Milnor-type theorems for left-invariant pseudo-Riemannian metrics

Hiroshi Tamaru
(Osaka City University / OCAMI)

擬リーマン多様体の幾何の諸相
2021/Dec/03

概要

- Milnor-type theorem
  $=$ Lie 群 G 上の左不変 (擬) リーマン計量の moduli (up to 自己同型 $+$ スカラー倍) を記述するもの.
- 本講演では, Milnor-type theorem を得るための手続きと実例を紹介.

1 Intro

定理 **1.1** (Milnor (1976))**.**

$\mathfrak{g}$: 3-dim. unimodular Lie 代数,

$\langle , \rangle$: $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積

$\Rightarrow$ $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\exists x_1, x_2, x_3$ (onb):

$$[x_j, x_{j+1}] = \lambda_{j+2} x_{j+2} \pmod 3.$$

注意 **1.2.**

- 各 $\mathfrak{g}$ ごとの λ_j の範囲も既知;
- 内積の自由度は $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{O}(3)$ 分だけ, i.e., 6-dim. 分だけある;
- $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \{ \langle , \rangle : \mathfrak{g}$ 上正定値 $\}$ を表すものが $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

注意 1.3.

- 先の onb を **Milnor 枠**;
- 特別な左不変リーマン計量の存在・非存在は, 今の場合には Milnor 枠で判定可能;
- Thm の証明は $\dim = 3$ に強く依存.

備考 1.4.

- 今回は Milnor 枠の一般化 (ついでに擬リーマン版) を得る手続きと, 実例を紹介;
- Milnor 枠の一般化は, 原理的にはいつでも得られるが, 役に立つかどうかは場合に依る.

2　準備

注意 2.1 (記号の設定)**.**

- $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; $\dim \mathfrak{g} = p + q = n$;
- $\widetilde{\mathfrak{M}}_{(p,q)}(\mathfrak{g}) := \{\langle , \rangle : \mathfrak{g}$ 上 (p, q) 内積 $\}$.

定義 2.2.

$\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^n, [,])$ と $\mathfrak{g}' = (\mathbb{R}^n, [,]')$ が 同型

$:\Leftrightarrow \ \exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: linear isom.:

$$[,]' = f.[,] := f([f^{-1}(\cdot), f^{-1}(\cdot)]).$$

定義 2.3.

$(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ と $(\mathfrak{g}', \langle , \rangle')$ が 同値

$:\Leftrightarrow \ \exists c > 0, \exists f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$: Lie alg. isom.:

$$\langle , \rangle' = (cf).\langle , \rangle := \langle (cf)^{-1}(\cdot), (cf)^{-1}(\cdot) \rangle.$$

備考 **2.4.**

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ と $(\mathfrak{g}', \langle , \rangle')$ が同値 $\Rightarrow$ 対応する単連結 Lie 群 $+$ 左不変計量は等長.

備考 **2.5.**

- $\widetilde{\mathfrak{M}}_{(p,q)}(\mathfrak{g})/$同値
  $\cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \widetilde{\mathfrak{M}}_{(p,q)}(\mathfrak{g})$
  $\cong \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \backslash \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})/\mathrm{O}(p,q)$.
- 適宜 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^{p+q}, [,])$ と同一視.
- $\mathbb{R}^{p+q}$ の標準 (p,q)-内積を $\langle , \rangle_0$.

$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}$ の orbit

命題 **2.6.**

$\mathfrak{U}$ $(\subset \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}))$ に対し以下は同値:

- $\mathfrak{U}.\langle , \rangle_0$ が全ての軌道と交わる;
- $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\, \mathfrak{U}\, \mathrm{O}(p,q)$.

備考 2.7.

- 上記の $\mathfrak{U}$ を <u>軌道の代表系</u>;
- $\mathfrak{U}$ をできるだけ小さく取りたい.

備考 2.8 (ここからの話)**.**

- $\mathfrak{U}$ の見付け方;
- $\mathfrak{U}$ を見付けた後どうするか;
- 実例.

最適にとれれば

$$\mathfrak{U} \,\hat{=}\, \widehat{\mathfrak{M}}_{(R,g)}(\mathfrak{G})$$

"moduli sp"

3　代表系から MTT

注意 3.1 (記号)**.**

- $H := \mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$
  $$:= \{c\varphi \mid c \in \mathbb{R}^\times, \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}.$$

命題 3.2.

- $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対し, 次は内積付き Lie 代数の同型:
  $f : (\mathbb{R}^n, f^{-1}.[,], \langle,\rangle) \to (\mathbb{R}^n, [,], f.\langle,\rangle)$.

“[,]の変形” $\longleftrightarrow$ “⟨ , ⟩の変形”

備考 **3.3.**

- $(\mathbb{R}^n, [,], \langle , \rangle_0)$ について, $\mathfrak{U}$ を代表系とすると...
- $\forall \langle , \rangle$ をとる.
- すると $\exists g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) : \langle , \rangle = g.\langle , \rangle_0$.
- $\mathfrak{U}$ 代表系より $g = \varphi u k$
  $(\exists \varphi \in H, \ \exists u \in \mathfrak{U}, \ \exists k \in \mathrm{O}(p,q))$
- $(\mathbb{R}^n, [,], \langle , \rangle)$
  $= (\mathbb{R}^n, [,], g.\langle , \rangle_0)$
  $= (\mathbb{R}^n, [,], (\varphi u k).\langle , \rangle_0)$
  $= (\mathbb{R}^n, [,], (\varphi u).\langle , \rangle_0)$
  $\cong (\mathbb{R}^n, (\varphi u)^{-1}.[,], \langle , \rangle_0)$
  $\cong (\mathbb{R}^n, u^{-1}.[,], \langle , \rangle_0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

4　実例

例 4.1 (Kubo-Onda-Taketomi-T.)**.**

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ のとき...
- 括弧積: $[e_1, e_j] = e_j \ (j \in \{2, \ldots, n\})$;
- 次は軌道の代表系: (R~g)-同型の

  $\mathfrak{U} := \{I_{p+q} + \lambda E_{1,p+q} \mid \lambda = 0, 1, 2\}$.

定理 4.2 (Milnor-type for $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^{p+q}}$)**.**
$\forall \langle , \rangle \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{(p,q)}(\mathfrak{g})$, $\exists c > 0$, $\exists \lambda \in \{0, 1, 2\}$,
$\exists \{x_1, \ldots, x_{p+q}\}$ (p-onb wrt $c\langle , \rangle$):

- $[x_1, x_j] = x_j \ (j \in \{2, \ldots, p+q-1\})$;
- $[x_1, x_{p+q}] = -\lambda x_1 + x_{p+q}$;
- $[x_j, x_{p+q}] = -\lambda x_j$.

系 **4.3.**

- $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^{p+q}}$ 上の任意の左不変 (p,q) 計量は定曲率.

備考 **4.4.**

- $\#\mathfrak{U} \geq 3$ が必要; (if $\neq (p,0), (0,q)$)
- $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_2,\ldots,e_{p+q}\}$ H-不変;
- $\langle,\rangle|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ の符号は $(p,q-1)$, $(p-1,q)$, $(p-1,q-1,1)$ (退化);
- これが異なると H-作用では移らない.

例 **4.5.**

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^3$ (Heisenberg) のとき...
- 括弧積: $[e_2, e_3] = e_1$;
- 次は軌道の代表系:

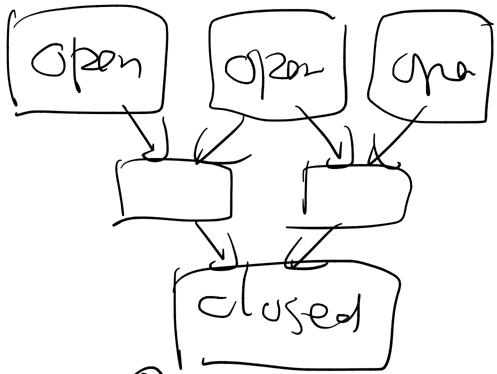
  $\mathfrak{U} := \{I_3 - \lambda E_{3,1} \mid \lambda = 0, 1, 2\}.$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -\lambda & & 1 \end{pmatrix}$$

備考 **4.6.**

- 同じく $\#\mathfrak{U} \geq 3$ が必要; (for $(p,q)=(2,1)$)
- $[\mathfrak{h}^3, \mathfrak{h}^3] = \mathrm{span}\{e_1\}$ が H-不変;
- $\langle e_1, e_1 \rangle$ の符号が不変.

例 **4.7** (Kondo-T., Kondo)**.**



- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^3 \oplus \mathbb{R}^{p+q-3}$ のとき...
- 括弧積: $[e_1, e_2] = e_{p+q}$;
- 軌道の代表系は...

  $p \geq 3$, $q = 1$ のとき $\#\mathfrak{U} = 6$;

  ...

  $p, q \geq 3$ のとき $\#\mathfrak{U} = 21$.

備考 **4.8.**

- 以下が H で保たれる:
- $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_{p+q}\}$;
- $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{span}\{e_3, \ldots, e_{p+q}\}$.

5　代表系の求め方

備考 **5.1.**

- 基本的には $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) = H \cdot \mathfrak{U} \cdot \mathrm{O}(p,q)$ で頑張る;
- H で保たれる subspace に着目して "type 分け" すると良さそう;
- 3-dim なら Cordero-Parker (1997) 等が参考になるかも知れないが, 読み替える必要あり.

6　今後の問題

定義 6.1.

- $\langle , \rangle_1 \to \langle , \rangle_2$ (退化) $:\Leftrightarrow \langle , \rangle_2 \in \overline{H.\langle , \rangle_1}$.

備考 6.2.

- 退化は擬リーマン特有 (リーマンでは起きない);
- 退化によって擬リーマン計量は "良く" なるか？
- 今までの例では yes...

Thank you very much!