3.2 行列式の定義と性質 (1)

☆ 行列式

n次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し、

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdots a_{n\sigma n}$$

とおき A の行列式と呼ぶ。A の行列式は

$|A|$, $|a_{ij}|$, $\det A$, $\det[a_{ij}]$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等で表される。

例1 $\mathfrak{S}_2 = \{ \underset{\text{偶}}{\varepsilon = [1\ 2]},\ \underset{\text{奇}}{(1\ 2) = [2\ 1]} \}$.

よって
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\varepsilon\, a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}(1\ 2)\, a_{12}a_{21}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad //$$

例2 $\mathfrak{S}_3 = \{ \varepsilon = \overset{+}{[1\ 2\ 3]},\ \overset{-}{[1\ 3\ 2]},\ \overset{-}{[2\ 1\ 3]},$
$\underset{+}{[2\ 3\ 1]},\ \underset{+}{[3\ 1\ 2]},\ \underset{-}{[3\ 2\ 1]} \}$.

よって.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

<u>サラスの方法</u>　2次および3次の正方行列の行列式は
右下へ向かう成分の積を加え、
左下　〃　〃　引いたものとする。

2次
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$-$　$+$

3次
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$
$-$　$-$　$-$　$+$　$+$　$+$

※4次以上の行列式にサラスの方法を使うことはできない。
例えば、4次の行列式は24個の4次の単項式を+,−したものだが、サラスの方法では、そのうちの8個しか扱えていない。

<u>定理3.2.1</u>
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pf.　$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、$\sigma(1) \neq 1 \Leftrightarrow$ ある $k \neq 1$ が存在して $\sigma(k) = 1$
このとき、$a_{k\sigma(k)} = 0$ だから、

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0$$

よって、

$$\det A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma1}a_{2\sigma2}\cdots a_{n\sigma n}$$

$$=\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma1=1}}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{11}a_{2\sigma2}\cdots a_{n\sigma n}$$

$$=a_{11}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \sigma1=1}}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{2\sigma2}\cdots a_{n\sigma n}$$

ここで $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ で $\sigma1=1$ であるものと $\{2,3,\dots,n\}$ の置換は1対1対応で、その符号も一致するから、この値は

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

//

例3.

$$\begin{vmatrix}3&1&2\\0&2&3\\0&1&4\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=3\cdot(2\cdot4-3\cdot1)$$
$$=15.$$ //

例4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ //

例5　$|E_n| = 1$　(例4による).

定理 3.2.2.

(1) 1つの行をc倍すると行列式はc倍になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 第i行が2つの行ベクトルの和である行列の行列式は他の行は同じで第i行に各々の行ベクトルをとった行列の行列式の和になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pf. (1) 左辺 $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{1\sigma 1} \cdots (c a_{i\sigma i}) \cdots a_{n\sigma n}$

$= c \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{1\sigma 1} \cdots a_{i\sigma i} \cdots a_{n\sigma n}$

$=$ 右辺.

(2). 左辺 $= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma 1} \cdots (b_{i\sigma i} + c_{i\sigma i}) \cdots a_{n\sigma n}$

$= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma 1} \cdots b_{i\sigma i} \cdots a_{n\sigma n}$

$+ \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma 1} \cdots c_{i\sigma i} \cdots a_{n\sigma n} =$ 右辺.

例6. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

定理3.2.3 2つの行を入れかえると、行列式は-1倍になる。

$$\begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

Pf. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し、$\tau = \sigma (i\ j)$ とおくと、
$\tau i = \sigma j$, $\tau j = \sigma i$, $\tau k = \sigma k$ $(k \neq i, j)$.

また．σ が $\mathfrak{S}_n$ 全体を動くと．対応する τ も $\mathfrak{S}_n$ 全体を動く。さらに．

$$\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}(i\,j) = -\operatorname{sgn}\sigma.$$

よって．

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma)\, a_{1\sigma 1}\cdots \overset{i}{a_{j\sigma i}}\cdots \overset{j}{a_{i\sigma j}}\cdots a_{n\sigma n} \\
&= \sum_{\tau} (-\operatorname{sgn}\tau)\, a_{1\tau 1}\cdots \overset{i}{a_{j\tau j}}\cdots \overset{j}{a_{i\tau i}}\cdots a_{n\sigma n} \\
&= -\sum_{\tau} (\operatorname{sgn}\tau)\, a_{1\tau 1}\cdots a_{i\tau i}\cdots a_{j\tau j}\cdots a_{n\tau n} \\
&= \text{右辺}. \quad //
\end{aligned}$$

(2) A を i 行目と j 行目が等しい行列とする。
A の i 行目と j 行目を入れかえた行列は
A なので．(1) により．

$$\det A = -\det A$$

よって $\det A = 0$.

<u>例7</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

<u>例8</u>

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

<u>定理3.2.4</u> 行列の1つの行に他の行の何倍かを加えても，行列式の値はかわらない。

$$
i\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

Pf.

$$
\text{左辺} = \text{右辺} + c \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} = \text{右辺}.
$$

<u>例9</u>

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}
$$

$$
= 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} = 11\cdot(-14)
$$

$$
= -154.
$$

<u>問題3.2</u> 次の2次，3次の行列式をサラスの方法を用いて求めよ。

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot6+2\cdot2\cdot7+3\cdot0\cdot1$
$-1\cdot2\cdot1-2\cdot0\cdot6-3\cdot5\cdot7$

$= 58-107 = -49$

2、次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 60.$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 4 & 21 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -47 \\ 0 & -1 & 19 \\ 0 & 6 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ 6 & -26 \end{vmatrix} = -26+114$
$= 88$

(7) $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 100 & 99 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 199 & 200 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 600.$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 16.$

(10) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$ これは行列式の定義によって. $\mathrm{sgn}\,\sigma_n$.

ここに. $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

$I(\sigma_n) = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

なので. $l(\sigma_n) = {}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

よって、求める行列式は $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. //