

### 3.3 行列式の性質 (2)

定理 3.3.1  $\det {}^t A = \det A$

Pf.  $A = [a_{ij}]$ ,  ${}^t A = [b_{ij}]$

と仮定。  $b_{ij} = a_{ji}$ . よって.

$$\begin{aligned} \det {}^t A &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{n\sigma_n} \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}. \end{aligned}$$

$a_{\sigma_1 1}, a_{\sigma_2 2}, \dots, a_{\sigma_n n}$  の積の順序を

いれかえ。  $a_{1\sigma^{-1}1} a_{2\sigma^{-1}2} \cdots a_{n\sigma^{-1}n}$ .

$$\# \text{に. } \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma^{-1} (\operatorname{sgn} \sigma)^2 = \operatorname{sgn} \sigma.$$

$$\therefore \det {}^t A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{1\sigma^{-1}1} a_{2\sigma^{-1}2} \cdots a_{n\sigma^{-1}n}$$

のなか  $S_n$  全体をわたれば,  $\sigma^{-1} \in S_n$  全体

をわたる。  $\sigma^{-1}$  を  $\tau$  で置き換える。

$$\det {}^t A = \sum_{\tau} \operatorname{sgn} \tau a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} = \det A.$$

//

### 定理 3.3.2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明

$$\begin{aligned} \tau_1 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \tau_2 D. \quad \wedge \end{aligned}$$

同様に、行列式の行に関する性質から、

次の列に関する性質も導くことができる。

### 定理 3.3.3.

(1) 1つの列を  $c$  倍すると、行列式は  $c$  倍になる。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & (c a_j) & \cdots & a_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$



$$(2) \quad |a_1 \cdots (b_j + c_j) \cdots a_n|$$

$$= |a_1 \cdots b_j \cdots a_n| + |a_1 \cdots c_j \cdots a_n|.$$

$$(3) \quad |a_1 \cdots a_j^i \cdots a_i^j \cdots a_n|$$

$$= -|a_1 \cdots a_i^i \cdots a_j^j \cdots a_n|.$$

$$(4) \quad |a_1 \cdots a_j^i \cdots a_j^j \cdots a_n| = 0$$

$$(5) \quad |a_1 \cdots (a_i + c a_j) \cdots a_j \cdots a_n|$$

$$= |a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n|.$$

$$\underline{\text{例 1}} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 16.$$

$$\text{例 2} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 48 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -48 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 48. \quad \square$$

定理 3.3.4.

$A$  が  $n$  次正方形行列,  $D$  が  $s$  次正方形行列  
ならば,

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \\ = (\det A)(\det D).$$

証明. 定理 3.3.1 による.

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D)$$

を示せばよい。  $n = r + s + l$ .

$$X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = [a_{ij}] \text{ とおく.}$$

7"以下"の行 + の開始に F".  $i \leq r < j$  のとき,

$$a_{ij} = 0 \text{ 7"あり.}$$

よって,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  の中に,  $r$  より  
大きい数がない。

$$a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{r\sigma_r} = 0.$$

よって,

$$\det X = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma_1} \dots a_{r\sigma_r} a_{r+1\sigma_{r+1}} \dots a_{n\sigma_n}$$

の右辺の  $\sum$  は,  $\sigma$  を  $\{1, 2, \dots, r\}$  と

$\{1, 2, \dots, r\}$  に写し, (たがって  $\{r+1, r+2, \dots, n\}$

は  $\{r+1, \dots, n\}$  に写す) 7"  $S_n$  の  $\pi$  に

前に述べたように、そのように  $\sigma$  の集合を

$\Gamma$  とおくと、

$r+1, \dots, n$  の置換と  
↑  
思う。

$$\Gamma \longrightarrow \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$$

$$\sigma \longmapsto (\tau, \rho) =$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r \\ \sigma_1 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} r+1 & \dots & n \\ \sigma_{r+1} & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

は  $|\cdot| \neq |\cdot|$  ではない

$$\underline{l}(\sigma) = \underline{l}(\tau) \sqcup \underline{l}(\rho),$$

$$l(\sigma) = l(\tau) + l(\rho)$$

$$\text{sgn } \sigma = (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \rho)$$

$\therefore \det X$

$$= \sum_{\tau, \rho} \text{sgn}(\tau\rho) a_{1\tau_1} \dots a_{r\tau_r} a_{r+1\rho_{r+1}} \dots a_{n\rho_n}$$

$$= \left( \sum_{\tau} \text{sgn } \tau a_{1\tau_1} \dots a_{r\tau_r} \right) \left( \sum_{\rho} \text{sgn } \rho a_{r+1\rho_{r+1}} \dots a_{n\rho_n} \right)$$

$$= (\det A) (\det D) //$$

例3

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -29 \cdot 17 = -493 //$$

定理 3.3.5  $n$  次正行行列  $A, B$  に

対して,  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

pf. ①  $A$  が基本行行列の±の場合.

i)  $A = E_n(i; c)$  ( $c \neq 0$ ) のとき.

行を  $c$  倍してうるの  $\therefore$  行列式は  $c$  倍。

$$\therefore \det(AB) = c \det B$$

と  $\therefore \det A = c$   $\therefore$  "から  $0, k$ .

ii)  $A = E_n(i, j)$  のとき.

行列  $\lambda$  が  $\pm 1$  から.

$$\det(AB) = -\det B.$$

$$\text{---} \bar{A}. \det A = -\det E_n = -1.$$

$$\therefore \det(AB) = (\det A)(\det B).$$

iii)  $A = E_n(i, j; c)$  のとき.

$$\det(AB) = \det B.$$

$$\text{---} \bar{A}. \det A = \det E_n = 1. \quad \text{o.k.}$$

② 一般のとき。基本行列

$P_1, \dots, P_r$  があって.

$$P_1 \cdots P_r A = S(A).$$

i)  $\text{rank } A < n$  ならば  $A$  が正則でないとき。 $S(A)$  の最終行は  $0$  なので。  
容易に.

$$0 = |S(A)| = |P_1| |P_2| \cdots |P_r A|$$

$$= |P_1| |P_2| |P_3 \cdots P_r| |A|$$

$$= \cdots = |P_1| |P_2| \cdots |P_r| |A|.$$

基本行列の行列式は0ではないので:

$$|A| = 0.$$

ii)  $\text{rank } A = n$  のとき.  $A$  は "正則" である.

$$S(A) = E_n$$

よって,

$$1 = \det(S(A)) = |P_1| \cdots |P_r| \cdot |A|.$$

さて,

$A$  か  $B$  か, いずれかが  $\text{rank} < n$  ならば,

$AB \notin \text{rank} < n$  である. 両方とも0である.

$$\det(AB) = (\det A) (\det B)$$

は正しい.  $A$  も  $B$  も正則のとき.

$$P_1 \cdots P_r A = E_n$$

$$Q_1 \cdots Q_r B = E_n \quad \text{とすると.}$$

$$|P_1| \cdots |P_r| \cdot |A| = 1$$

$$|Q_1| \cdots |Q_r| |B| = 1.$$

$$\text{---} \quad Q_1 \cdots Q_r P_1 \cdots P_r A B = E_n$$

$$\text{よって} \quad |Q_1| \cdots |Q_r| |P_1| \cdots |P_r| |A B| = 1$$

$$\text{---} \quad |A B| = |A| |B|. \quad //$$

\*上の議論によつて.

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \quad \text{とわかる.}$$

問題 3.3.

$$1. (1) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 105 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 105 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 105 \cdot (-14) \\ = -1470.$$

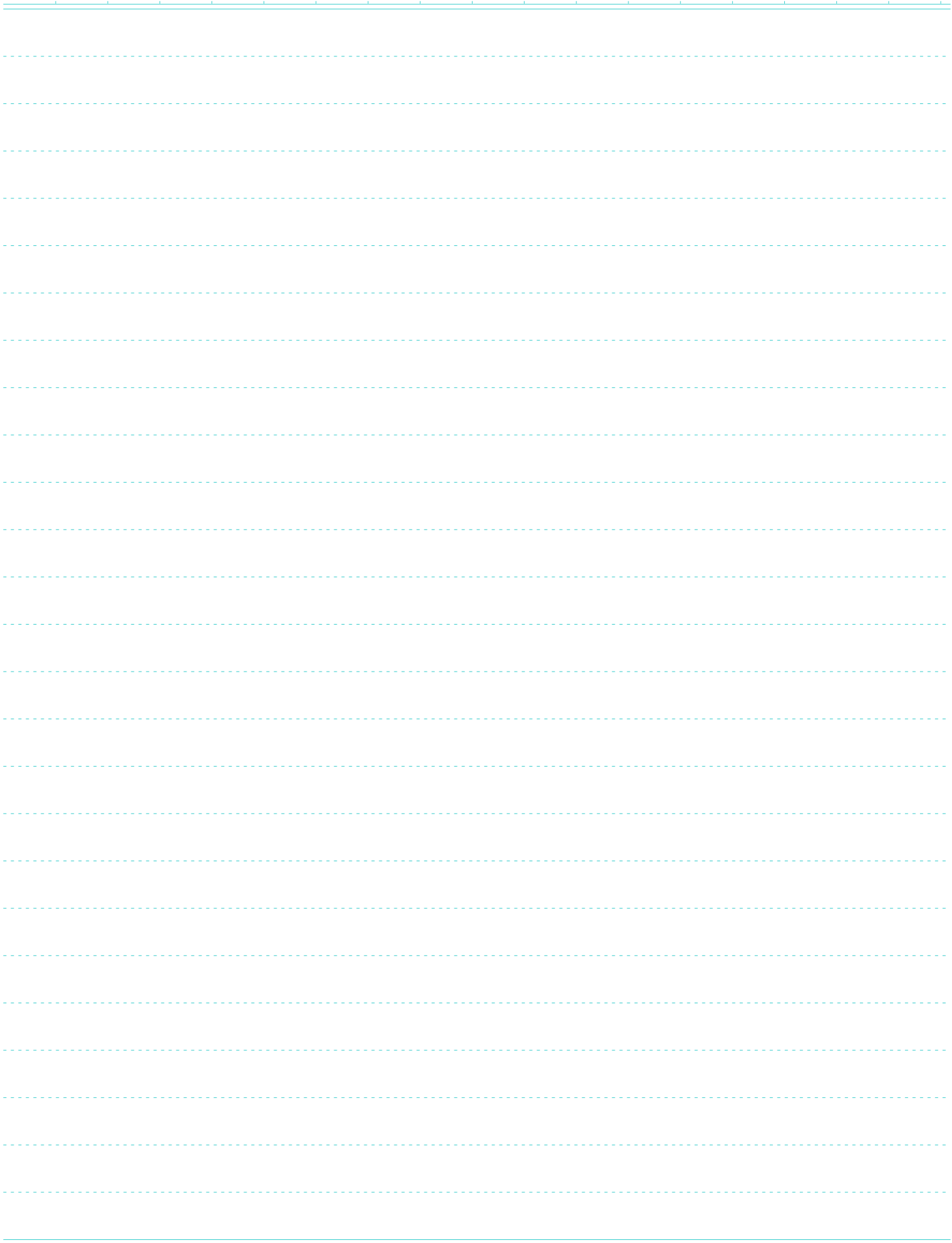


$$\begin{aligned}
 6. \quad & \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} E & O \\ -E & E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix} \\
 & = |A+B| \cdot |A-B| \quad //
 \end{aligned}$$

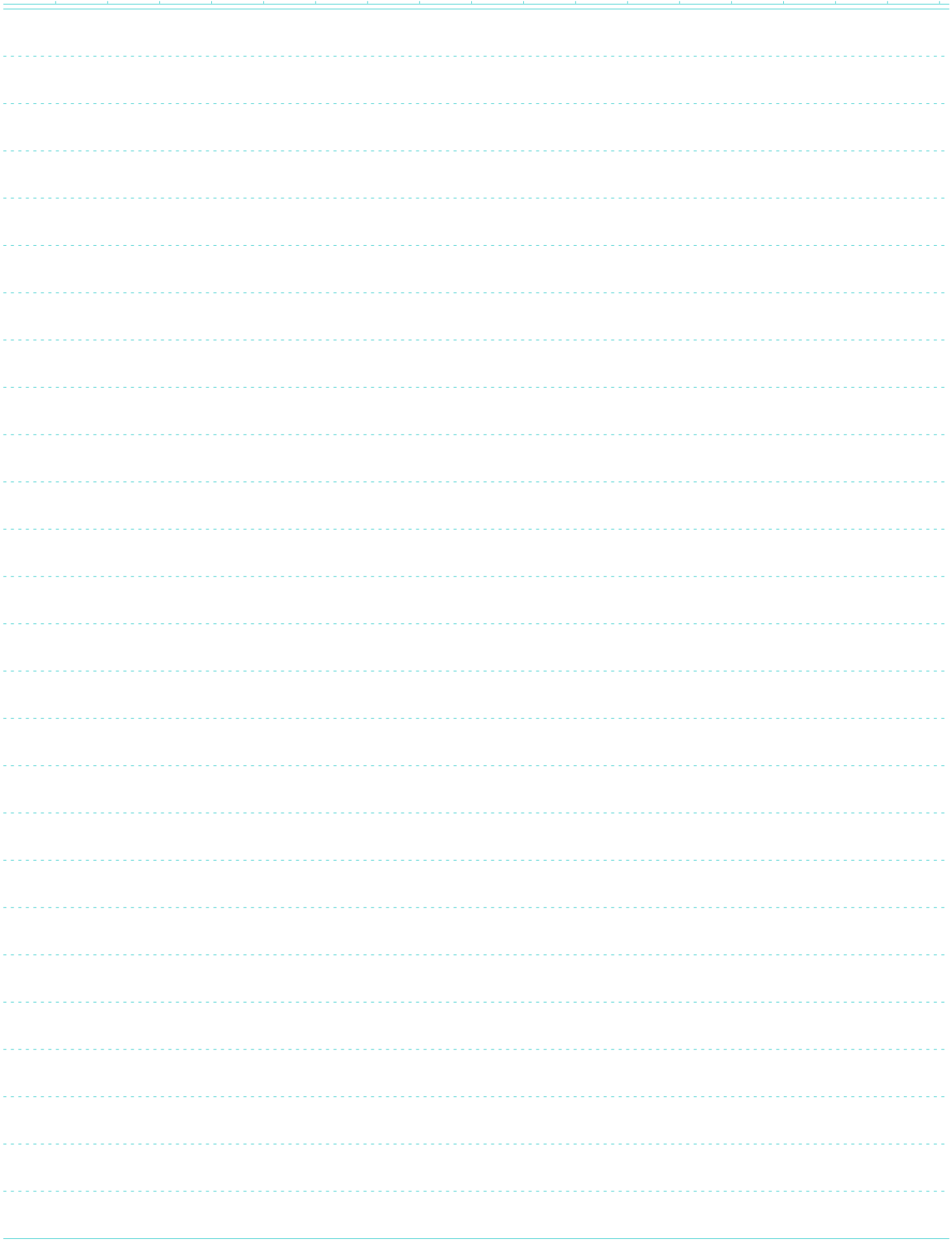
例 1. (2) (6) (8)

2. 4.

This image shows a page of handwriting practice paper. It features a solid blue line at the top and another at the bottom. Between these lines is a large area filled with horizontal dashed blue lines, providing a guide for letter height and placement. The page is otherwise blank, with no text or other markings.







The page features a header with the number '16' in the top right corner. Below the header, there are two solid blue horizontal lines. The majority of the page is filled with horizontal dashed blue lines, providing a ruled area for writing. At the bottom of the page, there are two more solid blue horizontal lines, mirroring the ones near the top.

