leq r < n$ は自然数とする. $A \in M_n(K)$ が

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

と $(r, n-r; r, n-r)$ 型に区分けされている時,

$$|A| = |B||D|$$

である.

証明. 定理 16.3 において, $\lambda = \mathrm{id}$ の場合を考える. 補題 14.6 により, (16.3.1) において, 右辺の和の項で 0 にならないのは $\tau = \mathrm{id}$ に対してだけであり,

$$|A| = [1, \ldots, r; 1, \ldots, r]_A [r+1, \ldots, n; r+1, \ldots, n]_A = |B||D|$$

を得る. □

16.6 演習. $1 \leq r < n$ は自然数とする. $A \in M_n(K)$ が

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

と $(r, n-r; r, n-r)$ 型に区分けされている時,

$$|A| = |B||D|$$

であることを示せ.

(16.7) 正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ に対して, A から第 i 行と第 j 列を抜いて得られる $n-1$ 次の小行列 $A\langle 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, n; 1, \ldots, \hat{j}, \ldots, n \rangle$ (ただし, $\hat{}$ は抜くことを表す) を A_{ij} で表す. その小行列式の $(-1)^{i+j}$ 倍 $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を Δ_{ij} または $\Delta_{ij}(A)$ で表し, A の (i,j) **余因子 (cofactor)** と呼ぶ.

(16.8) 定理 16.3, 系 16.4 において, $r = 1$ である場合を考える. 巡回置換

$$(i\ i-1\ \cdots\ 2\ 1) = [i\ 1\ 2\ \cdots\ \hat{i}\ \cdots\ n]$$

を τ_i で表すことにすると, $\operatorname{sgn} \tau_i = (-1)^{i-1}$ で,

$$S^{1,n-1} = \{\mathrm{id}, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n\}$$

である.

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn} \tau_i \operatorname{sgn} \tau_j [\tau_i 2\ \cdots\ \tau_i n; \tau_j 2\ \cdots\ \tau_j n]_A \\ &\qquad = (-1)^{i+j} [1\ \cdots\ \hat{i}\ \cdots\ n; 1\ \cdots\ \hat{j}\ \cdots\ n]_A = \Delta_{ij}(A) \end{aligned}$$

に注意すると次を得る.

16.9 系 (第 j 列による余因子展開)**.** $n \geq 1$, $A \in M_n(K)$, $1 \leq j \leq n$ とする. このとき,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

□

16.10 系 (第 i 行による余因子展開)**.** $n \geq 1$, $A \in M_n(K)$, $1 \leq i \leq n$ とする. このとき,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

□

16.11 例. 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

について, その行列式を $r = 2$, $\lambda = \mathrm{id}$ として行によりラプラス展開しよう. $S^{2,2}$ の元は

$$[1\ 2\ 3\ 4], [1\ 3\ 2\ 4], [1\ 4\ 2\ 3], [2\ 3\ 1\ 4], [2\ 4\ 1\ 3], [3\ 4\ 1\ 2]$$

で, その符号は順に 1, -1, 1, 1, -1, 1 であるから,

$$\begin{aligned} |A| &= [1,2;1,2]_A \cdot [3,4;3,4]_A - [1,2;1,3]_A \cdot [3,4;2,4]_A + [1,2;1,4]_A \cdot [3,4;2,3]_A \\ &+ [1,2;2,3]_A \cdot [3,4;1,4]_A - [1,2;2,4]_A \cdot [3,4;1,3]_A + [1,2;3,4]_A \cdot [3,4;1,2]_A \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる. 同じ行列式を 2 列目で余因子展開すると,

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32} + a_{42}\Delta_{42} \\
&= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

である.

17 余因子展開の応用

(17.1) $A \in M_n(K)$ に対して,

$$ {}^t(\Delta_{ij}(A)) = (\Delta_{ji}(A)) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K) $$

を A の**余因子行列 (cofactor matrix)** と呼び, $\tilde{A}$ で表すことにする.

17.2 演習. $\widetilde{{}^tA} = {}^t\tilde{A}$ を示せ.

17.3 定理. $A \in M_n(K)$ に対して,

$$ A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n. $$

証明. まず $\tilde{A}A = (\det A)E_n$ を示す. これを成分で表すと $1 \leq i, j \leq n$ について,

$$ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ki} = \begin{cases} \det A & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} $$

である. $i = j$ の場合にこれが正しいことは系 16.9 による. $i \neq j$ の場合を考える. $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ とするとき, A の第 i 列を $\boldsymbol{a}_j$ に置き換えた行列 $(\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_j \ \cdots \ \boldsymbol{a}_j \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ を B とする. $|B| = 0$ を第 i 列によって余因子展開すると, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{ki} = 0$ を得る.

次に, $A\tilde{A} = (\det A)E_n$ を示す. すでに示された $\tilde{A}A = (\det A)E_n$ の式を行列 ${}^tA$ に用いて,

$$ A\tilde{A} = {}^{tt}(A\tilde{A}) = {}^t({}^t\tilde{A}{}^tA) = {}^t(\widetilde{{}^tA}{}^tA) = {}^t((\det {}^tA)E_n) = (\det A)E_n. $$

□

17.4 系. $A \in M_n(K)$ について, 次は同値である.

(1) $\det A \neq 0$.

(2) A は正則である.

これらの条件が成立する時, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$.

証明. **(1)⇒(2)**. $B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ とおく. $\tilde{A}A = A\tilde{A} = (\det A)E_n$ の各辺を $\det A$ で割って, $BA = AB = E_n$ を得て, **(2)** と最後の主張 $A^{-1} = B$ を得る.

(2)⇒(1). $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$ であるから, $\det A \neq 0$ である. □

17.5 演習. $A \in M_n(K)$ で $\det A = a$ だとすると, $\det \tilde{A} = a^{n-1}$ であることを証明せよ. ヒント：まず $a \neq 0$ の場合を考えよ.

17.6 演習. $A \in M_n(\mathbb{Z})$ に対して, A が整数係数の逆行列を持つ必要十分条件は $\det A = \pm 1$ であることを証明せよ.

17.7 補題. 基本行列の行列式は以下の通りである.

$$\det(P_n(i;c)) = c, \qquad \det(P_n(i,j)) = -1, \qquad \det(P_n(i,j;c)) = 1.$$

証明. $P_n(i;c)$ と $P_n(i,j;c)$ に関しては 3 角行列だから明らかだろう. $P_n(i,j)$ は E_n の i 列目と j 列目を入れ換えたものなので, 系 15.3 から

$$\det P_n(i,j) = \operatorname{sgn} s_{ij} \det E_n = -1.$$

□

(17.8) 基本行列 P について, $\det(PA) = (\det P)(\det A) = \det(AP)$ なので, P を左から掛ける行基本変形および右から掛ける列基本変形で行列式は $\det P$ 倍される. つまり, 補題 17.7 によれば, $R_i \times c$ および $C_i \times c$ は行列式を c 倍し, $R_i \leftrightarrow R_j$ および $C_i \leftrightarrow C_j$ は行列式を -1 倍し, $R_i \leftarrow cR_j$ および $C_j \leftarrow cC_i$ は行列式を変えない. このことを用いると行列式を基本変形によって計算できる. 行基本変形だけでなく, 列基本変形も使えることに注意しよう.

17.9 例. 行列式

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

を求めよう.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= (-2) \begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_3 \times (-1/2)) \\
&= (-2) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_1 \leftarrow (-2)C_4 \\ C_2 \leftarrow C_3 \end{pmatrix} \\
&= (-2) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 4 行で余因子展開}) \\
&= (-6) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (R_3 \times (1/3)) \\
&(-6) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (R_2 \leftarrow (-1)R_3) \\
&= (-6) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 列で余因子展開}) \\
&= (-6)(6 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = -42 \qquad (\text{定義に従って計算}).
\end{aligned}
$$

17.10 例. 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して,

$$
\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

を**ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant)** と呼ぶ.

$$
\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)
$$

であることを証明しよう.

n についての数学的帰納法による. $n = 1$ のときは空な積であり, 1 と理解されるので, 正しい. $n \geq 2$ とし, n が小さい時には正しいものとしよう. まず与えられた

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

に $R_n \leftarrow (-x_1)R_{n-1}$, $R_{n-1} \leftarrow (-x_1)R_{n-2}$, $\ldots$, $R_2 \leftarrow (-x_1)R_1$ をこの順で作用させて, 値を変えずに

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_n^2 - x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_n^2 - x_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

となる. この行列式は第 j 列目が $x_{j+1} - x_1$ で割れるので, それらをくくって,

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

となる. これは数学的帰納法の仮定によって,

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$$

と一致するので, 求める主張を得る.

17.11 演習. 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(17.12) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で, 係数行列 A が n 次正則行列の場合を考える. このとき, この方程式は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と一意的に解けるわけだが, この解の各成分を行列式を使って表す方法がある. $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトルを並べた形で書くと,

$$x_j = \sum_i A^{-1}[j,i]b_i = \frac{1}{\det A}\sum_i b_i\Delta_{ij} = \frac{|\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \boldsymbol{b} \ \cdots \boldsymbol{a}_n|}{|A|},$$

ただし, j 列目の $\boldsymbol{a}_j$ が $\boldsymbol{b}$ で置き換わる. 最後の等式は右辺の分子の行列式を j 列目で余因子展開すればわかる. 以上により, 次を得る.

17.13 定理 (クラメールの解法)**.** A が n 次正則行列, $\boldsymbol{b}$ が n 次元列ベクトルとするとき, 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただひとつの解をもち, その第 j 成分は

$$\frac{|B_j|}{|A|}$$

である. ここに, B_j は A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた n 次正方行列である.

17.14 演習. 連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & -2y & +5z & = & -1 \\ -2x & +y & -3z & = & 5 \\ x & +3y & +2z & = & 3 \end{array}\right.$$

をクラメールの方法で解け.

(17.15) クラメールの解法で連立方程式を解くには n 次正方行列の行列式を $n+1$ 回計算することになり, あまり実用向きではない.

18 小行列式と階数

18.1 補題. m, n, p は自然数とし, $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$ とする. このとき, $1 \leq r \leq \min(m,p)$ と $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$ と $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$ に対して

$$\begin{aligned}&[i_1,\ldots,i_r;j_1,\ldots,j_r]_{AB}\\ =&\sum_{\tau\in S^{r,n-r}}(\operatorname{sgn}\tau)[i_1,i_2,\ldots,i_r\ \tau1,\tau2,\ldots,\tau r]_A\cdot[\tau1,\tau2,\ldots,\tau r;j_1,j_2,\ldots,j_r]_B\end{aligned}$$

が成立する.

証明. C を A から $i_1,\ldots,i_r$ 行を抜き出した (r,n) 行列とし, D を B から $j_1,\ldots,j_r$ 列を抜き出した (n,r) 行列とすると, 命題 15.12 によって,

$$\begin{aligned}[i_1,\ldots,i_r;j_1,\ldots,j_r]_{AB} &= \det(CD)\\ &=\sum_{\tau\in S^{r,n-r}}(\operatorname{sgn}\tau)[1,\ldots,r;\tau1,\ldots,\tau r]_C\cdot[\tau1,\ldots,\tau r;1,\ldots,r]_D\\ &=\sum_{\tau\in S^{r,n-r}}(\operatorname{sgn}\tau)[i_1,\ldots,i_r;\tau1,\ldots,\tau r]_A\cdot[\tau1,\ldots,\tau r;j_11,\ldots,j_r]_B.\end{aligned}$$

□

(18.2) $A \in M_{m,n}(K)$ に対し, $\operatorname{rk} A$ を

$$\operatorname{rk} A = \max\{r \mid \text{ある } A \text{ の } r \text{ 次の小行列式で } 0 \text{ でないものが存在する}\}$$

で定義する. 0 次の小行列式は 1 でこれは 0 ではないので, $\operatorname{rk} A$ は 0 以上の整数である. $\min(m,n)$ を超えるサイズの A の小行列式は存在しないので, $\operatorname{rk} A \leq \min(m,n)$ である.

18.3 補題. A が (m,n) 行列, B が (n,p) 行列の時,

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B).$$

$n=p$ で B が正則なら $\operatorname{rk}(AB)=\operatorname{rk} A$. $m=n$ で A が正則なら $\operatorname{rk}(AB)=\operatorname{rk} B$.

証明. $r=\operatorname{rk}(AB)$ として, $[i_1,\ldots,i_r;j_1,\ldots,j_r]_{AB}\neq 0$ とすると, 補題 18.1 によって, A も B も少なくともひとつの 0 でない小行列式を持たなくてはならないから前半が従う. B が正則とすると, 前半により $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(ABB^{-1}) \leq \operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A$. A が正則とすると, 前半により $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk}(A^{-1}AB) \leq \operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} B$. □

18.4 定理. (m,n) 行列 A に対して, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rank} A$.

証明. $r = \operatorname{rank} A$ とおく. 定理 11.4 によって, ある m 次の正則行列 P と n 次の正則行列 Q が存在して, $PAQ = E_{m,n}(r)$ と標準形にすることができた. rk の定義から直ちに $\operatorname{rk} E_{m,n}(r) = r$ なので, 補題 18.3 により,

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(PAQ) = \operatorname{rk} E_{m,n}(r) = r = \operatorname{rank} A.$$

□

19　ベクトル空間と部分空間

(19.1)　K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする.

19.2 定義. V が K **ベクトル空間** **(vector space)** であるとは, V が集合で, V に和と呼ばれる 2 項算法 $+$ (つまり, $+ : V \times V \to V$ が写像であるということ. ただし, 算法の結果 $+(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と表す) と K 作用と呼ばれる写像 $\mu : K \times V \to V$ (ただし $(\alpha, \boldsymbol{v}) \in K \times V$ について, $\mu(\alpha, \boldsymbol{v})$ は av と書く) が与えられて次の 8 条件をみたすことをいう.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ に対して, $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$.

(3) $\alpha, \beta \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$ について, $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$.

(4) $\boldsymbol{v} \in V$ について, $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

(5) $\alpha, \beta \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$ について $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$.

(6) $\alpha \in K$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ について, $\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2$.

(7) ある $\boldsymbol{v}_0 \in V$ が存在して任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

(ここで **(7)** の $\boldsymbol{v}_0$ は一意的であることに注意する. 実際, $\boldsymbol{v}_0'$ も任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について $\boldsymbol{v}_0' + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ をみたす V の元と仮定すると,

$$\boldsymbol{v}_0' = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0' = \boldsymbol{v}_0' + \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0.$$

この一意的に存在する $\boldsymbol{v}_0$ を V の**零ベクトル** **(null vector)** と呼んで $\mathbf{0}_V$ または $\mathbf{0}$ で表すことにする).

(8) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, ある $\boldsymbol{x} \in V$ が存在して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$.

19.3 演習. 条件 **(8)** の $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}$ によって一意的に決まる.

(19.4)　条件 **(8)** の ($\boldsymbol{v}$ で一意的に決まる) $\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{v}$ で表し, $\boldsymbol{v}$ の**反元** **(opposite)** または**マイナス元** **(negation)** という. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して, $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}')$ を $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$ で表す. 定義により, $\boldsymbol{v} \in V$ について,

$$-\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

19.5 補題. 上記条件 **(1)–(7)** のもとで, 上記条件 **(8)** は次と同値である.

(8′) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について, $0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$.

これらのもとで, $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ である.

証明. **(8)**$\Rightarrow$ **(8′)**.

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{v} + 0 \cdot \boldsymbol{v} - 0 \cdot \boldsymbol{v} = (0+0) \cdot \boldsymbol{v} - 0 \cdot \boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{v} - 0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

(8′)$\Rightarrow$ **(8)**. $(-1)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{v} = ((-1)+1)\boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. 最後の主張とともに **(8)** が成り立った. □

19.6 補題. m, n が非負整数の時, $M_{m,n}(K)$ は行列の和とスカラー倍によって, K ベクトル空間である. 特に $K^n = M_{n,1}(K)$ は数ベクトルの和とスカラー倍によって K ベクトル空間である. 特に $K^1 = K$ は K の和と, K の積によって K ベクトル空間である.

証明. 補題 4.13 と, $A \in M_{m,n}(K)$ に対して $A - A = O$ であることから明白である. □

(19.7) V が $\mathbb{C}$ ベクトル空間のとき, V は同じ和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ ベクトル空間にもなっている.

(19.8) ベクトル空間の例を増やすことを考える. V が K ベクトル空間で X が集合の時, X から V への写像の全体 $\mathrm{Map}(X, V)$ は $f, g \in \mathrm{Map}(X, V)$ に対して $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (右辺の和は V での和) と定義することによって $f + g \in \mathrm{Map}(X, V)$ を定め, $f \in \mathrm{Map}(X, V)$ と $\alpha \in K$ に対して $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$ (右辺のスカラー倍は V でのスカラー倍) と定義することによって αf を定めて $\mathrm{Map}(X, V)$ はベクトル空間になる (確かめよ). 零ベクトルは任意の $x \in X$ に対して $\phi(x) = \mathbf{0}_V$ として定義される ϕ であり, これを**零写像 (zero map)** といい, $\mathbf{0}$ で表す. さらに次の部分空間によって, ベクトル空間の例を増やすことができる.

19.9 定義. K ベクトル空間 V の部分集合 W が V の**部分空間 (subspace)** または K 部分空間であるとは, 次が成立することをいう.

(1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in W$ ならば $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in W$.

(2) $\boldsymbol{v} \in W$, $\alpha \in K$ ならば $\alpha\boldsymbol{v} \in W$.

(3) $\mathbf{0}_V \in W$.

19.10 演習. 上で **(1)**,**(2)** を仮定する時, **(3)** は次の条件と同値である.

(3′) $W \neq \emptyset$.

(19.11) W が V の部分空間のとき, W は V の和と V のスカラー倍を引き継いで, それ自身が K ベクトル空間になっている.

19.12 補題. V がベクトル空間のとき, V 自身と $\{\mathbf{0}_V\}$ は V の部分空間である. □

(19.13) 部分空間 $\{\mathbf{0}_V\}$ を単に $\mathbf{0}_V$ とか $\mathbf{0}$ などと表すこともある.

19.14 演習. V が K ベクトル空間, $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が V の K 部分空間の族であるとき, 交わり $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ は V の K 部分空間である. ただし, $\Lambda=\emptyset$ のときは便宜上この交わりは全体集合 V であるとみなす.

19.15 演習. $M_n(K)$ の部分集合として, n 次の上半 (下半) 三角行列全体を $\mathrm{UM}_n(K)$($\mathrm{LM}_n(K)$) で表す. 対角行列全体を $\mathrm{DM}_n(K)$ で表す. これらは $M_n(K)$ の部分空間であることを証明せよ.

19.16 演習. $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値の連続関数全体 $C^0(\mathbb{R})$ は $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.

(19.17) $V_1,\ldots,V_n$ が K ベクトル空間とするとき, 直積集合 $V_1\times\cdots\times V_n$ に演算を

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)+(\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_n)&=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{v}'_n)\\ \alpha(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)&=(\alpha\boldsymbol{v}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

で入れると K ベクトル空間になる. 零ベクトルは $(\mathbf{0},\ldots\mathbf{0})$ である. これを $V_1\oplus\cdots\oplus V_n$ で表して, $V_1,\ldots,V_n$ の外部直和, あるいは単に**直和 (direct sum)** と呼ぶ. $V_1=V_2=\cdots=V_n=V$ のとき, $V\oplus\cdots\oplus V$ を V_n と書く. 単に書き方だけの問題だが, $V_1\oplus\cdots\oplus V_n$ の元を横ベクトルでなく, 縦ベクトルで

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$$

のように書いたものは $(V_1\oplus\cdots\oplus V_n)'$ で表し, $(V\oplus\cdots\oplus V)'$ は V^n で表す.

(19.18) この定義によると $K^n=\{{}^t(a_1,\ldots,a_n)\mid a_i\in K\}$ となるが, これはもとの定義 $K^n=M_{n,1}=\{{}^t(a_1\ \cdots\ a_n)\mid a_i\in K\}$ と本質的に一致している. 一方, K_n は行ベクトル全体 $M_{1,n}$ と同一視する.

(19.19) $1 \leq i \leq n$ のとき, V_i を $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ の部分空間

$$\{(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{v}, \mathbf{0}, \ldots \mathbf{0}) \mid \boldsymbol{v} \in V_i\}$$

と同一視して (元 $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \boldsymbol{v}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ は $\boldsymbol{v}$ と同一視して), V_i を $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ の部分空間とみなす. すると, $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ の任意の元は一意的に $V_1, \ldots, V_n$ の元の和で書ける. 実際,

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n$$

である.

20　線型写像

(20.1)　線型写像はベクトル空間同士を関係づけるものとして極めて重要である. すでに学んだ K^n から K^m への線型写像を自然に一般化して次の定義を得る.

20.2 定義. V, W が K ベクトル空間とする. 写像 $f: V \to W$ が K 線型写像, あるいは**線型写像 (linear map)** であるとは, 次の 2 条件が成立することをいう.

(1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ のとき, $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')$.

(2) $\alpha \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$ のとき, $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$.

(20.3)　f が K 線型であれば, 任意の $n \geq 1$ と任意の $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ と $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ に対して

$$f(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

が成立する. 逆にこのことが $n = 2$ に対して成立すれば f は K 線型である.

20.4 例. V が K ベクトル空間で W がその K 部分空間であるとき, **包含写像 (inclusion map)** $i: W \to V$ を $i(w) = w$ で定義すると i は K 線型写像である. 特に, V が K ベクトル空間のとき, V の恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ は K 線型写像である.

20.5 補題. $f: V \to W$ が K 線型写像のとき, $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

証明. $f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \mathbf{0}_V) = 0 \cdot f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. □

20.6 例. V, W が K ベクトル空間のとき, V から W への零写像 $\mathbf{0}: V \to W$ は K 線型写像である. $W = \mathbf{0}$ のとき, V から W への写像は零写像しかない. また, $V = \mathbf{0}$ のとき, V から W への K 線型写像は補題 20.5 によって零写像しかない.

20.7 例. A が (m, n) 行列とするとき, $\Phi(A): K^n \to K^m$ を $\Phi(A)(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると $\Phi(A)$ は K 線型写像であり, K^n から K^m への線型写像はこのように書けるものしかないのだった (8 節参照).

20.8 例. $V_1, \ldots, V_n$ が K ベクトル空間のとき, $i_j : V_j \to V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ を $i_j(v) = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$ ($v \in V_j$, 右辺の v は j 番目) で定めると i_j は K 線型. また, $p_j : V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \to V_j$ を $p_j(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = v_j$ で定めるとこれも K 線型である.

20.9 補題. $f: V \to W$, $g: W \to U$ が K 線型写像とする. このとき, 合成写像 $g \circ f: V \to U$ は K 線型写像である.

証明. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') &= g(f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}')) = g(f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}')) \\ &= g(f(\boldsymbol{v})) + g(f(\boldsymbol{v}')) = (g \circ f)(\boldsymbol{v}) + (g \circ f)(\boldsymbol{v}').\end{aligned}$$

また, $\alpha \in K$ のとき,

$$(g \circ f)(\alpha \boldsymbol{v}) = g(f(\alpha \boldsymbol{v})) = g(\alpha f(\boldsymbol{v})) = \alpha(g(f(\boldsymbol{v}))) = \alpha(g \circ f)(\boldsymbol{v}).$$

□

(20.10) 線型写像 $f: V \to W$ が与えられると, 一方の部分空間から他方の部分空間を生じる.

20.11 補題. V, W が K ベクトル空間, $f: V \to W$ が K 線型写像とする. $V_1 \subset V$ は V の部分空間, $W_1 \subset W$ は W の部分空間とすると, 次が成立する.

(1) 像 $f(V_1)$ は W の K 部分空間である.

(2) 逆像 $f^{-1}(W_1)$ は V の K 部分空間である.

証明. **(1)**. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in f(V_1)$ とすると, $\boldsymbol{w}_1 = f(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_2)$ となる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_1$ が存在する. よって

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in f(V_1).$$

また, $\alpha \in K$ とすると,

$$\alpha \boldsymbol{w}_1 = \alpha f(\boldsymbol{v}_1) = f(\alpha \boldsymbol{v}_1) \in f(V_1).$$

また, $\mathbf{0}_V \in V_1$ であるから,

$$\mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V) \in f(V_1).$$

以上により, $f(V_1)$ は W の K 部分空間である.

(2). $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$, つまり, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2) \in W_1$ と仮定すると, W_1 は和で閉じているので $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) \in W_1$. これは $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(W_1)$ を示す. また, $\alpha \in K$ とすると, W_1 はスカラー倍でも閉じているので, $f(\alpha \boldsymbol{v}_1) = \alpha f(\boldsymbol{v}_1) \in W_1$. 従って $\alpha \boldsymbol{v}_1 \in f^{-1}(W_1)$. また, $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \in W_1$ なので, $\mathbf{0}_V \in f^{-1}(W_1)$. 以上により, $f^{-1}(W_1)$ は V の K 部分空間である. □

(20.12)　特に $\mathrm{Im}\, f = f(V)$ は W の部分空間である．また, $\mathbf{0}_W$ は W の部分空間なので, $f^{-1}(\mathbf{0}_W)$ は V の部分空間である．これを $\mathrm{Ker}\, f$ で表し, f の**核 (kernel)** という．

20.13 例. A が (m, n) 行列のとき, A を左から掛ける写像 $\Phi(A) : K^n \to K^m$ $(\Phi(A)(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ は K 線型写像であった．その核 $\mathrm{Ker}\, \Phi(A)$ は

$$\{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

であり, 斉次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の全体である．これが K^n の部分空間になることから, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の**解空間 (space of solutions)** という．

(20.14)　線型写像の核は次のように単射性と密接に関係している．

20.15 補題. V, W が K ベクトル空間で $f : V \to W$ が K 線型写像のとき, 次は同値である．

(1) f は単射である．

(2) $\mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}_V$.

証明．**(1)⇒(2)**．$\mathbf{0}_V \subset \mathrm{Ker}\, f$ は明白なので, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathbf{0}_V$ を示す．$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると, $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W = f(\mathbf{0}_V)$．$f$ は単射なので $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$．

(2)⇒(1)．$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}')$ とする．$f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}') = \mathbf{0}_W$ なので, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Ker}\, f = \mathbf{0}_V$．つまり $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$ がいえ, f は単射である．　□

(20.16)　K ベクトル空間 V, W に対して, V から W への K 線型写像全体がなす $\mathrm{Map}(V, W)$ の部分集合を $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ で表す．

20.17 補題. $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は $\mathrm{Map}(V, W)$ の K 部分空間である．

証明．$f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ とする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') &= f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') + g(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \\ &= f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}') + g(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}') = (f+g)(\boldsymbol{v}) + (f+g)(\boldsymbol{v}').\end{aligned}$$

また, $\alpha \in K$ について,

$$(f+g)(\alpha\boldsymbol{v}) = f(\alpha\boldsymbol{v}) + g(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v}) + \alpha g(\boldsymbol{v}) = \alpha(f+g)(\boldsymbol{v}).$$

以上により $f + g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

また, $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\beta \in K$ とするとき, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}(\beta f)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = \beta(f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')) &= \beta(f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')) \\ &= \beta f(\boldsymbol{v}) + \beta f(\boldsymbol{v}') = (\beta f)(\boldsymbol{v}) + (\beta f)(\boldsymbol{v}').\end{aligned}$$

また, $\alpha \in K$ について,

$$(\beta f)(\alpha \boldsymbol{v}) = \beta(f(\alpha \boldsymbol{v})) = \alpha\beta f(\boldsymbol{v}) = \alpha(\beta f)(\boldsymbol{v}).$$

以上により, $\beta f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

また, $\mathrm{Map}(V,W)$ の零ベクトルは零写像 $\mathbf{0} : V \to W$ であり, これが $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ に属することは例 20.6.

以上により, $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ が $\mathrm{Map}(V,W)$ の部分空間であることが確かめられた. □

(20.18) V, W が K ベクトル空間とする. 写像 $f : V \to W$ が K 同型写像または単に**同型 (isomorphism)** であるとは, f が K 線型であって, かつ全単射であることをいう. ベクトル空間 V とベクトル空間 W が K 同型または単に同型であるとは, V から W への K 同型写像が存在することをいう. V と W が同型であることを $V \cong W$ で表す.

20.19 補題. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が対応とする. 次が成立する.

(1) $A \subset X$ に対して, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

(2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(3) $B \subset Z$ に対して $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

(4) $A \subset A' \subset X$ に対して $f(A) \subset f(A')$.

証明. **(1)**. 両辺とも

$$\{c \in Z \mid \exists a \in A\ \exists b \in B\ \ (a,b) \in \Gamma_f \text{ かつ } (b,c) \in \Gamma_g\}$$

であることが容易であり, 従って一致すると分かる.

(2). 両辺とも Z から X への対応であり, グラフが両者とも

$$\{(z,x) \in Z \times X \mid \exists y \in Y\ (x,y) \in \Gamma_f \text{ かつ } (y,z) \in \Gamma_g\}$$

となって一致するので対応として一致する.

(3) は **(1)** と **(2)** から明らかである.

(4) は自明である. □

20.20 補題. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が写像とする.

(1) f と g が単射ならば $g \circ f$ は単射である.

(2) $g \circ f$ が単射であれば f は単射である.

(3) $g \circ f$ が単射で f が全射であれば f は全単射で g は単射である.

(4) f と g が全射ならば $g \circ f$ は全射である.

(5) $g \circ f$ が全射であれば g は全射である.

(6) $g \circ f$ が全射で g が単射であれば g は全単射で f は全射である.

(7) 次のいずれかが成立するとき, f, g, $g \circ f$ はすべて全単射である.

(i) f と g が全単射.

(ii) $g \circ f$ が全単射で f が全射.

(iii) $g \circ f$ が全単射で g が単射.

証明. **(1)**. $x, x' \in X$ で $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ とする. $g(f(x)) = g(f(x'))$ なので g の単射性によって $f(x) = f(x')$. したがって, f の単射性によって $x = x'$. これは $g \circ f$ が単射であることを示している.

(2). $x, x' \in X$ で $f(x) = f(x')$ とする. すると $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x')$. $g \circ f$ の単射性により, $x = x'$. これは f が単射であることを示す.

(3). 上の **(2)** によって f は全単射. f^{-1} と $g \circ f$ が単射なので **(1)** によって $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ も単射である.

(4). 補題 20.19 により, $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$ となり, $g \circ f$ は全射である.

(5). $g(Y) \supset g(f(X)) = (g \circ f)(X) = Z$ であるから $g(Y) = Z$ であり g は全射である.

(6). 上の **(5)** によって g は全単射. g^{-1} と $g \circ f$ が全射なので, **(4)** によって $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ も全射.

(7). **(i)** は **(1)** と **(4)** から従う. **(ii)**, **(iii)** はいずれも **(3)** と **(6)** から従う. □

20.21 補題. V が K ベクトル空間の時, 恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ は K 同型である. また, $f : V \to W$, $g : W \to U$ が K 同型であれば, $g \circ f$ もそうである.

証明. 前半は id_V が K 線型で逆写像 id_V を持つから明らかである. 補題 20.20 の **(9)** と補題 20.9 を合わせれば明らかである. $\square$

20.22 補題. $f : V \to W$ が K 同型写像であれば, $f^{-1} : W \to V$ も K 同型写像である.

証明. f^{-1} は f を逆写像に持つので全単射である. よって, f^{-1} が K 線型であることを言えば良い. $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ に対して,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') &= f^{-1}(f(f^{-1}(\boldsymbol{w})) + f(f^{-1}(\boldsymbol{w}'))) \\ &= f^{-1}f(f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}')) = f^{-1}(\boldsymbol{w}) + f^{-1}(\boldsymbol{w}'). \end{aligned}$$

また, $\alpha \in K$ のとき,

$$f^{-1}(\alpha\boldsymbol{w}) = f^{-1}(\alpha(f(f^{-1}(\boldsymbol{w})))) = f^{-1}(f(\alpha(f^{-1}(\boldsymbol{w})))) = \alpha f^{-1}(\boldsymbol{w}).$$

以上により, f^{-1} は K 線型である. $\square$

20.23 例. $f : K^n \to \mathrm{DM}_n(K)$ を

$$f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

で定めると K 同型である.

20.24 例. A が n 次正則行列のとき, $\Phi(A)$ は K 同型でその逆写像は $\Phi(A^{-1})$ である (補題 8.9 参照). 逆に $A \in M_{m,n}(K)$ で $f = \Phi(A)$ が K 同型であれば $m = n$ で A は正則行列であることを示そう. 実際, $f^{-1} : K^m \to K^n$ が存在すれば, $B = \Psi(f^{-1})$ とおくと $AB = \Psi(f)\Psi(f^{-1}) = \Psi(\mathrm{id}) = E_m$, $BA = E_n$ である. もし $m < n$ とすると, $\operatorname{rank} E_n = \operatorname{rank}(BA) \leq \operatorname{rank} A \leq m < n = \operatorname{rank} E_n$ となって矛盾. $n < m$ でも同様に $E_n = AB$ から矛盾する. したがって $m = n$ であり, $B = A^{-1}$ が示された. このことから特に次の主張を得る.

20.25 定理. $K^n \cong K^m$ であることは $n = m$ と同値である. $\square$

21 和と内部直和

(21.1) V が K ベクトル空間, $W_1, \dots, W_n$ が V の部分空間とする. 写像

$$H : W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \to V$$

を $H((\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)) = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n$ で定義する.

21.2 補題. H は K 線型である.

証明.

$$\begin{aligned} H((\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) + (\boldsymbol{w}'_1, \dots, \boldsymbol{w}'_n)) &= H((\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}'_1, \dots, \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{w}'_n)) \\ = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{w}'_n &= \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}'_n \\ &= H((\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)) + H((\boldsymbol{w}'_1, \dots, \boldsymbol{w}'_n)). \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} H(\alpha(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)) = H((\alpha\boldsymbol{w}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{w}_n)) &= \alpha\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \alpha\boldsymbol{w}_n \\ &= \alpha(\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n) = \alpha H((\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n)). \end{aligned}$$

以上により, H は K 線型である. □

21.3 補題. V が K ベクトル空間, $W_1, \dots, W_n$ が V の部分空間とする. このとき,

$$\Gamma = \{w_1 + w_2 + \cdots + w_n \mid w_i \in W_i\}$$

は V の $\bigcup_{i=1}^n W_i$ を含む最小の部分空間である.

この部分空間 Γ を $W_1 + \cdots + W_n$ または $\sum_{i=1}^n W_i$ で表し, $W_1, \dots, W_n$ の**和空間 (sum)** という.

証明. $\Gamma = \operatorname{Im} H$ で H は K 線型なので, Γ は V の K 部分空間である. $\bigcup_{i=1}^n W_i \subset \Gamma$ も定義から明白である. もし Γ' が $\bigcup_{i=1}^n W_i$ を含む V の K 部分空間であれば, 各 $w_i \in W_i$ に対して, $w_i \in W_i \subset \bigcup_{i=1}^n W_i \subset \Gamma'$ で Γ' は和で閉じているので, $w_1 + \cdots + w_n \in \Gamma'$. これは $\Gamma \subset \Gamma'$ であることを示し, Γ は最小である. □

(21.4) $V, W_1, \ldots, W_n, H$ は上の通りとする. H が単射のとき, 和空間 $W_1 + \cdots + W_n$ は直和であるといい, $W_1 + \cdots + W_n$ と書く代わりに $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ と書く. これは全射 $H : W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \to \operatorname{Im} H = W_1 + \cdots + W_n$ が単射にもなって同型となり, H を通して $W_1 + \cdots + W_n$ が外部直和 $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ とある意味同じものだとみなされることから来ている. これを内部直和という.

21.5 補題. $n \geq 1$ で $V, W_1, \ldots, W_n, H$ は上の通りとするとき, 次は同値である.

(1) 和 $W_1 + \cdots + W_n$ は直和である (つまり H は単射である).

(1′) $W_1 + \cdots + W_n$ の元を $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n$ ($\boldsymbol{w}_i \in W_i$) と表す方法は一意的である. つまり, $\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}'_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ で

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2 + \cdots + \boldsymbol{w}'_n$$

であればすべての i について $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}'_i$ である.

(2) $\operatorname{Ker} H = \mathbf{0}$ である.

(2′) $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ で

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \mathbf{0}$$

であればすべての i について $\boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}$ である.

(3) $n = 1$ であるか, $n \geq 2$ で $i = 2, 3, \ldots, n$ について,

$$(W_1 + \cdots + W_{i-1}) \cap W_i = \mathbf{0}_V.$$

(3′) $n = 1$ であるか, $n \geq 2$ で 和 $W_1 + \cdots + W_{n-1}$ は直和で

$$(W_1 + \cdots + W_{n-1}) \cap W_n = \mathbf{0}_V.$$

証明. まず, **(1)** と **(2)** は補題 20.15 によって同値である. **(1′)** は H の定義に照らせば **(1)** の言い直しにすぎない. 同様に **(2′)** は **(2)** の言い直しである. これらの条件と残りの **(3)**,**(3′)** が同値であることを n についての数学的帰納法で示す. $n = 1$ のとき, $H : W_1 \to V$ は単射であり, **(1)** は常に成立し, **(3)**,**(3′)** も常に成立していて確かに同値である. $n \geq 2$ とする. 帰納法の仮定から明らかに **(3)** と **(3′)** は同値である.

(2′)⇒(3′). (2′) の条件が $n-1$ の場合に $W_1,\dots,W_{n-1}$ についても成り立っていることがわかるので, 帰納法の仮定によって, $W_1+\cdots+W_{n-1}$ は直和である. 次に,

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_{n-1}=\boldsymbol{w}_n\in(W_1+\cdots+W_{n-1})\cap W_n \qquad (\boldsymbol{w}_i\in W_i)$$

とせよ. すると,

$$\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_{n-1}+(-\boldsymbol{w}_n)=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$$

なので, 仮定により, $\boldsymbol{w}_i=0$ $(i=1,\dots,n)$. 特に $\boldsymbol{w}=0$ となり, これは $(W_1+\cdots+W_{n-1})\cap W_n=\mathbf{0}$ を示す.

(3′)⇒(2′).

$$\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_n=\mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{w}_i\in W_i)$$

とする. このとき, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_{n-1}=-\boldsymbol{w}_n$ とおくと, $\boldsymbol{w}\in(W_1+\cdots+W_{n-1})\cap W_n=\mathbf{0}$ なので, $\boldsymbol{w}_n=-\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$. また, $\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_{n-1}=\mathbf{0}$ で, $W_1+\cdots+W_n$ は直和なので, $\boldsymbol{w}_1=\cdots=\boldsymbol{w}_{n-1}=\mathbf{0}$ 以上により, $\boldsymbol{w}_1=\cdots=\boldsymbol{w}_n=\mathbf{0}$ となった. □

21.6 系. V は K ベクトル空間, W_1,W_2 はその部分空間として, $H:W_1\oplus W_2\to V$ は上の通りとするとき, 次は同値である.

(1) 和 W_1+W_2 は直和である (つまり H は単射である).

(1′) W_1+W_2 の元を $\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{w}_i\in W_i)$ と表す方法は一意的である. つまり, $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1'\in W_1$, $\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_2'\in W_2$ で

$$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2'$$

であれば $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_1'$ かつ $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{w}_2'$ である.

(2) $\operatorname{Ker}H=\mathbf{0}$ である.

(2′) $\boldsymbol{w}_i\in W_i$ $(i=1,2)$ で

$$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\mathbf{0}$$

であれば $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_2=\mathbf{0}$ である.

(3) $W_1\cap W_2=\mathbf{0}_V$.

□

22　生成と一次独立

22.1 命題. $n \geq 0$ とするとき, K ベクトル空間 V について, 写像

$$\Xi = \Xi_V : \mathrm{Hom}_K(K^n, V) \to V_n$$

を $\Xi(f) = (f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$ で定義すると K 同型である. その逆写像 $\Theta = \Theta_V : V_n \to \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ は

$$\Theta_V((\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n))({}^t(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \tag{22.1.1}$$

で与えられる. 特に, 線型写像 $f : K^n \to V$ は $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n) \in V$ を任意に指定することによって一意的に定まる.

証明. Ξ が K 線型であることを示す. $f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ に対して,

$$\begin{aligned}\Xi(f+g) &= ((f+g)(\boldsymbol{e}_1), \ldots, (f+g)(\boldsymbol{e}_n)) = (f(\boldsymbol{e}_1)+g(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)+g(\boldsymbol{e}_n)) \\ &= (f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) + (g(\boldsymbol{e}_1), \ldots, g(\boldsymbol{e}_n)) = \Xi(f) + \Xi(g).\end{aligned}$$

また $\alpha \in K$ のとき,

$$\Xi(\alpha f) = (\alpha f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \alpha f(\boldsymbol{e}_n)) = \alpha(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = \alpha \Xi(f).$$

以上により, Ξ は K 線型である.

次に, Θ が V_n から $\mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ への写像であることをいうために, (22.1.1) で定まる $f := \Theta_V((\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$ が実際に K 線型であることを示す. $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$ が K^n のベクトルで $\alpha, \beta \in K$ のとき,

$$f(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) \boldsymbol{v}_i = \alpha(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i) + \beta(\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b})$$

であって, f は K 線型とわかり, $\Theta : V_n \to \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ なる写像が定まった.

Θ が Ξ の逆写像であることを示せば良い.

$$(\Xi \Theta f)({}^t(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{e}_i) = f(\sum_i a_i \boldsymbol{e}_i) = f({}^t(a_1, \ldots, a_n))$$

であるから, $\Xi \circ \Theta$ は恒等写像である. また, $(\Theta \Xi(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$ は ${}^t(a_1, \ldots, a_n)$ を $\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ に写す写像を f としたとき,

$$(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

であり, $\Theta \circ \Xi$ は恒等写像である. 以上により線型写像 Ξ は逆写像 Θ を持ち, K 同型である. $\square$

(22.2)　命題 22.1 の $\Theta = \Theta_V$ は, K 線型写像 Ξ の逆写像なので K 線型である. $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \in V_n$ に対して, $\Theta_V(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \in \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ は今後 $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ と書くことにする. 定義によって

$$[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

であるから, 行列の積と同じ形をしていて覚えやすい.

　$f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ に対して,

$$f = \Theta\Xi(f) = \Theta(f(\boldsymbol{e}_1), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)) = [f(\boldsymbol{e}_1), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)] \tag{22.2.1}$$

に注意する. このことからも明らかなように $f(\boldsymbol{e}_1), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)$ を任意に決めることによって一意的に $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, V)$ を定めることができる.

22.3 例. $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \in M_{m,n}(K)$ とするとき, $\Phi(A)(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j$ であるから, $\Phi(A) = [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n]$.

(22.4)　V が K ベクトル空間, $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \in V_n$ とする.

$$\mathrm{Im}[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] = \{\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{v}_i \mid {}^t(a_1, \dots, a_n) \in K^n\} \tag{22.4.1}$$

を $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ で表し, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が**生成する** **(generate)** (あるいは**張る** **(span)**) 部分空間という. 線型写像 $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ の像だから実際にこれは V の K 部分空間である. (22.4.1) の右辺を見れば明らかなように, $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合の全体である.

(22.5)　$[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ が全射の時, つまり, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が成り立つとき, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する (あるいは張る) という.

22.6 補題. $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle \subset V$ は集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を含む最小の V の部分空間である. 特に, $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ のみで決まり, その並び方によらない. また, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成する必要十分条件は, $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を含む V の部分空間が V しかないことである.

証明. $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を含む部分空間であることは明らかだろう. W が V の部分空間で $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subset W$ とする. すると $\sum_i a_i\boldsymbol{v}_i$ の形の元は W に属するので, $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle \subset W$ であり, $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を含む部分空間の中で最小である. 残りの主張は明らかである. □

(22.7) V の有限部分集合 $S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V を生成するとは, (順序のついた列) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成することだと定義する. 補題によりこれは確かに S で定まる概念である. そこで, S が (無限かもしれない) V の部分集合の時, S が V を生成するとは S を含む部分空間が V しかないことだと定義する.

22.8 補題. V が K ベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とするとき, 次は同値である.

(1) $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ が単射.

(2) $\mathrm{Ker}[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] = \boldsymbol{0}$.

(2′) $a_1, \dots, a_n \in K$ で $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ であれば, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

証明. 補題 20.15 によって, **(1)** と **(2)** は同値である. **(2′)** は **(2)** を言い換えたにすぎない. □

(22.9) 補題 22.8 の同値な条件をみたすとき, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は**一次独立 (linearly independent)** という. 一次独立ではないことを**一次従属 (linearly dependent)** という. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立で V を生成する, 言い換えると $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] : K^n \to V$ が同型の時, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は V の**基底 (basis)** または一次独立基という.

(22.10) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成するとは, $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ が全射, 言い換えると任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \qquad (a_1, \dots, a_n \in K) \tag{22.10.1}$$

と書ける, ということだった. 一方, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立というのは, $[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ が単射ということだから, これは, $\boldsymbol{v} \in V$ を (22.10.1) のように表示する方法は一意的, ということである. したがって $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である条件は, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ を一意的に (22.10.1) のように $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合として表示できることである.

22.11 補題. $f : V \to W$ が K 線型写像で $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

(1) $f \circ [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] = [f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)]$.

(2) $f(\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle) = \langle f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle$.

(3) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立で f が単射ならば $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ は一次独立である.

(4) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が一次独立ならば, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は一次独立である.

(5) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が一次独立で $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が V を生成すれば, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は V の基底で, f は単射である.

(6) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が V を生成して f が全射ならば $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成する.

(7) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成するならば f は全射である.

(8) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成して f が単射ならば, f は同型で $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は V を生成する.

(9) 次のいずれかが成立するとき, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底であり, $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であり, f は K 同型である.

  (i) f は同型で $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は V の基底である.

  (ii) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底であり, $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は V を生成する.

  (iii) $f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底であり, f が単射.

証明. **(1)** は $(f\circ[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n])(\boldsymbol{e}_j)=f(\boldsymbol{v}_j)$ だから.

(2) を示す. **(1)** によって,

$$\begin{aligned}f(\langle\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\rangle)=\mathrm{Im}(f\circ[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n])=\mathrm{Im}[f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)]\\=\langle f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)\rangle.\end{aligned}$$

(3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) は **(1)** と補題 20.20 の **(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)** からそれぞれ明らかである. □

22.12 例. K^n のベクトルの列 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ は K^n の基底である. 実際 $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n]$ は恒等写像であり, 全単射. この基底を K^n の**標準基底 (standard basis)** という.

22.13 補題. 一次独立なベクトルの列の順序を並べ換えたものは一次独立である.

証明. $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が V の一次独立な列として, その並べ換え $\boldsymbol{v}_{\sigma 1},\dots,\boldsymbol{v}_{\sigma n}$ を考える. ${}^t(a_1,\dots,a_n)\in K^n$ について

$$a_1\boldsymbol{v}_{\sigma 1}+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_{\sigma n}=\boldsymbol{0}$$

と仮定する. すると

$$a_{\sigma^{-1}1}\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_{\sigma^{-1}n}\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

で $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は一次独立だから ${}^t(a_1,\dots,a_n)$ を並べ換えた ${}^t(a_{\sigma^{-1}1},\dots,a_{\sigma^{-1}n})$ が $\boldsymbol{0}$ である. よって ${}^t(a_1,\dots,a_n)=\boldsymbol{0}$ であり, これは $\boldsymbol{v}_{\sigma 1},\dots,\boldsymbol{v}_{\sigma n}$ の一次独立性を示す. □

22.14 補題. $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}\in V$ のとき, 次は同値.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}$ は一次独立.

(2) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は一次独立かつ $\boldsymbol{v}\notin\langle\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\rangle$.

証明. **(1)⇒(2)**. $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が一次従属とすると,

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

となる ${}^t(c_1,\dots,c_n)\in K^n$ が存在する. このとき,

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n+0\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

であって, ${}^t(c_1,\dots,c_n,0)\neq\boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}$ が一次従属となって矛盾である. よって $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は一次独立である.

仮に $\boldsymbol{v}\in\langle\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\rangle$ で

$$\boldsymbol{v}=a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n$$

と書けたとすると,

$$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n+(-1)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

で ${}^t(a_1,\dots,a_n,-1)\neq{}^t(0,\dots,0,0)$ であるから $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}$ は一次従属.

(2)⇒(1). $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}$ が一次従属だとして,

$$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n+a\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\tag{22.14.1}$$

とし, ${}^t(a_1, \dots, a_n, a) \neq {}^t(0, \dots, 0, 0)$ とする．もし $a = 0$ とすると,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

でしかも ${}^t(a_1, \dots, a_n) \neq {}^t(0, \dots, 0)$ となってしまい, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の一次独立性に反する．よって $a \neq 0$ であり, (22.14.1) から移項して,

$$\boldsymbol{v} = -\frac{a_1}{a}\boldsymbol{v}_1 - \dots - \frac{a_n}{a}\boldsymbol{v}_n \in \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

となってやはり矛盾．よって $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ は一次独立． □

22.15 補題. 一次独立なベクトルの列には同じベクトルが 2 回現れない．

証明．同じベクトルが 2 回現れる一次独立なベクトルの列があったとして, それを並べ換えても一次独立だから, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}$ という形の一次独立な列があることになるが,

$$0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots 0 \cdot \boldsymbol{v}_n + 1 \cdot \boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

で, ${}^t(0, \dots, 0, 1, -1) \neq \boldsymbol{0}$ なのでこれは一次従属であり, 矛盾である． □

22.16 補題. 一次独立なベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ について, $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の元をいくつか重複なく並べたものは一次独立である．

証明．一次独立な列の並べ換えは一次独立なので $0 \leq r \leq n$ について $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ が一次独立になることを言えば充分である．$n - r$ についての帰納法を使えば $r = n - 1$ としてもよく, この場合は補題 22.14 から明らかである． □

(22.17) V の部分集合 S が一次独立であるとは, S の任意の有限部分集合 T について, T の元を任意の順序でもれなく重複なく並べたものが一次独立であることをいう．S が有限集合のときには, S の元をある順序でもれなく重複なく並べて一次独立になることと同値である．

(22.18) $S \subset V$ が V の基底集合であるとは, S が一次独立で V を生成することをいう．$S = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が n 元からなる V の部分集合の時, S が一次独立, V を生成する, V の基底集合であることはそれぞれ, 列 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立, V を生成する, 基底であることであり, 大差ない．

22.19 例. m, n は自然数とする．$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ に対して, $E_{ij} \in M_{m,n}(K)$ を $E_{ij}[i, j] = 1$ で $E_{ij}[u, v] = 0$ $((u, v) \neq (i, j))$ で定義する． E_{ij} を**行列単位 (matrix unit)** と呼ぶ．すると $(a_{ij}) = \sum_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} a_{ij}E_{ij}$ である．だから行列 A を E_{ij} の一次結合で表す方法はこれしかなく, $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ は $M_{m,n}(K)$ の基底集合である．よって $\dim_K M_{m,n}(K) = mn$.

23　基底の存在, 延長と次元

(23.1)　V は K ベクトル空間とする.

23.2 補題. V の部分集合 S は V を生成するとする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が S の元からなる一次独立なベクトルの列で, これ以上長い一次独立な S の元からなる列には延長できないとする. このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である.

証明. $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = V$ を示せば良い. S は V を生成するのだからこれは $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \supset S$ と同じことである. そうでないとすると $\boldsymbol{v} \in S \setminus \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ がとれるが, 補題 22.14 によって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ が一次独立となり, 仮定に反する. □

23.3 補題. V の有限部分集合 S は V を生成するとする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は S の元の列で, 一次独立とする. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して, S の元からなる基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を作ることができる.

証明. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ からはじめて, 可能であれば S の元を付け加えて一次独立な列として延長する. 同じ S の元を繰り返すことは許されず, S の元は有限個しかないから, この操作は無限には続けられずいつかはもう延長できなくなり, そのとき補題 23.2 によって基底になっている. □

23.4 補題. V が有限部分集合で生成されるとき, V は基底を持つ. V の基底の長さ (基底集合の元数) は基底の取り方にはよらない.

証明. 前半は定理で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を $r = 0$ である列 (空列) とすればよい. 後半を示そう. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ および $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ がともに V の基底とする. すると

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m] : K^m \to V$$

および

$$[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n] : K^n \to V$$

は同型である. よって,

$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]^{-1} \circ [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n] : K^n \to K^m$$

は補題 20.21 および補題 20.22 によって同型であり, したがって定理 20.25 によって $n = m$ である. □

(23.5) V が有限部分集合で生成されるとき, V は有限次元であるという. このとき, V は基底を持つが, その元数は基底によらずに V で決まる. この元数を $\dim_K V$ で表し, V の**次元 (dimension)** という. したがって $\dim_K V = n$ であることは, $V \cong K^n$ と同値である.

一方, V が有限次元でない時は無限次元であるといい, $\dim_K V = \infty$ と表す.

23.6 補題. V が有限次元 K ベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成すれば $n \geq \dim_K V$. 等号成立は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である時, かつその時に限る.

(2) V の有限部分集合 S について, S が V の基底集合である必要十分条件は, S が V を生成するが, S からどの元を省いても V を生成しないことである.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の一次独立なベクトルであれば, これを延長して V の基底にできる.

(4) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の一次独立なベクトルであれば $n \leq \dim_K V$. 等号成立は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である時, かつその時に限る.

証明. **(1)**. 補題 23.3 で $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ とすれば S の元の一部を重複なく並べた $\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_r}$ が基底になる. 無論 $\dim_K V = r \leq n$ なので不等式が成立した. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が基底であれば $n = \dim_K V$ であるのは次元の定義による. 逆に $n = \dim_K V = r$ とすると, 基底 $\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_r}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の並べかえになるので, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ も基底である.

(2). 十分性を示す. S が V を生成するが, S からどの元を省いても V を生成しないとせよ. 補題 23.3 により, S の元からなる基底集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在するが, 省いたら生成しないのだから, これが S と一致せざるを得ず, S が基底集合になる. 逆に S が基底集合なら, S は V を生成している. また, $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が相異なるとすると, $\boldsymbol{v}_j$ は $S \setminus \{\boldsymbol{v}_j\}$ で生成する空間には補題 22.14 によって属さない. よって $S \setminus \{\boldsymbol{v}_j\}$ は V を生成しない.

(3). 有限集合 T が V を生成するとするとき, $S = T \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ として補題 23.3 を適用すれば良い.

(4). 不等式は **(3)** から明白である. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である時, $n = \dim_K V$ は明らか. 逆に $n = \dim_K V$ とすると, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を延長して基底にできるが, 本当に延長してしまうと $n < \dim_K V$ となるので, すでに基底でなければならない. □

23.7 例. K 上の多項式の全体 $K[x]$ は K ベクトル空間であり, 容易に分かるように $1, x, x^2, \ldots, x^r$ は任意の $r \geq 0$ に対して一次独立である. いくらでも数の多い一次独立なベクトルの列が取れるので, 補題 23.6 によって $K[x]$ は無限次元である.

23.8 定理. V が有限次元 K ベクトル空間で W はその部分空間, S は W を生成する W の部分集合, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が S の元からなる一次独立なベクトルとすると, これを延長して, S の元からなる W の (長さ有限の) 基底を取ることができる.

証明. 補題 23.3 と同様に S の元を付け加えて $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を延長した一次独立なベクトルの列 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を可能な限り作って行く. これは V のベクトルとしても一次独立でなくてはならず, r は $\dim_K V$ を越えられない (補題 23.6 の **(4)**). よってこの操作はいつかは止まり, そのとき補題 23.2 によってこの列は W の基底である. □

23.9 系. 有限次元 K ベクトル空間 V の部分空間 W は有限次元である.

証明. $S = W$ とし, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ として空な列 ($n = 0$ である列) を取って, 定理を適用すれば, W は長さ有限の基底を持つとわかるので有限次元である. □

23.10 補題. $f : V \to W$ が有限次元 K ベクトル空間の間の K 線型写像とする.

(1) f が単射ならば $\dim_K V \leq \dim_K W$. 等号成立は f が同型である時, かつそのときに限る.

(2) f が全射ならば $\dim_K V \geq \dim_K W$. 等号成立は f が同型である時, かつそのときに限る.

(3) f が同型の時, $\dim_K V = \dim_K W$.

証明. $\dim_K V = n$ とおき, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底とする.

(1). 補題 22.11 の **(3)** により, $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は一次独立であり, 補題 23.6, **(4)** により, $n \leq \dim_K W$ であり, 等号成立は $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であるとき, かつそのときに限る. 補題 22.11 の **(9)** により, これは f が同型であることと同値である.

(2). 補題 22.11 の **(6)** により, $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する. よって補題 23.6 の **(1)** により, $\dim_K W \leq n$. 等号成立は $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であるとき, かつそのときに限る. 補題 22.11 の **(9)** により, これは f が同型であることと同値である.

(3) は **(1)** から明らかである. □

23.11 系. V が有限次元 K ベクトル空間, W はその部分空間とする. このとき W は有限次元で $\dim_K W \leq \dim_K V$ である. 等号成立は $V = W$ のとき, かつそのときに限る.

証明. W が有限次元であることは系 23.9. 包含写像 $i : W \to V$ $(i(w) = w)$ は単射線型写像であり, これが同型になることと $V = W$ は同値なので, 補題 23.10 の **(1)** から残りの主張は従う. □

23.12 補題. V が有限次元ベクトル空間, $S \subset V$ で S は V を張るとする. S の部分集合 T で T は一次独立であるが T より真に大きい一次独立な S の部分集合が存在しない時, T は有限集合で, T は V の基底集合で, T の元数が V の次元である.

証明. T が無限集合とすると, T は $\dim_K V + 1$ 個の元からなる一次独立な集合を含んでしまい V が有限次元であることに反する. よって T は有限集合で, 補題 23.2 によって T は V の基底集合である. □

23.13 系. V が K ベクトル空間で $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ のとき, $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の一次独立な部分集合 T でそれより真に大きい一次独立な S の部分集合が存在しないものの元数は T の取り方によらず一定であり, V の次元である. □

24　表現行列

(24.1)　$f : V' \to V$ が K 線型写像とする．このとき, K ベクトル空間 W について,

$$f^{\#} = f^{\#}_W : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(V', W)$$

を $f^{\#}_W(g) = g \circ f$ で定義する．

24.2 補題. $f : V' \to V$ が K 線型写像, W は K ベクトル空間とする．このとき,

(1) $f^{\#}_W : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(V', W)$ は K 線型写像である．

(2) $V = V'$ のとき, $(\mathrm{id}_V)^{\#}_W = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}$ である．

(3) $g : V'' \to V'$ が K 線型写像ならば, $g^{\#}_W \circ f^{\#}_W = (f \circ g)^{\#}_W$ が成立する．

(4) f が K 同型の時, $f^{\#}$ は K 同型で $(f^{\#}_W)^{-1} = (f^{-1})^{\#}_W$.

証明．**(1)**. $g, h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\alpha, \beta \in K$, $\boldsymbol{v} \in V$ のとき,

$$\begin{aligned} &f^{\#}_W(\alpha g + \beta h)(\boldsymbol{v}) = ((\alpha g + \beta h) \circ f)(\boldsymbol{v}) = (\alpha g + \beta h)(f(\boldsymbol{v})) \\ &= \alpha g(f(\boldsymbol{v})) + \beta h(f(\boldsymbol{v})) = (\alpha(g \circ f) + \beta(h \circ f))(\boldsymbol{v}) = (\alpha f^{\#}_W(g) + \beta f^{\#}_W(h))(\boldsymbol{v}). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v} \in V$ は任意なので,

$$f^{\#}_W(\alpha g + \beta h) = \alpha f^{\#}_W(g) + \beta f^{\#}_W(h).$$

よって $f^{\#}_W$ は K 線型である．

(2). $(\mathrm{id}_V)^{\#}_W(f) = f \circ \mathrm{id}_V = f$ なので, $(\mathrm{id}_V)^{\#}_W$ は恒等写像である．

(3). $h \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ に対して

$$(g^{\#}_W \circ f^{\#}_W)(h) = g^{\#}_W(h \circ f) = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = (f \circ g)^{\#}_W(h).$$

h は任意なので $g^{\#}_W \circ f^{\#}_W = (f \circ g)^{\#}_W$ を得る．

(4). $(f^{-1})^{\#}_W \circ f^{\#}_W = (f \circ f^{-1})^{\#}_W = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}$, $f^{\#}_W \circ (f^{-1})^{\#}_W = (f^{-1} \circ f)^{\#}_W = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V',W)}$ なので, $(f^{-1})^{\#}_W$ は $f^{\#}_W$ の逆写像である．　□

(24.3)　V は K ベクトル空間, $f : W \to W'$ は K 線型写像とする.
$$f^V_\# : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W')$$
を $f^V_\#(h) = f \circ h$ で定義する.

24.4 補題. V は K ベクトル空間, $f : W \to W'$ は K 線型写像とする. このとき,

(1) $f^V_\# : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W')$ は K 線型写像である.

(2) $W = W'$ のとき, $(\mathrm{id}_W)^V_\# = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(V,W)}$ である.

(3) $g : W' \to W''$ が K 線型写像ならば, $g^V_\# \circ f^V_\# = (g \circ f)^V_\#$ が成立する.

(4) f が K 同型の時, $f^V_\#$ も同型で $(f^V_\#)^{-1} = (f^{-1})^V_\#$.

証明. 同様なので省略する. □

(24.5)　V が $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を基底にもつ K ベクトル空間, W は K ベクトル空間とする.
$$\Xi_{\underline{\boldsymbol{v}}} := \Xi \circ [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]^\#_W : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to W_n$$
は同型, とくに全単射である ($\Xi = \Xi_W$ は命題 22.1 で定義される同型).
$$([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]^\#_W(f))(\boldsymbol{e}_j) = f([\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n](\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{v}_j)$$
であるから, $\Xi_{\underline{\boldsymbol{v}}}(f) = (f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ である. そこで, $\Theta_{\underline{\boldsymbol{v}}} := \Xi^{-1}_{\underline{\boldsymbol{v}}}$ と定義し, $\Theta_{\underline{\boldsymbol{v}}}(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ を $[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n]_{\underline{\boldsymbol{v}}}$ と表すことにする. 無論 $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ について, $f = [f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)]_{\underline{\boldsymbol{v}}}$ となっている. このことからも分かるように, V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を固定すると, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ を任意に与えた時, $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ となる $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ が一意的に存在する (そしてこのとき f を $[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n]_{\underline{\boldsymbol{v}}}$ と表す).

24.6 例. 定義により, K^n の標準基底を $\underline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とするとき, $[\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n]_{\underline{\boldsymbol{e}}} = [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ である.

(24.7)　$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ で $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ のとき,
$$\left(\sum_{i=1}^m a_{i1}\boldsymbol{v}_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}\boldsymbol{v}_i, \ldots, \sum_{i=1}^m a_{in}\boldsymbol{v}_i\right) \in V_n$$
を $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)A$ と表す. $\boldsymbol{v}_i$ を数であるかのように扱い行列の積を計算した結果だと覚えると覚えやすい. 特に $n = 1$ のとき, $V_1 = V$ と思い, $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_m) \in K^m = M_{m,1}(K)$ について,
$$[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{a}.$$

(24.8) V が $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を基底に持つ n 次元ベクトル空間, W が $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ を基底に持つ m 次元ベクトル空間とする. $f : V \to W$ が K 線型写像の時, $j = 1, \dots, n$ について, $f(\boldsymbol{v}_j)$ は W のベクトルで $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ は基底だから, (22.10) によって

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \qquad (a_{ij} \in K,\ j = 1, \dots, n) \tag{24.8.1}$$

と一意的に表される. この条件は

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)(a_{ij}) \tag{24.8.2}$$

と同じである. これにより一意的に決まる行列 (a_{ij}) を基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ および $\underline{\boldsymbol{w}}$ に関する f の**表現行列 (representation matrix)** とよび, $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$(誤解のおそれのないときは $\Psi(f)$) で表す. $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{m,n}(K)$ の逆写像を $\Phi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}$ で表す.

24.9 例. $\underline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を K^n の標準基底とし, $\underline{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_m$ を K^m の標準基底とする. このとき, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ に対して,

$$\Phi(A)(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{f}_i$$

であるから, $\Phi(A)$ の表現行列 $\Psi_{\underline{\boldsymbol{f}},\underline{\boldsymbol{e}}}(\Phi(A))$ は A である. よって $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対して,

$$\Psi_{\underline{\boldsymbol{f}},\underline{\boldsymbol{e}}}(f) = \Psi_{\underline{\boldsymbol{f}},\underline{\boldsymbol{e}}}(\Phi(\Psi(f))) = \Psi(f).$$

f は任意なので $\Psi_{\underline{\boldsymbol{f}},\underline{\boldsymbol{e}}} = \Psi$. $\Psi(f)$ を f の標準基底に関する表現行列と呼んだ ((8.7) 参照) ことはこれで正当化される.

24.10 補題. $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m \in V$ で $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ で $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$, すなわち,

$$(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)A$$

であるとする. $f : V \to W$ が K 線型写像とする時,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (f(\boldsymbol{w}_1), \dots, f(\boldsymbol{w}_m))A$$

である.

証明. つまり, $f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f(\boldsymbol{w}_i)$ である, ということであるが, 明らかである. $\square$

24.11 命題. (24.8) の記号のもとで, $g := [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n] : K^n \to V$, $h := [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m] : K^m \to W$ とおくと,

$$\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}} = \Psi \circ g^{\#}_{K^m} \circ (h^{-1})^V_{\#}$$

である. 特に $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M_{m,n}(K)$ は K 同型である.

証明.

$$(\Psi \circ g^{\#}_{K^m} \circ (h^{-1})^V_{\#})(f) = \Psi(h^{-1} \circ f \circ g) = A$$

とおくと,

$$(h^{-1}fg(\boldsymbol{e}_1), \ldots, h^{-1}fg(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)A.$$

補題 24.10 に注意して両辺に h を作用させると,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

を得るので $\Psi(h^{-1} \circ f \circ g) = A = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$. f が任意なので第一の等式を得る. 残りの主張は自明である. □

24.12 系. V が n 次元 K ベクトル空間, W が m 次元 K ベクトル空間のとき, $\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, W) = mn$ である. よりくわしく, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が W の基底の時, 各 i, j について, $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ を

$$f_{ij} = [0, \ldots, 0, \boldsymbol{w}_i, 0, \ldots, 0]_{\underline{\boldsymbol{v}}} \qquad (\text{ただし } \boldsymbol{w}_i \text{ は第 } j \text{ 成分})$$

で定義すると, $\{f_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ は $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ の基底集合である.

証明. 例 22.19 によって,

$$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$$

が $M_{m,n}(K)$ の基底集合で同型で基底は基底に写るので, $\Phi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(E_{ij}) = f_{ij}$ を言えば良い. E_{ij} の (s, t) 成分は $\delta_{is}\delta_{jt}$ (クロネッカーデルタ) なので,

$$\Phi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(E_{ij})(\boldsymbol{v}_t) = \sum_{s=1}^{m} \delta_{is}\delta_{jt}\boldsymbol{w}_s = \delta_{jt}\boldsymbol{w}_i$$

となり, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は基底なので

$$\Phi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(E_{ij}) = [0, \ldots, 0, \boldsymbol{w}_i, 0, \ldots, 0]_{\underline{\boldsymbol{v}}} = f_{ij}$$

となった. □

(24.13) 系 24.12 で特に $W = K$ の場合を考える. $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ を V^* で表し, V の**双対空間 (dual space)** という. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底の時, V^* も n 次元であり, $\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ を

$$\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij} \qquad (1 \le i, j \le n)$$

で定義すれば, $\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ は V^* の基底である. この基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の**双対基底 (dual basis)** と呼ぶ. V^* の元を V 上の**線型形式 (linear form)** と呼ぶ場合がある.

(24.14) $f : V \to W$ は K 線型写像とする. このとき,

$$f_K^{\#} : W^* = \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^*$$

(ただし $\alpha \in W^*$ について $f_K^{\#}(\alpha) = \alpha \circ f$) を f^* で表し, f の双対と呼ぶ.

24.15 定理. V は $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を基底に持つ K ベクトル空間, W は $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を基底に持つ K ベクトル空間, $\underline{\boldsymbol{v}}^*$, $\underline{\boldsymbol{w}}^*$ はそれぞれ $\underline{\boldsymbol{v}}$, $\underline{\boldsymbol{w}}$ の双対基底とする. $f : V \to W$ は K 線型写像として, その $\underline{\boldsymbol{v}}$, $\underline{\boldsymbol{w}}$ に関する表現行列を $A \in M_{m,n}(K)$ とする. このとき, $f^* : W^* \to V^*$ の基底 $\underline{\boldsymbol{w}}^*$, $\underline{\boldsymbol{v}}^*$ に関する表現行列 $\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{w}}^*}(f^*)$ は A の転置 ${}^tA$ である.

証明. $A = (a_{ij})$ とおく.

$$\begin{aligned}(f^*(\boldsymbol{w}_j^*))(\boldsymbol{v}_l) = \boldsymbol{w}_j^*(f(\boldsymbol{v}_l)) &= \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \boldsymbol{w}_j^*(\boldsymbol{w}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{kl}\delta_{jk} = a_{jl} = (\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{v}_i^*)(\boldsymbol{v}_l) \qquad (l = 1, \ldots, n).\end{aligned}$$

従って $f^*(\boldsymbol{w}_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{v}_i$. これは求める表現行列が ${}^tA = (a_{ji})$ である事を示す. □

24.16 命題. V を K ベクトル空間とする. $\delta : V \to V^{**}$ を $\boldsymbol{v} \in V$ と $\xi \in V^*$ について $(\delta(\boldsymbol{v}))(\xi) = \xi(\boldsymbol{v})$ によって定義することができ, δ は K 線型写像である. V が有限次元の時, δ は同型である.

証明. $\boldsymbol{v} \in V$, $\alpha, \beta \in K$, $\xi, \eta \in V^*$ について,

$$\delta(\boldsymbol{v})(\alpha\xi + \beta\eta) = (\alpha\xi + \beta\eta)(\boldsymbol{v}) = \alpha\xi(\boldsymbol{v}) + \beta\eta(\boldsymbol{v}) = \alpha(\delta(\boldsymbol{v})(\xi)) + \beta(\delta(\boldsymbol{v})(\xi)).$$

よって $\delta(\boldsymbol{v})$ は K 線型であり, δ は確かに V から V^{**} への写像を与えている.

次に δ が K 線型であることを示す. $\alpha, \beta \in K$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $\xi \in V^*$ について,

$$\delta(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w})(\xi) = \xi(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) = \alpha\xi(\boldsymbol{v}) + \beta\xi(\boldsymbol{w}) = (\alpha\delta(\boldsymbol{v}) + \beta\delta(\boldsymbol{w}))(\xi).$$

よって δ は K 線型である.

最後に V が有限次元として δ が同型であることを示す. V が n 次元で $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を基底に持つとする. $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ なので, δ が単射ならば同型になる. $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{v}_i \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とせよ. ある i について $c_i \neq 0$ なので, $\delta(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}_i^*) = \boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}) = c_i \neq 0$. これは $\delta(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$ を示していて, $\operatorname{Ker}\delta = \boldsymbol{0}$. つまり δ は単射で, 従って同型である. □

(24.17) V^{**} を V の 2 **重双対 (double dual)** という. δ を通して V と V^{**} とを同一視し, $\boldsymbol{v} \in V$ を V^{**} の元とみる場合がある.

(24.18) $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底とし, $\underline{\boldsymbol{v}}^* = \boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ はその双対基底とする. このとき, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V^{**} の元の列と見て, $\underline{\boldsymbol{v}}^*$ の双対基底になっている. すなわち, $\delta(\boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_j^*) = \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) である.

24.19 定理. 表現行列について次が成立する.

(1) n 次元 K ベクトル空間 V とその基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ について, $\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{v}}}(\mathrm{id}_V) = E_n$.

(2) U, V, W がそれぞれ基底 $\underline{\boldsymbol{u}}$, $\underline{\boldsymbol{v}}$, $\underline{\boldsymbol{w}}$ を持つ有限次元 K ベクトル空間とし, $f : U \to V$ と $g : V \to W$ は K 線型写像とする. このとき,

$$\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{u}}}(g \circ f) = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(g)\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{u}}}(f).$$

(3) 上の **(2)** で g が K 同型の時, $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(g)$ は正則行列であり, その逆行列は $\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{w}}}(g^{-1})$ である.

証明. **(1)** は $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とするとき,

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)E_n$$

といいうことを主張しているに過ぎず, 自明である.

(2). $\alpha = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l]$, $\beta = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $\gamma = [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ ($l = \dim_K U$, $n = \dim_K V$, $m = \dim_K W$) とするとき, 命題 24.11 および補題 8.9, **(4)** により,

$$\begin{aligned}\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{u}}}(g \circ f) &= \Psi(\gamma^{-1} g f \alpha) = \Psi(\gamma^{-1} g \beta \beta^{-1} f \alpha) \\ &= \Psi(\gamma^{-1} g \beta)\Psi(\beta^{-1} f \alpha) = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(g)\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{u}}}(f).\end{aligned}$$

(3) は **(1)**, **(2)** から容易である. 各自試みよ. □

(24.20)　以上のように, 基底を決めることによって線型写像には一意的に表現行列という行列が対応し, この対応によって線型写像の和, スカラー倍, 恒等写像, 写像の合成, 逆写像はそれぞれ行列の和, 行列のスカラー倍, 単位行列, 行列の積, 逆行列に対応する.

(24.21)　ベクトル空間 V について, V から V への線型写像を V の**線型変換 (linear transformation)** という. $f : V \to V$ が線型変換の時, その表現行列をとる時に定義域 V の基底と終域 V の基底は同じに取る必要があることが多い. そこで f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ および $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する表現行列は単に f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する表現行列と言っても良いこととする. V から V への K 線型変換の全体 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ は $\mathrm{End}_K V$ と表す場合がある.

(24.22)　V が n 次元 K ベクトル空間で, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 2 組の基底とする. このとき,

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)Q$$

となる n 次正方行列 Q が一意的に存在する. 実際このような Q は表現行列 $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(\mathrm{id}_V)$ に他ならない. この Q を $\underline{\boldsymbol{v}}$ を $\underline{\boldsymbol{w}}$ で表した基底の変換行列と呼び, $T(\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{v}})$ で表すことにする.

24.23 補題. V が n 次元 K ベクトル空間で, $\underline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 3 組の基底とする. 基底の変換行列について次が成り立つ.

(1) $T(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{v}}) = E_n$.

(2) $T(\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{v}})T(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{u}}) = T(\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{u}})$.

(3) $T(\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{v}})$ は正則で, $T(\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{v}})^{-1} = T(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{w}})$.

証明. すべて定理 24.19 から容易に従う. □

24.24 補題. V が n 次元ベクトル空間で, 2 組の基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\underline{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ を持つとする. W が m 次元ベクトル空間で, 2 組の基底 $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ と $\underline{\boldsymbol{w}}' = \boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m$ を持つとする. $f : V \to W$ が K 線型写像で f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ と $\underline{\boldsymbol{w}}$ に関する表現行列が A だとする. 基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ を $\underline{\boldsymbol{v}}'$ で表した基底の変換行列を Q, 基底 $\underline{\boldsymbol{w}}$ を $\underline{\boldsymbol{w}}'$ で表した基底の変換行列を P とするとき, f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}'$ と $\underline{\boldsymbol{w}}'$ に関する表現行列は PAQ^{-1} である.

証明. 求める行列は

$$\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}}',\underline{\boldsymbol{v}}'}(f) = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}}',\underline{\boldsymbol{w}}}(\mathrm{id}_W)\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{v}}'}(\mathrm{id}_V) = T(\underline{\boldsymbol{w}}', \underline{\boldsymbol{w}})AT(\underline{\boldsymbol{v}}', \underline{\boldsymbol{v}})^{-1} = PAQ^{-1}$$

□

24.25 系. V が n 次元ベクトル空間で, 2 組の基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\underline{\boldsymbol{v}}' = \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ を持つとする. $f : V \to V$ が V の線型変換で, f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する表現行列が A とする. 基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ を $\underline{\boldsymbol{v}}'$ で表した基底の変換行列を P とすると, f の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}'$ に関する表現行列は PAP^{-1} である. $\square$

(24.26) 2 つの n 次正方行列 A, B が**相似** **(similar)** であるとは, ある n 次正則行列 P が存在して $B = PAP^{-1}$ となることをいう. A と A は相似である. A と B が相似ならば B と A は相似である. A と B が相似で, B と C が相似であれば, A と C は相似である. n 次元ベクトル空間の線型変換の表現行列は, 基底を取りかえると相似な行列になる.

25　線型写像の階数と行列の階数

(25.1)　本節ではベクトル空間とは有限次元のものを意味するものとする.

25.2 定義. $f : V \to W$ は K 線型写像とする. $\dim \operatorname{Im} f$ を $\operatorname{rank} f$ で表し, f の階数という.

25.3 補題. $f : V \to W$ と $g : W \to U$ が K 線型写像の時,

(1) $\operatorname{rank}(g \circ f) \leq \operatorname{rank} f$.

(2) g が同型の時, $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} f$.

(3) $\operatorname{rank}(g \circ f) \leq \operatorname{rank} g$.

(4) f が同型の時, $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} g$.

証明. **(1)**. 補題 20.19 に注意して, g は $f(V)$ から $g(f(V)) = (g \circ f)(V)$ への全射を引き起こす. よって補題 23.10 の **(2)** により,

$$\operatorname{rank}(g \circ f) = \dim(g \circ f)(V) \leq \dim f(V) = \operatorname{rank} f.$$

(2). 上の **(1)** によって,

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank}(g^{-1} \circ g \circ f) \leq \operatorname{rank}(g \circ f) \leq \operatorname{rank} f.$$

(3). $f(V) \subset W$ だから, $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(V)) \subset g(W) = \operatorname{Im} g$ であり, 部分空間の方が次元は大きくない (系 23.11) ので

$$\operatorname{rank}(g \circ f) = \dim_K \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim_K \operatorname{Im} g = \operatorname{rank} g.$$

(4). 上の **(3)** によって,

$$\operatorname{rank} g = \operatorname{rank}(g \circ f \circ f^{-1}) \leq \operatorname{rank}(g \circ f) \leq \operatorname{rank} g.$$

□

25.4 補題. $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \in M_{m,n}(K)$ に対して, 次の 3 つの量は一致する. $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank} \Phi(A)$, $\dim_K \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

証明. 例 22.3 によって,

$$\operatorname{rank}\Phi(A) = \dim_K \operatorname{Im}\Phi(A) = \dim_K \operatorname{Im}[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n] = \dim_K \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle.$$

よって $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\Phi(A)$ を示せば良い.

m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q をとり, $PAQ = E_{m,n}(r)$ と標準形にできる. ここに $r = \operatorname{rank} A$. このとき, $\Phi(P)$, $\Phi(Q)$ は同型なので, 補題 25.3 の **(2), (4)** により,

$$\operatorname{rank}\Phi(A) = \operatorname{rank}(\Phi(P)\Phi(A)\Phi(Q)) = \operatorname{rank}(\Phi(PAQ)) = \operatorname{rank}(\Phi(E_{m,n}(r))).$$

最後の量は第一段落で示したように $E_{m,n}(r)$ の列ベクトルで張った空間の次元であり,

$$\dim_K \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{0} \rangle = \dim_K \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r \rangle.$$

$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r$ は基底の一部なので一次独立だから, $\langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ の基底をなし, 従って $\operatorname{rank}\Phi(A) = \operatorname{rank}(\Phi(E_{m,n}(r))) = r = \operatorname{rank} A$. □

25.5 定理. V が基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を持つ n 次元 K ベクトル空間, W が基底 $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ を持つ m 次元 K ベクトル空間とする. $f : V \to W$ が K 線型写像とするとき, f の階数は f の表現行列の階数と等しい. つまり, $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank}\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$. 特に $\operatorname{rank}\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ は基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ にも $\underline{\boldsymbol{w}}$ にも依存しない.

証明. $A = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}},\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ とおく. $\alpha = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$, $\beta = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]$ とおく.

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank}(\beta^{-1} f \alpha) = \operatorname{rank}(\Phi(\Psi(\beta^{-1} f \alpha))) = \operatorname{rank}(\Phi(A)) = \operatorname{rank} A.$$

□

25.6 命題. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \in V$ で $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in M_{n,p}(K)$ のとき,

$$((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A)B = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)(AB).$$

証明.

$$\begin{aligned}(((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A)B)_k &= \sum_j ((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A)_j b_{jk} = \sum_j \sum_i a_{ij} b_{jk} \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i \sum_j a_{ij} b_{jk} \boldsymbol{v}_i = \sum_i (AB)[i,k] \boldsymbol{v}_i = ((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)(AB))_k.\end{aligned}$$

ここに $(?)_k$ で第 k 成分を表している. □

25.7 補題. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \in V$ で $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ のとき,

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A$$

とおくと,

$$[\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m] \circ \Phi(A).$$

証明. 命題 25.6 で $p = 1$ で $B \in K^n$ がベクトルの場合を考えれば良い. □

25.8 補題. V が K ベクトル空間, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$, $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ は V のベクトルの列で, $A \in M_{m,n}(K)$ で

$$(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)A$$

と仮定する. このとき,

(1)
$$\dim\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \rangle \leq \min(\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle, \operatorname{rank} A)$$
である.

(2) $m = n$ で A が正則行列の時,
$$\dim\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \rangle = \dim\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle.$$

(3) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ が一次独立の時,
$$\dim\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \rangle = \operatorname{rank} A.$$

証明. $\alpha = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]$, $\beta = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n]$ とおく. すると定義から

$$\dim_K\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \operatorname{rank} \alpha,$$
$$\dim_K\langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n \rangle = \operatorname{rank} \beta.$$

また, 補題 25.7 により, $\beta = \alpha \circ \Phi(A)$.

従って, **(1)** は補題 25.3 の **(1), (3)** から, **(2)** は同補題の **(4)** から, **(3)** は同補題の **(2)** からそれぞれ容易に従う. □

25.9 演習. V が K ベクトル空間, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$, $f : V \to W$ は K 線型写像のとき, 次を示せ (ヒント: 補題 22.11 の **(1)** を用いる).

(1) $\dim_K\langle f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle \leq \min(\dim_K\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle, \operatorname{rank} f)$.

(2) f が同型の時, $\dim_K\langle f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle = \dim_K\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底で W が有限次元の時, $\dim_K\langle f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n) \rangle = \operatorname{rank} f$.

26　次元定理

26.1 補題. V は K ベクトル空間, $V_1, \ldots, V_r$ はその部分空間で, 和 $V_1+\cdots+V_r$ は直和であるとする. $i = 1, \ldots, r$ について, $\boldsymbol{v}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_i}^{(i)}$ は V_i の基底とする. このとき, これらすべてを並べた

$$\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_1}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_1^{(r)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_r}^{(r)} \tag{26.1.1}$$

は $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ の基底である. 特に

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) = n_1 + \cdots + n_r.$$

証明. (26.1.1) が一次独立であることを示す. $\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_k} a_j^{(k)}\boldsymbol{v}_j^{(k)} = \boldsymbol{0}$ とせよ. 和が直和なので, 各 k について $\sum_{j=1}^{n_r} a_j^{(k)}\boldsymbol{v}_j^{(k)} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_k}^{(k)}$ は一次独立なので, すべての k とすべての j について $a_j^{(k)} = 0$. よって (26.1.1) は一次独立である.

次に (26.1.1) が $V_1\oplus\cdots\oplus V_r$ を生成することを示す. $\boldsymbol{v} \in V_1\oplus\cdots\oplus V_r$ とすると, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{v}_k \in V_k$ と表せる. ところが $\boldsymbol{v}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n_k}^{(k)}$ は V_k を生成するから, 各 $\boldsymbol{v}_k$ は $\sum_{j=1}^{n_k} a_j^{(k)}\boldsymbol{v}_j^{(k)}$ と表される. よって $\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_k} a_j^{(k)}\boldsymbol{v}_j^{(k)}$ と表すことができ, これは (26.1.1) が $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ を生成することを示す.

最後の主張は明らかである. □

(26.2) $f : V \to W$ が K ベクトル空間の間の K 線型写像とし, W は有限次元とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ を, $\boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}_i)$ とおくとき, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ が $\operatorname{Im} f$ の基底となるように取ることができる. ここに $r = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f$ である. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は W の一次独立な列なので, これを延長して W の基底 $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ とすることができる. 線型写像 $s =: W \to V$ を $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}]_{\underline{\boldsymbol{w}}}$ として定義する.

26.3 補題. 上の定義の下で, 次が成立している.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は $\operatorname{Im} s$ の基底である.

(2) $fsf = f$, $sfs = s$ である.

(3) $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} s$ である.

(4) $\operatorname{Ker} f$ が有限次元なら V もそうで, $\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f$.

(5) $\operatorname{Ker} f$ の任意の基底 $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ について, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である.

(6) **(5)** の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ と $\underline{\boldsymbol{w}}$ に関する f の表現行列は $E_{m,n}(r)$, s の表現行列は $E_{n,m}(r)$ である.

証明. **(1)**. s の定義から $\operatorname{Im} s = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$. $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)$ は一次独立だから補題 22.11 の **(4)** によって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ も一次独立となり, $\operatorname{Im} s$ の基底となる.

(2). $\boldsymbol{v} \in V$ とすると, $f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i$ と表せるので,

$$(fsf)(\boldsymbol{v}) = fs(\sum_i c_i \boldsymbol{w}_i) = f(\sum_i c_i \boldsymbol{v}_i) = \sum_i c_i \boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}).$$

よって $fsf = f$ である.

また **(1)** により, $\boldsymbol{w} \in W$ について $s(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i$ と書ける. すると,

$$(sfs)(\boldsymbol{w}) = sf(\sum_i c_i \boldsymbol{v}_i) = s(\sum_i c_i \boldsymbol{w}_i) = \sum_i c_i \boldsymbol{v}_i = s(\boldsymbol{w}).$$

よって $sfs = s$ である.

(3). $\boldsymbol{v} \in V$ とすると, $f(\boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v}) = f\boldsymbol{v} - fsf\boldsymbol{v} = f\boldsymbol{v} - f\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$. また, $sf\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} s$ である. また, **(2)** により, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v}) + sf\boldsymbol{v}$ なので, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} s$. よって $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} s$ である. ところで, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} s$ とすると, $\boldsymbol{v} = s(\boldsymbol{w})$ と書け, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ なので, **(2)** により,

$$\boldsymbol{v} = s(\boldsymbol{w}) = sfs(\boldsymbol{w}) = sf(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}.$$

よって $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} s = \boldsymbol{0}$ であり, 系 21.6 によって和 $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} s$ は直和で $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} s$ を得る.

(4). 上の **(1)** によって $\dim_K \operatorname{Im} s = r = \operatorname{rank} f$. 補題 26.1 と **(3)** により,

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} s = \dim_K \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f.$$

(5). 補題 26.1 と **(1), (3)** から従う.

(6). 表現行列の定義から明らかである. □

26.4 系. $n \geq 0$, V も W も n 次元の K ベクトル空間で, $f : V \to W$ が K 線型写像の時, 次は同値である.

(1) f は単射である.

(2) f は全射である.

(3) f は全単射である.

証明. **(1)**$\Leftrightarrow$**(2)** を言えば良い.

(1) は $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ と同値である. **(2)** は $\operatorname{rank} f = \dim W = n$ と同値である. $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim V = n$ であるから主張が従う. □

(26.5)　ベクトル空間と K 線型写像からなる列

$$\cdots \to V^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} V^n \xrightarrow{d^n} V^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

が V^n で**完全 (exact)** であるとは $\operatorname{Ker} d^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ が成立する事を言う. 列が完全であるとは, すべての場所で完全であることとする. $\operatorname{Ker} d^n \supset \operatorname{Im} d^{n-1}$ が $d^n \circ d^{n-1} = \mathbf{0}$ と同値なので, $\operatorname{Ker} d^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ はそれよりも強い条件である.

(26.6)　列

$$0 \to V \xrightarrow{f} W$$

が完全であるとは, V で完全であることを意味し (端での完全性は問題にしない), $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \mathbf{0}$, つまり $\operatorname{Ker} f = \mathbf{0}$, つまり f が単射と同じ事である.

　列

$$V \xrightarrow{f} W \to 0$$

が完全であることは $\operatorname{Ker} \mathbf{0} = \operatorname{Im} f$, つまり $W = \operatorname{Im} f$, つまり f が全射という事である.

　列

$$0 \to V \xrightarrow{f} W \to 0$$

が完全である事は f が同型である事と同じである.

(26.7)　列

$$0 \to U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W \to 0 \tag{26.7.1}$$

が完全である事は, g が単射で f が全射で, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$ が成立する事である. (26.7.1) の形の完全列を**短完全列 (short exact sequence)** という.

26.8 系. 列 (26.7.1) は短完全列で, U が r 次元で $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ を基底に持ち, W が m 次元で $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を基底に持つとする. このとき V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ となるものに対して (f は全射なのでこのような列は確かに存在する),

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, g(\boldsymbol{u}_1), \ldots, g(\boldsymbol{u}_r) \tag{26.8.1}$$

は V の基底である. 特に,

$$\dim_K V = m + r = \dim_K W + \dim_K U.$$

証明. 補題 26.3 により, $g(\boldsymbol{u}_1),\dots,g(\boldsymbol{u}_r)$ が $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$ の基底なら良い. しかしこれは, $g : U \to \operatorname{Im} g$ が全単射で同型なので, 基底を基底に写すことから明らかである. □

26.9 命題.

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

が有限次元 K ベクトル空間の完全列とする (すなわち, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$). このとき, 線型写像 $s : W \to V$ と $t : V \to U$ で $fsf = f$, $sfs = s$, $gtg = g$, $tgt = t$, $ts = \mathbf{0}$ であるように取ることができる. このとき, $sf + gt = \mathrm{id}_V$ であり,

$$W \xrightarrow{s} V \xrightarrow{t} U$$

は完全である.

証明. (26.2) にあるように $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_r$ と $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m$ をとり, $s = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_r,\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}]_{\underline{\boldsymbol{w}}}$ を構成する. g について, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$ の基底 $\boldsymbol{v}_{r+1},\dots,\boldsymbol{v}_n$ をとり, 各 $r+1 \le j \le n$ について, $g(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{v}_j$ となるように $\boldsymbol{u}_j \in U$ をとる. $t = [\mathbf{0},\dots,\mathbf{0},\boldsymbol{u}_{r+1},\dots,\boldsymbol{u}_n]_{\underline{\boldsymbol{v}}}$ とおくと, t の作り方は s の作り方と同じなので, 補題 26.3 を g と t に適用して, $gtg = g$, $tgt = t$ である. $i > r$ ならば $s(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}$ なので $ts(\boldsymbol{w}_i) = \mathbf{0}$. $i \le r$ ならば $s(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{v}_i$ なので $ts(\boldsymbol{w}_i) = t(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$. よって $ts = \mathbf{0}$ である.

後半を示す. s, t が条件をみたすとする. $\boldsymbol{v} \in V$ について, $\boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ なので, $\boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v} = g\boldsymbol{u}$ と書ける. 両辺に t を施して $ts = \mathbf{0}$ に注意すると $t\boldsymbol{v} = tg\boldsymbol{u}$. よって

$$\boldsymbol{v} = sf\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} - sf\boldsymbol{v} = sf\boldsymbol{v} + g\boldsymbol{u} = sf\boldsymbol{v} + gtg\boldsymbol{u} = sf\boldsymbol{v} + gt\boldsymbol{v} = (sf + gt)\boldsymbol{v}.$$

$\boldsymbol{v}$ は任意ゆえ, $sf + gt = \mathrm{id}_V$.

列の完全性を示す. $ts = \mathbf{0}$ なので $\operatorname{Im} s \subset \operatorname{Ker} t$. $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} t$ とせよ. $\boldsymbol{v} = (sf + gt)\boldsymbol{v} = s(f\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} s$ となり, $\operatorname{Ker} t \subset \operatorname{Im} s$. よって $\operatorname{Im} s = \operatorname{Ker} t$ であり, 列は完全である. □

26.10 定理. V が K ベクトル空間, V_1, V_2 は V のそれぞれ n 次元, m 次元の部分空間でとする. このとき,

$$\dim_K(V_1 \cap V_2) + \dim_K(V_1 + V_2) = m + n.$$

証明. 定理 26.8 により,

$$0 \to V_1 \cap V_2 \xrightarrow{g} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{f} V_1 + V_2 \to 0 \tag{26.10.1}$$

なる完全列を構成すれば良い. $g(\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ で, $f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ で定義する. g が単射で f が全射なのは明らか. $fg(\boldsymbol{u}) = f(-\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. よって $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Im} g$. 逆に, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in \operatorname{Ker} f$ なら, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ なので, $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$ は $V_1 \cap V_2$ に属し, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_2$ とおくと, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = g(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} g$. これは $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g$ を示す. 以上により $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} g$ もいえ, (26.10.1) は完全列となった. □

26.11 命題.

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

が有限次元 K ベクトル空間の完全列とする (すなわち, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$). このとき, 任意の K ベクトル空間 X について,

$$\operatorname{Hom}_K(W, X) \xrightarrow{f_X^{\#}} \operatorname{Hom}_K(V, X) \xrightarrow{g_X^{\#}} \operatorname{Hom}_K(U, X)$$

は完全列である.

証明. $fg = \mathbf{0}$ であるので $h \in \operatorname{Hom}_K(W, X)$ に対して, $g_X^{\#}(f_X^{\#}(h)) = g_X^{\#}(hf) = hfg = \mathbf{0}$. 従って $g_X^{\#} f_X^{\#} = \mathbf{0}$ であり, $\operatorname{Im} f_X^{\#} \subset \operatorname{Ker} g_X^{\#}$. 次に, $k \in \operatorname{Ker} g_X^{\#}$ とする. つまり $kg = \mathbf{0}$ とする. このとき, $s : W \to V$ と $t : V \to U$ を命題 26.9 のようにとると,

$$k = k\mathrm{id}_V = k(sf + gt) = ksf = f_X^{\#}(ks) \in \operatorname{Im} f_X^{\#}$$

となり, $\operatorname{Ker} g_X^{\#} \subset \operatorname{Im} f_X^{\#}$. よって $\operatorname{Im} f_X^{\#} = \operatorname{Ker} g_X^{\#}$ であり, 問題の列は完全である. □

26.12 系.

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

が有限次元 K ベクトル空間の完全列とする (すなわち, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$). このとき, 双対空間のなす列

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{g^*} U^*$$

は完全である. □

26.13 演習. 命題 26.11 の仮定の下で,

$$\operatorname{Hom}_K(X, U) \xrightarrow{g_{\#}^X} \operatorname{Hom}_K(X, V) \xrightarrow{f_{\#}^X} \operatorname{Hom}_K(X, W)$$

は完全である.

27　計算例

27.1 例. $V=\langle e^x, xe^x, x^2e^x\rangle \subset \mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を考える．$D=\frac{d}{dx}$ を微分とすると $D: V\to V$ は K 線型である．また, f に $f(0)$ を対応させる写像 $\psi: V\to\mathbb{R}$ も K 線型. $\varphi: V\to\mathbb{R}^3$ を $\varphi(f)={}^t(f(0),((D-\mathrm{id})(f))(0),((D-\mathrm{id})^2)(f)(0))$ で定義する．計算すると,

$$(\varphi(e^x),\varphi(xe^x),\varphi(x^2e^x))=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

が得られる．$\varphi(e^x),\varphi(xe^x),\varphi(x^2e^x)$ は $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,2\boldsymbol{e}_3$ なので $\mathbb{R}^3$ の基底である．補題 22.11 の **(9)** によって φ は同型で e^x, xe^x, x^2e^x は V の基底である．

　$D: V\to V$ の基底 e^x, xe^x, x^2e^x に関する表現行列を書くと,

$$(De^x, Dxe^x, Dx^2e^x)=(e^x, e^x+xe^x, 2xe^x+x^2e^x)=(e^x, xe^x, x^2e^x)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

であるから表現行列は

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

である．

27.2 例. $A=(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)\in M_{m,n}(K)$ とするとき, A の列ベクトルで張った空間 $V=\langle A\rangle=\langle\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\rangle$ の基底を求めることを考える．

$$\dim_K V=\operatorname{rank}\Phi(A)=\operatorname{rank}A$$

だったことに注意する．$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ が一次独立 (したがって V の基底) であることは $\dim_K V=n$ と同値である．

　まず, A が階数 r の行階段行列の場合を考える． A の角のある列が $j_1,\dots,j_r$ 列目とする時, $B=(\boldsymbol{a}_{j_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_r})$ とおくと,

$$\langle B\rangle=\langle\boldsymbol{a}_{j_1},\dots,\boldsymbol{a}_{j_r}\rangle\subset V\subset\langle\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_r\rangle$$

であるが, B も階数 r の行階段行列なので, $\dim_K\langle B\rangle=r=\dim_K\langle\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_r\rangle$. 包含関係があって次元が等しいので

$$V=\langle\boldsymbol{a}_{j_1},\dots,\boldsymbol{a}_{j_r}\rangle=\langle\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_r\rangle$$

で $\boldsymbol{a}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ は V の基底である.

次に A が一般の場合を考える. $PA = (P\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ P\boldsymbol{a}_n)$ を A の行階段標準形とする. $j_1, \dots, j_r$ 列目に PA の角があるとすると, $\boldsymbol{e}_i = P\boldsymbol{a}_{j_i}$ であり, $P\boldsymbol{a}_{j_1}, \dots, P\boldsymbol{a}_{j_r}$ は一次独立. よって $\boldsymbol{a}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ も一次独立であり, $\dim_K V = r$ なので, これが求める基底である.

27.3 補題. $f : X \to Y$ が写像で, $A, B \subset Y$ のとき,

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

である.

証明. $x \in X$ について, $x \in f^{-1}(A \cap B)$ は $f(x) \in A \cap B$ と同値. これは $f(x) \in A$ かつ $f(x) \in B$ ということであり, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ と同値である. □

(27.4) 次に A が (m,n) 行列, B が (m,n') 行列として, $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ の基底を具体的に求めたい. $C = (A|B)$ とおいて, $PC = (PA|PB)$ を C の行階段標準形とする. $\operatorname{rank} C = \dim_K(\langle A \rangle + \langle B \rangle)$ である. $r_A = \operatorname{rank} A$, $r_B = \operatorname{rank} B$, $r_C = \operatorname{rank} C$ とおくと, 定理 26.10 によって $\dim_K(\langle A \rangle \cap \langle B \rangle) = r_A + r_B - r_C$ である.

PB のみに列基本変形を加え,

$$PC\tilde{Q} = \left(\begin{array}{c|cc} A' & O & D \\ O & E_{m-r_A, r_C-r_A}(r_C - r_A) & O \end{array}\right)$$

と $(r_A, m - r_A; n, r_C - r_A, n' - r_C + r_A)$ 型に区分される. ここに

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q \end{pmatrix}$$

は $(n, n'; n, n')$ 型に区分された正則行列で, $PC = (PA|PB)$ の PB の方にだけ影響を与えて PBQ にする.

27.5 補題. **(1)** $\langle PA \rangle \cap \langle PB \rangle = \langle \tilde{D} \rangle$. ここに $\tilde{D} = \begin{pmatrix} D \\ O \end{pmatrix}$.

(2) PBQ の $j_1, \dots, j_u$ 列 (ただし $u = r_A + r_B - r_C$ で $r_C - r_A < j_1 < \cdots < j_u \leq n'$) を並べた行列が $\tilde{D}$ のいくつかの列をとった $\begin{pmatrix} D_1 \\ O \end{pmatrix}$ となっていて, D_1 の列ベクトルが $\langle D \rangle$ の基底になるようにとると, BQ の $j_1, \dots, j_u$ 列目を並べると $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle$ の基底である.

証明. **(1)**. PA は PC のはじめの n 列なので行階段標準行列である. よって $\langle PA\rangle = \langle \boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{r_A}\rangle$. $\tilde{D}$ の r_A+1 行目以降が O であることから, $\langle\tilde{D}\rangle\subset\langle PA\rangle$. また, $\tilde{D}$ は PBQ の列をいくつかとった行列なので, $\langle\tilde{D}\rangle\subset\langle PBQ\rangle=\langle PB\rangle$. よって $\langle\tilde{D}\rangle\subset\langle PA\rangle\cap\langle PB\rangle$ であるが, $f:K^m\to K^m$ を $f=\Phi(P)$ で定義すると,

$$f^{-1}(\langle PA\rangle\cap\langle PB\rangle)=f^{-1}(\langle PA\rangle)\cap f^{-1}(\langle PB\rangle)=\langle A\rangle\cap\langle B\rangle$$

で f^{-1} は同型なので $\dim(\langle PA\rangle\cap\langle PB\rangle)=r_A+r_B-r_C$ で

$$\dim\langle\tilde{D}\rangle=\operatorname{rank}D=\operatorname{rank}PBQ-(r_C-r_A)=r_A+r_B-r_C.$$

次元が等しいので $\langle\tilde{D}\rangle=\langle PA\rangle\cap\langle PB\rangle$.

(2). PBQ の $j_1,\dots,j_u$ 列目を並べて $\langle\tilde{D}\rangle=\langle PA\rangle\cap\langle PB\rangle$ の基底を得たのだから, これに P^{-1} をかけて, $\langle A\rangle\cap\langle B\rangle$ の基底を得る. □

27.6 注意. よって

$$(PA|PBQ)=\left(\begin{array}{c|cc} A_1 & O & D\\ O & E_u & O\end{array}\right)$$

とはじめの $n+r_C-r_A$ 列が行階段標準となるように基本変形して $\langle D\rangle$ の基底を求め, BQ 同じ位置のベクトルを求めれば良いが, 実は, はじめの $n+r_C-r_A$ 列が行階段行列となっていれば同じ計算ができる. そのあと, Q を変えずに行基本変形だけで補題 27.5 の形にできるからである.

27.7 例. 行列

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&1&-1\\-1&1&2&-1&-1&3\\1&-1&-2&2&0&-5\\1&-1&0&1&2&2\\0&0&0&-1&0&1\\0&0&1&2&-3&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&2&0&-2&1&5\\2&-5&6&7&-1&-9\\-1&6&-7&-11&6&21\\2&-2&9&7&-2&-7\\0&-1&0&1&-1&-3\\4&0&1&-7&13&28\end{pmatrix}$$

について, $\langle A\rangle\cap\langle B\rangle$ の次元と基底を求めよう. $C=(A|B)$ とおいて, C を行基本変形して行階段標準形にすると,

$$PC=(PA|PB)=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1&-1&0&0&0&1&0&1&-1&-2&1&4\\0&0&1&0&0&2&0&-1&2&3&-2&-6\\0&0&0&1&0&-1&0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&1&1&0&-1&3&4&-3&-8\\0&0&0&0&0&0&1&-1&2&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

となる. すると明らかに

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&-1&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

とおけば,

$$PBQ=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&D\\1&\mathbf{0}\\0&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2&1&4\\0&-1&2&3&-2&-6\\0&0&1&-1&1&0\\0&-1&3&4&-3&-8\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となる.

$$D=\begin{pmatrix}1&-1&-2&1&4\\-1&2&3&-2&-6\\0&1&-1&1&0\\-1&3&4&-3&-8\end{pmatrix}$$

について, これを行階段標準形にして,

$$P_1D=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

を得るので,

$$\dim_K(\langle A\rangle\cap\langle B\rangle)=\operatorname{rank}D=3$$

を得る. D の 1, 2, 4 列目が一次独立なので, PBQ の 2, 3, 5 列目が一次独立となり,

$$BQ=\begin{pmatrix}0&2&0&-2&1&5\\2&-3&2&5&-3&-11\\-1&5&-5&-10&7&22\\2&0&5&5&-4&-9\\0&-1&0&1&-1&-3\\4&4&-7&-11&9&24\end{pmatrix}$$

の 2, 3, 5 列目が $\langle A\rangle \cap \langle B\rangle$ の基底である．すなわち,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ -4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

は求める基底になっている.

27.8 演習. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, $f : M_2(K) \to M_2(K)$ を $f(A) = PAP^{-1}$ で定義する.

(1) f は K 線型写像であることを示せ.

(2) f の $M_2(K)$ の基底 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ に関する表現行列を求めよ.

27.9 演習. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ -4 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

について, $\langle A\rangle \cap \langle B\rangle$ の次元と基底を求めよ.

28　K^n の標準内積とユニタリ行列, 直交行列

(28.1)　$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ および $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の標準内積を

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a}^* \boldsymbol{b} = {}^t\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \bar{a}_1 b_1 + \bar{a}_2 b_2 + \cdots + \bar{a}_n b_n$$

によって定義する[6]. $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準内積という. これの定義域を制限して $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と考えたものを $\mathbb{R}^n$ の標準内積という. 実数の複素共役はその数自身なので, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ のとき,

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

となっている.

28.2 補題. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して次が成立する.

(0) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{C}$ である.

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \in \mathbb{R}$ であり, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$.

(2) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = 0$ である.

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle}$.

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \mu (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.

□

いずれも容易に確かめられる. また, 上記 **(3), (4)** を使って形式的に

$$\langle \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \bar{\lambda} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \bar{\mu} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \tag{28.2.1}$$

を導くことができる (直接示しても容易である).

28.3 補題. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する.

(0) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$ である.

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$.

(2) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = 0$ である.

[6] 教科書と定義が違うので注意

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$.

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.

証明. **(0)** は明らかであり, **(0)** と補題 28.2 から残りの主張は容易に従う. □

(3), (4) から形式的に

$$\langle \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle + \mu\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$$

を導くことができる ((28.2.1) からも自明である).

(28.4) 以上のことを念頭に, 次の定義をする.

28.5 定義. V を複素ベクトル空間とする. 写像 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ が次の性質を持つとき, V の**エルミート内積**という. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して

(1) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \in \mathbb{R}$ であり, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \geq 0$.

(2) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = 0$ である.

(3) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle}$.

(4) $\langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$.

エルミート内積を持つ複素ベクトル空間を**複素計量ベクトル空間**と呼ぶ.

28.6 例. 定義から $\mathbb{C}^n$ の標準内積はエルミート内積である.

(28.7) n 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, $\operatorname{tr} A = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ と定義し, $\operatorname{trace} A$ を A の**トレース (trace)** という. tr は線型である. つまり, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ および $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$$

が成立する. また, $\operatorname{tr} {}^tA = \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} \bar{A} = \overline{\operatorname{tr} A}$, $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$ も容易であろう.

28.8 例. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ に対して $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^*B)$ と定義するとエルミート内積である.

28.9 演習. 確かめよ.

28.10 例. $I = [a, b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とする．$\mathrm{Map}(I, \mathbb{C})$ の中で連続関数の全体 V は部分空間である．ここに $f : I \to \mathbb{C}$ が連続であるとは, 任意の $x \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $y \in I$, $|x - y| < \delta$ である限り $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立することをいう．これは $f(x) = a(x) + ib(x)$ ($a(x)$, $b(x)$ は実数値の関数) と書いたとき, $a(x)$, $b(x)$ が共に連続であることと同値である．さて, $f, g \in V$ に対して,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

と定義すると V のエルミート内積である.

28.11 演習. 確かめよ.

28.12 演習. V が複素計量ベクトル空間で $\langle\ ,\ \rangle$ がそのエルミート内積のとき, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ に対して,

$$\langle \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \bar{\lambda} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \bar{\mu} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$$

が成立することを証明せよ.

(28.13) 内積をもとにして, ベクトルの長さ, 2 点間の距離, ベクトルの直交を定義できる. V を複素計量ベクトル空間とし, $\langle\ ,\ \rangle$ をそのエルミート内積とする.

(28.14) ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ の**長さ**とは,

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$$

と定義する.

(28.15) 上記の長さが $V = \mathbb{C}^n$ で内積が標準内積の場合に何であるかを確認すると, $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

特に $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の場合は

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

であり $n = 2, 3$ の場合によく知っているベクトルの長さと一致している.

(28.16)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の距離とは

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|$$

のことだと定義する.

(28.17)　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**直交** **(perpendicular)** するとは, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ であることだと定義する. これは $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ が直交することと同値である. このことを　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表す.

28.18 演習. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとき,

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

であることを示せ.

28.19 補題. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が V のベクトルで $\lambda \in \mathbb{C}$ のとき, 次が成立する.

(1) $\|\boldsymbol{a}\|$ は非負の実数である. $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{a} = 0$ である.

(2) $\|\lambda \boldsymbol{a}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{a}\|$.

(3) $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|$. 等号成立条件は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一方が他方の定数倍になっていることである.

(4) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$. 等号成立条件は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の一方が他方の負でない実数倍であることである.

証明. **(1)**. 非負の実数であることは定義から明らか. 後半は $\|\boldsymbol{a}\|^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ だから $\boldsymbol{a} = 0$.

(2).

$$\|\lambda \boldsymbol{a}\|^2 = \langle \lambda \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{a} \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = |\lambda|^2 \cdot \|\boldsymbol{a}\|^2$$

だから $\|\lambda \boldsymbol{a}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{a}\|$.

(3), (4). $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ ならば **(3), (4)** の不等式は $0 = 0$ の等号で成立しており, 一方等号成立条件も $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の 0 倍だから成立しており, 問題ない. よって $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ として考えれば良い. まず **(3)** を考える.

$$\boldsymbol{c} = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

とおくと, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle = 0$ であるので,

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 (\|\boldsymbol{c}\|^2 + \|\boldsymbol{d}\|^2) \geq \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{c}\|^2 = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|^2$$

であり, 等号成立は $\boldsymbol{d}=0$, すなわち $\boldsymbol{b}=\frac{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ と同値. これから $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の定数倍であることは明らか. 逆に $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の一方が他方の定数倍ならば, $\boldsymbol{a}\neq 0$ なので, $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ と書ける. このとき, $\boldsymbol{b}=\frac{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ であることは容易. よって **(3)** が示された.

(4) を考える.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+\|\boldsymbol{b}\|^2\\ &\leq \|\boldsymbol{a}\|^2+2|\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|+\|\boldsymbol{b}\|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

であり, 等号成立の条件は, 第一の不等号が等号 (つまり $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ が非負の実数) で, かつ第二の不等号が等号 (つまり **(3)** で等号成立, つまり $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ と書ける) であることで, これは $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ で λ が非負の実数であることと同値である. ここに複素数 $a+bi$ に対して $\mathrm{Re}(a+bi)$ は実部 a を意味する. □

28.20 補題. V が複素計量ベクトル空間, W がその部分空間のとき, $\langle\ ,\ \rangle$ の定義域を $W\times W$ に制限したものを考えると W のエルミート内積である. したがって W も複素計量ベクトル空間になる.

証明. 明らかである. □

28.21 定義. V が実ベクトル空間とする. 写像 $\langle\ ,\ \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ が次の条件をみたすとき, V の**ユークリッド内積**という. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V$ および $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ について,

(1) $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle\geq 0$.

(2) $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0$ ならば $\boldsymbol{a}=0$ である.

(3) $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

(4) $\langle \boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}\rangle=\lambda\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$.

ユークリッド内積を持つ実ベクトル空間を**実計量ベクトル空間**という.

28.22 例. $\mathbb{R}^n$ の標準内積はユークリッド内積である. $\mathbb{R}^n$ に標準内積を考え合わせた実計量ベクトル空間を**ユークリッド空間 (Euclidian space)** という.

28.23 補題. V が複素計量ベクトル空間のとき, V のスカラーを制限して実ベクトル空間だと思ったものに, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ で $(\ ,\ ):V\times V\to\mathbb{R}$ を定義すると, $(\ ,\ )$ はユークリッド内積である.

証明. 容易であるので省略する. □

28.24 補題. V が実計量ベクトル空間, W がその部分空間のとき, V のユークリッド内積の定義域を $W\times W$ に制限すると W のユークリッド内積となり, W は実計量ベクトル空間である. □

(28.25)　V が複素計量ベクトル空間で, W がその実ベクトル空間としての部分空間で, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$) が成立するとすると, $\langle\ ,\ \rangle$ を $W \times W$ に制限したものは補題 28.23 と補題 28.24 によってユークリッド内積である. よって W は実計量ベクトル空間となる.

28.26 例. 例 28.8 において, $M_n(\mathbb{C})$ の実ベクトル空間としての部分空間 $M_n(\mathbb{R})$ にエルミート内積 $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^* B)$ を制限すると $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ について, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}({}^t AB) \in \mathbb{R}$ であり, これは (28.25) により, $M_n(\mathbb{R})$ のユークリッド内積である.

28.27 例. 例 28.10 において, V の実ベクトル空間としての部分空間として I 上の実数値連続関数全体 W を考える. $f, g \in W$ について,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

であり, これは (28.25) により, W のユークリッド内積である.

(28.28)　任意の実計量ベクトル空間 W はある複素計量ベクトル空間 V で W が V の実ベクトル空間として部分空間になっているものから, (28.25) のようにして得られるか. この答えは Yes である. 与えられた実計量ベクトル空間 W に対して, 実ベクトル空間 $V = W \oplus W$ の元 $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}')$ を $\boldsymbol{w} + i\boldsymbol{w}'$ と書くことにする. V への $\mathbb{C}$ の作用を

$$(a + bi)(\boldsymbol{w} + i\boldsymbol{w}') = (a\boldsymbol{w} - b\boldsymbol{w}') + i(a\boldsymbol{w}' + b\boldsymbol{w})$$

で入れることにより, V は $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる (テンソル積を知っている人はこれが本質的に係数拡大 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ だと分かるだろう). 内積を

$$\langle \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} + i\boldsymbol{w}' \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \rangle + i(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}' \rangle - \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} \rangle)$$

で入れればエルミート内積になることが確かめられる. W は V の実ベクトル空間としての部分空間になっていて ($\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{0}$ とみなすのである), $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ のとき, 元の定義と一致する.

(28.29)　このように, 実計量ベクトル空間は複素計量ベクトル空間の部分空間とみなせるので, 複素計量ベクトル空間に対する定義をそのまま実計量ベクトル空間にも適用するのは自然である. 特にベクトルの長さ (28.14), ベクトルとベクトルの距離 (28.16), ベクトルとベクトルの直交 (28.17) などは同じ定義で実計量ベクトル空間に対しても定義される. また, 演習 28.18 の主張, 補題 28.19 の主張は実計量ベクトル空間でもそのまま成り立つ (それを含む複素計量ベクトル空間で成り立つのだから明らかだし, 証明をそのままなぞっても良い).

(28.30)　補題 28.19 の実計量ベクトル空間版によって, V が実計量ベクトル空間で, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \setminus \{0\}$ のとき,

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leq 1$$

である. よって, $\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ となる角度 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ が一意的に存在する. θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす**角 (angle)** という.

29　直交補空間と正規直交基底

(29.1)　V を複素または実の計量ベクトル空間とし, K をスカラーの全体 (つまり $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$) とする. $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対して, $(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle) \in M_n(K)$ を $\underline{\boldsymbol{v}}$ の**グラム行列 (Gram matrix)** という.

(29.2)　グラム行列が対角行列でどの対角成分も 0 でない時, $\underline{\boldsymbol{v}}$ は**直交系 (orthogonal system)** という. グラム行列が単位行列の時, **正規直交系 (orthonormal system)** という. さらに V の基底にもなっているとき, **直交基底 (orthogonal basis)**, **正規直交基底 (orthonarmal basis)** (略して ONB) という.

29.3 補題. 直交系は一次独立である. 特に正規直交系は一次独立である.

証明. $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が直交系とし,

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

と仮定する. 各 $i = 1, \ldots, n$ について, 両辺に $\langle \boldsymbol{v}_i, \ \rangle$ を適用して, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ $(i \neq j)$ であることを用いると, $a_i\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0$ を得る. $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle \neq 0$ なので, $a_i = 0$ となり, $\underline{\boldsymbol{v}}$ は一次独立である. □

従って直交系が基底かどうかは V が生成されるかどうかで決まる.

(29.4)　一般に V が K ベクトル空間 (計量ベクトル空間でなくても良い) で, $S \subset V$ のとき,

$$\langle S \rangle = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{ある } r \geq 0 \text{ とある } \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V \text{ および } c_1, \ldots, c_r \in K \text{ について, } \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} c_i\boldsymbol{v}_i\}$$

とおくと, $\langle S \rangle$ は S を含む最小の V の部分空間である. これを S で生成された V の部分空間という. 上で $r = 0$ の場合に対応して $\boldsymbol{0}$ が $\langle S \rangle$ に属していることに注意しよう. 特に $\langle \emptyset \rangle = \boldsymbol{0}$ である.

(29.5)　話を計量ベクトル空間に戻す. $\boldsymbol{a} \in V$ に対して, $\langle \boldsymbol{a}, \ \rangle$ は V から $\mathcal{C}$ への ($\boldsymbol{b}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ に写す) 写像であり, 内積の定義によって線型である. 従って $\operatorname{Ker}\langle \boldsymbol{a}, \ \rangle$ は V の部分空間である. これを $\boldsymbol{a}^\perp$ で表す. V の部分集合 S について,

$$\bigcap_{\boldsymbol{a} \in S} \boldsymbol{a}^\perp = \{\boldsymbol{b} \in V \mid \text{すべての } \boldsymbol{a} \in S \text{ について } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0\}$$

は部分空間の交わりだから部分空間 (演習 19.14) で, これを $S^\perp$ で表す. $S=\emptyset$ のときは $\emptyset^\perp = V$ とみなす.

29.6 補題. S, T を V の部分集合とすると, 次が成立する.

(1) $S \subset T$ ならば, $S^\perp \supset T^\perp$.

(2) $S \subset S^{\perp\perp}$.

(3) $S \cap S^\perp \subset \{\mathbf{0}\}$.

(4) $(S \cup T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$.

(5) $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

証明. **(1)**. $\boldsymbol{b} \in T^\perp$ とし, $\boldsymbol{a} \in S$ とすると $S \subset T$ だから $\boldsymbol{a} \in T$ であり, 従って $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$. これは $\boldsymbol{b} \in S^\perp$ を示す. よって $T^\perp \subset S^\perp$ である.

(2). $\boldsymbol{a} \in S$, $\boldsymbol{b} \in S^\perp$ とすると, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle} = \bar{0} = 0$. よって $\boldsymbol{a} \in S^{\perp\perp}$. これは $S \subset S^{\perp\perp}$ を示す.

(3). $\boldsymbol{a} \in S \cap S^\perp$ とすると, $\boldsymbol{a} \in S$ で $\boldsymbol{a} \in S^\perp$ であるから $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$. 従って $\boldsymbol{a} = 0$ であり, $S \cap S^\perp \subset \{\mathbf{0}\}$.

(4). $\boldsymbol{a} \in V$ について,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} \in (S \cup T)^\perp &\iff \forall \boldsymbol{a} \in S \cup T \ \ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \\ &\iff \forall \boldsymbol{a} \in S \ \ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \text{ かつ } \forall \boldsymbol{a} \in T \ \ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \\ &\iff \boldsymbol{a} \in S^\perp \text{ かつ } \boldsymbol{a} \in T^\perp \iff \boldsymbol{a} \in S^\perp \cap T^\perp\end{aligned}$$

だから求める結果を得る.

(5). $S \subset \langle S \rangle$ であるから, $S^\perp \supset \langle S \rangle^\perp$. 逆に $\boldsymbol{a} \in S^\perp$ で $\boldsymbol{b} \in \langle S \rangle$ とすると, $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^r c_i \boldsymbol{v}_i$ ($\boldsymbol{v}_i \in S$, $c_i \in K$) と書ける. すると,

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^r \bar{c}_i \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{a} \rangle = 0.$$

よって $\boldsymbol{a} \in \langle S \rangle^\perp$. 以上により, $S^\perp \subset \langle S \rangle^\perp$ であり, $S^\perp \supset \langle S \rangle^\perp$ と合わせて $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$ を得る. □

29.7 系. W_1, W_2 が V の部分空間の時,

(1) $W_1 \cap W_1^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(2) $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

証明. **(1)**. 補題 29.6 の **(3)** から明白である.

(2). 補題 29.6 の **(4), (5)** と補題 21.3 によって,

$$(W_1+W_2)^\perp = \langle W_1 \cup W_2 \rangle^\perp = (W_1 \cup W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

□

(29.8) $\underline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ を V の正規直交系とする. $W = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ は $\underline{\boldsymbol{e}}$ を基底に持つ部分空間とする. $\pi = \pi_{\underline{\boldsymbol{e}}} : V \to W$ を

$$\pi(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_i$$

で定義する. π が K 線型写像であることは容易に確かめられる.

29.9 補題. 上の記号の下で,

(1) $\boldsymbol{v} - \pi(\boldsymbol{v}) \in W^\perp$.

(2) $V = W \oplus W^\perp$.

(3) $\pi : V \to W$ は部分空間 W のみによって決まり, その正規直交基底 $\underline{\boldsymbol{e}}$ の選び方に依存しない.

証明. **(1)**. $i = 1, \ldots, r$ について

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v} - \pi(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v} \rangle - \sum_{j=1}^{r} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$$

なので, 補題 29.6 の **(5)** によって $\boldsymbol{v} - \pi(\boldsymbol{v}) \in \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r\}^\perp = W^\perp$.

(2). 補題 29.7 の **(1)** によって $W + W^\perp$ は直和である. **(1)** によって, $\boldsymbol{v} \in V$ について,

$$\boldsymbol{v} = \pi(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \pi(\boldsymbol{v}))$$

は $\boldsymbol{v}$ を W の元と $W^\perp$ の元の和に表しており, $V = W \oplus W^\perp$ である.

(3). $\pi' = \pi_{\underline{\boldsymbol{e}}'}$ を別の W の正規直交基底から決まる同様の K 線型写像とすると,

$$\boldsymbol{v} = \pi(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \pi(\boldsymbol{v})) = \pi'(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \pi'(\boldsymbol{v}))$$

は同じ $\boldsymbol{v}$ を 2 通りに W の元と $W^\perp$ の元に表している. $W + W^\perp$ は直和なので, 表しかたは一意的で, $\pi(\boldsymbol{v}) = \pi'(\boldsymbol{v})$ であり, これは $\pi = \pi'$ を示しており, π は基底の取り方によらない. □

(29.10) $\pi : V \to W$ を W への**正射影**または**直交射影** **(orthogonal projection)** という.

29.11 定理. V を n 次元の複素または実計量ベクトル空間, $0 \le r \le n$ とする. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は正規直交系とする. このとき, 次をみたすような V の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が存在する.

(1) $i = 1, \ldots, r$ について $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$.

(2) $i = 1, \ldots, n$ について $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$.

証明. n についての数学的帰納法による. $n = 0$ のとき, 空列は正規直交基底であり, **(1)**, **(2)** は成立している.

$n > 0$ として, n が小さいときには定理は正しいとする. $r = n$ ならば, $i = 1, \ldots, n$ について $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$ とおいて条件をみたす正規直交基底になっているので主張は明らかである. $r < n$ とする. 帰納法の仮定を $V_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle$ とその基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ とに適用すると, V_1 の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ で $i = 1, \ldots, r$ について $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{v}_i$ であって, $i = 1, \ldots, n-1$ について $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ であるものがとれることが分かる.

さて $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立なので, 補題 22.14 によって $\boldsymbol{v}_n \notin V_1$. そこで補題 29.9 の **(1)** によれば, $\pi : V \to V_1$ を直交射影とするとき, $\boldsymbol{v}_n^* = \boldsymbol{v}_n - \pi(\boldsymbol{v}_n)$ とおくと $\boldsymbol{v}_n \notin V_1$ だから $\boldsymbol{v}_n^* \neq 0$ で $\boldsymbol{v}_n^* \in V_1^{\perp}$. $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{v}_n^* / \|\boldsymbol{v}_n^*\|$ とおけば $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n$ は正規直交系である. 特に n 次元空間の長さ n の一次独立な列なので基底であり, 条件 **(1), (2)** をみたす正規直交基底が得られた. □

29.12 系. 有限次元の計量ベクトル空間は正規直交基底を持つ.

証明. V を n 次元の計量ベクトル空間としよう. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する. $r = 0$ として $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ を空列として定理 29.11 を適用すればよい. □

(29.13) 定理 29.11 の証明中で,

$$\boldsymbol{v}_n^* = \boldsymbol{v}_n - \pi(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}_n \rangle \boldsymbol{e}_i$$

と具体的に計算できることに注意する. つまり, 定理の証明は与えられた基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から出発して具体的に正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を構成する手続きを与えている. この手続きを **Schmidt 正規直交化 (Schmidt orthonormalization)** という (Schmidt 直交化, Gram–Schmidt 直交化などとも呼ばれる).

29.14 例. $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体の空間 V の部分空間 $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ の正規直交基底を Schmidt 正規直交化で求めよう．まず $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1^* = 1$ を正規化して, $\boldsymbol{e}_1 = 1$. 次に, $\boldsymbol{v}_2 = x$ から

$$\boldsymbol{v}_2^* = \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{e}_1 = x - (\int_0^1 x\,dx) \cdot 1 = x - 1/2.$$

ところで

$$\|\boldsymbol{v}_2^*\| = \sqrt{\int_0^1 (x-1/2)^2\,dx} = 1/12.$$

よって

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2^* / \|\boldsymbol{v}_2^*\| = 2\sqrt{3}(x - 1/2).$$

次に $\boldsymbol{v}_3 = x^2$ から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_3^* &= \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{e}_1 - \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{e}_2 \\ &= x^2 - (\int_0^1 x^2\,dx) \cdot 1 - (\int_0^1 2\sqrt{3}(x-1/2)x^2\,dx) 2\sqrt{3}(x - 1/2) \\ &= x^2 - 1/3 - (x - 1/2) = x^2 - x + 1/6.\end{aligned}$$

そこで

$$\|\boldsymbol{v}_3^*\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2\,dx} = 1/\sqrt{180}.$$

なので $\boldsymbol{e}_3 = \sqrt{180}(x^2 - x + 1/6) = 2\sqrt{45}(x^2 - x + 1/6)$.

　よって

$$1, 2\sqrt{3}(x - 1/2), 2\sqrt{45}(x^2 - x + 1/6)$$

は W の正規直交基底である.

29.15 演習. $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に Schmidt 正規直交化を施して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ.

29.16 演習. n 次元計量ベクトル空間 V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に Schmidt 正規直交化を施して $\underline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を得たとき, $\underline{\boldsymbol{v}}$ を $\underline{\boldsymbol{e}}$ で表した基底の変換行列 $T(\underline{\boldsymbol{e}}, \underline{\boldsymbol{v}})$ は上半三角行列であることを示せ.

29.17 演習. V が計量ベクトル空間, W が V の有限次元部分空間とするとき $W^{\perp\perp} = W$ であることを示せ.

29.18 演習. V が有限次元計量ベクトル空間, W_1, W_2 が V の部分空間とするとき,

$$(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

であることを示せ.

30 ユニタリ行列と直交行列

(30.1) $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ とする．このとき, A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の標準内積に関するグラム行列は

$$(\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle) = (\boldsymbol{a}_i^* \boldsymbol{a}_j) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \boldsymbol{a}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^* \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) = A^* A$$

である．従って $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{C}^n$ が正規直交基底である条件は, $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ とおくときに $A^* A = E_n$ である．

30.2 定義. $A \in M_n(\mathbb{C})$ が**ユニタリ行列 (unitary matrix)** であるとは, $A^* A = E_n$ が成立することをいう．

(30.3) これは A の列ベクトルが $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底をなすことと同じである．また, これは定理 10.3 によれば A が正則行列で $A^* = A^{-1}$ であることとも同値である．

(30.4) 実正方行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ がユニタリ行列であることは ${}^t\!AA = E_n$ と同値である．そこで次の定義に至る．

30.5 定義. $A \in M_n(\mathbb{C})$ が**直交行列 (orthogonal matrix)** であるとは, ${}^t\!AA = E_n$ であることをいう．

(30.6) 実ユニタリ行列と実直交行列は同一概念であるが, ふつうは実直交行列という．しかし, 本講義では実と複素を並行して扱うので, 実ユニタリという言い方をすることがある．

30.7 補題. $A \in M_n(K)$ が n 次正則行列のとき, $A = TB$ で $T \in M_n(K)$ はユニタリ行列, $B \in \mathrm{UM}_n(K)$ と分解することができる．

証明. $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ とし, これら列ベクトルに Schmidt 正規直交化を施して正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を得たとして, $T = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ とおくと, T はユニタリで, 基底の変換行列を B とおくと $A = TB$ で B は上半三角である． □

(30.8)　2 次の実直交行列をすべて求めよう.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)$$

が実直交行列とする. $\|\boldsymbol{a}_1\| = 1$ であるから, $a^2 + c^2 = 1$ である. そこで, ある $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いて $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ と表される. $\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と直交するので, $k^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ と書ける. $\|\boldsymbol{a}_2\| = 1$ なので $k^2 = 1$. よって ${}^t(b, d) = {}^t(\mp\sin\theta, \pm\cos\theta)$ となる. つまり,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \text{ または } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = R'(\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

と書けることが分かった. 逆にこれらの行列は任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して実直交行列である. $\det R(\theta) = 1$ であるが, $\det R'(\theta) = -1$ であることに注意する.

30.9 演習. $A \in M_n(\mathbb{C})$ について, $|A^*| = \overline{|A|}$ を示せ. このことを用いて, A が n 次のユニタリ行列のとき, $|\det A| = 1$ であることを示せ. また, 実直交行列 A について $\det A = \pm 1$ を示せ.

30.10 演習. A, B が n 次のユニタリ行列のとき, 次を示せ.

(1) 単位行列 E_n はユニタリ行列である.

(2) AB はユニタリ行列である.

(3) A は正則で, A^{-1} はユニタリ行列である.

(30.11)　$M_n(K)$ の部分集合 G が次の条件をみたすとき, G は**行列群 (matrix group)** であるという.

(1) 単位行列 E_n は G に属する.

(2) $A, B \in G$ であれば $AB \in G$.

(3) $A \in G$ であれば A は正則行列で $A^{-1} \in G$.

演習 30.10 によると, n 次 (複素) ユニタリ行列の全体を U_n で表すことにすると, U_n は行列群である. n 次実直交行列全体 O_n も行列群である. U_n を n 次の**ユニタリ群 (unitary group)**, O_n を n 次の**直交群 (orthogonal group)** と呼ぶ.

(30.12) 次の集合も行列群である.

(1) すべての K 係数 n 次正則行列全体 $\mathrm{GL}_n(K)$(n 次**一般線型群 (general linear group)** という). 群論を学べば, 行列群とは一般線型群の部分群のことであると理解されよう.

(2) 単位行列のみからなる集合 $\{E_n\}$ (自明な行列群).

(3) すべての行列式が 1 の K 係数の正方行列全体 $\mathrm{SL}_n(K)$(n 次**特殊線型群 (special linear group)** という).

(4) 符号行列の全体 $\{E(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$. これは O_n の部分集合である.

(5) 共通の $M_n(K)$ に含まれる行列群の交わりはふたたび行列群である. たとえば, $U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$ は行列群である (これを SU_n で表して, n 次の**特殊ユニタリ群 (special unitary group)** と呼ぶ.

(6) $\mathrm{UM}_n(K) \cap GL_n(K)$, $\mathrm{LM}_n(K) \cap GL_n(K)$, $\mathrm{DM}_n(K) \cap GL_n(K)$ は行列群である.

これらのうち, **(2)** と **(4)** の例は有限集合である.

30.13 演習. 確かに行列群であることを確かめよ.

31　固有値と固有空間

(31.1)　$A \in M_n(K)$, $\lambda \in K$ とする.

$$E_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(\Phi(A - \lambda E_n)) = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid (A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

とおく. $(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ と同じであることに注意しよう. $E_\lambda(A) \neq \mathbf{0}$ のとき λ は A の**固有値 (eigenvalue)** であるという. また, $\boldsymbol{x} \in E_\lambda(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ を A の固有値 λ の**固有ベクトル (eigenvector)** という. つまり, $\lambda \in K$ が A の固有値であることは, 固有値 λ の固有ベクトルが存在することである.

(31.2)　t を変数とする. 行列式

$$F_A(t) = \det(tE_n - A) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{22} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

は

(31.2.1)　$$F_A(t) = t^n - \mathrm{tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

という形をした K 係数の t についての n 次の多項式である. $F_A(t)$ を A の**固有多項式**あるいは**特性多項式 (characteristic polynomial)** と呼ぶ.

(31.3)　K 係数の多項式 $f(t)$ に対して, 方程式 $f(t) = 0$ の解を $f(t)$ の**根 (root)** という. 因数定理によって $a \in \mathbb{C}$ が $f(t)$ の根であることと, $f(t) = (t-a)g(t)$ となる多項式 $g(t)$ が存在することは同値である. $f(t) = (t-a)^r g(t)$ なる $g(t)$ が存在する最大の r を a の $f(t)$ における**重複度 (multiplicity)** という. 重複度 2 以上の根を**重根 (multiple root)** という. 重根ではない根 (1 重根) を**単根 (simple root)** という.

31.4 補題. $A \in M_n(K)$, $\lambda \in K$ に対して, 次は同値である.

(1) λ は A の固有値である.

(2) $\mathrm{rank}(\lambda E_n - A) < n$ である.

(3) $\det(\lambda E_n - A) = 0$ である.

(4) λ は $F_A(t)$ の根である.

証明. **(1)**$\Leftrightarrow$**(2)** は命題 12.11 から明らかである.

(2) は命題 10.2 によって $\lambda E_n - A$ が正則ではないことと同値であり, それは系 17.4 によって **(3)** と同値である.

(3)$\Leftrightarrow$**(4)** は $F_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$ であるから明らかである. □

(31.5) したがって, 固有値を求めるには $F_A(t) = 0$ という方程式を解けばよい. そこで $F_A(t)$ を計算することが大事になる. (31.2.1) において, $F_A(t)$ の t^r の係数は容易に分かるように

$$(-1)^{n-r} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-r} \leq n} [i_1, \ldots, i_{n-r}; i_1, \ldots, i_{n-r}]$$

である.

31.6 例.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

のとき,

$$F_A(t) = t^3 - (\operatorname{tr} A)t^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) t - (\det A)$$

31.7 例.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよう.

$$\begin{aligned} F_A(t) = |tE_3 - A| &= t^3 - (3 + (-1) + 0)t^2 \\ &\quad + \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) t - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t-1)(t+1)(t-2). \end{aligned}$$

$F_A(t) = 0$ を解いて, 固有値は $1, -1, 2$ である.

31.8 演習.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(31.9) 行列 A に対して一般に A の固有値は存在するか. これに関しては次の解答がある.

31.10 定理 (**代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra)**). $f(t)$ を複素数係数の t に関する 1 変数多項式で 0 ではないとする. このとき,

$$f(t) = c(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$

(ただし, $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ で $c \neq 0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なり, $m_1, \ldots, m_r$ は自然数) の形に分解できる. 特に $f(t)$ が定数でなければ f は根をもつ. また, $f(t)$ が n 次式であれば, 重複度も込めれば (m_i 重根 λ_i を m_i 回数えれば) $f(t)$ は n 個の根をもつ.

容易に分かるように, 定理中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が $f(t)$ の根の全体であり, 各 m_i は λ_i の重複度である. 定理が言えるのは $\mathbb{C}$ で考えているからであって, たとえば t^2+1 は実数の範囲では根を持たない. 定理によって $F_A(t)$ は根を持ち, (1 次以上の正方行列の) 固有値は存在する.

(31.11) 三角行列の固有値は分かりやすい形をしている.

31.12 補題. $A = (a_{ij})$ が上半三角行列のとき, $F_A(t) = (t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn})$ である. したがって, 重複度込みで A の固有値は $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ である. A が下半三角行列の場合についても同様である.

証明. $tE_n - A$ が上半三角行列なので, 補題 14.7 を $tE_n - A$ に適用すればよい. 下半三角行列についても同様である. □

31.13 補題. $A, P \in M_n(\mathbb{C})$ で $P \in GL_n(\mathbb{C})$ とする. このとき, $F_{PAP^{-1}}(t) = F_A(t)$ である. 特に, PAP^{-1} と A の固有値とその重複度は一致する.

証明.

$$\begin{aligned}F_{PAP^{-1}}(t) &= |tE_n - PAP^{-1}| = |P(tE_n - A)P^{-1}| \\ &= |P| \cdot |tE_n - A| \cdot |P^{-1}| = |tE_n - A| = F_A(t).\end{aligned}$$

□

32　Jordan 標準形

(32.1)　V が n 次元 K ベクトル空間, $f: V \to V$ は線型変換とする. $r \geq 1$ について f^r とは f の r 回の合成 $f \circ f \circ \cdots \circ f$ のことである. f^0 は id_V のことであると定義する.

　f が**ベキ零 (nilpotent)** であるとは, $f^r = \boldsymbol{O}$ となる $r \geq 1$ が存在することをいう.

(32.2)　$A_1, A_2, \ldots, A_s$ が行列のとき,

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$$

のように区分された行列を $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s$ と表すことにする. この行列は $A_1, A_2, \ldots, A_s$ の直和と呼ぶ.

(32.3)　$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s$ のとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_s$. また, 各 A_i が正方行列のとき, $\det A = (\det A_1)(\det A_2)\cdots(\det A_s)$. $F_A(t) = F_{A_1}(t)F_{A_2}(t)\cdots F_{A_s}(t)$ である.

(32.4)　$i = 1, \ldots, s$ について, $f_i: V_i \to W_i$ が有限次元 K ベクトル空間の間の K 線型写像とする. このとき, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ から $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ への K 線型写像 f を $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s) = (f_1(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f_s(\boldsymbol{v}_s))$ で定義する.

　$\underline{\boldsymbol{v}}_i$ が V_i の, $\underline{\boldsymbol{w}}_i$ が W_i の基底として, $A_i = \Psi_{\underline{\boldsymbol{w}}_i, \underline{\boldsymbol{v}}_i}(f_i)$ は表現行列とする. このとき $\underline{\boldsymbol{v}}$ を $\underline{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{v}}_s$ の元をこの順でならべた列とし, $\underline{\boldsymbol{w}}$ を $\underline{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{w}}_s$ の元をこの順でならべた列とすれば, 表現行列 $\Psi_{\underline{\boldsymbol{w}}, \underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ は $A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ になることが確かめられる.

(32.5)　$\lambda \in \mathbb{C}$ と $r \geq 1$ について, r 次正方行列

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

を固有値 λ の r 次の **Jordan 細胞 (Jordan block)** と呼ばれ, $J(\lambda, r)$ で表される.

$$J(\lambda,1)=(\lambda),\quad J(\lambda,2)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad J(\lambda,3)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

などである.

32.6 命題. $n \geq 1$, V が n 次元 K ベクトル空間, $f : V \to V$ はベキ零線型変換とし, r は $f^r = \mathbf{0}$ であるが $f^{r-1} \neq \mathbf{0}$ である自然数とする. j についての逆帰納法で $j = r, r-1, \ldots, 1$ について, $\boldsymbol{p}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu_j}^{(j)} \in \operatorname{Ker} f^j$ を次が成立するように定めることができる.

(1)
$$\Gamma_j = \{f^t \boldsymbol{p}_u^{(i)} \mid j \leq i \leq r,\ 1 \leq u \leq \nu_i,\ 0 \leq t \leq i-1\}$$
は一次独立.

(2)
$$\Omega_j = \{f^t \boldsymbol{p}_u^{(i)} \mid j \leq i \leq r,\ 1 \leq u \leq \nu_i,\ j-1 \leq t \leq i-1\}$$
は $f^{j-1}(V)$ の基底集合である. 特に $V_j = \langle \Gamma_j \rangle$ とおくと, $f^{j-1}(V_j) = f^{j-1}(V)$ である.

(3) $\Omega_1 = \Gamma_1$ は V の基底集合である.

(4) Ω_1 の元を適当な順序で並べると, V の基底であり, それに関する f の表現行列は固有値 0 の Jordan 細胞の直和である. $J(0, i)$ は ν_i 回現れる.

(5) $\sum_{i=1}^r \nu_i i = n$ である.

(6) $r \leq n$ である.

$\boldsymbol{p}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu_j}^{(j)}$ が $j < i \leq r$ である i についてはすでに定まっていて上記の **(1), (2)** をみたすとして, 帰納法の仮定で Γ_{j+1} は一次独立である ($j = r$ のときには $\Gamma_{r+1} = \emptyset$ と考える) ので, その部分集合

$$\Theta_j = \{f^t \boldsymbol{p}_u^{(i)} \mid j < i \leq r,\ 1 \leq u \leq \nu_i, j-1 \leq t \leq i-1\}$$

は $f^{j-1}(V_{j+1})$ の一次独立な部分集合である. これを延長して $f^{j-1}(\boldsymbol{p}_1^{(j)}), \ldots, f^{j-1}(\boldsymbol{p}_{\nu_j}^{(j)})$ を付け加えて $f^{j-1}(V_{j+1}) + f^{j-1}(\operatorname{Ker} f^j)$ の基底とするように $\boldsymbol{p}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu_j}^{(j)} \in \operatorname{Ker} f^j$ をとるのである.

証明. **(1)**.

$$\sum_{j\le i\le r}\sum_{1\le u\le \nu_i}\sum_{0\le t\le i-1} c_{u,t}^{(i)} f^t \boldsymbol{p}_u^{(i)} = \boldsymbol{0} \tag{32.6.1}$$

と仮定する. 両辺に f^{j-1} を掛けて, $\boldsymbol{p}_u^{(i)} \in \mathrm{Ker}\, f^i$ に注意すると,

$$\sum_{j\le i\le r}\sum_{1\le u\le \nu_i}\sum_{0\le t,\ t+j-1\le i-1} c_{u,t}^{(i)} f^{t+j-1} \boldsymbol{p}_u^{(i)} = \boldsymbol{0}.$$

$\Omega_j = \Theta_j \cup \{f^{j-1}(\boldsymbol{p}_1^{(j)}), \ldots, f^{j-1}(\boldsymbol{p}_{\nu_j}^{(j)})\}$ は定義によって一次独立なので, $c_{u,0}^{(i)} = 0$ を得る. これを (32.6.1) に代入して両辺に f^{j-2} を掛ける.

$$\sum_{j\le i\le r}\sum_{1\le u\le \nu_i}\sum_{1\le t,\ t+j-2\le i-1} c_{u,t}^{(i)} f^{t+j-2} \boldsymbol{p}_u^{(i)} = \boldsymbol{0}.$$

再び $\tilde{\Theta}_j$ の一次独立性で $c_{u,1}^{(i)} = 0$ を得る. これを代入して f^{j-3} を掛けて, と順にやっていくことにより, $c_{u,t}^{(i)} = 0$ $(t \le j-1)$ が出て, 最後に Γ_{j+1} の一次独立性によってすべての $c_{u,t}^{(i)}$ が 0 だと分かる. よって Γ_j は一次独立である.

(2). Ω_j は Γ_j の部分集合なので一次独立である. よって $f^{j-1}(V) = \langle \Omega_j \rangle$ を示せば良い. $f^{j-1}(V_j) = \langle f^{j-1}(\Gamma_j) \rangle = \langle \Omega_j \rangle$ であるから, $f^{j-1}(V_j) = f^{j-1}(V)$ を言えば良い. $f^{j-1}(V_j)$ は Ω_j を含むので特に $f^{j-1}(\mathrm{Ker}\, f^j)$ を含む. 数学的帰納法の仮定によって,

$$f^j(V) \supset f^j(V_j) \supset f^j(V_{j+1}) = f^j(V).$$

よって $\boldsymbol{w} = f^{j-1}\boldsymbol{v} \in f^{j-1}(V)$ について, $f^j(\boldsymbol{v}) = f^j(\boldsymbol{v}')$, $\boldsymbol{v}' \in V_j$ と書ける. と書くことができる. よって $\boldsymbol{w} - f^{j-1}(\boldsymbol{v}') = f^{j-1}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in f^{j-1}(\mathrm{Ker}\, f^j) \subset f^{j-1}(V_j)$. よって $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} - f^{j-1}(\boldsymbol{v}')) + f^{j-1}(\boldsymbol{v}') \in f^{j-1}(V_j)$. $f^j(V) \subset f^j(V_j)$ が示された.

(3). 上の **(2)** で $j = 1$ とすれば Ω_1 は V の基底集合である. $\Omega_1 = \Gamma_1$ は定義による.

(4).

$$\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{u=1}^{\nu_i} \{\boldsymbol{f}^{i-1}(p_u^{(i)}), f^{i-2}(\boldsymbol{p}_u^{(i)}), \ldots, f(\boldsymbol{p}_u^{(i)}), \boldsymbol{p}_u^{(i)}\}$$

であり, f が

$$\langle f^{i-1}(p_u^{(i)}), f^{i-2}(\boldsymbol{p}_u^{(i)}), \ldots, f(\boldsymbol{p}_u^{(i)}), \boldsymbol{p}_u^{(i)} \rangle$$

の線型変換を引き起こし, (この順で並べた基底に関する) その表現行列が $J(0,i)$ であることから従う.

(5) は **(4)** から明らかである.

(6) はその定義から $\nu_r > 0$ であり, $\nu_r r \leq n$ なのだから明らかである. □

32.7 系. V が n 次元ベクトル空間, f がそのベキ零線型変換とすると, $f^n = \mathbf{0}$.

証明. 命題 32.6 の **(6)** により, $r \leq n$ で $f^r = \mathbf{0}$ だから $f^n = \mathbf{0}$. □

(32.8) V が n 次元 K ベクトル空間, $f : V \to V$ が線型変換とするとき, $\lambda \in \mathbb{C}$ について,

$$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$$

と定義して, $E_\lambda(f) \neq \mathbf{0}$ のとき, λ は f の固有値であるといい, このとき $E_\lambda(f)$ を f の固有値 λ の固有空間という. $E_\lambda(f) \setminus \mathbf{0}$ の元を固有ベクトルという.

(32.9) また,

$$W_\lambda(f) = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Ker}((f - \lambda \mathrm{id}_V)^i)$$

とおいて, これが $\mathbf{0}$ でないとき, f の固有値 λ の**弱固有空間**または**一般固有空間 (generalized eigenspace)** という.

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^2 \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^3 \subset \cdots$$

であるが, V が有限次元なのである N が存在して

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^N = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^{N+1} = \cdots$$

とならざるを得ず, その N について $W_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^N$ であり, 特に $W_\lambda(f)$ は V の部分空間である. N は 系 32.7 をベキ零変換 $f - \lambda \mathrm{id}_V : W_\lambda(f) \to W_\lambda(f)$ に適用することによって $\dim_K W_\lambda(f)$ 以下にとれるとわかる. 特に $W_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^n$ は保証される.

(32.10) V は n 次元とし, $f : V \to V$ が線型変換の時, V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ を一つ決め, f の表現行列 $A = \Psi_{\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ の行列式を $\det f$ で表し, f の行列式という. 基底を変換すると表現行列は PAP^{-1} の形になるが, 行列式は変わらないので, $\det f$ は基底の取り方によらないで f のみで決まっている. f が同型と $\det f \neq 0$ は同値である. $\det(t\mathrm{id}_V - f)$ を $F_f(t)$ で表し, f の固有多項式という. これも基底の取り方によらない. とくにその t^{n-1} の係数の (-1) 倍である $\mathrm{tr}\, A$ は基底の取り方によらない. これを $\mathrm{tr}\, f$ と書く. 固有値であることと $F_f(t)$ の根であることは同じである. $A = \Psi_{\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ が表現行列の時, $F_f(t) = F_A(t)$ である.

(32.11) λ が f の固有値であることは, $f-\lambda \mathrm{id}_V$ が単射でないことで, これは $\mathrm{rank}(f-\lambda \mathrm{id}_V) = \mathrm{rank}(A-\lambda E_n)$ が n 未満であること, つまり $\det(f-\lambda \mathrm{id}_V) = \det(A-\lambda E_n)$ が 0 になることと同値である. 線型変換の固有値, 固有多項式は表現行列のそれと同じである.

32.12 補題. 一般に $W_\lambda(f) \supset E_\lambda(f)$ である. また λ が固有値でなければ $W_\lambda(f) = \mathbf{0}$.

証明. 前半は定義から明白である. 後半は, λ が固有値でなければ $f - \lambda \mathrm{id}_V$ は単射だから何乗しても単射で, $W_\lambda(f) = \mathbf{0}$ となる. □

32.13 補題 (Fitting の補題 (Fitting's lemma)). $n \geq 0$, V は n 次元 K ベクトル空間, $f : V \to V$ は線型変換とする. このとき, 次をみたす部分空間 N と I が一意的に存在する.

(1) $f(N) \subset N$ で $f : N \to N$ はベキ零.

(2) $f(I) \subset I$ で $f : I \to I$ は同型.

(3) $V = N + I$.

このとき $V = N \oplus I$ であり, $N = W_0(f)$.

証明. まず一意性と最後の主張を示す. $\dim N \leq n$ なので $f^n(N) = \mathbf{0}$. $f^n : I \to I$ は同型だから $f^n(I) = I$. **(3)** によって $f^n(V) = I$. 特に $I = f^n(V)$ として一意に決まった. また, $N \subset \mathrm{Ker}\, f^n$ なので,

$$\dim N + \dim I \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^n + \mathrm{rank}\, f^n = \dim V \leq \dim V + \dim(N \cap I) \leq \dim N + \dim I.$$

従って不等号はすべて等号で, $N = \mathrm{Ker}\, f^n = W_0(f)$ かつ $N \cap I = \mathbf{0}$ で, N も一意に決まり, $V = N \oplus I$ と分かった.

よって $N = \mathrm{Ker}\, f^n$, $I = f^n(V)$ とおいて実際に条件をみたせば良い. **(1)**. $\boldsymbol{n} \in N$ とすると $f^n(f(\boldsymbol{n})) = f(f^n(\boldsymbol{n})) = \mathbf{0}$. よって $f(\boldsymbol{n}) \in N$ であり, $f(N) \subset N$. $f : N \to N$ は n 乗すると $\mathbf{0}$ だからベキ零. **(2)**. $f(f^n(V)) \subset f^n(V)$ なので $f(I) \subset I$. $\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^{n+1} = \cdots = W_0(f)$ だから, 次元の比較で $\mathrm{Im}\, f^n = \mathrm{Im}\, f^{n+1} = \cdots$. 特に $f : I \to I$ は全射であり, 従って同型. **(3)**. $\boldsymbol{v} \in V$ とする. $\mathrm{Im}\, f^{2n} = I$ なので, $f^n \boldsymbol{v} = f^{2n} \boldsymbol{w}$ と書ける. すると, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - f^n \boldsymbol{w}) + f^n \boldsymbol{w} \in N + I$. □

(32.14) 同型である線型変換を**自己同型** **(automorphism)** という.

32.15 補題. V が n 次元 K ベクトル空間, $f : V \to V$ は線型変換とするとき, 次は同値である.

(1) f は 0 を固有値に持たない.

(2) $\operatorname{Ker} f = \mathbf{0}$.

(3) f は単射.

(4) f は全射.

(5) f は自己同型.

証明. **(1)**$\Leftrightarrow$**(2)** は $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$ だから.
(2)$\Leftrightarrow$**(3)** は補題 20.15.
(3)$\Leftrightarrow$**(4)**$\Leftrightarrow$**(5)** は系 26.4 による. □

(32.16) $f : V \to V$ が線型変換で W は部分空間, $f(W) \subset W$ とする. このとき, f が引き起こす W から W への線型変換を $f|_W$ で表す.

32.17 補題. V が n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ は線型変換とするとき, 次は同値である.

(1) f はベキ零である.

(2) f は 0 以外の固有値を持たない.

(3) $F_f(t) = t^n$ である.

証明. **(1)**$\Rightarrow$**(2)**. もし λ が 0 でない f の固有値として, $\boldsymbol{v} \in V$ が固有ベクトルとすると, $f^r \boldsymbol{v} = \lambda^r \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となって矛盾である.
(2)$\Rightarrow$**(3)**. $F_A(t)$ は最高次の係数が 1 の n 次式で, 仮定により 0 しか根を持たない. 代数学の基本定理により, $F_A(t) = t^n$ となるしかない.
(3)$\Rightarrow$**(2)** は明らか.
(2)$\Rightarrow$**(1)**. $V = W_0(f) \oplus I$ と直和分解し, $f(I) = I$ とできる. $I \neq 0$ とすると, I は補題 32.15 によって 0 固有値を持たないことから, 0 以外の固有値を持つことになり, $F_f(t) = F_{f|_{W_0(f)}}(t) F_{f|_I}(t)$ であることから f も 0 以外の固有値を持ち矛盾. よって $I = 0$ であり, $V = W_0(f)$ となって f はベキ零である. □

(32.18) V が有限次元 K ベクトル空間, $f:V\to V$ が線型変換とする．複素数係数多項式

$$\varphi(t)=c_0t^m+c_1t^{m-1}+\cdots+c_m$$

に対して,

$$\varphi(f)=c_0f^m+c_1f^{m-1}+\cdots+c_m\mathrm{id}_V$$

と定義する．

32.19 補題. V を n 次元 K ベクトル空間, $f:V\to V$ を線型変換とする．$\lambda,\mu\in K$, $\lambda\neq\mu$ のとき, $f-\lambda\mathrm{id}$ がベキ零ならば, $f-\mu\mathrm{id}$ は自己同型である．$f-\mu\mathrm{id}$ の逆写像はある K 係数の多項式 $\varphi(t)$ について $(f-\mu\mathrm{id})^{-1}=\varphi(f)$ と表される．

証明．$(f-\lambda\mathrm{id})^m=\mathbf{0}$ とする．このとき, $g=(\mu-\lambda)^{-1}(f-\lambda\mathrm{id})$ とおくと, $g^m=\mathbf{0}$ であり,

$$f-\mu\mathrm{id}=f-\lambda\mathrm{id}-(\mu-\lambda)\mathrm{id}=-(\mu-\lambda)(\mathrm{id}-g).$$

g は f の (K 係数) 多項式なので,

$$-(\mu-\lambda)^{-1}(\mathrm{id}+g+\cdots+g^{m-1})$$

も f の多項式で, これが $f-\mu\mathrm{id}$ の逆写像であることは掛けてみれば明らかである． □

32.20 補題. V を n 次元 K ベクトル空間, $f:V\to V$ を線型変換, $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ を f の固有値全体とし, $K=\mathbb{R}$ のときにはこれらが $\mathbb{R}$ の元であると仮定する．このとき, K ベクトル空間として

$$V=W_{\lambda_1}(f)\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_r}(f)$$

である．$\dim_K W_{\lambda_i}(f)$ は λ_i の重複度に一致する．

証明．$n=\dim V$ についての数学的帰納法．$g=f-\lambda_r\mathrm{id}_V$ に Fitting の補題を適用して, $V=W_{\lambda_r}(f)\oplus I$ で $g(I)=I$ とできる．$F_f(t)=F_{f|_W}(t)\cdot F_{f|_I}(t)$ である．ここに $W=W_{\lambda_r}(f)$. λ_i の重複度を m_i とするとき,

$$F_f(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$

であるが, 補題 32.17 によって $F_{g|_W}(t)$ は t のベキなので,

$$F_{f|_W}=\det(t\mathrm{id}-(g|_W+\lambda_r\mathrm{id}))=\det((t-\lambda_r)\mathrm{id}-g|_W)=F_{g|_W}(t-\lambda_r)$$

は $(t-\lambda_r)^k$ の形をしている. 一方 $g|_I$ は自己同型だから, $g|_I$ は 0 を固有値に持たず, $f|_I$ は λ_r を固有値に持たない. 以上により, $F_{f|_W}(t) = (t-\lambda_r)^{m_r}$, $F_{f|_I}(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$ であることが従う. つまり, $f|_I$ は固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_{r-1}$ を持ち, λ_i の重複度は f と同じ m_i になる. また, $\dim W = m_r$ も従う. 帰納法の仮定から,

$$I = W_{\lambda_1}(f|_I) \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_{r-1}}(f|_I)$$

であるが, $f - \lambda_i \mathrm{id}$ は $i < r$ について W 上で同型なので,

$$W_{\lambda_i}(f) = W_{\lambda_i}(f|_W) \oplus W_{\lambda_i}(f|_I) = W_{\lambda_i}(f|_I).$$

結局

$$V = W_{\lambda_r}(f) \oplus I = W_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_{r-1}}(f) \oplus W_{\lambda_r}(f).$$

$i < r$ について, 帰納法の仮定で

$$\dim W_{\lambda_i}(f) = \dim W_{\lambda_i}(f|_I) = m_i.$$

□

(32.21) $f : V \to V$ は有限次元 K ベクトル空間の線型変換とする. V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ が f の Jordan 基底であるとは, $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する f の表現行列 $\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ が (K を固有値に持つ) Jordan 細胞の直和になることをいう. このような $\Psi_{\underline{\boldsymbol{v}}}(f)$ を f の Jordan 標準形という.

(32.22) $A \in M_n(K)$ とする. $\Phi(A)$ の Jordan 標準形を A の Jordan 標準形という. $\Phi(A)$ に関する Jordan 基底を並べた行列 $P = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ は K 係数で n 次正則で, $P^{-1}AP$ がその基底から得られる Jordan 標準形であるし, 逆に P が正則行列で $P^{-1}AP$ が Jordan 細胞の直和ならば, P の列ベクトルが f の Jordan 基底ということになる. 正則行列 P を本講義では Jordan 基底行列と呼ぶことにする.

32.23 定理 (Jordan 標準形の存在)**.** $f : V \to V$ は有限次元 K ベクトル空間の線型変換とする. もし f の固有値がすべて K の元ならば ($K = \mathbb{C}$ のときにはいつでも), V は f の Jordan 基底を持つ.

証明. $n = \dim V$ に関する数学的帰納法による. $n = 0$ のときは自明なので, $n > 0$ としてよい. $V = V_1 \oplus V_2$, $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$, $f(V_i) \subset V_i$ となるような分解がもしあれば, 帰納法の仮定で各 V_i が $f|_{V_i}$ の Jordan 基底を持つから, それを並べれば, Jordan 基底を得るので, そのような分解が存在しない

場合を考えれば良い. λ が f の固有値ならば, $f(W_\lambda(f)) \subset W_\lambda(f)$ なので, 補題 32.20 により, f は固有値を一つしか持たないとして良い. その固有値を λ とする. f を $f-\lambda\mathrm{id}_V$ でおきかえて, f はベキ零として良い. この場合は命題 32.6 である. □

32.24 系 (行列の三角化)**.** $n \geq 1$ とする. $f: V \to V$ が n 次元 K ベクトル空間 V の線型変換とする. このとき, 次は同値である.

(1) f の固有値はすべて K の元である.

(2) 適当な V の K 基底を取ると, f のその基底に関する表現行列は上半三角である.

特に **(1), (2)** ともに $K=\mathbb{C}$ ならばいつでも成立する.

証明. **(1)**$\Rightarrow$**(2)**. Jordan 標準形が存在し, それは上半三角行列である.

(2)$\Rightarrow$**(1)**. f の表現行列 A で上半三角なものがとれると, その対角成分が f の固有値であるが, A の成分はすべて K の元なので, f の固有値は K の元である. □

32.25 定理 (Jordan 標準形の一意性)**.** $f: V \to V$ は有限次元 K ベクトル空間の線型変換とし, J が f の Jordan 標準形とする. このとき, 各 $\lambda \in \mathbb{C}$ と $i \geq 1$ に対して, Jordan 細胞 $J(\lambda, i)$ が J に現れる回数 $\nu_i(\lambda)$ は, f のみで決まり, f に関する Jordan 基底の取り方によらず一意的である.

証明. $J = J(\lambda_1, i_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s, i_s)$ とする. $\mu_i(\lambda) = \dim_K \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_V)^i$ とおくと, $\mu_i(\lambda)$ は f のみで決まる.

$$\begin{aligned}
\mu_i(\lambda) &= n - \mathrm{rank}(f-\lambda\mathrm{id}_V)^i = n - \sum_{k=1}^{s} \mathrm{rank}\, J(\lambda_k-\lambda, i_k)^i \\
&= \sum_{k=1}^{s}(k - \mathrm{rank}\, J(\lambda_k-\lambda, i_k)^i) = \sum_{\lambda_k=\lambda} \min(i_k, i) = \sum_{l=1}^{n} \min(l, i)\nu_l(\lambda) \\
&= \mu_{i-1}(\lambda) + \sum_{l \geq i} \nu_l(\lambda)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
&\nu_n(\lambda) = \mu_n(\lambda) - \mu_{n-1}(\lambda), \quad \nu_{n-1}(\lambda) = \mu_{n-1}(\lambda) - \mu_{n-2}(\lambda) - \nu_n(\lambda), \\
&\qquad \nu_{n-2}(\lambda) = \mu_{n-2}(\lambda) - \mu_{n-3}(\lambda) - \nu_n(\lambda) - \nu_{n-1}(\lambda), \ldots
\end{aligned}$$

と順に決まっていくので $\nu_i(\lambda)$ も f のみで決まる. □

(32.26) 上の議論から, m を固有値 λ の重複度とすると,

$$m = \dim_K W_\lambda(f) = \mu_m(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} l\nu_l(\lambda).$$

また,

$$\dim_K E_\lambda(f) = \mu_1(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \nu_l(\lambda).$$

(32.27) $A \in M_n(\mathbb{C})$ と自然数 r に対して, A^r は A の r 個の積 $A \cdot A \cdots A$ を表すものとする. A の 0 乗 A^0 は同じサイズの単位行列 E_n を意味するものとする. A が正則の場合, A^{-r} は $(A^{-1})^r$ のことを意味するものとする.

(32.28) $\varphi(t)$ は K 係数の t についての 1 変数多項式とする.

$$\varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C})$$

とするとき, $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\varphi(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_m E_n$$

を意味するものとする.

32.29 補題. P が n 次正則行列の時, $\varphi(PAP^{-1}) = P\varphi(A)P^{-1}$.

証明. $(PAP^{-1})^r = PAP^{-1}PAP^{-1} \cdots PAP^{-1} = PA^rP^{-1}$. そこで

$$\begin{aligned}\varphi(PAP^{-1}) &= a_0 PA^mP^{-1} + a_1 PA^{m-1}P^{-1} + \cdots + a_m PE_nP^{-1} \\ &= P(a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + E_n)P^{-1} = P\varphi(A)P^{-1}.\end{aligned}$$

□

32.30 補題. $A_1, \ldots, A_s$ が正方行列で $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ のとき, $\varphi(A) = \varphi(A_1) \oplus \cdots \oplus \varphi(A_s)$.

証明. 区分行列の計算で, 和に関して

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s) + (B_1 \oplus \cdots \oplus B_s) = (A_1 + B_1) \oplus \cdots \oplus (A_s + B_s),$$

積に関して

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s) \cdot (B_1 \oplus \cdots \oplus B_s) = A_1B_1 \oplus \cdots \oplus A_sB_s,$$

スカラー倍に関して

$$\alpha(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s) = \alpha A_1 \oplus \cdots \oplus \alpha A_s$$

となっていることから容易に従う. □

32.31 定理 (ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley–Hamilton theorem)). $n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ とするとき, $F_A(A) = O$.

証明. $J = P^{-1}AP$ を A の Jordan 標準形とする. このとき,

$$F_A(A) = F_J(PJP^{-1}) = PF_J(J)P^{-1}$$

なので, A を J でおきかえて, はじめから A は Jordan 標準形だとして良い. すると, $A = J_1 \oplus \cdots \oplus J_r$ で各 J_i は Jordan 細胞として, $F_A(A) = F_A(J_1) \oplus \cdots \oplus F_A(J_r)$ であり, $F_A(t) = F_{J_1}(t) \cdots F_{F_r}(t)$ であることから, 各 i に関して $F_{J_i}(J_i) = O$ がいえればよく, はじめから A は Jordan 細胞 $J(\lambda, n)$ であるとしてよい. このとき $F_A(t) = (t-\lambda)^n$ なので,

$$F_A(A) = (J(\lambda, n) - \lambda E_n)^n = J(0, n)^n = O.$$

$\square$

33　Jordan 標準形の具体例

(33.1)　ベキ零行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の Jordan 標準形と Jordan 基底行列を求めよう. ベキ零であることはベキ乗を実際に計算すれば分かる.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = O.$$

(33.2)　$\operatorname{rank} A^2 = 1$ であることは容易であり, $\langle A^2 \rangle$ は 1 次元で, その基底として A^2 の 1 列目の $\boldsymbol{p}_1 = A^2\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,1,0,-1,-1)$ が取れる. そこで, 命題 32.6 の証明によれば, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2 = A\boldsymbol{e}_1 = {}^t(-1,-1,1,1,2)$ (A の 1 列目), $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{e}_1$ は Jordan 基底の一部になり, A の Jordan 標準形は $J(0,3)$ を Jordan 細胞に持つことが分かった.

(33.3)　区分行列 $B = (\boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_1\ A)$ の行階段標準形を作ると

$$C = QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{p}_1$ も $\boldsymbol{p}_2$ も $\langle A \rangle$ に属していることに注意して, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$ を得る. それから, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を延長する $\langle A \rangle$ の基底の 3 つめのベクトルとしては, C の $1,2,4$ 列目, $Q\boldsymbol{p}_2, Q\boldsymbol{p}_3, QA\boldsymbol{e}_2$ が一次独立なので $\boldsymbol{q} := A\boldsymbol{e}_2 = {}^t(-1,-2,-1,2,0)$ が取れることも分かった. $A\boldsymbol{q} = A^2\boldsymbol{e}_2 = {}^t(-1,-1,0,1,1) = -A^2\boldsymbol{p}_3$. そこで $\boldsymbol{p}_5 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{p}_3 = {}^t(1,1,0,0,0)$, $\boldsymbol{p}_4 = A\boldsymbol{p}_5 = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}_2 = {}^t(-2,-3,0,3,2)$ とおけば $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_4$ は $\langle A \rangle$ の基底であり, しかも $\boldsymbol{p}_4 = A\boldsymbol{p}_5 \in \Phi(A)(\operatorname{Ker} A^2)$. 命題 32.6 の証明の議論によって, $\boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5$ を付け加えて Jordan 基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5$ が得られた.

(33.4) 得られた Jordan 基底行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

A の Jordan 標準形 $P^{-1}AP$ は $J(0,3) \oplus J(0,2)$ である．作り方からそのことは計算するまでもないわけだが, その気になれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を計算して, 実際に $P^{-1}AP$ を計算して確かめることができる.

33.5 演習. 次のベキ零行列の Jordan 基底行列をひとつ与え, Jordan 標準形を求めよ.

$$(\mathbf{1}) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\mathbf{2}) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(33.6) ベキ零とは限らない n 次正方行列 A の Jordan 標準形について考えよう．まず固有値とその重複度を求める．次に各弱固有空間の基底を求めることが必要である．これには 2 通りの方法が考えられる．$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が固有値で, λ_i の重複度は m_i とする.

一つは定義に基づいて $W_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i E_n)^{m_i}$ を連立方程式を解いて求める方法である．もうひとつは $C_i = \prod_{j \neq i}(A - \lambda_j E_n)^{m_j}$ とおく方法で, $\langle C_i \rangle = W_{\lambda_i}(A)$ になっている．実際, C_i は $W_{\lambda_i}(A)$ 上に自己同型を引き起こし, $j \neq i$ について $W_{\lambda_j}(A)$ 上で $\mathbf{0}$ である.

(33.7) 弱固有空間 $W_{\lambda_i}(A)$ がわかったら, その上のベキ零変換 $\Phi(A - \lambda_i E)|_{W_{\lambda_i}(A)}$ について, Jordan 基底を求め, それらを並べて A に関する Jordan 基底を求められる.

次のように計算することもできる. $W_{\lambda_1}(A), \ldots, W_{\lambda_r}(A)$ の基底を順にならべた行列を Q とすると, Q は正則で $Q^{-1}AQ = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ となる．各 i について, $B_i - \lambda_i E_{m_i}$ はベキ零なので, これまで学んだ方法で $R_i^{-1}(B_i - \lambda_i E_{m_i})R_i$ を, 従って $R_i^{-1}B_i R_i$ を Jordan 細胞の直和にできる．$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_r$, $P = QR$ とおけば, $P^{-1}AP$ が A の Jordan 標準形である.

(33.8) 実例を見ていこう.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & -5 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

の Jordan 基底を求めたい. $F_A(t) = (t-1)^3(t+2)^2$ なので, 固有値は 1 (重複度 3), -2 (重複度 2) である.

$$(A+2E_5)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 24 & 12 & -18 & -6 \\ 15 & 24 & 21 & -9 & -15 \\ -6 & -15 & -3 & 9 & 6 \\ 15 & 24 & 21 & -9 & -15 \\ 9 & 9 & 9 & -9 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-E_5)^3 = \begin{pmatrix} -54 & 54 & -54 & -54 & 54 \\ 0 & 27 & 0 & -27 & 0 \\ 27 & -27 & 27 & 27 & -27 \\ -27 & 54 & -27 & -54 & 27 \\ 0 & 27 & 0 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

までのベキ乗を計算しておく.

(33.9) まず, $\langle (A+2E_5)^2 \rangle = W_1(A)$. これにベキ零変換 $A - E_5$ を作用させる.

$$(A-E_5)(A+2E_5)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 18 & 0 & -9 \\ 9 & 9 & 18 & 0 & -9 \\ -9 & -9 & -18 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 18 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-E_5)^2(A+2E_5)^2 = O.$$

したがって $\boldsymbol{p}_2 = (A+2E_5)^2\boldsymbol{e}_1 = {}^t(15, 15, -6, 15, 9)$, $\boldsymbol{p}_1 = (A-E_5)\boldsymbol{p}_2 = {}^t(9, 9, -9, 9, 0)$ とおけば Jordan 基底の一部になり, A の Jordan 標準形は $J(1,2)$ を Jordan 細胞に持つ.

$$B = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ (A+2E_5)^2) = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 15 & 24 & 12 & -18 & -6 \\ 9 & 15 & 15 & 24 & 21 & -9 & -15 \\ -9 & -6 & -6 & -15 & -3 & 9 & 6 \\ 9 & 15 & 15 & 24 & 21 & -9 & -15 \\ 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

とおいて, これの行階段標準形を求めると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{q} = (A+2E_5)^2\boldsymbol{e}_3 = {}^t(12, 21, -3, 21, 9)$ とおけば, これは $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{q}$ が一次独立なことを示す. $(A-E_5)\boldsymbol{q} = {}^t(18, 18, -18, 18, 0) = 2\boldsymbol{p}_1 = 2(A-E_5)\boldsymbol{p}_2$ なので, $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{q} - 2\boldsymbol{p}_2 = {}^t(-18, -9, 9, -9, -9)$ とおけば $\boldsymbol{p}_3 \in \mathrm{Ker}(A-E_5)$ かつ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\Phi_A|_{W_1(A)}$ の Jordan 基底である.

(33.10) 次に

$$(A+2E_5)(A-E_5)^3 = \begin{pmatrix} 54 & 0 & 54 & 0 & -54 \\ 27 & 0 & 27 & 0 & -27 \\ -27 & 0 & -27 & 0 & 27 \\ 54 & 0 & 54 & 0 & -54 \\ 27 & 0 & 27 & 0 & -27 \end{pmatrix} \neq O$$

なので, $\boldsymbol{p}_5 = (A-E_5)^3\boldsymbol{e}_1 = {}^t(-54, 0, 27, -27, 0)$, $\boldsymbol{p}_4 = (A+2E_5)\boldsymbol{p}_5 = {}^t(54, 27, -27, 54, 27)$ とおけば, $\boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5$ は $\Phi_A|_{W_{-2}(A)}$ の Jordan 基底.

(33.11) 以上により,

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4\ \boldsymbol{p}_5) = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -18 & 54 & -54 \\ 9 & 15 & -9 & 27 & 0 \\ -9 & -6 & 9 & -27 & 27 \\ 9 & 15 & -9 & 54 & -27 \\ 0 & 9 & -9 & 27 & 0 \end{pmatrix}$$

は A の Jordan 基底行列のひとつであり, これから得られる Jordan 標準形 $P^{-1}AP$ は

$$J(1,2) \oplus J(1,1) \oplus J(-2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(33.12)　もうひとつ例を計算しよう.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 8 & -3 \\ -4 & -4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の Jordan 基底とそれに応じた Jordan 標準形を求めたい.

$F_A(t) = t(t-1)(t-2)^2$. よって固有値は 0, 1, 2 (2 重根).

(33.13)　固有値 0 は単根なので, $\dim W_0(A) = 1$ であり, $W_0(A) = E_0(A)$ となる. 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて, $\boldsymbol{p}_1 = {}^t(-1,-2,2,0)$ は固有値 0 の固有ベクトルで $W_0(A) = E_0(A)$ の基底.

固有値 1 も単根. 方程式 $(A - E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて, $\boldsymbol{p}_2 = {}^t(0,-1,1,1)$ は $W_1(A) = E_1(A)$ の基底.

固有値 2 は重根である. 方程式 $(A-2E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く. $\mathrm{rank}(A-2E_4) = 3$ がわかり, $\dim E_2(A) = 1$. ${}^t(-1,-1,1,0)$ が解空間の基底である. 従って固有値 2 の Jordan 細胞は $J(2,2)$ ひとつだけである.

$$(A - 2E_4)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -8 & 4 \\ -8 & -7 & -15 & 7 \\ 8 & 7 & 15 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である. $(A - 2E_4)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて, 一次独立な解 ${}^t(-1,-1,1,0)$, ${}^t(0,1,0,1)$ を得る. $\boldsymbol{p}_4 = {}^t(0,1,0,1)$, $\boldsymbol{p}_3 = (A - 2E_4)\boldsymbol{p}_4 = (1,1,-1,0)$ とおけば Jordan 基底の一部となる.

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば Jordan 基底行列で, $P^{-1}AP = J(0,1) \oplus J(1,1) \oplus J(2,2)$.

33.14 演習. 次の行列の Jordan 基底行列をひとつ与え, それに応じた Jordan 標準形を求めよ.

$$(\mathbf{1}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\mathbf{2}) \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

34　行列の対角化

(34.1)　$A \in M_n(K)$ が (K で) 対角化可能であるとは, ある K 係数の正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP$ が対角行列であることをいう. n 次元ベクトル空間の線型変換 $f : V \to V$ が対角化可能とは, V のある基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ が存在して $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する f の表現行列が対角行列であることをいう.

34.2 定理. $A \in M_n(K)$ で, その固有値の全体が $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とするとき, 次は同値である.

(1) A は K で対角化可能.

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はすべて K の元で, K^n は A の固有ベクトルからなる基底を持つ.

(3) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はすべて K の元で, $\sum_{i=1}^r \dim_K E_{\lambda_i}(A) = n$.

(4) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はすべて K の元で, 任意の i について $E_{\lambda_i}(A) = W_{\lambda_i}(A)$.

(5) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はすべて K の元で, $K^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A)$.

証明. **(1)⇒(2)**. P は K 係数 n 次正則行列で $P^{-1}AP = \mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_n$ ($\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$) とすると, $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)$ と列ベクトルで表せば,

$$(A\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n) = AP = P(\mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_n) = (\mu_1\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \mu_n\boldsymbol{p}_n)$$

で $A\boldsymbol{p}_i = \mu_i\boldsymbol{p}_i$ なので, $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は A の固有ベクトルからなる K^n の基底である. また, 各 μ_i は K 係数の行列 $P^{-1}AP$ の成分なので K の元であり, A と $P^{-1}AP$ は同じ固有値を持つので, A の固有値はどれかの μ_i となり, K の元である.

(2)⇒(3). $W_{\lambda_1} + \cdots + W_{\lambda_r}$ は直和で, $E_{\lambda_i} \subset W_{\lambda_i}$ だから, $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_r}$ も直和である. これが仮定により K^n の基底, つまり n 個の 1 次独立なベクトルを含むので

$$n = \dim_K K^n \geq \sum_i \dim E_{\lambda_i}(A) = \dim(\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A)) \geq n$$

となってすべて等号になる.

(3)⇒(4). 各 i について $E_{\lambda_i}(A) \subset W_{\lambda_i}(A)$ で, その次元の和が n で等しいので, $E_{\lambda_i}(A) = W_{\lambda_i}(A)$ である.

(4)⇒(5). 補題 32.20 から明白である.

(5)⇒(2). 補題 26.1 による.

(2)⇒(1). $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が基底で $A\boldsymbol{p}_i = \mu_i \boldsymbol{p}_i$ ならば, $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)$ とおくとき, P は正則で $AP = P(\mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_n)$ である. □

34.3 命題. $A \in M_n(K)$ で $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ がその固有値の全体とし, これらは K の元であると仮定する. このとき, 次は同値である.

(1) A は K で対角化可能である.

(2) $(A - \lambda_1 E_n) \cdots (A - \lambda_r E_n) = O$.

(3) ある重根をもたない K 係数の多項式 $\varphi(t)$ が存在して $\varphi(A) = O$.

特にこれらの条件は K によらない.

証明. **(1)⇒(2)**. $B = (A - \lambda_1 E_n) \cdots (A - \lambda_r E_n)$ とおくと, B を A のどの固有ベクトルにかけても $\mathbf{0}$ になる. $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を A の固有ベクトルからなる K^n の基底とすると, 各 i について $B\boldsymbol{p}_i = \mathbf{0}$ なので, $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)$ とおくと, P は正則で $BP = O$. つまり $B = O$.

(2)⇒(3). $\varphi(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)$ とおけばよい.

(3)⇒(1). $\varphi(t) = c(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_s)$ と書ける ($c \neq 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ は相異なる). $c = 1$ としてよい. 各固有値 λ_i について, $\mu_j \neq \lambda_i$ のとき $W_{\lambda_i}(A)$ 上に $A - \mu_j E_n$ は同型をひきおこす. $\mu_1, \ldots, \mu_s$ がすべて λ_i と異なると $\varphi(A) = O$ が同型を引き起こすこととなり, $W_{\lambda_i}(A) \neq \mathbf{0}$ に反する. よって $\lambda_i = \mu_j$ となる j がひとつだけある. この j について $A - \mu_j E_n = A - \lambda_i E_n$ は零写像を $W_{\lambda_i}(A)$ にひきおこす. さもなければ他の $A - \mu_l E_n$ は単射を引き起こすが, それをかけていって, $\varphi(A) = O$ の引き起こす零写像になっておかしいからである. よって $W_{\lambda_i}(A) = E_{\lambda_i}(A)$ がすべての i について成り立ち, A は K で対角化可能である. □

34.4 系. $A \in M_n(K)$ で A が n 個の相異なる固有値を K に持てば, A は K で対角化可能である.

証明. A の固有多項式 $F_A(t)$ について, 仮定により $F_A(t)$ は重根を持たない. ケーリー・ハミルトンの定理によって $F_A(A) = O$ だから, 命題 34.3 の **(3)⇒(1)** によって A は対角化可能である. □

(34.5) 対角行列は, サイズが 1 の Jordan 細胞 $J(\lambda, 1)$ を対角線に並べたものと思えるので, $P^{-1}AP$ が対角行列の時, それは Jordan 標準形である. Jordan 標準形は (Jordan 細胞の並べかえを除いて) 一意的なので, 対角化可能行列の Jordan 標準形は対角行列である. 対角化可能行列の Jordan 標準形を求めることをその行列を対角化するという.

34.6 演習. 次の正方行列が $\mathbb{R}$ で対角化可能であるかを判定し, 可能であれば $\mathbb{R}$ 係数の Jordan 基底行列を求めて対角化せよ.

$$(\mathbf{1})\quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -6 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\mathbf{2})\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(34.7) K^n を計量ベクトル空間と考える時, 単なる対角化ではなく, 正規直交基底を並べた行列, すなわちユニタリ行列 P によって $P^{-1}AP$ を対角にする対角化ができると好都合である.

(34.8) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が**正規行列 (normal matrix)** であるとは, $A^*A = AA^*$ が成立することをいう. エルミート行列, 歪エルミート行列は正規行列である. ユニタリ行列も正規行列である.

34.9 補題. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K^n$, $A \in M_n(K)$ について,

$$\langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle A^*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle.$$

証明.

$$\langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{y}^*(A\boldsymbol{x}) = (A^*\boldsymbol{y})^*\boldsymbol{x} = \langle A^*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle.$$

□

34.10 補題. $A \in M_n(K)$, $W \subset K^n$ が部分空間で, $A^*(W) \subset W$ とする. このとき $A(W^\perp) \subset W^\perp$ である.

証明. $\boldsymbol{x} \in W^\perp$, $\boldsymbol{y} \in W$ とする. $\langle \boldsymbol{y}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle A^*\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$. $A^*\boldsymbol{y} \in W$ で $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ だから これは 0 である. よって $A\boldsymbol{x} \in W^\perp$ であり, $A(W^\perp) \subset W^\perp$. □

34.11 補題. $A \in M_n(K)$ が正規行列で $\lambda \in K$ が A の固有値, $E = E_\lambda(A)$ が固有空間の時, $A(E) \subset E$, $A^*(E) \subset E$, $A(E^\perp) \subset E^\perp$, $A^*(E^\perp) \subset E^\perp$.

証明. $\boldsymbol{v} \in E$ とすると, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \in E$ なので $A(E) \subset E$. $A(A^*\boldsymbol{v}) = A^*A\boldsymbol{v} = A^*\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(A^*\boldsymbol{v})$ なので $A^*\boldsymbol{v} \in E$. よって $A^*(E) \subset E$. 補題 34.10 によって $A(E^\perp) \subset W^\perp$ と $A^*(E^\perp) \subset W^\perp$ が従う. □

34.12 定理. $A \in M_n(K)$ で, A の固有値はすべて K の元とする. このとき次は同値である.

(1) A は正規行列である.

(2) $U^{-1}AU$ が対角行列となる K 係数のユニタリ行列 U が存在する.

(3) A の固有ベクトルからなる K^n の正規直交基底が存在する.

(4) K^n は A の固有空間の直和で, A の各固有空間は互いに直交する.

証明. **(1)⇒(2)**. n についての帰納法. A の固有値のひとつを λ とし, $E = E_\lambda(A)$ とおく. $E = K^n$ の場合, $A = \lambda E_n$ なので, $P = E_n$ とおけばよい. $E \neq K^n$ の場合. $K^n = E \oplus E^\perp$ で, 補題 34.11 によって $A(E) \subset E$, $A(E^\perp) \subset E^\perp$. E と $E^\perp$ の正規直交基底を並べて K^n の基底をつくり, その基底を並べた行列を P とする. P はユニタリ行列で $A(E) \subset E$, $A(E^\perp) \subset E^\perp$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

とできる. 帰納法の仮定により, K 係数ユニタリ行列 Q_1, Q_2 が存在して, $Q_i^{-1}B_iQ_i$ は対角行列. このとき, $Q = Q_1 \oplus Q_2$, $U = PQ$ とおくと, U は K 係数ユニタリ行列で

$$U^{-1}AU = Q^{-1}P^{-1}APQ = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_1Q_1 & O \\ O & Q_2^{-1}B_2Q_2 \end{pmatrix}$$

は対角行列.

(2)⇒(3). U の列ベクトルを並べた基底が条件をみたしている.

(3)⇒(4). A の固有値が $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とする. 同じ固有値の固有ベクトルはまとめて, A の固有ベクトルからなる K^n の正規直交基底

$$\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \dots, \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}, \boldsymbol{p}_1^{(2)}, \dots, \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{p}_1^{(r)}, \dots, \boldsymbol{p}_{m_r}^{(r)}$$

であって, $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \dots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ は固有値 λ_i の固有ベクトルとなるようなものが存在する. $m_i = \dim W_{\lambda_i}(A) \geq \dim E_{\lambda_i}(A) \geq m_i$ だから, これらは一致し, $K^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A)$ で, $\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \dots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$ が $E_{\lambda_i}(A)$ の基底. これらが互いに直交することから容易に, 各 $i \neq j$ について, $E_{\lambda_i}(A)$ と $E_{\lambda_j}(A)$ は直交する.

(4)⇒(3). 各固有値の固有空間の正規直交基底を作り, これらを並べて基底をつくれば良い.

(3)⇒(2). この基底を並べた行列を U とすればよい.

(2)⇒(1). U はユニタリなので, $U^* = U^{-1}$. $D = U^{-1}AU = U^*AU$ とおくと, $D^* = U^*A^*U$ も対角行列なので, $DD^* = D^*D$. よって,

$$AA^* = UU^*AUU^*A^*UU^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* = UU^*A^*UU^*AUU^* = A^*A.$$

となり, A は正規行列である. □

34.13 補題. エルミート行列の固有値は実数である.

証明. A をエルミート行列, λ をその固有値, $\boldsymbol{p}$ を固有値 λ の固有ベクトルとする. このとき,

$$\begin{aligned}\lambda\|\boldsymbol{p}\|^2 = \lambda\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle = \langle\boldsymbol{p},\lambda\boldsymbol{p}\rangle = \langle\boldsymbol{p},A\boldsymbol{p}\rangle = \langle A^*\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle = \langle A\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \\ = \langle\lambda\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle = \bar{\lambda}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle = \bar{\lambda}\|\boldsymbol{p}\|^2.\end{aligned}$$

$\|\boldsymbol{p}\| \neq 0$ なので $\lambda = \bar{\lambda}$, つまり λ は実数である. □

34.14 演習. ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 であることを示せ.

34.15 命題. n 次実対称行列 A に対して, ある n 次実直交行列 U が存在して, $U^{-1}AU$ は実対角行列である.

証明. 実対称行列はエルミートなので, 補題 34.13 によってその固有値は実数である. エルミートだから正規行列でもあるので, 定理 34.12 によって, 実ユニタリ行列, つまり実直交行列 U が存在して $U^{-1}AU$ が実対角行列である. □

(34.16) 定理 34.12 が示す通り, 正規行列をユニタリ行列で対角化するには, まず各固有空間の基底を作って Schmidt 正規直交化をかけ, 最後に並べれば良い.

34.17 例. 実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

を実直交行列によって対角化しよう.

$F_A(t) = t^3 - 12t^2 + 45t + 54 = (t-3)^2(t-6)$. よって固有値は 3 (2 重根), 6.

連立方程式 $(A-3E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて, 一次独立な解 ${}^t(1,1,0)$, ${}^t(1,0,1)$ を得る. これに Schmidt 正規直交化をかけて,

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を得る.

連立方程式 $(A-6E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解いて, 一次独立な解 ${}^t(-1,1,1)$ を得る. これに Schmidt 正規直交化をかけて,

$$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

を得る.

$$U=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

とおけば, U は実直交行列で,

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

である.

34.18 演習. 実対称行列

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&-1&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}$$

を実直交行列で対角化せよ.

35　同時対角化とジョルダン分解

35.1 定理 (同時対角化). V は n 次元 K ベクトル空間, $S \subset \mathrm{End}_K V$ とし, 次を仮定する.

(1) S のすべての元は K 上対角化可能.

(2) $f, g \in S$ のとき, $fg = gf$.

このとき, (S の元によらない一律な) V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ が存在して, 任意の S の元 f に対して, $\underline{\boldsymbol{v}}$ に関する f の表現行列が対角行列となる.

証明. n に関する数学的帰納法. S のすべての元が $\lambda \mathrm{id}_V$ $(\lambda \in K)$ の形をしていれば基底によらず表現行列はスカラー行列なので, 主張は明らかである. そこで, S のある元 f について, f は固有値を 2 種類以上持つとして良い. その f の固有値のひとつ λ をとり, $g \in S$ を任意に取ると, $\boldsymbol{v} \in E_\lambda(f)$ に対して,

$$f(g(\boldsymbol{v})) = g(f(\boldsymbol{v})) = g(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda(g(\boldsymbol{v})).$$

これは $g(\boldsymbol{v}) \in E_\lambda(f)$ を示す. そこで, f の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とし, $E_i = E_{\lambda_i}(f)$ とすると, すべての g について, $g(E_i) \subset E_i$.

$S_i = \{g|_{E_i} \mid g \in S\} \subset \mathrm{End}_K E_i$ とおくと, S_i は定理の仮定　**(1)**,**(2)** をみたす. 実際, $g \in S$ とすると, 命題 34.3 によって, ある K 係数の多項式 $\psi_g(t)$ で重根を持たないものが存在して $\psi_g(g) = \mathbf{0}$. すると $\psi_g(g|_{E_i}) = \mathbf{0}$ なので, 再び命題 34.3 によって, $g|_{E_i}$ は K 上対角化可能となり, **(1)** が成り立つ. また, $g, h \in S$ について $gh = hg$ なので,

$$g|_{E_i} h|_{E_i} = (gh)|_{E_i} = (hg)_{E_i} = h|_{E_i} g|_{E_i}$$

となって **(2)** も成り立つ.

そこで数学的帰納法の仮定をこれに用いて, E_i のある基底 $\underline{\boldsymbol{v}}^{(i)}$ が存在して, それに関する各 $g|_{E_i}$ の表現行列が対角行列であるものが取れる. すると, $\underline{\boldsymbol{v}}$ をこれらを並べた基底とすれば求める結果を得る. □

35.2 系. V が n 次元ベクトル空間, f, g が V の K 上の線型変換で, f も g も K 上対角化可能で $fg = gf$ とする. このとき, $f \pm g$, fg も K 上対角化可能である.

証明. 定理 35.1 を $S = \{f, g\}$ に適用して, ある V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ が存在して, f, g のこの基底に関する表現行列 A, B がそれぞれ対角行列である. このとき, $f \pm g$, fg の表現行列はそれぞれ $A \pm B$, AB であり, これらは対角行列である. □

35.3 補題. V が n 次元 K ベクトル空間, f, g が V の K 上の線型変換で, f も g も ベキ零で $fg = gf$ とする. このとき, $f \pm g$ もベキ零である.

証明. $f - g$ については, g を $-g$ でおきかて, $f + g$ の場合に帰着されるので, $f + g$ がベキ零と示せば良い. $f^a = \mathbf{0}$, $g^b = \mathbf{0}$ とせよ. $fg = gf$ なので,

$$(f+g)^{a+b-1} = \sum_{i=0}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} f^i g^{a+b-i-1}.$$

最後の和の各項は, $i \geq a$ なら $f^i = \mathbf{0}$ で $\mathbf{0}$. $i < a$ なら, $a + b - i - 1 \geq b$ だから $g^{a+b-i-1} = \mathbf{0}$ で $\mathbf{0}$. 結局 $(f+g)^{a+b-1} = \mathbf{0}$ である. よって $f + g$ もベキ零で, これが示すべきことであった. $\square$

(35.4) $A \in M_n(K)$ とする. A が**半単純 (semisimple)** であるとは, A を複素数係数の行列として対角化可能であることをいう. V は n 次元 K ベクトル空間, $f : V \to V$ が線型変換とする. f が半単純であるとは, f の表現行列が半単純であることをいう. これは V の基底の取り方によらず, f のみで決まる概念である.

35.5 例. 回転行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

は（実）ユニタリ行列なので正規行列で, 複素行列としては対角化可能であり, 半単純. 一方, これが $\pm E_2$ と一致しない限り, (回転した結果同一直線上に戻らないので) $\mathbb{R}^2$ には固有ベクトルは存在せず, つまり実の固有値は存在しない (または固有多項式の判別式が $-4\sin^2\theta < 0$ だからと言ってもよい). つまり $\mathbb{R}$ 上は対角化可能ではない.

35.6 補題. V が n 次元 K ベクトル空間, f が V の K 上の線型変換で, f は半単純かつベキ零とする. このとき, $f = \mathbf{0}$ である.

証明. f のある基底に関する表現行列 A が半単純行列で, f はベキ零だから A はベキ零である. よって半単純かつベキ零な行列が O ならよいが, そのためには $K = \mathbb{C}$ として考えれば十分で, 対角化可能かつベキ零なら O になることを言えば良い. A がそのような行列で $A^r = O$, $D = P^{-1}AP$ は対角行列とする. このとき, $D^r = P^{-1}A^rP = O$ なので, D が対角行列だから, その各成分を r 乗すると 0 であり, つまり $D = O$. よって $A = PDP^{-1} = O$ である. $\square$

35.7 補題. V は n 次元 K ベクトル空間, $f:V\to V$ は K 線型変換とし, すべての f の固有値は K の元とする. λ を固有値のひとつとするとき, ある K 係数の多項式 $\varphi(t)$ が存在して $\varphi(f)|_{W_\lambda(f)}=\mathrm{id}$ であり, λ と異なる任意の固有値 μ に対しては $\varphi(f)|_{W_\mu(f)}=\mathbf{0}$ となるものが存在する.

証明. $W=W_\lambda(f)$, $f_W:=f|_W$ とおく. f の固有値 μ で λ と異なるものについて, $f_W-\lambda\mathrm{id}_W$ はベキ零なので, $f_W-\mu\mathrm{id}_W$ は自己同型で, ある K 係数多項式 $\psi_\mu(t)$ が存在して, $(f_W-\mu\mathrm{id}_W)^{-1}=\psi_\mu(f_W)$ と書ける. 固有値 μ の重複度を $m(\mu)$ とすると, $\xi_\mu(f)=\psi_\mu(f)^{m(\mu)}(f-\mu\mathrm{id}_W)^{m(\mu)}$ も K 係数の f の多項式で, $\xi_\mu(f)|_W=\mathrm{id}$ で $\xi_\mu(f)|_{W_\mu(f)}=\mathbf{0}$. よってすべての λ 以外の固有値 μ を走らせて積を取り,

$$\varphi(t)=\prod_{\mu\neq\lambda}\xi_\mu(t)$$

とおけば, $\varphi(f)$ は固有値 $\mu\neq\lambda$ について $W_\mu(f)$ 上で $\mathbf{0}$ で, $W=W_\lambda(f)$ 上で恒等写像である. □

35.8 定理 (ジョルダン分解 (Jordan decomposition)). V が m 次元 K ベクトル空間, $f:V\to V$ は K 上の線型変換とし, その固有値はすべて K の元とする. このとき, 次をみたす V の線型変換 s,n が一意的に存在する.

(1) s は半単純.

(2) n はベキ零.

(3) $f=s+n$.

(4) $sn=ns$.

以上のとき, 次が成立する.

(5) s は K 上対角化可能.

(6) s の固有値は重複度を込めて f のそれと一致する.

(7) f の各固有値 λ に対して $W_\lambda(f)=E_\lambda(s)$.

(8) ある K 係数の多項式 $S(t)$ と $N(t)$ が存在して $s=S(f)$, $n=N(f)$.

証明. f の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ として, $W_i = W_{\lambda_i}(f)$ とおく. f の K 係数多項式 $\chi_i(f)$ で $\chi_i(f)|_{W_i} = \mathrm{id}$, $\chi_i(f)|_{W_j} = \mathbf{0}$ $(j \neq i)$ であるものが補題 35.7 によって存在する.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi_i(t), \tag{35.8.1}$$

$N(t) = t - S(t)$ とおき, $s = S(f)$, $n = N(f)$ とおく. この s, n が確かに **(1)**–**(8)** をみたしていることを示そう. **(8)** は定義から明らかである. $s + t = S(f) + f - S(f) = f$ で **(3)** が成立している. また, どちらも f の多項式だから **(4)** も明らかである.

$$s|_{W_j} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi_i(f)|_{W_j} = \lambda_j \mathrm{id}_{W_j}$$

なので $W_j \subset E_{\lambda_j}(s) \subset W_{\lambda_j}(s)$ であり,

$$m = \sum_{j=1}^{r} \dim_K W_j \leq \sum_{j=1}^{r} \dim_K E_{\lambda_j}(s) \sum_{j=1}^{r} \dim_K W_{\lambda_j}(s) \leq m$$

なので不等号はすべて等号で, **(1), (5), (6), (7)** が成立する.

$$n|_{W_j} = (f - s)|_{W_j} = (f - \lambda_j \mathrm{id})|_{W_j}$$

でこれはベキ零. よって n もベキ零で **(2)** が成立した. 以上により, **(1)**–**(8)** をみたす s, n が存在するとわかった. このような s, n の組をひとつ固定する.

あとは **(1)**–**(4)** をみたす s, n の一意性を示せば十分となるが, そのためには $K = \mathbb{C}$ として示せば良い. よって半単純は対角化可能と読み替えられる. s', n' が **(1)**–**(4)** をみたす線型変換の組とせよ. すると $s'f = s'(s'+n') = (s'+n')s' = fs'$ なので, s' は f と可換で, よって f の任意の多項式とも可換である. よって特に $s's = ss'$ である. 同様の議論で $n'n = nn'$ も示される. $s' + n' = f = s + n$ なので, $s' - s = n' - n$. これは系 35.2 と補題 35.3 によって, 半単純かつベキ零. つまり $\mathbf{0}$ であり, $s' = s$, $n' = n$ が証明された. □

(35.9) 定理の分解 $f = s + n$ をジョルダン分解という. s を f の**半単純成分** **(semisimple part)**, n を**ベキ零成分** **(nilpotent part)** という. n 次正方行列 A についても, $A = S + N$ で, S は半単純, N はベキ零, $SN = NS$ なる分解が一意的に存在し, この分解をジョルダン分解という.

(35.10) ジョルダン細胞 $J(\lambda, r)$ をジョルダン分解するのは容易で,

$$J(\lambda,r) = \lambda E_r + (J(\lambda,r) - \lambda E_r) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

がジョルダン分解を与えていることは明らかだろう. したがって, ジョルダン標準形 J のジョルダン分解は, その対角成分だけ残してあとは0 を並べた対角行列を S として, $N = J - S$ としたものである. $P^{-1}AP = J$, つまり $A = PJP^{-1}$ のとき, $A = PSP^{-1} + PNP^{-1}$ は A のジョルダン分解である. つまり, ジョルダン基底行列とジョルダン標準形が計算できれば, ジョルダン分解も計算できる.

35.11 例.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

のジョルダン分解を計算しよう.

$F_A(t) = t^3 - t^2 = t^2(t-1)$ なので固有値は 0 (2 重根), 1.

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(A - E_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O.$$

$\boldsymbol{p}_2 = (A - E_3)\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,-1,1)$, $\boldsymbol{p}_1 = A(A-E_3)\boldsymbol{e}_3 = {}^t(-1,1,0)$ とおけば $W_0(A)$ の基底でジョルダン基底の一部となる. また

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルは $W_1(A) = E_1(A)$ の基底であり, $\boldsymbol{p}_3 = {}^t(-1,0,2)$ はジョルダン基底の一部.

$$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

はジョルダン基底行列で $J = P^{-1}AP = J(0,2) \oplus J(1,1)$ がジョルダン標準形. そこで J の対角成分だけをとった

$$S_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が J の半単純成分で,

$$S = PS_JP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

が A の半単純成分,

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が A のベキ零成分である. なお, $S = A^2$ なのは A^2 が $W_0(A)$ 上で $\mathbf{0}$, $W_1(A) = E_1(A)$ 上で 1 になっているからで, そのことに気づいていれば計算は不要だった.

35.12 演習. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

をジョルダン分解せよ.

36　双線型形式

(36.1)　V が K ベクトル空間とする．$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to K$ が**双線型形式** **(bilinear form)** であるとは, 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ について $\langle \boldsymbol{a},\ \rangle : V \to K$ が線型形式, つまり $\lambda, \mu \in K$ と $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \mu\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$$

が成立し, かつ任意の $\boldsymbol{a} \in V$ について $\langle\ , \boldsymbol{a}\rangle : V \to K$ が線型形式, つまり $\lambda, \mu \in K$ と $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ に対して

$$\langle \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle = \lambda\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle + \mu\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle$$

が成立することをいう．

(36.2)　$\mathbb{R}$ ベクトル空間の上のユークリッド内積は双線型形式である．

(36.3)　$\boldsymbol{a} \subset V$ に対して, $\mathrm{Ker}\langle \boldsymbol{a},\ \rangle$ を $\boldsymbol{a}^\perp$ で表し, $S \subset V$ に対して

$$S^\perp = \bigcap_{\boldsymbol{a} \in S} \boldsymbol{a}^\perp = \{\boldsymbol{b} \in V \mid \forall \boldsymbol{a} \in S\ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0\}$$

とおくことはユークリッド内積の場合と同様である．$V^\perp$ を $\langle\ ,\ \rangle$ の核という．

(36.4)　$\boldsymbol{a} \in V$ に対して, $\mathrm{Ker}\langle\ , \boldsymbol{a}\rangle$ を ${}^\perp\boldsymbol{a}$ で表し, $S \subset V$ に対して

$${}^\perp S = \bigcap_{\boldsymbol{a} \in S} {}^\perp\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{b} \in V \mid \forall \boldsymbol{a} \in S\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = 0\}$$

とおく．(エルミート) 内積に対してこのように定義しても ${}^\perp S = S^\perp$ となって新しいものにはならないが, 双線型形式について一般には ${}^\perp S = S^\perp$ と限らない．

(36.5)　内積の場合にならい, V の元の列 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して, 行列 $(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)$ を $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\underline{\boldsymbol{v}}$ のグラム行列と呼ぶことにしよう．

(36.6)　$\lambda : V \to V^*$ を $\lambda(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v},\ \rangle$ と定めると容易に K 線型写像だとわかる．その核は ${}^\perp V$ である．同様に $\rho : V \to V^*$ を $\rho(\boldsymbol{v}) = \langle\ , \boldsymbol{v}\rangle$ と定めるとこれも K 線型写像である．その核は $\langle\ ,\ \rangle$ の核 $V^\perp$ である．定義から分かるように λ と μ は互いに双対である．つまり, $V^{**} = V$ の同一視のもとに,

$$V = V^{**} \xrightarrow{\lambda^*} V^*$$

が μ だし,

$$V = V^{**} \xrightarrow{\mu^*} V^*$$

が λ である．

(36.7) $\rho(\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_i) = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle$ なので $\rho(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \boldsymbol{v}_i^*$. つまり, ρ の表現行列がグラム行列 $(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)$ になっている. $\langle\ ,\ \rangle$ が非退化ということは, ρ が単射ということと同値である.

36.8 補題. $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし, $A = (\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)$ をグラム行列とする. このとき,

$$\dim_K V^{\perp} = n - \operatorname{rank} A = \dim_K {}^{\perp}V.$$

証明. ρ の表現行列が A だから $\operatorname{rank} \rho = \operatorname{rank} A$. よって

$$\dim_K V^{\perp} = \dim_K \operatorname{Ker} \rho = n - \dim_K \operatorname{Im} \rho = n - \operatorname{rank} \rho = n - \operatorname{rank} A.$$

一方, λ は ρ の双対なのでその $\underline{\boldsymbol{v}}$ と $\underline{\boldsymbol{v}}^*$ に関する表現行列は ${}^{t}A$ である. よって,

$$\dim_K {}^{\perp} = \dim_K \operatorname{Ker} \lambda = n - \operatorname{rank} {}^{t}A = n - \operatorname{rank} A.$$

□

36.9 系. 補題 36.8 の状況で, 次は同値である.

(1) グラム行列 A は正則行列.

(2) ρ は同型.

(3) λ は同型.

(4) $V^{\perp} = \mathbf{0}$.

(5) ${}^{\perp}V = \mathbf{0}$.

□

(36.10) これらをみたすとき, $\langle\ ,\ \rangle$ は**非退化 (non-degenerate)** という. (4) をみればわかるように, この概念は基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ の選び方にはよらず, 双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ のみで決まる. ユークリッド内積に関する正規直交基底のグラム行列は単位行列なので, ユークリッド内積は非退化な双線型形式の例である.

(36.11) V は n 次元とする. 上では V 上の双線型形式から線型写像 $\rho : V \to V^*$ やその表現行列である (基底の) グラム行列が定まることを見たが, 逆もしかりであり, V の基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ を固定すると, $\rho : V \to V^*$ とその表現行列 $A \in M_n(K)$ は一対一に対応し, ρ が決まれば $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle := \rho(\boldsymbol{w})(\boldsymbol{v})$ だと定義して容易に $\langle\ ,\ \rangle$ が双線型形式だとわかる. つまり, V 上の双線型形式, 線型写像 $\rho : V \to V^*$, $A \in M_n(K)$ は V の基底を決めればすべて $1:1$ に対応するとわかった.

(36.12) グラム行列から直接的に双線型形式を対応させよう. $\rho : V \to V^*$ の表現行列が $A = (a_{ij})$ のとき, $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n b_j \boldsymbol{v}_j$ に対して, 上で $\rho(\boldsymbol{w}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_j \boldsymbol{v}_i^*$. よって

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i a_{ij} b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i^*(\boldsymbol{v}) v_j^*(\boldsymbol{w}).$$

36.13 例. $A \in M_n(K)$ に対して, K^n 上で $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{y}$ とおくと, 双線型形式であり, その標準基底に関するグラム行列は A 自身である.

36.14 補題. V が K ベクトル空間, $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が V の元の列で, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$,

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) B$$

とする. つまり $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^m b_{tj} \boldsymbol{w}_t$ $(j = 1, \ldots, n)$ とする. このとき, $(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle) = {}^tB(\langle \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_t \rangle)B$ である.

証明.

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \sum_s b_{si} \boldsymbol{w}_s, \sum_t b_{tj} \boldsymbol{w}_t \rangle = \sum_s b_{si} \langle \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{w}_t \rangle b_{tj}$$

から明白である. □

37　対称双線型形式と２次形式

(37.1)　V を基底 $\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を持つ n 次元 K ベクトル空間とする. V 上の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ が対称であるとは, 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$ が成立することをいう. これはグラム行列 $(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)$ が対称行列であることと同値である.

37.2 命題. 写像 $\varphi : V \to K$ に対して, 次は同値である.

(1) ある n 変数 K 係数の斉次 2 次式 $h = h(t_1, \ldots, t_n)$ が存在して, $\varphi = h(\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*)$. つまり, $h = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} \boldsymbol{v}_i^* \boldsymbol{v}_j^*$ とするとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について,
$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} \boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v}).$$

(2) ある V 上の双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在して, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$.

(3) ある V 上の対称双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ が一意的に存在して $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$.

(4) φ が次の 2 条件をみたす.

(i) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ と $\alpha \in K$ に対して $\varphi(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha^2 \varphi(\boldsymbol{v})$.

(ii)
$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \frac{1}{2}(\varphi(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \varphi(\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{w})) \tag{37.2.1}$$
と定義すると $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は対称双線型形式である.

以上の時, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ となる対称双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle$ は φ から (37.2.1) で得られる.

証明. **(1)⇒(2)**. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{1 \le i \le j \le n} c_{ij} \boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{w})$ とおけば容易に双線型形式で $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ であることがわかる.

(2)⇒(3). $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ なる双線型形式があれば, $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] := \frac{1}{2}(\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle)$ とおけば $[\ ,\ ]$ は対称双線型形式であって, $\varphi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}]$ である. 一意性は, $\langle\ ,\ \rangle$ が対称双線型形式で $\varphi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ が成り立つとすると, (37.2.1) 式で φ から $\langle\ ,\ \rangle$ は一意的に決まる.

(3)⇒(4). **(i)** も **(ii)** も容易に確認できる.

(4)⇒(2). (37.2.1) 式で $\langle\ ,\rangle$ を定義すると **(ii)** によって対称双線型形式で, **(i)** を使うと

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{2}(\varphi(2\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{v})) = \frac{1}{2}(4\varphi(\boldsymbol{v}) - 2\varphi(\boldsymbol{v})) = \varphi(\boldsymbol{v}).$$

(2)⇒(1). $\langle\ ,\ \rangle$ のグラム行列を $A = (a_{ij})$ とすると, (36.12) によって

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{w})$$

なので, $1 \le i < j \le n$ に対して $c_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, また $c_{ii} = a_{ii}$ と定義すれば良い. □

(37.3) K^n 上の 2 次形式 φ は K 係数対称行列 $A = (a_{ij})$ によって

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

と表される.

(37.4) 2 次形式 $\varphi : V \to V$ のグラム行列とは, 対応する対称線型形式のグラム行列 (それは対称行列である) のことと定義する. グラム行列がなるべく簡単になるような基底を考えたい. 基底 $\underline{\boldsymbol{w}}$ のグラム行列が A で $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{w}}B$ とすると基底 $\underline{\boldsymbol{v}}$ のグラム行列は ${}^tBAB$ だった (補題 36.14).

37.5 補題. A が K 係数の n 次対称行列とする.

(1) $K = \mathbb{C}$ のとき, ある $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して, ${}^tPAP = E_{n,n}(r) = E_r \oplus O$ とできる. ここに $r = \operatorname{rank} A$.

(2) $K = \mathbb{R}$ のとき, ある実直交行列 U が存在して ${}^UAU$ は対角行列である.

(3) $K = \mathbb{R}$ のとき, ある実正則行列 P が存在して, ${}^tPAP = \mathrm{E}_p \oplus -E_q \oplus O$ となる. ただし p, q は非負整数で $p + q = \operatorname{rank} A$.

証明. **(1)⇒(2)**. A に基本行列 P を使って行列 B から ${}^tPBP$ を作る操作を繰り返して $E_{n,n}(r)$ が作れることを言えば良い. つまり, 次の操作を使って良い.

(1) $R_i \times c$ をほどこし, $C_i \times c$ をほどこす $(c \ne 0)$.

(2) $R_i \leftrightarrow R_j$ をほどこし $C_i \leftrightarrow C_j$ をほどこす.

(3) $R_i \leftarrow cR_j$ をほどこし $C_i \leftarrow cC_j$ をほどこす.

n についての数学的帰納法による. $A = O$ のときは自明なので, $A \neq O$ としてよい. $A[i,j] \neq 0$ とするとき, $i \geq 2$ ならば $R_1 \leftrightarrow R_i$, $C_1 \leftrightarrow C_i$ をほどこし, $i = 1$ と仮定して良い. $A[1,j] \neq 0$ とするとき, $R_1 \leftarrow cR_j$ をほどこし, $C_1 \leftarrow cC_j$ をほどこすと $(1,1)$ 成分は $A[1,1] + 2cA[1,j]$ に変わる. c を適当に選べば ($c \neq -A[1,1]/2A[1,j]$ ならばなんでも良い), $(1,1)$ 成分を 0 でない値にできた. よって $A[1,1] \neq 0$ としてよい.

$K = \mathbb{C}$ なので, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\sqrt{\alpha}$ が存在する. $R_1 \times \sqrt{A[1,1]^{-1}}$ と $C_1 \times \sqrt{A[1,1]^{-1}}$ をほどこして, $A[1,1] = 1$ としてよい. $R_i \leftarrow -A[1,i]R_1$ と $C_i \leftarrow -A[1,i]C_1$ を $i = 2,3,\ldots,n$ についてほどこして, $A = 1 \oplus A_1$ (ただし, A_1 は $n-1$ 次の対称行列) としてよい. あとは数学的帰納法の仮定を適用すれば容易である.

(2) は命題 34.15 である.

(3) を示す. **(2)** によって, A は対角行列として良い. 置換行列 P で ${}^tPAP$ を作って対角成分をいれかえ, $A = a_1 \oplus \cdots \oplus a_n$ で, $a_1, \ldots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \ldots, a_{p+q} < 0$, $a_i = 0$ $(i > p+q)$ としてよい. このとき,

$$P = |a_1|^{-1/2} \oplus \cdots \oplus |a_{p+q}|^{-1/2} \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1$$

とおけば,

$${}^tPAP = 1 \oplus \cdots \oplus 1 \oplus (-1) \oplus \cdots \oplus (-1) \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

である. □

37.6 定理 (シルベスターの慣性法則 (Sylvester's law of intertia)). A が n 次実対称行列とするとき, n 次正則行列 P によって

$${}^tPAP = E_p \oplus (-E_q) \oplus O$$

と表すことが可能で, このとき p, q は A によって一意的に定まり, P の取り方にはよらない.

証明. 可能であることはすでに補題 37.5 でみた. 一意性を示す. P, Q が正則行列で ${}^tPAP = E_p \oplus (-E_q) \oplus O$, ${}^tQAQ = E_s \oplus (-E_t) \oplus O$ とする. $p + q = s + t = \operatorname{rank} A$ であるので, $p > s$ として矛盾を導けば良い.

$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ を変数からなるベクトルとし, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{z}$ で変数変換する. 連立方程式

$$y_i = 0 \quad (i = p+1, \ldots, n), \qquad z_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$$

は $\boldsymbol{x}$ を変数とする $n-p+s$ 個の式からなる斉次連立方程式であるが, 変数の個数よりも方程式の方が少ないので, 命題 12.11 によって, この連立方程式は非自明な解 $\boldsymbol{x}$ を持つ. このとき, $\boldsymbol{x}$ から決まる $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ について,

$$y_1^2+\cdots+y_p^2={}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=t\boldsymbol{z}{}^tQAQ\boldsymbol{z}=-z_{s+1}^2-\cdots-z_{s+t}^2.$$

これは $y_1=\cdots=y_p=0$ を示し, $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$　となって $\boldsymbol{x}$ が非自明な解だったことに反して矛盾である. よって $p=s$ で, 従って $q=t$ である. □

norip

記号一覧

参考文献

[江尻] 江尻典雄, 「理系の基礎数学　線形代数学」, 学術図書, 1998.

索引