2.4 正則行列

定理 2.4.2

A が n 次正方行列のとき，次は同値である。

(1) $\mathrm{rank}\,A = n$

(2) A の簡約化は E_n である。

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は任意の n 次の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し，ただひとつの解を持つ。

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る。

(5) A は正則行列である。

証明) (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (5) はすでにみた。

(5) $\Rightarrow$ (3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけて $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. 逆に $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただひとつの解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ をもつ。

(3) $\Rightarrow$ (4) は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とおけば明らか。

(4) $\Rightarrow$ (1) はすでにみた。 □

逆行列の計算　A は n 次正方行列とする。

$n \times 2n$ 行列 $[A \,\vdots\, E_n]$ を考え，これに行変形を加え，左半分の A を簡約化する。ある n 次正則行列 P により，

$$P[A \,\vdots\, E_n] = [PA \,\vdots\, P] = [S_A \,\vdots\, P]$$ となる。

・A が正則のとき。$S_A = E_n$，つまり $PA = E_n$.

よって $P = A^{-1}$ で，その P は $n \times 2n$ 行列の

右半分で計算されている！ ②

- Aが正則でないとき。$\mathrm{rank}\ \mathcal{S}_A = \mathrm{rank}\ A < n$ だと計算でわかった時点で、正則でない、と判断できる。

<u>例題2.4.1</u> 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

解答　$[A \mid E]$ を簡約化する。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow -R_1]{R_2 \leftarrow (-2)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftarrow (-2)R_2]{R_2 \times (-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftarrow (-1)R_3]{R_1 \leftarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

よってAは正則で

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

//

☆ rank に関する補足

Aが$m \times n$行列で、

(I) Aの零ベクトルである行ベクトルがAの零ベクトルでない行ベクトルより上にあるということは起こらない。

(II) 0でない行ベクトルを1〜r行目とし、第i行の主成分をa_{ij_i}とすると、$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$

が成りたつとき、Aは**階段行列**というのだった。

簡約な行列は階段行列。

Aが階段行列なら，1～r行目を0でない定数倍して，rや$j_1, \cdots, j_r$をかえずに，各主成分が1の階段行列にできる。さらに，主成分の上にある成分を掃き出しによって0にすることを，j_2列目，j_3列目，$\cdots$，j_r列目の順に行い，次を得る。

☆ Aが階段行列で，1～r行目が0でなく，$(1, j_1)$成分，$(2, j_2)$成分，$\cdots$，(r, j_r)成分が主成分のとき，Aを簡約化してもrや主成分の位置は変わらない。とくに，$\mathrm{rank}\, A = r$である。

例)

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

問題2.4

1. (1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

解)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \Leftarrow (-2)R_1]{R_1 \Leftrightarrow R_3,\ R_2 \Leftarrow (-2)R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \Leftarrow R_2]{R_2 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \Leftarrow R_3]{R_1 \Leftarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$ //

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow (-2)R_1]{R_1 \Leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow (-1)R_2]{R_2 \times (-1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_3]{R_3 \times (-1),\ R_1 \leftarrow (-1)R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow (-2)R_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad //$$

7. Aがべき零行列ならば $E+A$, $E-A$ は共に正則行列であることを示せ。また，その逆行列を求めよ。

解) Aがべき零とは，ある$r \geqq 1$があって $A^r = O$ となることであった。このとき，

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{r-1})$$
$$= (E+A+\cdots+A^{r-1}) - A\cdot(E+A+\cdots+A^{r-1})$$
$$= E - A^r = E - O = E.$$

よって $E-A$ は正則で，逆行列は

$$E + A + A^2 + \cdots + A^{r-1}.$$

また，このとき $(-A)^r = (-1)^r \cdot A^r = O$ なので

$E+A = E-(-A)$ も正則で その逆行列は

$$E + (-A) + (-A)^2 + \cdots + (-A)^{r-1}$$
$$= E - A + A^2 - \cdots + (-1)^{r-1}A^{r-1}. \quad //$$

8. A が m 次正則行列，D が n 次正則行列ならば，任意の $m \times n$ 行列 B，$n \times m$ 行列 C に対し，次の行列 X，Y，Z は正則であることを示せ。また，X^{-1}，Y^{-1}，Z^{-1} を求めよ。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{bmatrix} = E_{n+m}$$

$(S: m \times m,\ T: m \times n,\ U: n \times m,\ V: n \times n)$

$\Longleftrightarrow$ ① $AS + BU = E_m$　③ $DU = O$
② $AT + BV = O$　④ $DV = E_n$.

$\Longleftrightarrow$ $V = D^{-1}$, $U = O$, $S = A^{-1}$, $T = -A^{-1}BD^{-1}$

よって $X = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ は正則で，$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$

よって ${}^tY = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ O & {}^tD \end{bmatrix}$ は正則で，${}^tY^{-1} = \begin{bmatrix} {}^tA^{-1} & -{}^tA^{-1}\,{}^tC\,{}^tD^{-1} \\ O & {}^tD^{-1} \end{bmatrix}$

よって Y も正則で

$$Y^{-1} = {}^t({}^tY^{-1}) = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix} = X\begin{bmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}$$

よって $Z\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}X^{-1} = X\begin{bmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}X^{-1}$

$$= XX^{-1} = E_{m+n}.$$

従って Z は正則で

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}X^{-1} = \begin{bmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} O & D^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$ //

次回 6/6(木) 小テスト

- ランクを求めよ
- 連立1次方程式を解け
- 逆行列を求めよ
- その他.

節末問題をしっかりやっておいて下さい。