

線形代数 1 (橋本) 期末テスト

注意 すべての解答用紙に学籍番号と氏名を記入すること. 問題番号がわかるようにして解答を書くこと. 計算の過程が分かるような記述に努めること. 9:25 を過ぎたら答案を提出して静かに退出してよい. 時間は 10:35 まで. 解答用紙右上欄外に ページ数/総ページ数 を記入すること. たとえば, 全部で5枚の場合, 1 ページ目から順に, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5 と記入する. ページ順に揃え, 他人の答案と混ざらないように提出する. 問題と計算用紙は提出せずに持ち帰ること.

問題 1. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の連立 1 次方程式を解け. また, 係数行列および拡大係数行列の階数 (ランク) をそれぞれ求めよ.

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 & - & x_4 + 2x_5 & = & 3 \\ & x_2 - x_3 + & x_4 + 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 7 \\ x_1 + 2x_2 & & + 3x_5 & = & 6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 & - & 2x_4 + 2x_5 & = & 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & + & 5x_5 & = & 7 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 4 \end{cases}$$

問題 3. 次の行列式を求めよ. ただし, (2) において n は自然数を表す.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (2) F_n := \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (n \text{ 次行列式})$$

問題 4. 行列式を求めた上, 答えを (1) では素因数分解, (2) では因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \\ 2 & 16 & 54 & 128 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

問題 5. n は自然数とし, A は整数を成分とする n 次の正方行列とする. このとき, A が整数を成分とする逆行列を持つための必要十分条件は, $|A| = \pm 1$ であることを示せ.