線形代数 2 (橋本) 小テスト解答例

この解答例は例に過ぎないので、他にも正解はあり得る. このテストは授業中に行う小テストなので, 追試験・再試験等の措置は取らない.

問題 1. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ $(r \geq 1)$ が $\mathbb{R}^n$ のベクトルで, A が $m \times n$ 行列のとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ も 1 次独立であることを示せ.

(2) $m = n$ で A が正則行列とする. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立ならば, $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ も 1 次独立であることを示せ.

解答例. (1). $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とする. 両辺に A を掛け, $c_1A\boldsymbol{a}_1 + \cdots c_rA\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$. 仮定によって $A\boldsymbol{a}_1, \ldots A\boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立なので, この 1 次関係は自明で, $c_1 = \cdots = c_r = 0$. よって, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立であることが示された.

(2). 仮定により, $A^{-1}A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A^{-1}A\boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立. すでに証明した (1) によって, $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ も 1 次独立である. □

講評 (1) について, $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立だから, $c_1A\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_rA\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ (???) で, $A(c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{0}$. $A \neq 0$ だから (?????), A で割り算して (?) $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ も 1 次独立 (?????????) という議論が非常に多くみられた. 似たようなことを言っているようで, 全然無関係な誤った議論なので間違わないようにしたい.

1 次独立は条件文（「ならば」を含む文）によって定義される（一次関係が成り立つならば, それは自明な関係である) ので, その正確な意味を捉えることが重要である.

問題 2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の第 j 列 $(j = 1, \ldots, 5)$ を $\boldsymbol{a}_j$ で表すことにする. $L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) A を簡約化せよ.

(2) $\dim L$ を求めよ.

(3) L の基を一組与えよ.

解答例. (1).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 10 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2). 上の簡約化の結果により, $\dim L = \operatorname{rank} A = 3$.

(3). 上の (1) で求めた A の簡約化を B とすると, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は同じ解をもつので, A の列ベクトルと B の列ベクトルは同じ 1 次関係を持つ. B の 1, 2, 4 列は (基本ベクトルだから) 1 次独立なので, A の 1, 2, 4 列も 1 次独立となり, $\dim L = 3$ なので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ は L の基である. □

講評　(1) はほかの問題に比べれば出来は良かったが, それでも半数以上の人が間違っていた. 簡約化は行列の階数を求める, 正方行列が正則かどうかを確かめ, 正則な場合には逆行列を求める, 連立 1 次方程式を解くなど, いろいろな場面で必要とされる, 行列に関する基本操作であるから, これは確実に出来るようになっておきたい.

(2), (3) では, L を連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間と勘違いした答案が大変多かった. ここでの L は $\mathbb{R}^4$ の部分空間で, 解空間の方は $\mathbb{R}^5$ の部分空間で, 全然違う.

また, (2) の答えと, (3) で答えた基のベクトルの個数が一致しない解答が大変多かった. 次元とは何か, 定義を再確認する必要があるだろう.

本問は行列の計算と次元, 基などの新しく習得した概念を結びつける問題であるが, 線形代数 2 では, これがずっと求められていくことになる.

問題 3. V は n 次元のベクトル空間, $r \leq n$ で, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は V の 1 次独立なベクトルとする. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を含む V の基 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が存在することを証明せよ.

解答例. $n - r$ についての数学的帰納法によって主張を示す. $n - r = 0$ のときは, 主張は明らかで示すべきことは何もない. $n - r > 0$ のとき, $n - r$ が小さいときには正しいと仮定する. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立だが V の基ではないので, V を生成しない. すると, ある $\boldsymbol{a}_{r+1} \in V$ が存在して, $\boldsymbol{a}_{r+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合ではない. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立なので, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ も 1 次独立である. $n - (r+1)$ は $n - r$ より小さいから, 帰納法の仮定によって, ある $\boldsymbol{a}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がとれて, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基である. これが示すべきことであった. □

講評　ほぼ全滅だった.

問題 4. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は相異なる実数とする. $1 \leq r \leq n$ に対して,

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \alpha_r & \alpha_r^2 & \cdots & \alpha_r^{n-1} \end{pmatrix}$$

とおく. $W_r = \{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \mid A_r \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\}$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{rank} A_r = r$ であることを示せ.

(2) $\dim W_r$ を求めよ.

(3) $W'_r = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{n-1} \mid f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_r) = 0\}$ とおく. $\dim W'_r$ を求めよ.

解答例. (1). A_r の行は全部を取り, 列は最初の r 個の列を取った r 次の小行列式はファンデルモンド行列式で, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は相異なるから 0 でない. よって, $\operatorname{rank} A_r \geq r$ であるが, $\operatorname{rank} A_r \leq r$ は明らかであり, $\operatorname{rank} A_r = r$.

(2). $\dim W_r = n - \operatorname{rank} A_r = n - r$.

(3). $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]_{n-1}$ に対して,

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

と置くとき, $f(x) \in W'_r$ は $A_r\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 言い換えると $\boldsymbol{c} \in W_r$ と同値. そこで, $\boldsymbol{c} \in W_r$ に対して, $f_{\boldsymbol{c}}(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ で定めると, $\boldsymbol{c}_1 \ldots, \boldsymbol{c}_t \in W_r$ について, $[\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t]$ の列ベクトル (すなわち $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t$) が満たす 1 次関係と

$$[1, x, \ldots, x^{n-1}][\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_t]$$

の列ベクトル (すなわち $f_{\boldsymbol{c}_1}(x), \ldots, f_{\boldsymbol{c}_t}(x)$) がみたす 1 次関係は同じである. よって $\dim W'_r = \dim W_r = n - r$. □

講評 (1) は答えは正しいが根拠があいまいな人が多数いた. (2) では, 答えを r とした人が結構いた. W_r と A_r の列ベクトルで張られる空間との混同だと思われるが, 全然違うので区別をはっきりしたい. (3) は答えは簡単なのだが, その根拠をしっかり提示するところが難しかった.

問題 5. V がベクトル空間, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は V の基, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とする. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基である必要十分条件は,

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A$$

となる正則行列 A が存在することであることを示せ.

解答例. 必要性を示す. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が V の基で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V のベクトルなので, ある n 次の正方行列 A が存在して

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A$$

をみたす. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立なので, A の列ベクトルがみたす 1 次関係と $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ がみたす 1 次関係は同じ. 仮定によって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立なので, A の n 個の列ベクトルも 1 次独立で $\operatorname{rank} A = n$. よって A は正則である.

十分性を示す.

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A$$

と表示できていて, A の列ベクトルが 1 次独立で, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ も 1 次独立なので, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ も 1 次独立である. V は n 次元だから, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基である. □

講評 一足飛びの議論をしようとしてこけている人が多かった. 必要性の証明と十分性の証明に分けて, 整理して考えることが大事だと思う.