3.1 続き.

$\{1, 2, \cdots, n\}$ のうち,

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 以外は固定し.

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ は. $k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_3$,

$\cdots, k_{r-1} \to k_r$, $k_r \to k_1$ と順にずらす

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$ を

巡回置換といい.

$\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ で表す。

r を巡回置換の長さという。

例. $\sigma = (2\ 5\ 3)$ とすると.

$\sigma 2 = 5$, $\sigma 5 = 3$, $\sigma 3 = 2$ で

他の文字は動かさない。なお

$\sigma = (2\ 5\ 3) = (5\ 3\ 2) = (3\ 2\ 5)$.

任意の置換は, 共通の文字を含まない

巡回置換の積で表せる.

例題 3.1.1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (3\ 6\ 5\ 7)(1\ 4\ 2)$$
$$= (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 5\ 7)$$

互換と隣接互換

2文字の巡回置換 $(i\ j)$ を互換という。$(i\ j)$ は i と j を入れかえ.
その他の文字は固定する。

互換 $(i\ \ i+1)$ は隣接互換といい.
s_i で表す。

☆ 転倒数

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して.

$$I(\sigma) = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma i > \sigma j\}$$

とおき、$I(\sigma)$ の元の個数 $\#I(\sigma)$ を
σ の**長さ**または**転倒数**と呼んで
$\ell(\sigma)$ で表す.

$(-1)^{\ell(\sigma)}$ を σ の符号といい、$\mathrm{sgn}\,\sigma$ で表す。

例　$n=5$　$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow I(\sigma)=\{(1,2),(1,4),(1,5),(3,4),(3,5)\}$

$\ell(\sigma)=5$, $\mathrm{sgn}\,\sigma=(-1)^5=-1$.

☆補題　$1\leq i<n$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ のとき、

$$\ell(\sigma s_i)=\begin{cases}\ell(\sigma)-1 & (\sigma i>\sigma(i+1)\text{のとき})\\ \ell(\sigma)+1 & (\sigma i<\sigma(i+1)\text{のとき})\end{cases}$$

pf.　$1\leq j<k\leq n$ について、
$(j,k)\neq(i,i+1)$ でない限り、

$$\begin{aligned}(j,k)\in I(\sigma)&\Leftrightarrow j<k \text{ かつ } \sigma j>\sigma k\\ &\Leftrightarrow s_ij<s_ik \text{ かつ } (\sigma s_i)(s_ij)>(\sigma s_i)(s_ik)\\ &\Leftrightarrow (s_ij,s_ik)\in I(\sigma s_i).\end{aligned}$$

一方、$\sigma i>\sigma(i+1)$ なら、$\sigma s_i i<\sigma s_i(i+1)$ で、
$(i,i+1)\in I(\sigma)$ で $(i,i+1)\notin I(\sigma s_i)$.
$\sigma i<\sigma(i+1)$ なら、$(i,i+1)\notin I(\sigma)$ で $(i,i+1)\in I(\sigma s_i)$

以上から主張は従う。 $\square$

定理. n は自然数, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする。

① $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)}}$

$(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{\ell(\sigma)} < n)$

なる表示が存在する。

② $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\ell} \quad (\ell \geqq 0)$
とすると. $\ell = \ell(\sigma) + 2u$, $u \geqq 0$
と表される。とくに. ℓ の偶奇は $\ell(\sigma)$ の偶奇と一致し. $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^\ell$ である。

Pf. ① $\ell(\sigma)$ についての帰納法。
$\ell(\sigma) = 0$ のとき。$\sigma 1 < \sigma 2 < \cdots < \sigma n$
ということなので. $\sigma 1 = 1, \sigma 2 = 2, \ldots, \sigma n = n$
となるしかなく, $\sigma = \varepsilon$. これは $s_1, \ldots, s_{n-1}$
の「0個の積」とみなせ, 正しい。

$\ell(\sigma) > 0$ のとき. $\sigma 1 < \sigma 2 < \cdots < \sigma n$
ではないので. ある $1 \leq i < n$ があって.
$\sigma i > \sigma(i+1)$ である。このとき,
$\ell(\sigma s_i) = \ell(\sigma) - 1$ なので. 数学的帰納法の仮定によって.

$\sigma s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)-1}}$

と表せる。両辺に右から s_i をかけ、

$$\sigma = \sigma s_i s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)-1}} s_i$$

となって求める表示を得た。

② ℓ についての帰納法。

$$\sigma s_\ell = s_1 s_2 \cdots s_\ell s_\ell = s_1 s_2 \cdots s_{\ell-1}$$

帰納法により、

$$\ell - 1 = \ell(\sigma s_\ell) + 2v$$
$$= \ell(\sigma) \pm 1 + 2v \quad \text{とかける。}$$

よって $\ell = \ell(\sigma) + 2v$ または
$\ell(\sigma) + 2(v+1)$ であり、
$\ell = \ell(\sigma) + 2u \quad u \geq 0$ とかける。//

✿ 偶置換と奇置換

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、 $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ または -1.

$\operatorname{sgn}\sigma = 1$ のとき σ は偶置換

$\operatorname{sgn}\sigma = -1$ 〃 〃 奇置換 という。

✿ 定理 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ のとき、

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$$

Pf. $\sigma = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)}}$
$\tau = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{\ell(\tau)}}$ と表示できる。

このとき、$\sigma\tau = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(\sigma)}} s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{\ell(\tau)}}$

よって、
$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) &= (-1)^{\ell(\sigma)+\ell(\tau)} \\ &= (-1)^{\ell(\sigma)} \cdot (-1)^{\ell(\tau)} \\ &= \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \mathrm{sgn}\,\tau. \quad // \end{aligned}$$

※ 巡回置換の符号.

$1 \leq i < j \leq n$ のとき、

$$(i\ j) = s_i \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_{i+1} s_i$$

これは $2(j-i)-1$ 個の積なので、

$\mathrm{sgn}(i\ j) = -1$ 　 $(i\ j)$ は奇置換。

$$(k_1\ k_2 \cdots k_r) = (k_1\ k_2) \cdots (k_{r-2}\ k_{r-1})(k_{r-1}\ k_r)$$

よって、$\mathrm{sgn}(k_1 k_2 \cdots k_r)$

$= \mathrm{sgn}(k_1 k_2) \cdots \mathrm{sgn}(k_{r-1} k_r)$

$= (-1)^{r-1}$. 　 長さ r の巡回置換の符号は $(-1)^{r-1}$.

長さ偶数の巡回置換は奇置換
　　奇　　　　　　　　　　　偶

例　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

の符号を求めよ。

1) $I(\sigma) = \{(1,2),(1,4),(1,5),(1,6),(1,8),(1,9),$
$(2,4),(2,5),(2,6),(2,8),(2,9),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(3,8),(3,9),$
$(4,5),(6,8),(7,8),(7,9)\}$

$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{20} = 1.$

2). $\sigma = (1\ 7\ 9\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 8)$

$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)\cdot(+1)\cdot(-1) = 1.$

☆ 例. $\mathfrak{S}_3 = \{[1\ 2\ 3], [1\ 3\ 2], [2\ 1\ 3],$

$[1\ 2\ 3] = \varepsilon$ 偶, $[1\ 3\ 2] = s_2$ 奇, $[2\ 1\ 3] = s_1$ 奇

$[2\ 3\ 1], [3\ 1\ 2], [3\ 2\ 1]\}$

$[2\ 3\ 1] = s_1 s_2$ 偶, $[3\ 1\ 2] = s_2 s_1$ 偶, $[3\ 2\ 1] = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ 奇

n 次の偶置換全体は $\mathfrak{A}_n$ または A_n で表す。

☆定理. $n \geqq 1$ のとき. $\# \mathfrak{S}_n = n!$
$n \geqq 2$ のとき. $\# \mathfrak{A}_n = n!/2$.

pf. n 次の置換は n 順列 の $1, の2, \ldots, のn$ の

と 1:1 に対応するので. $\# \mathfrak{S}_n = n!$
$n \geqq 2$ とする。
$\mu : \tau \longmapsto \tau s_1$ により. 偶置換は奇置換に, 奇置換は偶置換にそれぞれ写されるので. これは.

$$\mathfrak{A}_n \overset{\mu}{\underset{\mu}{\rightleftarrows}} \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$$

なる対応を与えるが. μ^2 は恒等写像

なので. これにより $\mathfrak{A}_n$ と $\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ は

1:1 に対応し. $\# \mathfrak{A}_n = \#(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n)$.

また. $\# \mathfrak{A}_n + \#(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n) = \# \mathfrak{S}_n = n!$

よって. $\# \mathfrak{A}_n = n!/2$ である。//

問題 3.1

1.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $(1\ 4)(3\ 2)(1\ 2\ 4\ 3)(2\ 3)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2、次の置換を巡回置換の積に分解せよ。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$= (1\ 3\ 5\ 2)(4\ 8\ 7\ 6)$

3. 次の置換の符号を求めよ。

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$= \underset{-}{(1\ 3)}\underset{+}{(2\ 4\ 9)}\underset{+}{(5\ 8\ 7)}$

符号は -1.

☆ 差積と置換の符号。

n 変数の多項式 $f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$

に対して. $(\sigma f)(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma 1}, \cdots, x_{\sigma n})$

と定義する。 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき.

$f = x_1^5 - x_2^2 x_3^2 + 3x_1 x_4$ とすると.

$\sigma f = x_4^5 - x_1^2 x_2^2 + 3x_4 x_3$ である。

公式: $\sigma(f \pm g) = \sigma f \pm \sigma g$, $\sigma(fg) = \sigma f \cdot \sigma g$.

さて. $\Delta = \Delta(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ を

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

で定める。 $n = 4$ のとき.

$$\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

である。 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について.

$$\begin{aligned} \sigma\Delta &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma i} - x_{\sigma j}). \\ &= (\operatorname{sgn} \sigma) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \\ &= (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \Delta. \end{aligned}$$

//