3.4 余因子行列とクラメールの公式

n次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して．

Aの第i行と第j列を取り除いて得られる

$n-1$次の正方行列をA_{ij}とかく。

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

例1

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$ とすると．

$$A_{11}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_{12}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

◦ (i,j) 余因子 $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を Δ_{ij} または $\Delta_{ij}(A)$ で表し、A の (i,j) 余因子という。

Aが例1のとおりとすると、

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -20.$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19.$$

※（第 j 列に関する余因子展開）

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$

∵
$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

よって、

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ところで

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1+j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ij} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$= a_{ij} \Delta_{ij}$ だから求める結果を得る。//

⊗（第 i 行に関する余因子展開）

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$$

$\because$ $|A| = |{}^tA| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$

例2. (第2列に関する余因子展開).

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

例3 (第2行に関する余因子展開).

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

例4

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

第1行に関する余因子展開

$$= a\begin{vmatrix} a & & & \\ b & a & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & a & & O \\ & b & a & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a \\ O & & & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n. \quad //$$

◎余因子行列　$A=[a_{ij}]$ に対して.

$\hat{A}=[a_{ij}^*]=[\Delta_{ji}]$　とおいて.

$\hat{A}$ を A の余因子行列という。

$\hat{A}$ の (i,j) 成分 a_{ij}^* は A の (j,i) 余因子

Δ_{ij} であるとして $\hat{A}$ を定義するのである。

__定理3.4.1__　正方行列 A の余因子行列を $\hat{A}$, $d=\det A$ とすると.

$$A\hat{A}=\hat{A}A=dE_n$$

pf. 同じことなので、$A\hat{A}=dE_n$ のみ示す。

これは. 任意の i,j について.

$$a_{i1}a_{1j}^*+a_{i2}a_{2j}^*+\cdots+a_{in}a_{nj}^*=d\delta_{ij}$$

を示すことに他ならない。

① $i=j$ のとき.

左辺 $= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$

$= \det A = d =$ 右辺.

② $i \neq j$ のとき、第 j 行以外は A と同じで、

第 j 行を A の第 i 行でおきかえた行列を

B とする。$|B|$ を第 j 行で余因子展開

すると、B の第 j 行が $(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ で

あることと、B の第 j 行以外は A と同じなことから、

$a_{i1}a^*_{1j} + \cdots + a_{in}a^*_{nj}$

$= a_{i1}\Delta_{j1} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = |B| = 0$. //

<u>定理 3.4.2.</u> A が正則 $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$.

このとき、 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$.

Pf. $\Rightarrow$ $|A|\cdot|A^{-1}| = |A\cdot A^{-1}| = |E| = 1$

だから。

$\Leftarrow \left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right)A = A\left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right) = E$

だから。

最後の主張も従う。 //

定理 2.4.1 を行列式を用いて再証明する。

$AB = E$ なら A も B も正則で

$B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

∵ $|A| \cdot |B| = |E| = 1$ なので

A も B も正則。よって、

$B = EB = A^{-1}AB = A^{-1}E = A^{-1}$.

よって、 $A = (A^{-1})^{-1} = B^{-1}$ //

例題 3.4.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ の

余因子行列と逆行列を求めよ。

Pf. $\tilde{A} = (a_{ij}^{*})$ とおく.

$$a_{11}^{*} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{12}^{*} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$a_{13}^{*} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{21}^{*} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$a_{22}^{*} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$a_{23}^{*} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{31}^{*} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{32}^{*} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{33}^{*} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

また.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

したがって.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-21}\tilde{A} = -\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

//

定理3.4.3　A が n 次正則行列のとき、連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただひとつの解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ とおくと、$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

ここに $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ とするとき、

$$B_i = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1} \cdots \boldsymbol{a}_n].$$

(B_i は A の i 列目 $\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{b}$ でおきかえた行列).

Pf. $\mathbb{b} = A\mathbb{x} = [\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2 \cdots \mathbb{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$= x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n$.

よって. $\det B_i = \left| \mathbb{a}_1 \cdots \overset{i}{x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n} \cdots \mathbb{a}_n \right|$

$= x_i \det A$ で $\det A \neq 0$ ゆえ

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad //.$$

例題 3.4.2 次の連立1次方程式をクラメールの公式を用いて解け。

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 1/7 \end{bmatrix}$$

//

問題 3.4

4、次の行列式を求めよ。

(1)
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & 0 \\ 0 & h & i \end{vmatrix}$$

$$- b \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ e & f & g \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

$$= adgi - bh \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$= adgi - bhcf + bhde$$

5. A が n 次正方行列で、$\widehat{A}$ が A の余因子行列ならば、

$$\det \widehat{A} = (\det A)^{n-1}$$

を示せ。

解). ① $A=O$ なら $\hat{A}=O$ であり.
等式は両辺 0 となって正しい。

② $A \neq O$ かつ、A が非正則のとき。

$$A\hat{A} = (\det A)E_n = O.$$

これは $\hat{A}$ が非正則なことを示す。

やはり等式は両辺 0 で正しい。

③ A が正則のとき.

$$A\hat{A} = (\det A)E_n.$$

$$\therefore \quad |A|\cdot|\hat{A}| = |A|^n.$$

$$\therefore \quad |\hat{A}| = |A|^{n-1} \quad //$$

来週：8/1(木) 通常の授業。アンケート実施。

再来週：8/8(木) 期末試験。