3.3 行列式の性質 (2)

定理 3.3.1 $\det {}^tA = \det A$

Pf. $A = [a_{ij}]$, ${}^tA = [b_{ij}]$

とおくと. $b_{ij} = a_{ji}$. よって.

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, b_{1\sigma 1} b_{2\sigma 2} \cdots b_{n\sigma n}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma 1 1} a_{\sigma 2 2} \cdots a_{\sigma n n}.$$

$a_{\sigma 1 1}, a_{\sigma 2 2} \cdots a_{\sigma n n}$ の積の順序を

いれかえ. $a_{1\sigma^{-1}1} a_{2\sigma^{-1}2} \cdots a_{n\sigma^{-1}n}$.

また. $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}(\operatorname{sgn}\sigma)^2 = \operatorname{sgn}\sigma$.

$$\therefore \det {}^tA = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} a_{1\sigma^{-1}1} a_{2\sigma^{-1}2} \cdots a_{n\sigma^{-1}n}$$

σ が $\mathfrak{S}_n$ 全体をわたれば, σ^{-1} も $\mathfrak{S}_n$ 全体

をわたる。σ^{-1} を τ で書き直し.

$$\det {}^tA = \sum_{\tau} \operatorname{sgn}\tau\, a_{1\tau 1} a_{2\tau 2} \cdots a_{n\tau n} = \det A.$$

//

定理 3.3.2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \text{右辺}. \quad //$$

同様に、行列式の行に関する性質から、次の列に関する性質を導くことができる。

定理 3.3.3.

(1) 1つの列をc倍すると、行列式はc倍になる。

$$\left| a_1 a_2 \cdots (c a_j) \cdots a_n \right| = c \left| a_1 a_2 \cdots a_j \cdots a_n \right|.$$

(2) $\left| a_1 \cdots (b_j + c_j) \cdots a_n \right|$

$= \left| a_1 \cdots b_j \cdots a_n \right| + \left| a_1 \cdots c_j \cdots a_n \right|.$

(3) $\left| a_1 \cdots \overset{i}{a_j} \cdots \overset{j}{a_i} \cdots a_n \right|$

$= -\left| a_1 \cdots \overset{i}{a_i} \cdots \overset{j}{a_j} \cdots a_n \right|.$

(4) $\left| a_1 \cdots \overset{i}{a_j} \cdots \overset{j}{a_j} \cdots a_n \right| = 0$

(5) $\left| a_1 \cdots (a_i + \overset{i}{c}\, a_j) \cdots a_j \cdots a_n \right|$

$= \left| a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n \right|.$

<u>例1</u> $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 13 \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 16.$

例2
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 48 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -48 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 48.$$

定理 3.3.4.

A が r 次正方行列，D が s 次正方行列ならば，

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$= (\det A)(\det D).$$

証明．定理 3.3.1 により．

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D)$$

を示せばよい。$n=r+s$とし、

$$X=\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}=[a_{ij}]$$ とおく。

ブロック行列の形により、$i \leq r < j$のとき、

$a_{ij}=0$である。

よって、$\sigma 1, \sigma 2, \cdots, \sigma r$の中に、$r$より

大きい数があれば、

$$a_{1\sigma 1}a_{2\sigma 2}\cdots a_{r\sigma r}=0.$$

よって、

$$\det X=\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\,\sigma)a_{1\sigma 1}\cdots a_{r\sigma r}a_{r+1\,\sigma(r+1)}\cdots a_{n\sigma n}$$

の右辺の$\sum$は、σを$\{1,2,\ldots,r\}$を

$\{1,2,\ldots,r\}$に写し、したがって$\{r+1,r+2,\ldots,n\}$

は$\{r+1,\ldots,n\}$に写すような$\mathfrak{S}_n$の元に

限って動かせばよい。そのようなσの集合を

Γとおくと.　　　　　　　　$r+1, \ldots, n$の置換と思う.

$$\Gamma \longrightarrow \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$$

$$\sigma \longmapsto (\tau, \rho) =$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ \sigma 1 & \cdots & \sigma r \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ \sigma(r+1) & \cdots & \sigma n \end{pmatrix}$$

は1:1対応で

$$I(\sigma) = I(\tau) \amalg I(\rho),$$

$$l(\sigma) = l(\tau) + l(\rho)$$

$$\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn} \rho)$$

$\therefore \det X$

$$= \sum_{\tau, \rho} \operatorname{sgn}(\tau\rho)\, a_{1\tau 1} \cdots a_{r\tau r}\, a_{r+1\, \rho(r+1)} \cdots a_{n\rho n}$$

$$= \left(\sum_{\tau} \operatorname{sgn} \tau\, a_{1\tau 1} \cdots a_{r\tau r} \right) \left(\sum_{\rho} \operatorname{sgn} \rho\, a_{r+1\, \rho r+1} \cdots a_{n\rho n} \right)$$

$= (\det A)(\det D)$ //

例3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -29 \cdot 17 = -493$ //

定理3.3.5 n次正方行列 A, B に対して, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Pf. ① A が基本行列の場合.

i) $A = E_n(i; c)$ $(c \neq 0)$ のとき.

行を c 倍しているので行列式は c 倍。

$\therefore \det(AB) = c \det B$

ところで $\det A = c$ だから o.k.

ii) $A = E_n(i;j)$ のとき.

行を入れかえてるから.

$$\det(AB) = -\det B.$$

一方、$\det A = -\det E_n = -1$.

$$\therefore \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

iii) $A = E_n(i;j;c)$ のとき.

$$\det(AB) = \det B.$$

一方. $\det A = \det E_n = 1$. o.k.

② 一般のとき。基本行列

$P_1, \ldots, P_r$ があって.

$$P_1 \cdots P_r A = S(A).$$

i) $\operatorname{rank} A < n$ つまり A が正則でないとき。$S(A)$ の最終行は 0 なので容易に.

$$0 = |S(A)| = |P_1||P_2 \cdots P_r A|$$

$= |P_1||P_2||P_3 \cdots P_r A|$

$= \cdots = |P_1||P_2| \cdots |P_r||A|$.

基本行列の行列式は0ではないので

$|A| = 0$.

ii) $\mathrm{rank}\, A = n$ のとき. Aが正則で.

$\delta(A) = E_n$

よって.

$1 = \det(\delta(A)) = |P_1| \cdots |P_r| \cdot |A|$.

さて.

AかBか. いずれか $\mathrm{rank} < n$ なら.

AB も $\mathrm{rank} < n$ で. 両辺0で

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

は正しい。AもBも正則のとき。

$P_1 \cdots P_r A = E_n$
$Q_1 \cdots Q_r B = E_n$ とすると.

$|P_1| \cdots |P_r| \cdot |A| = 1$
$|Q_1| \cdots |Q_r| |B| = 1.$

一方 $Q_1 \cdots Q_r P_1 \cdots P_r AB = E_n$

なので. $|Q_1| \cdots |Q_r| |P_1| \cdots |P_r| |AB| = 1$

これより. $|AB| = |A||B|.$ //

※上の議論により.

Aが正則 $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ とわかる。

問題3.3.

1. (1) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 105 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 105 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 105 \cdot (-14)$
$= -1470.$

6. $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & O \\ E & E \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{vmatrix}$

$= |A+B| \cdot |A-B|$ //

レポ 1. (2) (6) (8)

2. 4.