A commutativity condition for subsets in symmetric spaces and quandles

田丸 博士

大阪市立大学 / OCAMI

部分多様体論と関連する幾何構造研究の深化と融合
(RIMS 共同研究, online)
2021/06/22

Introduction - (1/4)

(起)

カンドル (quandle) は, 結び目の研究に現れる代数系.

Def. (David Joyce (1982), Matveev (1982))

Q: 集合, $s : Q \to \mathrm{Map}(Q, Q) : x \mapsto s_x$ とする.
(Q, s) が **カンドル**
$:\Leftrightarrow$ (S1) $\forall x \in Q$, $s_x(x) = x$.
(S2) $\forall x \in Q$, s_x は全単射.
(S3) $\forall x, y \in Q$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Ex.

- 二項演算 $x * y$ $(= s_y(x))$ の形で書かれることも多い.
- 任意の群は $s_g(h) := gh^{-1}g$ によってカンドル.
- 分類問題は至難...

Introduction - (2/4)

(承)

カンドルは多くの数学と関わるが, 特に, 対称空間の "離散化" とみなすことができる.

Fact (Joyce)

- (連結な) 対称空間はカンドル.

Our Theme

- 対称空間論を参照して, カンドルの構造を研究する. (↔ 離散的な対称空間論を作る.)

Introduction - (3/4)

(転)

カンドル内の “良い部分集合” を考えよう.

Note

- 例えばリーマン対称空間において重要なもの:
  - maximal flat (極大トーラス);
  - 全測地的部分多様体;
  - 対蹠集合; ...
- カンドルにおいて, これらの対応物があると嬉しい.

Introduction - (4/4)

(結)

s-可換という概念を導入. 興味深い性質と例がある.

Def.

カンドル (Q, s) 内の部分集合 X が s-可換

$:\Leftrightarrow$ $s_x \circ s_y = s_y \circ s_x \quad (\forall x, y \in X)$.

Note

- 極大な s-可換 subset に興味がある.
- 今回は "pole" や "対蹠集合" との関係を中心に紹介.
- Joint work(s) with 久保亮, 長鋪美香, 奥田隆幸, ...

準備 - (1/4)

- 対称空間に pole (極), antipodal (対蹠) がある.
- それらを復習, カンドルに移植.

Def. (cf. Chen-Nagano)

$x, y \in (Q, s)$ に対し,

- (x, y) が **pole pair**
  $:\Leftrightarrow s_x = s_y$.
- (x, y) が **antipodal (対蹠) pair**
  $:\Leftrightarrow s_x(y) = y$ かつ $s_y(x) = x$.

Def. (続き)

$X \subset (Q, s)$ に対し,

- X が **pole subset**
  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, (x, y) は pole pair.
- X が **antipodal subset**
  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X$, (x, y) は antipodal pair.

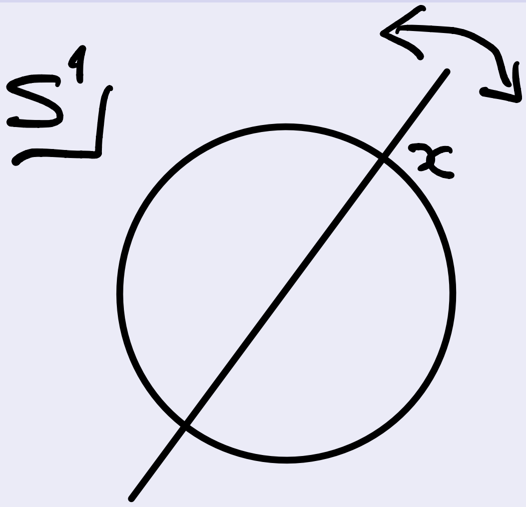
準備 - (2/4)

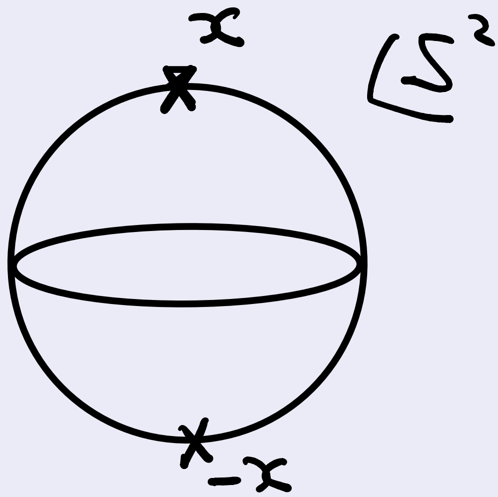
Ex.

球面 S^n について,

- S^n は (軸に関する折り返しで) 対称空間;
- $\{\pm x\}$ は極大 pole かつ極大 antipodal.

図





Ex.

実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ について,

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は (同様の点対称で) 対称空間;
- $n \geq 2$ なら pole subset は一点集合のみ;
- $n \geq 2$ なら $\{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$ は極大 antipodal.

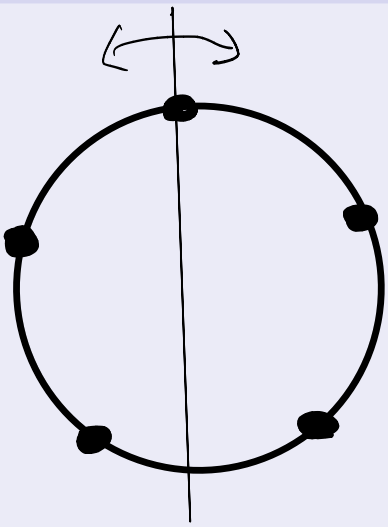
準備 - (3/4)

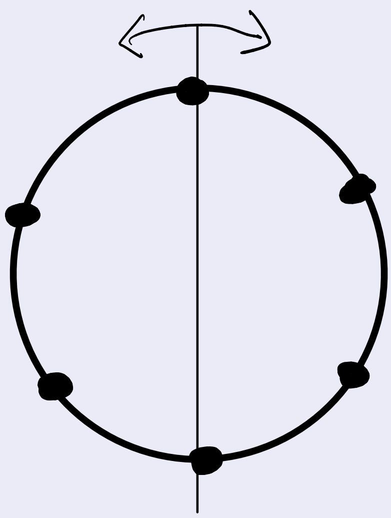
Ex.

R_n : S^1 の n 等分点の集合とすると,

- R_n は S^1 の点対称の制限によりカンドル
  (これを 二面体カンドル という);
- 極大 pole subset は, 一点 (n 奇数) or 二点 (n 偶数);
- 極大 antipodal subset は, pole と同じ.

図





準備 - (4/4)

Prop.

- pole subset は antipodal;
- 逆は一般に不成立.

$$\because \quad s_x = s_y$$

$$\Rightarrow \quad s_x(y) = s_y(y) = y$$

$$s_y(x) = s_x(x) = x$$

Note

リーマン対称空間において,

- pole は被覆と関係する (Chen-Nagano);
- 極大 pole subset は決定済み;
- antipodal はトポロジーと関係する (CN, Takeuchi, ...)
- 極大 antipodal の決定は, 一部極難 (cf. Tanaka-Tasaki).

カンドルに対しても, 研究すると面白いと思われる.

性質 - (1/3)

- 我々は新たに “s-可換” という概念を導入.
- 主張: pole ⇒ antipodal ⇒ s-可換.

Def.

(Q, s) : カンドル, $x, y \in (Q, s)$ に対し,

- (x, y) が **s-可換 pair**

  $:\Leftrightarrow s_x \circ s_y = s_y \circ s_x$.
- $X \subset (Q, s)$ が **s-可換 subset**

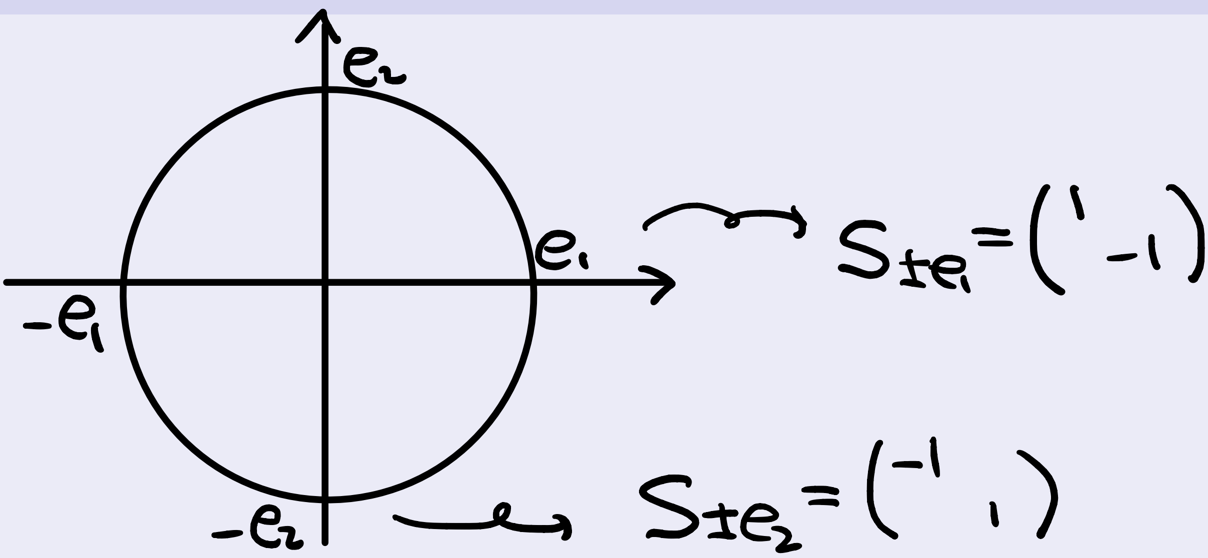
  $:\Leftrightarrow \forall x, y \in X, (x, y)$ は s-可換.

Ex.

円 S^1 に対して,

- $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ は極大 s-可換.

図



性質 - (2/3)

Prop.

- antipodal $\Rightarrow$ s-可換.

(Proof)

- (Q3) $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ を使えば良い.

逆について:

Prop.

- (Q, s) の pole が全て自明とする
  (i.e., (x, y) が pole pair $\Rightarrow$ $x = y$).
- このとき, antipodal $\Leftrightarrow$ s-可換.

(Proof)

- (Q2), (Q3) より $s_x \circ s_y \circ s_x^{-1} = s_{s_x(y)}$.
- よって, (x, y) が s-可換 pair
  iff $s_y = s_{s_x(y)}$ iff $(y, s_x(y))$ が pole pair.

性質 - (3/3)

Prop.

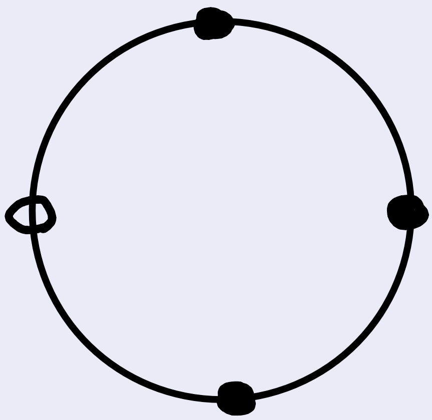
- X : 極大 s-可換 in $(Q, s) \Rightarrow X$ は部分カンドル.

Recall

- X が (Q, s) 内の **部分カンドル** $:\Leftrightarrow \forall x \in X,\ s_x^{\pm 1}(X) \subset X$.

Note

- pole, antipodal subset は (非極大でも) 部分カンドル;
- s-可換の場合には極大性が必要.
- 問題: 極大 s-可換 subset はどのようなカンドルか？



$\{e_1, \pm e_2\}$ は部分カンドルでない

分類 1 - (1/3)

Our Results

以下の中の極大 s-可換 subset を決定:

- 球面 S^n;
- 実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$;
- 二面体カンドル R_n;

Prop.

- 球面 S^n に対して, $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\}$ は極大 s-可換;
- S^n 内の極大 s-可換はこれと $\mathrm{SO}(n+1)$-合同.

(Proof)

- S^n の点対称は, $x_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x$.
- (x, y) : s-可換 pair

  iff $(s_x(y), y)$: pole pair

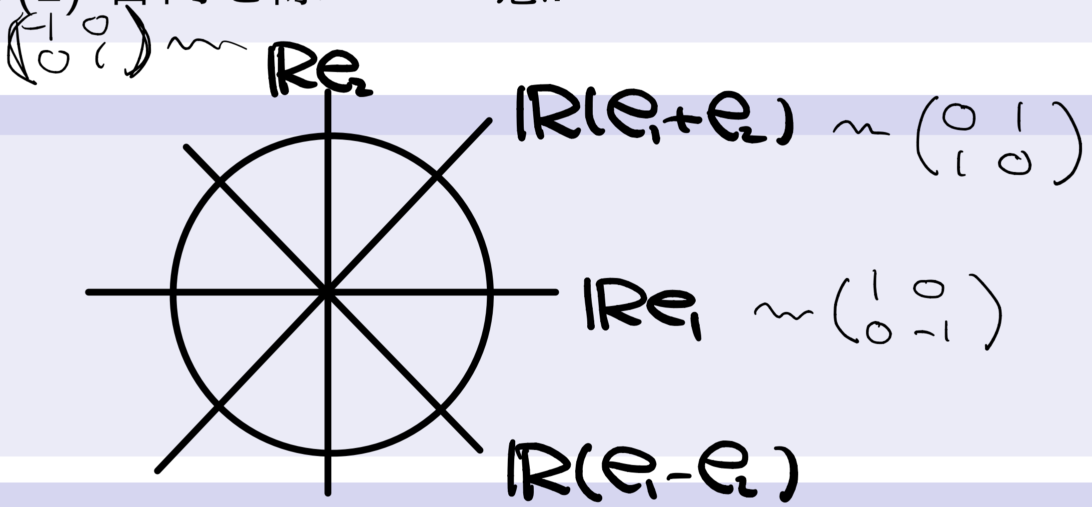
  iff $s_x(y) = \pm y$

  iff x と y は平行 or 垂直.

分類 1 - (2/3)

Prop.

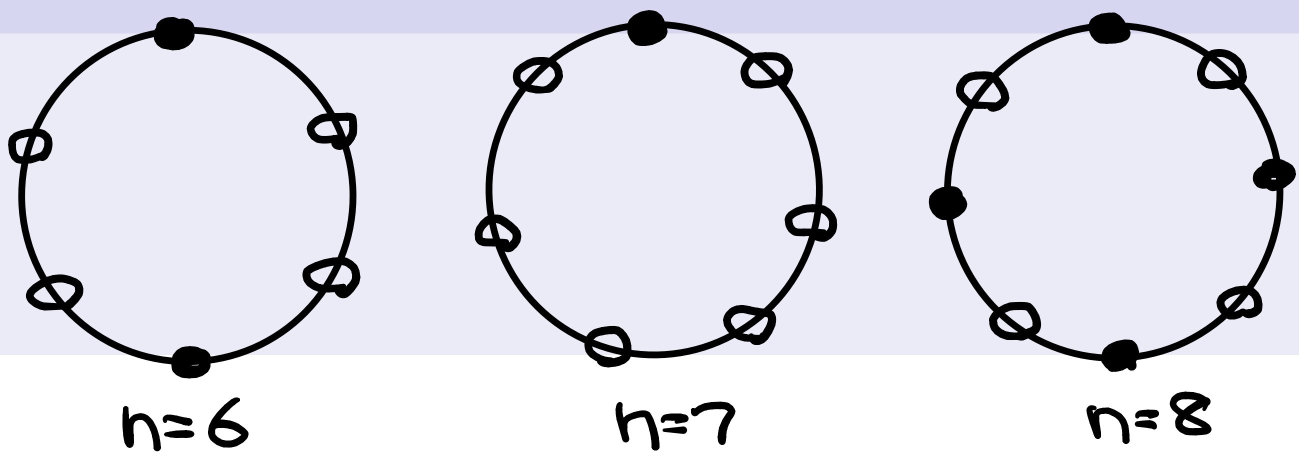
- $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ $(n \geq 2)$ のとき, s-可換ならば antipodal.
- $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ のとき, $\{\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2, \mathbb{R}(e_1 \pm e_2)\}$ は極大 s-可換; これは $\mathrm{SO}(2)$-合同を除いて一意.



Prop.

二面体カンドル R_n に対して,

- 極大 s-可換 subset が一点 iff n が奇数;
- 極大 s-可換 subset が二点 iff $n \equiv 2 \pmod 4$;
- 極大 s-可換 subset が四点 iff $n \equiv 0 \pmod 4$.



分類 1 - (3/3)

Obs.

- pole ⇒ antipodal ⇒ s-可換;
- 各 ⇒ の逆は, 成り立つ例と成り立たない例がある;
- それらの例は, リーマン対称空間でも有限カンドルでもある.

Note

- これまでの極大 s-可換 subset は,
  - 等長変換群による合同を除いて一意 (一般には嘘);
  - 等長変換群の部分群の軌道 (一般には嘘);
  - 内在的に等質 (一般には未解決).

分類 2 - (1/3)

Our Results (in progress)

以下の中の極大 s-可換 subset を決定:

- 実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)$ (ただし $n \neq 2k$);
- 有向実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ (ただし $n \neq 2k$ or k odd);
- いくつかの古典群; ...

Def. (実グラスマン)

- $G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V : \text{subspace of dim } k\}$;
- $s_V :=$ [V に関する折り返し] によって対称空間;
- $s_{(e_1,e_2)}(e_1, e_3) = (e_1, -e_3) = (e_1, e_3)$; ...

Prop

- $n \neq 2k$ のとき, $G_k(\mathbb{R}^n)$ は pole 自明;
  極大 s-可換 $=$ 極大 antipodal $= \{\mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}\}$.
- $n = 2k$ のとき, $(V, V^{\perp})$ は pole pair in $G_k(\mathbb{R}^n)$;
  極大 antipodal $= \{\mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}\} \subsetneq$ 極大 s-可換.

分類 2 - (2/3)

Def. (有向実グラスマン)

- $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V :$ oriented subspace of dim $k\}$;
- $s_V :=$ [V に関する折り返し] によって対称空間;
- $s_{(e_1,e_2)}(e_1, e_3) = (e_1, -e_3) = -(e_1, e_3) \neq (e_1, e_3)$; ...

Prop.

- $n \neq 2k$ のとき,
  - $\{\pm V\}$ は極大 pole subset;
  - $\{\pm \mathrm{span}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}\}$ は極大 s-可換;
  - これは $\mathrm{SO}(n)$-合同を除いて一意;
- $n = 2k$, k 奇数のとき,
  - 同様;
- $n = 2k$, k 偶数のとき,
  - $\{\pm V, \pm V^\perp\}$ は極大 pole subset;
  - 極大 antipodal も極大 s-可換も, 一般には未解決.

Ex.

- $G_2(\mathbb{R}^4)^\sim \cong S^2 \times S^2$ のとき,
  - $\#$(極大 pole) $= \#$(極大 antipodal) $= 2 \cdot 2 = 4$;
  - $\#\{\pm \mathrm{span}\{e_{i_1}, e_{i_2}\}\} = {}_4C_2 \cdot 2 = 12$;
  - $\#$(極大 s-可換) $= 6 \cdot 6 = 36$.

分類 2 - (3/3)

Note

- $G_k(\mathbb{R}^n)$ $(n = 2k)$ のとき,
  - 極大 antipodal は分類済み,
  - 極大 s-可換は難しい.
- $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ $(n \neq 2k)$ のとき,
  - 極大 antipodal は (一般に) 難しい;
  - 極大 s-可換は決定済み.
- $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ $(n = 2k,\ k$ 偶数$)$ のとき,
  - どちらも難しい...

まとめ - (1/3)

Prop. (まとめ)

- pole ⇒ antipodal ⇒ s-可換.
- 極大 s-可換 subset なら部分カンドル.

Propblem 1

- 既知の対称空間やカンドルについて,
  極大 pole, antipodal, s-可換 subset を決定せよ.
- それは外の対称空間やカンドルの性質を反映するか？
- 極大 s-可換 subset の "一意性" はいつ成立するか？

Propblem 2

- 極大 s-可換 subset はどんなカンドルか？
- 等質カンドル内の極大 s-可換 subset は内在的等質か？

Note

- カンドルが **等質** :⇔ カンドル自己同型群が推移的.
- antipodal は内在的に自明カンドルなので等質.

まとめ - (2/3)

Problem 3

- 極大 s-可換 subset は, (あるクラスのカンドルに対して) 極大トーラスのような役割を担うか？
- 例えば "階数" を定義するとしたら？

Problem 4 (cf. Kubo)

- 他の subset は考えられないか？
- 対蹠 pair, s-可換 pair のような二項関係があれば, ○○ subset が定義できる．他にも面白いのがあっても良さそう．

Problem 5

- 極大 antipodal subset は, 対称 R 空間に対しては一意的だが, 一般の対称空間でも一意でない．カンドルに対しても, 対称 R 空間のような "良いクラス" を定式化できるか？

まとめ - (3/3)

Ref.

- Tamaru, H.:
  Two-point homogeneous quandles with prime cardinality, J. Math. Soc. Japan (2013)
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.:
  On classification of quandles of cyclic type, Tokyo J. Math. (2016)
- Ishihara, Y., Tamaru, H.:
  Flat connected finite quandles, Proc. Amer. Math. Soc. (2016)
- Furuki, K., Tamaru, H.:
  Flat homogeneous quandles and vertex-transitive graphs, preprint
- Kubo, A., Nagashiki, M., Okuda, T., Tamaru, H.:
  A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets, preprint

Thank you!