2019年前期

線形代数 1

三宅敏恒, 線形代数学, 培風館

その1 ①

2.3. 連立1次方程式を解く

連立1次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (A \text{ は } m \times n \text{ 行列})$$

を考える。$\tilde{A} = [A \vdots \boldsymbol{b}]$ (拡大係数行列) とする。

$S_{\tilde{A}}$ のはじめの n 列は S_A なので

$S_{\tilde{A}}$ の最終列に行ベクトルの主成分があるか

ないかに応じて、

① $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A + 1$ または

② $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A$ である。

$$\operatorname{rank} A = r$$

①の場合

$$S_{\tilde{A}} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \; 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ \boxed{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & & & & O & & & & & & & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ r+1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

r+1 行目の方程式は

$$0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=1$$

つまり　$0=1$　であり、

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ の値とは無関係に、常に不成立である。

つまり $S_{\tilde{A}}$ を拡大係数行列にもつ連立方程式は解ナシ。

よって元の $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ も解なし。

② $\mathrm{rank}\,\hat{A}=\mathrm{rank}\,A$ の場合。

$$S_{\tilde{A}}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} & & & j_1 & & & & j_2 & & & \cdots & j_r & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & \ddots & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & O & & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

これを方程式で書き直すと、

$$\begin{cases} x_{j_1}+c_{1j_1+1}x_{j_1+1}+\cdots+c_{1j_2-1}x_{j_2-1}+0+c_{1j_2+1}x_{j_2+1}+\cdots+c_{1j_r-1}x_{j_r-1}+0+\cdots=d_1 \\ \qquad x_{j_2}+c_{2j_2+1}x_{j_2+1}+\cdots+c_{2j_r-1}x_{j_r-1}+0+\cdots=d_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_{j_r}+\cdots=d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

となる。これは $x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$ のみ左辺に残して移項すればわかるように、$x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$（主成分に対応する成分）以外の成分を任意に決めるごとに、$x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$ も一意的に決まり、解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ が定まる。任意に決めてよい変数の個数は $n-r$ で

ある。 $n-r = n-\mathrm{rank}\,A = n-\mathrm{rank}\,\tilde{A}$
をこの連立方程式の解の**自由度**という。

①, ② をまとめると，次を得る。

<u>定理2.3.1</u> 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を
もつ必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,A$$

である。ここに $\tilde{A}=[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}]$ は拡大係数行列。

<u>例題2.3.1</u> 次の連立1次方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

拡大係数行列を簡約化する。

解)

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow (-2)R_1]{R_3 \leftarrow R_1} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow (-1)R_2} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow 2R_4 \\ R_3 \leftarrow (-4)R_4}]{R_1 \leftarrow (-1)R_4} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$0=1$

解なし

例題2.3.2

次の連立1次方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解）拡大係数行列を簡約化する。

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow (-2)R_1]{R_2 \leftarrow (-1)R_1} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow (-1)R_2} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-1)R_3} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_2 = c_1$

$x_4 = c_2$ とおいて.

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 3c_2 + 2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 - 1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

//

上での解の自由度は 2 である。上の解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

のように表すと分かりやすいこともある。

n変数の連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が唯ひと組の

解を持つ条件は

(i) 解を持ち（$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}]$）

(ii) 解の自由度が 0（$n=\mathrm{rank}\,A$）.

まとめると,

定理 2.3.2.

n変数の連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ がただひと組の解を持つ必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}]=n.$$

なお，2個以上解をもつことと無限個解を持つことは同じで，その条件は

$$\mathrm{rank}[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}]=\mathrm{rank}\,A<n$$

である。

☆ 同次形（斉次形）の連立1次方程式.

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

の解の連立1次方程式は**同次形**という。

同次形の連立1次方程式はいつでも $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解にもつ。これを**自明な解**という。

非自明な解を持つ $\Leftrightarrow$ 解が2個以上（従って無限個）で，その条件は $\mathrm{rank}\,A<n$ である。

従って特に、A が $m\times n$ 行列（つまり、方程式が m 本で未知変数が n 個）で、$m<n$ のとき、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつ。

※ 同次形の連立1次方程式を解く.

同次形の連立1次方程式の拡大係数行列の最終列は零ベクトルに決まっているので、省略し、係数行列のみ考えればよい。

例題 2.3.3. 次の連立1次方程式を解け。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow(-1)R_1}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow 2R_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

よって、$x_3=c_1$, $x_4=c_2$ とおいて、

$$\begin{cases} x_1=-2c_1-c_2 \\ x_2=-c_1+c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(c_1, c_2\in\mathbb{R})$.

問題 2.3 1. 次の連立1次方程式を解け.

(6)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow (-3)R_1]{R_2 \leftarrow R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow R_3]{R_2 \times 3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -8 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow 8R_2]{R_1 \leftarrow (-3)R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

3行目の方程式 $0=6$ は決してみたされないので、

解ナシとなる。

(7)
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これは同次形。

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_1]{R_2 \leftarrow (-1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow 4R_2 \\ R_3 \leftarrow 2R_2}]{R_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow 3R_3 \\ R_2 \leftarrow \frac{3}{2}R_3}]{R_3 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$ として. $\begin{cases} x_1 = -c_1 - 2c_2 \\ x_2 = -2c_2 \\ x_3 = -c_1 - c_2 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$

//