小テスト解答例

[1] (1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-2)R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow (-1)R_2]{\substack{R_2 \times (-1) \\ R_1 \leftarrow (-1)R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

求める逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow (-1)R_3 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow 3R_1 \\ R_4 \leftarrow 2R_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_3 \\ R_1 \leftarrow R_2 \\ R_3 \leftarrow R_2 \\ R_4 \leftarrow R_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 1 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow (-1)R_4 \\ R_3 \times (-1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 1 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow 6R_3 \\ R_2 \leftarrow 4R_3 \\ R_4 \leftarrow 8R_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -4 & 9 \end{array}\right]$$

求める逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$

※ 計算間違いが多かった。元の行列と掛けてみて単位行列になるかで確かめをしたい。

$\boxed{2}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow (-a)R_1]{R_2 \leftarrow (-a)R_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix}$

$a=1$ のとき、この行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので階数 1。

$a \neq 1$ のとき、行基本変形を続けて、

$\xrightarrow[R_3 \times (1-a)^{-1}]{R_2 \times (1-a)^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & a & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow (-a)R_2]{R_2 \leftarrow (-1)R_3} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+2a \end{bmatrix}$

階数は　$1+2a=0$ のとき、2

$1+2a \neq 0$ のとき、3.

まとめると、階数は $\begin{cases} 1 & (a=1) \\ 2 & (a=-\frac{1}{2}) \\ 3 & (a \neq 1, -\frac{1}{2}) \end{cases}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & -7 & 13 & -1 & -8 \\ -1 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow R_1 \\ R_4 \leftarrow R_1}]{R_2 \leftarrow (-4)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_4 \leftarrow (-1)R_2]{R_3 \leftarrow 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow (-1)R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$

よって、階数は $\begin{cases} 3 & (a=3) \\ 4 & (a \neq 3) \end{cases}$

✿ できは良かった。

$\boxed{3}$ (1)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 & -9 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow (-1)R_1]{\substack{R_2 \leftarrow R_1 \\ R_3 \leftarrow (-2)R_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_2]{\substack{R_1 \leftarrow R_2 \\ R_3 \leftarrow (-1)R_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_3]{\substack{R_3 \times (-1) \\ R_2 \leftarrow R_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

よって. $x_3 = c_1$

$x_5 = c_2$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ とおくと.

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - c_2 + 1 \\ x_2 = -2c_1 + c_2 + 1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = -3c_2 + 1 \\ x_5 = c_2 . \end{cases}$$

(2)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow (-1)R_1]{\substack{R_2 \leftarrow (-1)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_2]{\substack{R_1 \leftarrow (-2)R_2 \\ R_3 \leftarrow (-2)R_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_3]{R_3 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4行目の方程式は $0 = 1$ なので
解なしである。

☆ もったいない計算間違いが多かった。
出てきた解を元の連立方程式に代入
してみると間違いが発見できることが
多いので試してみるとよい。

$\boxed{4}$ AとBはベキ零なので、ある自然数 a, b が存在して、

$$(*) \quad A^a = O, \quad B^b = O$$

である。このとき、$AB = BA$ だから、

$$(A+B)^{a+b-1} = A^{a+b-1} + {}_{a+b-1}C_1 A^{a+b-2} B$$
$$+ \cdots + {}_{a+b-1}C_{b-1} A^a B^{b-1} + {}_{a+b-1}C_b A^{a-1} B^b$$
$$+ \cdots + B^{a+b-1}$$

(*) によって、これは O であり、

$A+B$ はベキ零とわかった。 □

☆ 結局数と同じように2項展開できるわけだが、$AB = BA$ を使うので、これを明示していないものは減点とした。

$\boxed{5}$ $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$

が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の相異る解とするとき、

$x_0-x_0, x_1-x_0, x_2-x_0, \cdots\cdots$

は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の相異る解であり、

従って $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ も無限個の解を持つ。□

別解） $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が無限個の解を持つので、

$$\mathrm{rank}\,\tilde{A} = \mathrm{rank}\,A > n.$$

ここに $\tilde{A} = [A \vdots \boldsymbol{b}]$.

特に、$\mathrm{rank}\,A > n$ なので、斉次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は無限個の解をもつ。□

☆ できは極めて悪かった。

小テストの範囲も期末テストの範囲に含めますので、がんばって復習して下さい。

クイズ：牛の胃袋は4つありますが、
さて、人間の胃袋はいくつある？

こたえ：1個