# 3.5 特別な形の行列式

## 例題 3.5.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)$$

解) $n=1$ のとき両辺 1 で正しい.

$n=2$ のとき.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \quad \text{で正しい。}$$

$n \geqq 3$ で

$n-1$ のときに正しいとする。

与式に $R_n \leftarrow -x_1 R_{n-1}$, $R_{n-1} \leftarrow -x_1 R_{n-2}, \cdots, R_2 \leftarrow -x_1 R_1$

$$与式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i)$$

$$= \prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i) = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j).$$

例えば $n=3$ だと、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1\leqq i<j\leqq 3}(x_j-x_i) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

## 例題 3.5.2

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

解答）．$n$についての帰納法。

$n=0$のとき，$F=a_0$で正しい。

$n-1$まで正しいとせよ。$F$を第1行で余因子展開して．

$$F = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & & O \\ & x & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ O & & & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & & O \\ a_2 & x & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ a_n & O & & x & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n)$$

$=$ 与式右辺

例題 3.5.3.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

解答.

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & b+c+d+a \\ 1 & c & d & c+d+a+b \\ 1 & d & a & d+a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

問題 3.5　行列式の値を求めよ。

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^3 & 2^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix} = (2-3)(5-3)(7-3)(5-2)(7-2)(7-5)$$

$$= -240. \quad //$$

(4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \\ 2^2 & 2^3 & 2^5 & 2^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2^2 & -2^4 & 2^3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^3 & 2^2 \\ 1 & -2 & -2^3 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \end{vmatrix}$$

$$= -8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 2^2 & (-2)^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & (-2)^3 & 4^3 \end{vmatrix} = -8(2-1)(-2-1)(4-1)(-2-2)(4-2)(4-(-2))$$

$$= -3456. \quad //$$

2. 次の等式を示せ.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$$

解.

$$左辺 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x-a & 0 & 0 & a \\ x-y & y-b & 0 & b \\ x-y & y-z & z-c & c \end{vmatrix} = 右辺.$$

(3) $$F_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n} = F_n$$

解. 帰納法. $n=1$, $n=2$ ならよい。

$$左辺 = (1+x^2)F_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x^2)F_{n-1} - x^2 F_{n-2}$$
$$= F_{n-1} + F_n - 1 - (F_{n-1} - 1) = F_n.$$

復習。

$\boxed{1}$ 連立1次方程式をとけ

$$\begin{cases} x - y - z + u - v + w = -2 \\ -x + y \qquad - u \qquad - w = 1 \\ 2x - 2y - 3z + 2u - 2v + 3w = -6 \\ x - y - 3z + u - 2v + 2w = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c_1 - c_2 - c_3 - 1 \\ y = c_1 \\ z = c_3 + 2 \\ u = c_2 \\ v = -c_3 - 1 \\ w = c_3 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ 行列式を求めよ

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -42$$

2.4 (4) 逆行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ $A$が整数を成分とする$n$次の正方行列とするとき、$A$が整数を成分とする逆行列をもつ必要十分条件は

$|A| = \pm 1$ であることを示せ。

$\boxed{1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow (-2)R_1 \\ R_4 \leftarrow (-1)R_1}]{R_2 \leftarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow R_2 \\ R_3 \leftarrow R_2 \\ R_4 \leftarrow 2R_2}]{R_2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow (-1)R_3]{R_2 \leftarrow (-1)R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & c_1 & z & c_2 & v & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & -71 & 60 & 12 \\ 0 & -12 & 10 & 3 \\ 0 & -15 & 12 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -71 & 60 & 12 \\ -12 & 10 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -11 & 12 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -11 & 12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

2.4 (4)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$\boxed{3}$ 必要性。 $A$ も $B$ も整数を成分にもち、
$AB = E_n$ とすると、
$|A| \cdot |B| = 1$ で、
$|A|$ も $|B|$ も整数である。
したがって、 $|A| = \pm 1$.

十分性. $|A| = \pm 1 \neq 0$ だから
$A$ は逆行列をもち. それは

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \pm \widetilde{A}.$$

$\widetilde{A}$ の成分は整数だから $A^{-1}$ の成分も
整数となる。 //