可解岩澤群内の
余次元 1 リッチソリトン部分群

TAMARU, Hiroshi (田丸 博士)

Osaka City University / OCAMI

部分多様体幾何とリー群作用 2020 (online),
2021/03/19.

Abstract

Setting

- $M = G/K$: 非コンパクト型既約リーマン対称空間,
- $G = KAN$: 岩澤分解.
- AN : "可解岩澤群" (Note: $M \cong AN$).

Main Result

- AN 内の余次元 1 の Ricci soliton subgroup を分類した.

Joint work with

- Miguel Dominguez-Vazquez (Santiago de Compostela)
- Victor Sanmartin-Lopez (Leuven)

動機 1 (1/5)

動機 1

- 等質 Ricci soliton の研究.
  (等質空間でも全てが分かる訳では全くない)

Def.

- Riem. mfd (M, g) が **等質** if $\mathrm{Isom}(M, g) \curvearrowright M$: 推移的.
- Riem. mfd (M, g) が **Ricci soliton** if

$$\exists c \in \mathbb{R}, \exists X \in \mathfrak{X}(M) : \mathrm{Ric}_g = cg + \mathfrak{L}_X g.$$

Note

- (よくあるように) $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$ で様相が異なる.

動機 1 (2/5)

Case: $c > 0$ (shrinking)

Fact

- (M, g) : 等質 Ricci soliton $(c > 0)$
  $\Rightarrow M \cong$ [等質 Einstein mfd with $\mathrm{sc} > 0$] $\times$ [flat].

Note

- 等質 Einstein mfd でも完全な理解からは程遠い.
- (未解決問題 1) $SU_2 \times SU_2$ 上の左不変 Einstein 計量の分類.
- (未解決問題 2) 等質空間 G/K 上の不変 Einstein 計量は有限個か？(up to isometry and scaling)

動機 1 (3/5)

Case: $c = 0$ (steady)

Fact

- (M, g) : 等質 Ricci soliton $(c = 0) \Rightarrow$ flat.

動機 1 (4/5)

Case: $c < 0$ (expanding)

(Generalized) Alekseevskii Conjecture

- (M, g) : 等質 Einstein (Ricci soliton) with $c < 0$
  $\Rightarrow M \cong$ [可解 Lie 群 with 左不変計量] か？

研究の方向性

- (Generalized) Alekseevskii Conjecture は正しいか？
- 与えられた可解リー群は, いつ左不変 Ricci soliton (or Einstein) 計量を許容するか？ (Note: 存在すれば一意.)

動機 1 (5/5)

Case: $c < 0$ (expanding) 続き

Note ((Generalized) Alekseevskii Conjecture):

- (Arroyo-Lafuente 2015) GAC is true if $\dim \leq 5$.
- (Arroyo-Lafuente 2017) AC is true if $\dim(G/K) \leq 10$ and G not semisimple.
- (未解決問題) $\exists$ 左不変 Einstein 計量 on $SL_3(\mathbb{R})$？

Note (可解リー群):

- 様々な構造理論の研究があるが...
- (Will 2011) $\dim \leq 6$ 可解リー群の左不変 Ricci soliton の分類.

動機 2 (1/4)

動機 2

- 部分多様体の研究.
  (特に, 可解群の軌道の幾何.)

Thm. (T. 2011):

- 非コンパクト型対称空間 $M = G/K$ 内の Einstein 可解部分多様体を大量に構成した.

Note

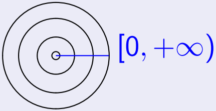
- Key: 放物型部分群の Langlands 分解 $(G \supset Q_\Phi = M_\Phi A_\Phi N_\Phi)$.
- 作り方から $\mathrm{codim} \geq 2$.

動機 2 (2/4)

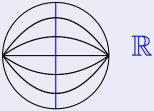
codim 1 (等質超曲面) の場合:

Thm. (cf. Berndt-T. 2003)

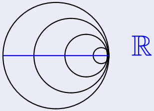
- 非コンパクト型対称空間 $M = G/K$ 内の等質超曲面は,
  (i) tube 型: $\mathrm{codim} \geq 2$ submfd の周りの tube; or
  (ii) foliation 型: focal なし, AN の codim 1 subgroup の軌道.



type (K)



type (A)



type (N)

動機 2 (3/4)

Note

- (ii) foliation 型のとき, 等質超曲面は solvmfd (可解 Lie 群 + 左不変計量). これがいつ Ricci soliton か, が今回の問題.
- (i) tube 型のとき, GAC を信じると Ricci soliton はなさそう...

Note

- 今回の Main Thm は次のように言い換え可能:
  "非コンパクト型既約対称空間内の focal をもたない等質超曲面で Ricci soliton になるものを分類"

動機 2 (4/4)

Ex.

- $SL_n(\mathbb{R})/SO_n \cong T_n^0(\mathbb{R})$
  $:= \{g \in SL_n(\mathbb{R}) \mid \text{upper triangular, } g_{ii} > 0\}.$
- この可解 Lie 群は適当な左不変計量に関して Einstein.

Thm. (Jablonski)

- $\forall (S, g)$ (可解 Lie 群 + 左不変 Ricci soliton 計量),
  $\exists \varphi : (S, g) \to T_n^0(\mathbb{R})$: isometric embedding.

Note

- 従って非コンパクト型対称空間 ($SL_n(\mathbb{R})/SO_n \cong T_n^0(\mathbb{R})$ で十分) 内の Ricci soliton 部分多様体が分類できれば, Ricci soliton 可解多様体の分類も (原理的には) 得られる.

主結果 (1/3)

Setting

- $M = G/K$: 非コンパクト型既約リーマン対称空間,
- $G = KAN$: 岩澤分解.
- AN : "可解岩澤群" (Note: $M \cong AN$).

Main Thm. (T.-DominguezVazquez-SanmartinLopez)

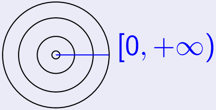
S ($\subset AN$) : codim 1 subgroup が Ricci soliton iff

- M is any, and S contains N;
- $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, and S is "ruled minimal";
- $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, and S is any.

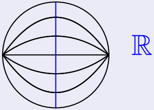
主結果 (2/3)

Thm. (Berndt-T. 2003)

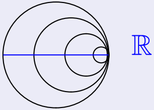
- S ($\subset AN$) : codim 1 subgroup は, 等質超曲面で focal をもたないものと同等.
- $\mathfrak{s} := (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi$ が subalgebra iff
  (i) $\xi \in \mathfrak{a}$ (i.e., $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{s}$); or
  (ii) $\xi \in \mathbb{R}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ (with α 単純ルート).



type (K)



type (A)



type (N)

主結果 (3/3)

Recall

- M is any, and S contains N;
- $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, and S is "ruled minimal";
- $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, and S is any.

Note

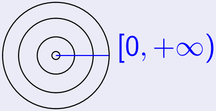
- codim 1 subgroup はいっぱいある (連続的にある) が, Ricci soliton になるものは rare.
- 上記 3 系列の Ricci soliton は既知だったので, 内在的に新しい例は (残念ながら) ない.
- codim 1 以外の今後の研究の試金石に成り得る.

状況説明 (1/4)

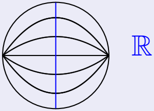
$N \subset S$ の場合

Note

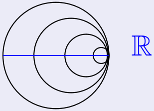
- $S \curvearrowright M = G/K$ の全ての軌道は合同;
- $\mathrm{rank}(M) = 1$ のとき, $S = N$; その軌道は horosphere;
- $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}\xi) \oplus \mathfrak{n}$; 一般でも ξ が特定の方向なら horosphere.



type (K)



type (A)



type (N)

状況説明 (2/4)

$N \subset S$ の場合 (続き)

Prop. (cf. Cho-Hashinaga-Kubo-Taketomi-Tamaru 2018)

- $N \subset S$ のとき ($\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}\xi) \oplus \mathfrak{n}$ のとき), S は Ricci soliton.
- さらに $\mathrm{rank}(M) \geq 2$ なら $\exists \xi$: S is Einstein.

Proof

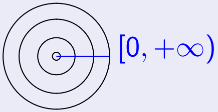
- 前者: Lauret (2011) の Ricci soliton solvmfd の構造定理より.
- 後者: Heber (1998) の Einstein solvmfd の構造定理より.

状況説明 (3/4)

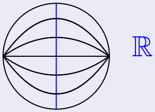
$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の場合

Note

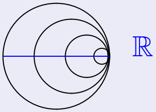
- $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ のとき, AN 内の codim 1 subgroup は $[0,1]$ 分ある.
- 部分多様体で言うと, tot. geod. $\mathbb{R}\mathrm{H}^{n-1}$ $\sim$ horosphere (これらは全て定曲率)



type (K)



type (A)



type (N)

状況説明 (4/4)

$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ の場合

Note

- $\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ のとき, AN 内の codim 1 subgroup は $[0, 1]$ 分ある.
- 部分多様体で言うと, homog. ruled minimal $\sim$ horosphere.

Thm. (Hashinaga-Kubo-T. 2016)

$\mathbb{C}\mathrm{H}^n$ のとき, S $(\subset AN)$: codim 1 subgroup が Ricci soliton iff

- S is a horosphere (i.e., $N \subset S$);
- $n = 2$, and S is "ruled minimal".

証明の方針 (1/5)

Main Thm. (recall)

S $(\subset AN)$: 余次元 1 部分群が Ricci soliton iff

- M is any, and S contains N;
- $M = \mathbb{C}\mathrm{H}^2$, and S is "ruled minimal";
- $M = \mathbb{R}\mathrm{H}^n$, and S is any.

Note

- "$\Leftarrow$" の証明は済み (既存の結果の組み合わせ).

証明の方針 (2/5)

Step 1: ARS への帰着

Thm. (Lauret 2011)

- (S, g) (完全可解 + 左不変計量) が Ricci soliton iff ARS.

Notions

- 可解 Lie 群 S が **完全可解** if $\forall X \in \mathfrak{s}$, ad_X の固有値は全て実.
- Lie 群上の左不変計量 (G, g) が **ARS (algebraic Ricci soliton)** if $\exists c \in \mathbb{R}$, $\exists D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) : \mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D$.

  (Note: "ARS $\Rightarrow$ Ricci soliton" は一般に成立)

証明の方針 (3/5)

Step 1: ARS への帰着 (続き)

Fact

- 岩澤可解群 AN は完全可解. その部分群 S も完全可解.
  (従って ARS の条件を check すれば十分.)

証明の方針 (4/5)

Step 2: Ricci 曲率の計算

Lem.

- $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi$ のとき,
  $\mathrm{Ric} = (\mathrm{Ric}^M|_{TS})^\top + \mathrm{tr}(\mathcal{S}_\xi)\mathcal{S}_\xi - \mathcal{S}_\xi^2 - R_\xi$
  (ただし $\mathcal{S}_\xi$: shape op., R_ξ : Jacobi op.)

Note

- 今, $M = G/K$ は既約対称空間より, $\mathrm{Ric}^M|_{TS} = c \cdot \mathrm{id}$.
- しかし Ric を完全に記述するのは大変...

証明の方針 (5/5)

Step 3: ARS 条件 ($\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D$) の確認

Note

- ARS でない iff $\forall c \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ric} - c \cdot \mathrm{id} \notin \mathrm{Der}(\mathfrak{s})$.

Note

- $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s})$ iff $\forall X, Y \in \mathfrak{s}$, $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$.
- 従って, derivation でないことを示すためには, 特定の subspace 上での $\mathrm{Ric} - c \cdot \mathrm{id}$ が分かれば十分 (なことが多い).
- これを $\mathrm{rank} = 1$ と > 1 に分けて実行.

今後 (1/3)

まとめ

- 可解岩澤群 AN 内の codim 1 subgroup で
  (= focal をもたない等質超曲面で)
  Ricci soliton になるものを分類した.
- 非常に制約が強いことが結果的に分かった.

問題 1

- N 内の codim 1 subgroup で Ricci soliton のものを分類せよ.

Note

- S $(\subset AN)$ が Ricci soliton ならば $S \cap N$ も Ricci soliton.
- 逆は不成立. よって問題 1 の結果は今回より増える (はず).

今後 (2/3)

参考:

今回の論文では次も分類した:

- Damek-Ricci 空間 AN 内の codim 1 Ricci soliton subgroup;
- H-type 群 N 内の codim 1 Ricci soliton subgroup.

Note

- AN が Damek-Ricci 空間のとき, N は H-type.
- 実際に codim 1 Ricci soliton subgroup は後者の方が多い.

今後 (3/3)

問題 2

非コンパクト対称空間 $M = G/K$ 内の部分多様体で,

- Einstein / Ricci soliton になる例をいっぱい見付けよ;
- 適当な条件下で Einstein / Ricci soliton を分類せよ;
- "適当な条件" としては何が適当か？

問題 3

- 一般に (S, g) : Einstein / Ricci soliton solvmfd のとき，その subgroup の幾何的性質を調べよ.

Ref.

- M. Dominguez-Vazquez, V. Sanmartin-Lopez, H. Tamaru, Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups, J. Math. Pures Appl., to appear.
- J. Berndt, H. Tamaru; Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces, J. Differential Geom. (2003)
- J.T. Cho, T. Hashinaga, A. Kubo, Y. Taketomi, H. Tamaru; Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces, J. Geom. Phys. (2018)
- T. Hashinaga, A. Kubo, H. Tamaru; Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces, Tohoku Math. J. (2016)
- H. Tamaru; Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, Math. Ann. (2011)

Thank you very much!